

Doutoramento em Matemática / Doctoral Program in Mathematics DM-FCUL, 24/25

Prazos de candidatura: <https://ciencias.ulisboa.pt/pt/candidaturas-doutoramentos>

Applications deadlines: <https://ciencias.ulisboa.pt/en/applications-doctoral-programmes>

1ª fase: 1 Julho a 16 de Agosto de 2024

2ª fase: 2 de Dezembro de 2024 a 10 de Janeiro de 2025

3ª fase: A fixar, provavelmente em Abril de 2025

Plano de Estudos /Study Plan

Consultar o *flyer* disponibilizado e página web do Doutoramento em Matemática.

See the flyer and the webpage of the PhD in Mathematics:

<https://fenix.ciencias.ulisboa.pt/degrees/matematica-564500436615371>

Cursos Doutorais opcionais para 2024/25/Optional PhD Courses for 24/25

Sem 1. Computational Complexity (D) - Bruno Loff

Sem 1. Introduction to Algebraic Geometry (D) - Orlando Neto

Sem 2. Ordinary Differential Equations (D) - Carlota Rebelo

Sem 2. Functional Differential Equations (D) - Teresa Faria

Sem 2. Universal Algebra (D) - Maria João Gouveia

Sem 2. Differential and Algebraic Topology (D) - Pedro Duarte

Outros cursos opcionais (Cursos de Mestrado)/Other optional courses (Master Courses)

Sem 1. Topological Data Analysis - Florian Pausinger

Sem 1. Combinatorics - Ma. Manuel Torres & Luís Gouveia

Sem 1. Calculus of Variations - José Francisco Rodrigues

Sem 2. Computational Linear Algebra - Ma. Manuel Torres, C. Albuquerque & L. Sequeira

Sem 2. Mathematical Logics - Mário Edmundo

Temas e Orientadores propostos para Doutoramentos 24/25

PhD Themes and supervisors proposed for 24/25

À semelhança do que tem sido feito em anos anteriores, na página web do Doutoramento em Matemática será publicada uma lista de temas e orientações propostas para 24/25.

Para além do que consta dessa lista, os candidatos a doutoramento são livres de contactar directamente os professores e investigadores do Departamento de Matemática, tendo em vista uma eventual orientação de tese de doutoramento.

Para 2024/25, estarão previstas algumas as orientações em novas áreas científicas.

Orientador: **Carlos André**

Tema 1: Teorias de supercaracteres de grupos e anéis de Schur relacionados

Sabe-se que a teoria da representação de um grupo linear unipotente definido sobre um corpo finito é um problema “selvagem”. No entanto, uma certa aproximação (via teoria de supercaracteres) da teoria clássica da representação tem merecido atenção especial (e substancial) nos últimos anos, e várias teses de doutorado foram dedicadas a essas teorias de supercaracteres. Mais recentemente, surgiu algum interesse em estudar problemas clássicos no contexto de grupos lineares unipotentes p -ádicos e, mais geralmente, em grupos unipotentes definidos em campos locais auto-duais. Mais precisamente, pretendemos descrever e investigar as propriedades principais das representações suaves e unitárias e

super-representações desta família de grupos (compactos e localmente compactos) e de outros grupos relacionados. Pretendemos também obter relações com a noção de anéis de Schur (e de esquemas de decomposição) sobre grupos, que têm aplicações importantes em outras áreas como a Teoria dos Números, Estatística e Combinatória), e estender a teoria a famílias especiais de semigrupos (nomeadamente, semigrupos inversos).

Theme 1: Supercharacter theories of groups and related Schur rings

The representation theory of a linear unipotent group defined over a finite field is known to be a wild problem. However, a certain approximation (via supercharacter theories) to the classical representation theory has deserved special (and substantial) attention in recent years, and several PhD thesis were devoted to these supercharacter theories. More recently, some interest arose to study classical problems in the context of p -adic unipotent linear groups, and more generally to unipotent groups defined over self-dual local fields. More precisely, we aim to describe and investigate the main properties of smooth and unitary representations and super-representations of this family of groups (compact and locally compact) and other related groups. We also aim to obtain relations with the notion of Schur rings (and decomposition schemes) over groups which has important applications in other areas such as Number Theory, Statistics and Combinatorics), and to extend the theory to special families of semigroups (namely, inverse semigroups).

Tema 2: Combinatória de tensores simetrizados na potência tensorial dos espaços de Hilbert

Classes simétricas de tensores é um objeto de estudo de longa data em Álgebra Multilinear, e uma combinatória muito interessante (como a noção de partição-característica) surgiu em conexão com problemas como a anulação e a igualdade de tensores decomponíveis simetrizados. Foi observado recentemente que ambos os problemas têm boas interpretações no contexto de representações polinomiais do grupo linear completo de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo infinito de característica zero. O objetivo deste projeto é estender os resultados conhecidos ao contexto de uma potência tensorial de um espaço vetorial de dimensão infinita arbitrária e, em particular, à potência tensorial de um espaço de Hilbert. Também pretendemos considerar potências de tensores infinitos de espaços vetoriais, e analisar o comportamento assintótico de classes simétricas de tensores decomponíveis de “comprimento finito”.

Theme 2: Combinatorics of symmetrised tensors in the tensor power of Hilbert spaces

Symmetry classes of tensors is a long-standing object of study in Multilinear Algebra, and very interesting combinatorics (such as the notion of rank partition) arose in connection with problems

such as the annulment and the equality of symmetrised decomposable tensors. It was recently noticed that both problems have nice interpretations in the context of polynomial representations of the general linear group of a finite-dimensional vector space over an infinite field of characteristic zero. The goal of this project is to extend the known results to the context of a tensor power of an arbitrary infinite-dimensional vector space, and in particular to the tensor power of a Hilbert space. We also aim to consider infinite tensor powers of vector spaces, and to analyse the asymptotic behaviour of symmetry classes of “finite length” decomposable tensors.

Orientador: **Cristian Barbarosie**

Tema: Propagação de interface e regeneração de malha

Em otimização de forma é necessário variar a forma numa fronteira ou interface. A malha de elementos finitos deve acompanhar essa deformação. Este é um problema difícil, para o qual propomos uma abordagem baseada numa função de nível local (definida apenas numa vizinhança da interface). Em zonas longe da interface, queremos manter a malha regular (por exemplo, perfeitamente rectangular).

Theme: Interface propagation and mesh regeneration

In shape optimization it is necessary to change the shape of a boundary or interface. The surrounding finite element mesh must follow the desired deformation of the interface. This is a difficult problem,

for which we propose an approach based on a local level function (defined only in the neighbourhood of the interface). Far from the interface, we want the mesh to remain regular (e.g. perfectly rectangular).

Orientadores: **Jorge Buescu e Cristina Serpa**

Tema: Análise e Modelação Fractal para dados financeiros

Estudo das funções fractais enquanto modeladoras da realidade financeira - da perspectiva teórica às suas aplicações práticas. O estudo inclui a identificação matemática de padrões de auto-semelhanças e das respectivas medidas não-inteiras, tais como a dimensão de Hausdorff.

Theme: Fractal Analysis and Modeling for Financial Data

Study of fractal functions as models of financial reality - from the theoretical perspective to its practical applications. The study includes the mathematical identification of self-similarity patterns and their non-integer measures, such as the Hausdorff dimension.

Orientador: **Jean-Baptiste Casteras**

Theme 1: Bifurcation analysis of a second order elliptic equation with Moser-Trudinger nonlinearity.

It is well-known that, for any bounded open subset of \mathbb{R}^2 , there is no Sobolev embedding between $H^1(\Omega)$ and L^∞ . However, it is possible to gain some exponential integrability, this is the so-called Moser-Trudinger inequality. We propose to study an elliptic PDE involving this Moser-Trudinger nonlinearity and Neumann boundary condition. After a bifurcation analysis, we plan to construct singular solutions in dimension 2 and also in higher dimensions. More precisely, we will focus on multi-layer solutions and blowing-up solutions.

Tema 1: Análise de bifurcação de uma equação elíptica de segunda ordem com não linearidade de Moser-Trudinger.

É bem conhecido que, para qualquer subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^2 , não há incorporação de Sobolev entre $H^1(\Omega)$ e L^∞ . Porém, é possível obter alguma integrabilidade exponencial, esta é a chamada desigualdade de Moser-Trudinger. Propomos estudar uma EDP elíptica envolvendo esta não-linearidade de Moser-Trudinger e condição de contorno de Neumann. Após uma análise de bifurcação, planeamos construir soluções singulares na dimensão 2 e também em dimensões superiores. Mais precisamente, focar-nos-emos em soluções multi-camadas e *blowing-up* soluções.

Theme 2: On a fourth order SPDE.

Following the works of Martin Hairer on the regularity structure of parabolic stochastic PDEs, the analysis of dispersive stochastic PDEs is becoming very popular these days. As for parabolic equations, the main difficulty is to make sense of the term involving noise which is extremely irregular. We propose to study a fourth order Schrödinger equation with a multiplicative white noise.

Tema 2: Sobre uma EDP estocástica de quarta ordem.

Seguindo os trabalhos de Martin Hairer sobre a estrutura de regularidade de EDPs estocásticas parabólicas, a análise de EDPs estocásticas dispersivas é um tópico muito popular atualmente. Quanto às equações parabólicas, a principal dificuldade é dar sentido ao termo que envolve ruído, que é extremamente irregular. Propomos estudar uma equação de Schrödinger de quarta ordem com ruído branco multiplicativo.

Theme 3: Soliton resolution conjecture for the critical nonlinear Schrödinger equation.

The soliton resolution conjecture asserts that any solution of the critical Schrödinger equation should behave asymptotically as a sum of bubbles and a radiation term. This conjecture is totally open for the Schrödinger equation but it was very recently proved for the wave equation. To make some progress on it, we propose to construct blowing-up solutions in finite and infinite time.

Tema 3: Conjectura de resolução Soliton para a equação de Schrödinger não linear crítica.

A conjectura da resolução soliton afirma que qualquer solução da equação crítica de Schrödinger deve se comportar assintoticamente como uma soma de bolhas e um termo de radiação. Esta conjectura está

totalmente em aberto para a equação de Schrödinger, mas foi recentemente provada para a equação de onda. Para fazer algum progresso nisso, propomos construir soluções explosivas em tempo finito e infinito.

Orientador: **Giordano Cotti**

Theme 1: Quantum differential equations for del Pezzo surfaces

Quantum differential equations (QDEs) are a rich invariant associated with smooth projective varieties. The QDE of a variety X is an ordinary differential equation in the complex domain which encodes information of the enumerative geometry of X , more precisely its Gromov-Witten theory. In the recent years, the QDEs have been the object of several studies, leading to the formulation of several important open conjectures. For example, it is conjectured that the asymptotic and monodromy of the solutions of the QDE of the variety X conjecturally rules also the topology and complex geometry of X . The aim of this PhD project is to explore and make explicit these conjectural relations in low dimensional cases, namely in the case of del Pezzo surfaces.

Orientadores: **Giordano Cotti and Giulio Ruzza**

Theme 2: Givental group action on moduli of Frobenius manifolds

Cohomological Field Theories, invented by Kontsevich and Manin, are a cornerstone of modern Enumerative Geometry and Mathematical Physics. They find their simplest geometric expression in the Frobenius manifold structure, defined by any solution to the Witten--Dijkgraaf--Verlinde--Verlinde overdetermined system of PDEs. These theories find applications in Singularity Theory, Symplectic Topology, and Algebraic Geometry. The Givental group allows one to reconstruct a Cohomological Field Theory from simpler data, thus serving as a crucial tool for their study. The project aims to make explicit the Givental group action solely on the moduli data of simpler Frobenius structures.

Orientador: **Pedro Miguel Duarte**

Tema: Regularity of Lyapunov exponents

This is an active research topic, with many interesting open problems, at the cross road of several mathematical fields like dynamical systems, ergodic theory, mathematical physics, number theory, probability and geometric group theory. The Lyapunov exponents measure the growth rate of linear cocycles, an important class of dynamical systems in ergodic theory with ubiquitous applications to Mathematics and Science. The general aim is to understand the catalysts and obstructions to quantitative regularity of the Lyapunov exponents as functions of the underlying dynamical system.

Theme: Regularidade dos Expoentes de Lyapunov

Trata-se dum tópico de investigação bastante activo com muitos problemas abertos interessantes no cruzamento de várias áreas matemáticas como os sistemas dinâmicos, a teoria ergódica, a física matemática, a teoria dos números, as probabilidades e a teoria geométrica dos grupos. Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de crescimento dos cociclos lineares, uma importante classe de sistemas dinâmicos em teoria ergódica com aplicações ubíquas em Matemática e Ciência. O objetivo geral é entender os catalisadores e as obstruções à regularidade quantitativa dos expoentes de Lyapunov como funções do sistema dinâmico subjacente.

Orientador: **Teresa Faria**

Tema: Dinâmica global de equações diferenciais com atrasos não autónomas

Equações diferenciais com atrasos têm sido usadas em dinâmica de populações, redes neuronais, modelação de doenças, teoria de controlo e em muitas outras áreas científicas. A investigação foca-se em alguns aspectos do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais com atrasos não autónomas usadas como modelos em biomatemática, nomeadamente a sua persistência e permanência, a existência e estabilidade de soluções periódicas.

Theme: Global dynamics for non-autonomous delay differential equations

Delay differential equations (DDEs) have been extensively used in population dynamics, neural networks, disease modelling, control theory and in a variety of other scientific fields. The research

focuses on some aspects of the asymptotic behaviour of solutions of non- autonomous DDEs used as models in mathematical biology, namely the study of their persistence and permanence, existence and stability of periodic solutions.

Orientador: **Carlos Florentino**

Theme: Cohomological stability for character varieties

Description: Character varieties are moduli spaces of representations of finitely presented groups into complex Lie groups, with a rich geometry and topology, and a number of results have been obtained recently, especially in the cases of surface groups, free groups (abelian or not), and knot/link groups. Being closely related to configuration spaces, which have recently been shown to satisfy some form of cohomological stability, the goal is to prove conjectural cohomological stability properties for character varieties, at least in the most studied cases.

Tema: Estabilidade cohomológica para variedades de caracteres

Descrição: Variedades de caracteres são espaços de moduli de representações de grupos finitamente apresentados em grupos de Lie complexos, com interessante geometria e topologia, com vários resultados obtidos recentemente, especialmente nos casos de grupos de superfície, grupos livres (abelianos ou não) e grupos de nós/links. Estando intimamente relacionados com espaços de configuração, que recentemente se mostrou que satisfazem certas formas de estabilidade cohomológica, o objetivo é provar propriedades de estabilidade cohomológica conjecturais para variedades de caracteres, pelo menos nos casos mais estudados.

Orientador: **Mário Edmundo**

Theme: Model Theory

Model theory is a very active and exciting area of Mathematical Logic with applications to many famous conjectures (geometric Mordell-Lang, Andre-Oort... to mention some). The analytic part of model theory, namely o-minimality, has connections to semi-algebraic geometry, sub-analytic geometry and even to Berkovich's non-archimedean setting. There are still many interesting problems that can be studied both from the theoretical side or aiming towards applications.

Orientador: **Bruno Loff**

Theme: The Hardness of Finding Good Algorithms

We are broadly interested in answering the following question:

Fix some computational model. Now suppose we are given a full description of a computational problem, and wish to find an efficient algorithm for solving it, or at least to estimate its computational complexity, in the said model... How hard is this algorithm-finding/complexity-estimation task?

We are interested in answering this question for different computational models, and especially interested in understanding when is the above task NP-hard?

We wish to study this question for decision trees, communication protocols, Boolean circuits and formulae, data structure problems, algebraic models, streaming models, various combinatorial complexity measures of complexity such as certificate complexity, partition number, etc, etc.

We will also work in various follow-up questions that arose when thinking about these things. And, more broadly, we are interested in proving unconditional lower-bounds of any kind, and especially in understanding the computational complexity (the "naturalness") of the hardness-implying properties used in such proofs.

Tema: A Dificuldade de Encontrar Bons Algoritmos

Estamos interessados em responder à seguinte questão:

Dado um modelo computacional, suponhamos que temos uma descrição completa de um problema computacional e desejamos encontrar um algoritmo eficiente para resolvê-lo, ou pelo menos aproximar sua complexidade computacional nesse modelo... Quão difícil é essa tarefa de encontrar algoritmos/aproximar complexidade?

Estamos interessados em responder a essa pergunta para diferentes modelos computacionais e, especialmente, em compreender quando essa tarefa é NP-difícil.

Desejamos estudar essa questão para árvores de decisão, protocolos de comunicação, circuitos e fórmulas booleanos, problemas de estruturas de dados, modelos algébricos, modelos de streaming e várias medidas de complexidade combinatória, como complexidade de certificado, número de partições, etc.

Também abordaremos várias perguntas que surgiram ao pensar sobre esses assuntos. Além disso, estamos interessados em provar lower-bounds incondicionais de qualquer tipo e, especialmente, em compreender a complexidade computacional (a “naturalidade”) das propriedades que implicam em dificuldade usadas em tais provas.

Orientador: Giulio Ruzza

Theme: ASYMPTOTIC PROBLEMS IN INTEGRABLE EQUATIONS AND DETERMINANTAL POINT PROCESSES

Determinantal point processes are stochastic processes in which correlation functions have a determinantal structure. They appear in a wide range of exactly solvable models, for example random matrix theory and random tiling models. Recently, their multiplicative statistics have been subject of interest owing to their connections with various different models, such as the Kardar--Parisi--Zhang equation, or polynuclear growth models. The goal of the project is to explore and establish connections to integrable equations and to prove asymptotic properties for multiplicative statistics of some determinantal point processes (both continuous and discrete).

Orientador: Nicolas van Goethem

Theme 1: Study of a problem in hydrodynamics : variants of Navier-Stokes

We start our study with the paper G. Prouse, On a Navier-Stokes type equation, in: Nonlinear analysis. A tribute in honour of Giovanni Prodi. Pisa: Scuola Normale Superiore. 289– 305 (1991), where existence and uniqueness is proved for a variant of Navier-Stokes. We will investigate the mathematical and physical properties of such a model in the classical deterministic setting. Further study of a Stochastic version will also be explored. This topic requires studies both in Mathematics (PDE) and in Physics and Fluid mechanics.

Internal collaborations with researchers of CEMS.UL working on mathematical hydrodynamics will be encouraged.

Theme 2: Study of deformations in elastic bodies: an approach via the incompatibility operator

We study elasto-plastic deformations relying on the incompatibility operator (a double curl acting on the deformation tensor). This is a new, multi-disciplinary, approach requiring to work in Analysis (PDE), Numerical analysis, Scientific computations and Solid mechanics. The work will start by studying the paper S. Amstutz and N. Van Goethem, A second-order model of small-strain incompatible elasticity, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 29(3), pp. 503-530, (2024), and all related publications. Collaborators in Spain, France and USA are an option.

Theme 3: Study of functions with A-bounded variation: application to bounded deviatoric deformations and plasticity

We study generic classes of PDE where some differential operators take values in a measure space, and analyze the fine properties of the solutions. As an application we consider a space, of functions of bounded deviatoric deformations, which is used in Elasto-plasticity, and consider problems in homogenization, such as done in M. Carocchia, M. Focardi, N. Van Goethem, On integral representation of local energy functionals on BD, *SIAM J. Math. Anal.*, 52(4), 4022-4067.

This topic required study in Analysis, PDE and Calculus of variations, and some knowledge in Mechanics. Collaborations in Italy, France and Belgium are an option.