J. SEBASTIÃO E SILVA

# GUIA
## PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

J. SEBASTIÃO E SILVA

# GUIA
## PARA A UTILIZAÇÃO
## DO
# COMPÊNDIO
## DE
# MATEMÁTICA

**(2.º e 3.º VOLUMES)**

CURSO COMPLEMENTAR
DO ENSINO SECUNDÁRIO

1977

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA
Av. Miguel Bombarda, 20 — Lisboa

## ADVERTÊNCIA PRÉVIA

*O* Compêndio de Matemática *é destinado a servir, não só como auxiliar de estudo para o aluno, mas ainda como complemento de formação para o professor. Daí o desenvolvimento e o pormenor com que foi escrito. Cabe, pois, ao critério e ao bom senso do professor dosear a densidade do ensino com base no* Compêndio.

*Este, por outro lado, não contém todos os assuntos a desenvolver nas turmas experimentais do 7.º ano. Em alguns casos será necessário recorrer aos livros adoptados, tal como se indica no presente* Guia *e no próprio* Compêndio.

*O texto deste* Guia *foi utilizado no âmbito de uma experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação Nacional em colaboração com a O.C.D.E. (Projecto Especial STP-4/SP). Nesta experiência estiveram envolvidos alunos dos antigos 6.º e 7.º anos do ensino liceal (idades entre 15 e 17 anos).*

## CONSIDERAÇÕES DE ORDEM GERAL

Convém chamar a atenção para alguns pontos que já foram focados no *Guia* anterior, mas que importa salientar sob novos aspectos.

No que se refere à questão crucial dos exercícios, nunca é de mais insistir nas seguintes recomendações:

1) *É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino.*

2) *É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples.*

3) *A melhor maneira de memorizar fórmulas e teoremas* (*quando for necessário*) *é aprender a deduzir sem hesitação essas fórmulas e esses teoremas, em vez de resolver listas fastidiosas de exercícios, como pretexto, tantas vezes forçado, para pôr à prova tais conhecimentos. O professor deve incitar os alunos a serem desembaraçados nas deduções, tanto como nos cálculos.*

Não quer isto dizer, de modo nenhum, que não seja indispensável resolver *bons* exercícios, para esclarecimento de diversos assuntos e para a aquisição de técnicas úteis e necessárias. O que se impõe é não cair no excesso — *a obsessão do exercício* — e adoptar um critério de escolha que elimine exercícios supérfluos e exercícios estapafúrdios, que tenham como equivalente, no ensino das línguas vivas, a retroversão de frases deste género:

'As sobrinhas dos capitães brincavam no jardim com as netas dos juízes'.

Nem sequer o ridículo tem conseguido vencer estas e outras incongruências, que certamente não contribuem para estimular o bom senso e o bom gosto do aluno.

É mais proveitoso reflectir várias vezes sobre um mesmo exercício *que tenha interesse,* do que resolver vários exercícios diferentes, *que não tenham interesse nenhum.*

No entanto, é essencial que o aluno consiga, ele próprio, *sem ajuda,* resolver exercícios pela primeira vez. Todo o problema novo, com interesse, tem uma *ideia-chave,* um *abre-te Sésamo* que ilumina o espírito de súbita alegria: a clássica *ideia luminosa* que faz gritar 'Eureka!'. Ora, é esse momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: só por essa porta se entra no segredo da matemática, se descobrem os seus tesouros, se aprendem as suas recônditas harmonias. Vistos por esse mágico prisma, todos os assuntos, desde os mais modestos, se transformam como por encanto, ganhando vida e beleza. Diga-se a verdade: é de vida, é de alma, que o ensino está necessitado — porque tudo nele se reduz afinal a... *matéria que vem para exame.*

Ensino vital de ideias, eis o que se impõe – em vez de exposição mecânica de matérias.

Entre os exercícios que podem ter mais interesse, figuram aqueles que se aplicam a *situações reais, concretas.* O nosso ensino tradicional não enferma unicamente de fraca (e quantas vezes nula) insistência em demonstrações, e de insuficiente rigor lógico: peca também por ausência de contacto com o húmus da intuição e com a realidadde concreta. Ora, um dos pontos assentes em reuniões internacionais de professores, promovidas pela O.C.D.E., é que o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um *professor de matematização,* isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos.

É preciso não esquecer que o extremo rigor lógico, em vez de formativo, pode tornar-se *perigosamente deformador,* criando inibições por vezes insuperáveis – se não for precedido de uma boa motivação intuitivo-concreta e equilibrado com o referido processo de matematização. A crítica dos fundamentos da matemática, inciada no século passado, conduziu a esse grau de rigor lógico, cuja necessidade se impunha; mas criou ao mesmo tempo um estado de espírito favorável a atitudes rígidas, demasiado platónicas. Seguiu-se uma reacção, por vezes também excessiva, mas em parte salutar, dos chamados 'matemáticos empiristas'. Neste sentido, são dignas de reflexão as seguintes palavras de Guido Castelnuovo, proferidas em 1912, num congresso de professores em Génova:

'Nós ensinamos a desconfiar da aproximação, que é realidade, para adorar o ídolo de uma perfeição, que é ilusória. Nós representamos o universo como um edifício, cujas linhas têm perfeição geométrica, e nos parecem desfiguradas e enevoadas, apenas por causa da imprecisão dos nossos sentidos, quando, pelo contrário, deveríamos incitar os alunos a reconhecerem que as formas incertas reveladas pelos sentidos constituem a única realidade acessível – realidade que, para satisfazer certas exigências do nosso espírito, substituímos por uma precisão ideal [...]. Não há melhor maneira de alcançar o objectivo [do ensino científico] do que conjugar a cada passo a teoria com a experiência, a ciência com a aplicação [...]'.

Esta atitude pode parecer anti-racionalista; na verdade, só o é na medida em que se opõe a um platonismo ultrapassado. Mas pode talvez notar-se um excesso de zelo utilitarista nas palavras seguintes, relativas aos deveres do professor para com os alunos:

'São-nos confiados pelos pais, para que façamos deles homens aptos a compreender a vida das nações modernas e a participar nessa vida. Se nós não temos em consideração estas exigências; se, por amor da cultura, sufocamos nos alunos o sentido prático e o espírito de iniciativa, estamos a faltar ao maior dos nossos deveres'.

Esta crítica é justa apenas em relação a *certo tipo de cultura*. Embora seja vago o significado da palavra 'cultura', podemos dizer que a *cultura científica* resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática. E, mesmo quando à *cultura geral*, que inclui os aspectos filosófico, literário, artístico e humano, tem-se verificado que a sua ausência prejudica seriamente a formação de bons técnicos e de bons cientistas([1]). E mais ainda a de bons dirigentes.

O que é preciso é não confundir *cultura* com *erudição* e sobretudo com o *enciclopedismo desconexo*, imensa manta de retalhos mal cerzidos, que vão desde as guerras púnicas até ao sistema nervoso da mosca. É esse, a bem dizer, o tipo de cultura que tende a produzir o ensino tradicional, baseado num sistema de exames que só permite apreciar memorizações e automatismos superficiais, mais ou menos próximos do psitacismo.

Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno *hábitos* e *automatismos úteis*, como, por exemplo, os

---

([1]) Castelnuovo foi ele mesmo um exemplo do cientista culto, na mais elevada acepção da palavra.

automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*.

É certamente útil saber falar com fluência línguas estrangeiras ou tocar piano – como é útil saber nadar, escrever à máquina, conduzir automóvel ou jogar futebol. Mas também estas *prendas* (como se dizia antigamente) são apenas meios e não fins – a não ser que se tenha em vista escolher uma dessas actividades como profissão (mesmo assim, será um *meio de ganhar a vida*).

E note-se, de passagem, que a melhor maneira de ensinar a ler ou a dominar uma língua estrangeira não é obrigar a ler trechos sem qualquer interesse ou a fazer exercícios absurdos.

Os referidos automatismos são, pois, meios para atingir certos fins: são precisamente *meios de acesso à cultura*. A sua finalidade é a de aumentar o poder e a liberdade do *verdadeiro pensamento*, que não é substituível pela máquina e sem o qual o homem se reduz a *perigoso escravo das máquinas*, como se tem observado infelizmente.

Um ensino que não estimule o espírito e que, pelo contrário, o obstrua com as clássicas *matérias para exame*, só contribui para produzir máquinas em vez de homens. E não é assim que se curam os males de que está sofrendo o mundo.

Na ADVERTÊNCIA do *Compêndio de Matemática, 2.° volume*, propõe-se que os assuntos dos dois volumes do 7.° ano sejam tratados em *paralelo*, no regime de bifurcação, com três horas por semana destinadas a um dos volumes, e três horas por semana ao outro. O objectivo é evitar que os assuntos tratados num dos volumes sejam relegados em bloco para a última parte do ano, em que a receptividade dos alunos é sempre menor, por razões óbvias.

Porém, o estudo dos assuntos do *Compêndio de Matemática, 3.° volume*, terá de ser precedido de uma introdução à trigonometria.

Convém, pois, começar por indicações relativas à maneira de fazer essa introdução, tirando partido do *Compêndio de Trigonometria* adoptado.

Mas impõem-se, antes disso, algumas considerações de ordem geral relativas a este assunto.

O ensino tradicional da trigonometria nos liceus tem uma amplitude e uma orientação que já não se justificam nos tempos actuais. Há assuntos como, por exemplo, a resolução de triângulos obliquângulos, que só virão no futuro interessar a uma fraca minoria de alunos. Além disso, tais assuntos têm modesto valor formativo, comparados com outros, cuja ausência se faz sentir cada vez mais.

Acresce ainda a circunstância de ser fácil encontrar as fórmulas usuais de resolução de triângulos (quer planos quer esféricos) em qualquer boa tábua de logaritmos. Para que é preciso então estudá-las, se há tantos outros assuntos de maior interesse? Basta pois saber utilizá-las. Mas isso qualquer aluno dotado de inteligência mediana deve estar em condições de aprender por si só, desde que esteja interessado no assunto ([1]). Se o não conseguir, é porque o ensino não chegou a conferir-lhe aquele grau de autonomia mental que se requer de um aluno do 7.º ano: *é porque falhou o ensino.*

Resta o problema das tábuas. Existem tabelas de fórmulas (chamadas 'formulários'), como existem tabelas numéricas, listas telefónicas, catálogos ou enciclopédias. A finalidade é sempre a mesma: evitar um esforço inútil e mesmo incomportável de memória, dando maior grau de liberdade ao pensamento.

Sem dúvida, há fórmulas e tabelas numéricas que o aluno deverá sempre ter presentes, atendendo à frequência com que é preciso utilizá-las: por exemplo, as fórmulas trigonométricas de adição de ângu-

---

([1]) Pode mesmo, se tiver curiosidade, procurar saber como se deduzem essas fórmulas.

los e as tabuadas das operações elementares da aritmética. É tudo, afinal, uma questão de medida e de bom senso.

Quanto aos dois teoremas em que se baseia habitualmente a dedução das fórmulas de resolução de triângulos obliquângulos – o teorema dos senos e o teorema dos co-senos (ou de Carnot) – tem algum interesse fazer a sua dedução no curso piloto. Aliás, o último teorema deverá ficar ligado à noção de produto interno de dois vectores, que tem adquirido cada vez maior importância em matemática, quer pura quer aplicada.

# I

# INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

1. A introdução à trigonometria *poderá* e *deverá* ser feita com motivação concreta, apta a despertar interesse suficiente no espírito do aluno ([1]).

Comecemos pelo problema de tipo clássico:

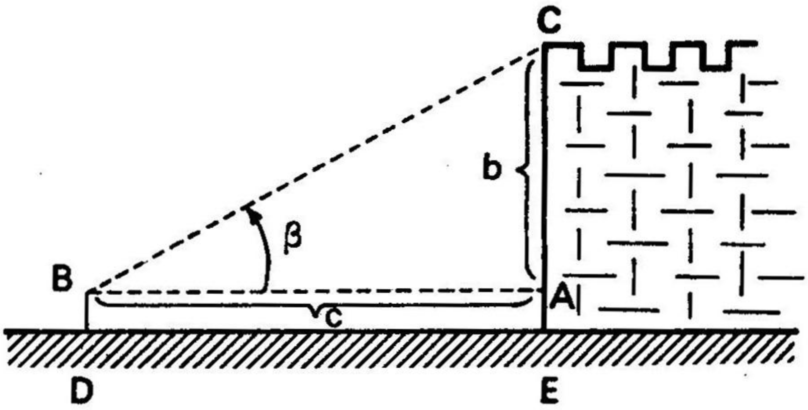
*Calcular a altura de uma torre por meio de medições efectuadas no solo (sem subir à torre).*

Pede-se aqui algo que pode parecer impossível a uma pessoa que não tenha formação matemática. A beleza do assunto está precisamente nisto: o impossível torna-se possível por dedução matemática, baseada nos axiomas da geometria euclidiana (induzidos da experiência). Eis, pois, aqui um exemplo simples do êxito do método matemático aplicado à natureza. Aliás, o aluno já deve saber

---

([1]) Cf. *Algebra e Trigonometria*, para os IV, V e VI anos liceais, de Francisco Dias Agudo (1938). A introdução à trigonometria adoptada nesse livro é em parte semelhante à que vamos aqui preconizar, mas, que, como é de ver, não se coaduna com a orientação estatuída pelo actual programa clássico.

neste momento como se resolve o problema por semelhança de triângulos.

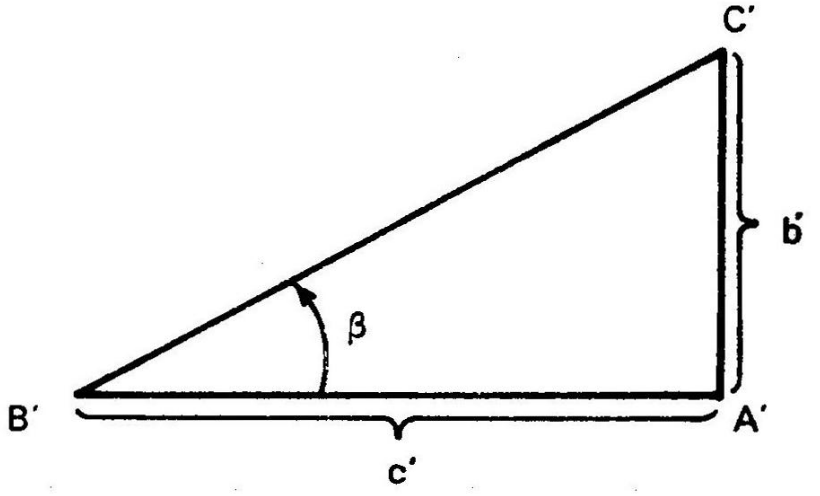



Para simplificar a questão, suponhamos que o terreno junto à torre é plano e horizontal (caso da figura). Com um instrumento do género do teodolito, colocado em B, poderá medir-se o ângulo A$\hat{B}$C, sendo A um ponto da torre situado no plano de nível de B e sendo C um ponto do cimo da torre situado na vertical de A. Seja β a medida desse ângulo. Por outro lado, seja c a medida do lado $\overline{AB}$ e seja d a medida de $\overline{BD}$ (distância de B ao solo) igual à de $\overline{AE}$ em virtude da hipótese feita sobre o terreno.

Resta-nos pois determinar a medida, b, de $\overline{AC}$, visto que a altura, h, da torre será:

$$h = b + d$$

Ora, a medida *b* pode ser determinada, *indirectamente,* com os elementos de que dispomos, e o próprio aluno, com os conhecimentos adquiridos no 2.º ciclo sobre semelhança de triângulos, já está em condições de dizer como se pode resolver o problema graficamente:




Começa-se por desenhar, num papel ou no próprio terreno, um triângulo rectângulo [A'B'C'], que verifique a seguinte condição:

$$A'\hat{B}'C' \cong A\hat{B}C \text{ (1)}$$

Os ângulos $A'\hat{B}'C'$ e $A\hat{B}C$ têm, portanto, a mesma medida β (que podemos supor expressa em graus ou em graus e minutos).

O cateto A'B' pode ser traçado *arbitrariamente*. Sabe-se como é possível depois traçar o outro cateto, A'C', e a hipotenusa, B'C'.

Designemos por b' e c', respectivamente, as medidas dos catetes A'C' e A'B'. *É claro que estas medidas podem ser determinadas directamente no papel (ou no terreno)*..A partir deste momento, pode-

---

(1) Como foi anteriormente estabelecido, o sinal $\cong$ lê-se *'geometricamente igual a'*. Se não há perigo de confusão, pode substituir-se pelo sinal =, e ler-se *'igual a'*, embora isto seja um abuso de linguagem.

mos calcular a medida *b* procurada, atendendo à semelhança dos triângulos [ABC] e [A'B'C']. Tem-se, com efeito

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

donde

$$b = \frac{b'}{c'}\,c$$

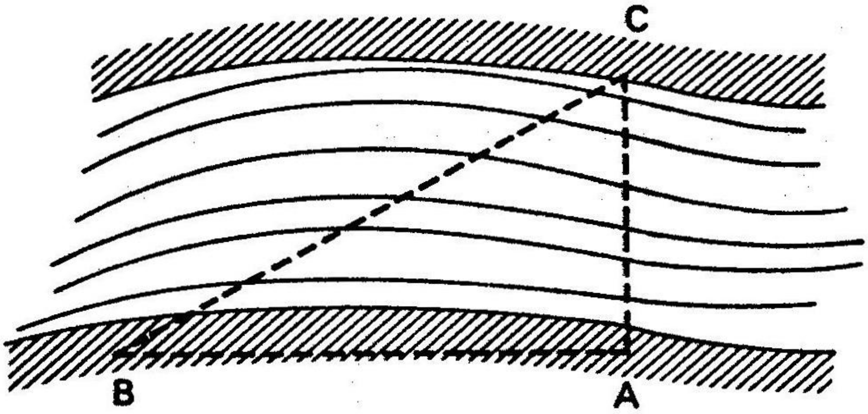
(Entre as célebres obras de ficção científica de Júlio Verne, há uma, particularmente interessante, que vem muito a propósito citar aqui: «A ILHA MISTERIOSA». Nesta obra, o autor descreve como um dos personagens – o Eng. Smith – consegue calcular a altura a que se encontra uma gruta escavada numa rocha junto ao mar, por meio de medições efectuadas na praia.)

Convirá também recordar o processo, mais rudimentar, que consiste em medir as sombras projectadas no solo pela torre e por uma haste vertical, bem como a altura da haste. Aliás, este processo dá aproximação suficiente para diversos fins análogos: por exemplo, para achar a altura de uma árvore. Supondo, por exemplo, que a haste, a sombra da haste e a sombra da árvore medem respectivamente 1m, 1,6 m e 7,4 m, a altura da árvore será:

$$(1) \qquad h = \frac{1}{1{,}6} \times 7{,}4 \approx 4{,}6 \text{ (metros)}$$

Segundo se diz, foi Tales de Milete (600 a.C.) quem primeiro calculou a altura das pirâmides do Egipto, utilizando o método da sombra. A este facto se refere Plutarco, historiógrafo grego do século I a. C., nos seguintes termos[1]:

'Eu admiro-vos sobretudo porque, colocando o vosso bastão na extremidade da sombra de uma pirâmide, formastes com os raios do sol dois triângulos, e demonstrastes que a altura da pirâmide está para a altura do bastão, como a sombra da pirâmide para a sombra do bastão'.




Um problema ainda do mesmo tipo, que se pode resolver pelo referido processo gráfico (mas não pelo processo da sombra), é o que consiste em achar a largura de um rio por meio de medições efectuadas numa das margens (sem atravessar o rio).

Neste momento, pode-se sugerir ao aluno que, por processos análogos, será possível determinar a distância da Terra à Lua, da Terra ao Sol, etc. Mas, neste caso, para obter resultados satisfatórios, as medições dos ângulos terão de ser bastante mais rigorosas, exigindo aproximação até aos segundos. Então, o *método gráfico* terá de ser abandonado, por dar aproximação insuficiente — e é aqui que

(1) Cf. Emma Castelnuovo, 'Geometria Intuitiva', para a Escola Média (correspondente ao 1.º ciclo em Portugal, com mais um ano).

se torna necessário recorrer ao *método numérico* (ou *analítico*), fornecido pela trigonometria.

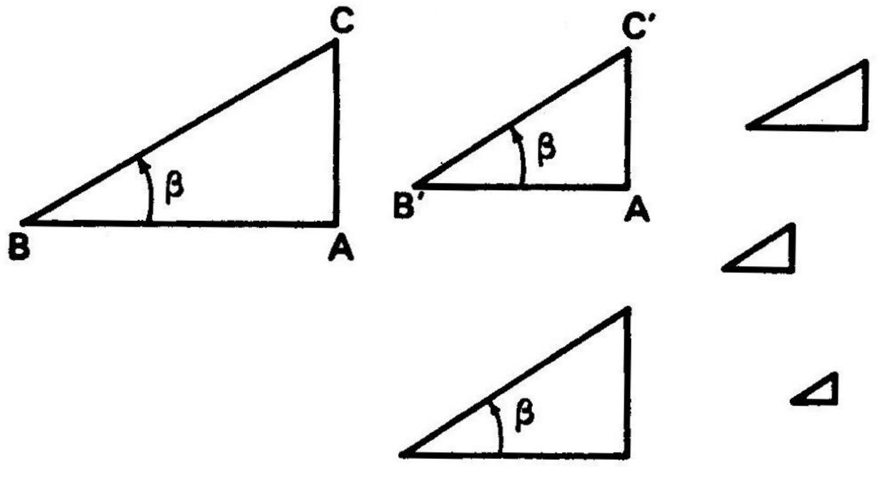
2. Começa-se por fazer notar ao aluno o seguinte facto fundamental:

*A razão* b/c *entre os catetos* $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$ *dum triângulo rectângulo* [ABC] *depende univocamente da medida* β *do ângulo agudo* $A\hat{B}C$.

Mais precisamente:

*Qualquer que seja o triângulo* [A'B'C'], *rectângulo em* A', *tal que* $A'\hat{B}'C' \cong A\hat{B}C$, *a razão entre os catetos* A'C' *e* A'B' *é constante, isto é, tem-se*:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$




Ora bem, chama-se *tangente do ângulo* β e designa-se abreviadamente por

tang β    ou por    tg β

essa razão constante entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de que se trata (depois se verá por que se chama 'tangente' a esta razão) ([1]).

Assim, no exemplo anterior da sombra da árvore, a tangente do ângulo $\beta$ oposto ao cateto representado pela haste ou pela árvore será:

$$\text{tang } \beta = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

e, segundo (1), *a altura da árvore é igual ao produto da tangente desse ângulo pelo comprimento da sombra da árvore.*

Se, por acaso, a haste e a sua sombra tivessem comprimentos iguais, o problema simplificava-se: a altura da árvore seria igual ao comprimento da sua sombra. Neste caso, em que os catetos são iguais, o ângulo é de 45° e vê-se deste modo que

$$\text{tang } 45^\circ = 1$$

Fica, portanto, assim definida uma função que faz corresponder a cada ângulo $\alpha$ *agudo* (isto é, tal que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) um determinado número real, que se representa por tang $\alpha$ ou simplesmente por tg $\alpha$.

---

([1]) Como se verá mais tarde em pormenor, há que distinguir três espécies de entidades: *ângulo, grandeza de ângulo* (classe de equivalência de todos os ângulos geometricamente iguais ao ângulo dado) e *medida de ângulo* (número que define a grandeza do ângulo, relativamente à unidade adoptada). Por exemplo, uma coisa é um *ângulo de* 30 *graus,* outra coisa é 30 *graus* (grandeza desse ângulo) e outra coisa ainda é o número 30 (medida dessa grandeza tomando para unidade o grau). No entanto, por *abuso cómodo de linguagem,* usa-se muitas vezes a palavra 'ângulo' para qualquer desses conceitos distintos.

Pergunte-se, agora, aos alunos:

*Como determinar a tangente de um dado ângulo agudo, por exemplo, de 23°?*

Os alunos responderão, naturalmente, que basta construir um triângulo rectângulo com um ângulo de 23° e achar a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente (depois de os medir).

Será então conveniente que os alunos façam isto efectivamente e que resolvam também, graficamente, problemas de tipo inverso, como por exemplo o seguinte:

*Achar a medida de um ângulo agudo cuja tangente seja 2,35 (usando um transferidor). Quantos ângulos agudos existem nestas condições?*

Põe-se, agora, a seguinte questão:

*Dado um ângulo agudo qualquer (por exemplo de 64°) será sempre possível calcular, com a aproximação que se queira, a tangente desse ângulo?*

A resposta dos alunos será certamente negativa.

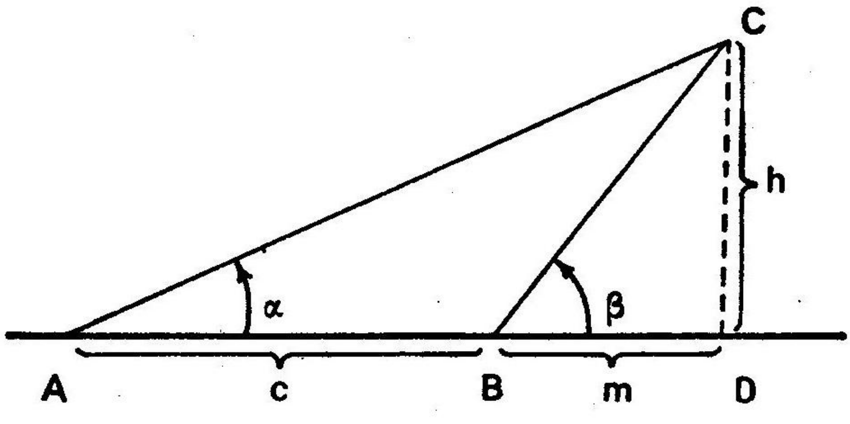
*Como calcular então, com a aproximação que se queira (por exemplo a menos de $10^{-6}$), a tangente de um dado ângulo?*

Só mais tarde serão estudados processos de cálculo para esse fim e só então se poderá dizer que a *função tangente está efectivamente definida.*

Chegou, agora, o momento de dizer ao aluno que se encontram já construídas por tais processos *tabelas numéricas,* que fornecem, com certa aproximação (por exemplo a menos de $10^{-5}$), as tangentes dos ângulos agudos de grau em grau, de meio grau em meio grau, de minuto em minuto, etc. E convirá então resolver alguns problemas simples com tais tabelas (de funções naturais), escolhendo o grau de aproximação conveniente em cada caso concreto: seria, por exemplo, ridículo exigir aproximação até aos milímetros na altura duma torre ou duma árvore; em qualquer dos casos um centímetro a mais ou a menos não tem importância.

Convirá, agora, informar o aluno de que a sua régua de cálculo lhe permite resolver rapidamente muitos destes problemas, com aproximação suficiente, e *adestrá-los no uso da régua para esse fim.*

3. Posto isto, é conveniente passar à resolução de problemas menos triviais, por exemplo o seguinte:




*Calcular a altura de uma torre, por meio de medições efectuadas no solo, em plano horizontal, supondo que a base da torre é visível, mas não acessível para medições.*

Supondo ainda que a base da torre se encontra no mesmo plano horizontal, o problema reduz-se ao seguinte:

*Sendo* [ABC] *um triângulo obliquângulo, achar a medida* h *da altura* $\overline{CD}$, *relativa ao lado* $\overline{AB}$, *conhecendo os seguintes dados:* c, *medida de* $\overline{AB}$; $\alpha$, *medida de* $B\hat{A}C$ *(ângulo interno agudo);* $\beta$, *medida de* $C\hat{B}D$ *(ângulo externo também agudo).*

Designando por *m* a medida da $\overline{BD}$ e considerando os triângulos rectângulos [ADC] e [BDC], o aluno chegará sem dificuldade às duas seguintes equações nas incógnitas h e m:

$$(1) \qquad \frac{h}{m} = \operatorname{tg}\beta \quad , \quad \frac{h}{c+m} = \operatorname{tg}\alpha$$

É claro que o aluno também não terá dificuldade em resolver este sistema de duas equações em *h* e *m*. *E convém precisamente que o faça como exercício, sem ajuda alheia* (exercícios ensinados a resolver pouco ou nenhum mérito podem ter).

O que vem a seguir é apenas para conferir a resolução efectuada: De (1) deduz-se:

$$h = m \operatorname{tg}\beta \quad , \quad h = (c+m) \operatorname{tg}\alpha,$$

portanto

$$m \operatorname{tg}\beta = (c+m) \operatorname{tg}\alpha$$

donde

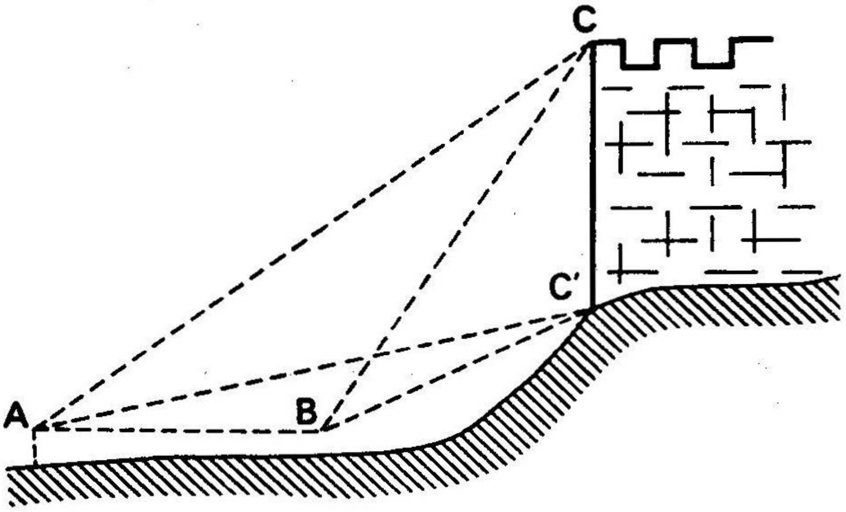
$$m = \frac{c \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$

e, finalmente

$$h = \frac{c \ \mathrm{tg}\,\alpha \ \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}$$

Terá interesse fazer uma ou duas aplicações numéricas desta fórmula com a régua de cálculo, bem como a respectiva verificação gráfica.

Pode, agora, considerar-se o caso mais geral (e mais *real*), em que a base da torre está acima do plano horizontal onde se efectuam as medições.

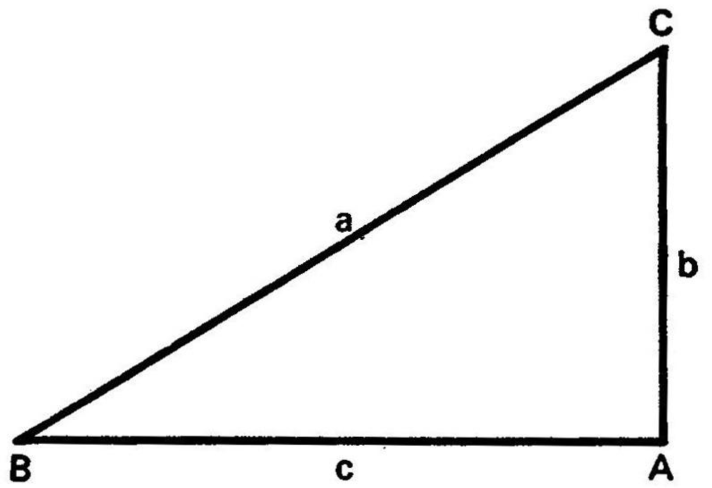



A figura mostra como a resolução do problema, neste caso, se reduz à de dois problemas do tipo anterior. Não valerá a pena fazer aplicações numéricas.

Mas, entretanto, convirá observar ao aluno que, neste caso, se torna já necessária maior precisão nas medidas dos ângulos. *E o aluno começará a compreender como tem sido possível calcular, por exemplo, a distância da Torre ao Sol, a distância do Sol aos diferentes planetas, etc., tudo por triangulações.*

**4.** Até agora temos estado muito cingidos ao concreto, como na verdade convém a princípio. Mas é tempo de nos afastarmos a pouco e pouco desse terreno.

O aluno terá provavelmente curiosidade em saber como se procede, quando são dados a hipotenusa e um ângulo agudo, ou a hipotenusa e um cateto, para determinar os restantes elementos dum triângulo rectângulo. É então oportuno introduzir as notações usuais relativas a um triângulo [ABC]. Os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ são designados respectivamente por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ou simplesmente por A, B, C (abuso cómodo de escrita); e os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente por a, b, c, desde que não haja risco de confusão ([1]).




Segundo a definição anterior de tangente, tem-se:

(1) $$\text{tg } B = \frac{b}{c}$$

([1]) Já sabemos que, muitas vezes, por abuso cómodo de linguagem, se confunde um segmento $\overline{AB}$ com o seu comprimento $|AB|$ (grandeza) ou mesmo com a sua medida (número), em relação à unidade adoptada.

ou seja

$$b = c \text{ tg } B \tag{2}$$

É claro que, nesta fórmula, se exige apenas que *b* e *c* sejam *catetos* e que B seja o *ângulo oposto a* b (num triângulo rectângulo qualquer). Podemos, pois, trocar b com c e B com C:

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} \quad \text{ou seja} \quad c = b \text{ tg } C$$

Pode-se introduzir agora a definição:

Chama-se *cotangente* dum ângulo agudo B do triângulo [ABC] rectângulo em A, e designa-se por cot B, a razão c/b entre o cateto adjacente a B e o cateto oposto a B; isto é:

$$\cot B = \frac{c}{b} \tag{3}$$

ou seja

$$c = b \cot B \tag{4}$$

Analogamente

$$\cot C = \frac{b}{c} \quad \text{ou seja} \quad b = c \cot C$$

Assim, traduzindo por palavras as fórmulas (2) e (4):

*Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é igual ao produto* *do outro cateto pela tangente do ângulo oposto ou pela cotangente do ângulo adjacente.*

De (1) e (3) resulta imediatamente:

$$\cot B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

isto é: *a cotangente dum ângulo é sempre o inverso aritmético da tangente desse ângulo.*

Por outro lado, como $C = 90° - B$, tem-se:

$$\operatorname{tg}(90° - B) = \operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \cot B$$

ou seja

$$\cot B = \operatorname{tg}(90° - B)$$

*Portanto, a cotangente dum ângulo é sempre igual à tangente do ângulo complementar* (donde a designação 'cotangente').

5. Posto isto, poderá chamar-se a atenção para o seguinte facto, análogo ao que se passa com os catetos:

*A razão* b/a *entre um cateto e a hipotenusa é função (unívoca) do ângulo* B *oposto ao cateto.* Esta razão chama-se *seno* do ângulo B e designa-se por sen B. Assim, por definição,

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$$

ou seja

$$b = a \text{ sen } B$$

Analogamente, permutando as variáveis:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} \quad \text{ou seja} \quad c = a \text{ sen } C$$

*Mas a razão* b/a *também é função (unívoca) do ângulo* C *adjacente ao cateto.* Esta razão chama-se *co-seno do ângulo* C e designa-se por cos C. Assim

$$\cos C = \frac{b}{a} \quad \text{ou seja} \quad b = a \cos C$$

Analogamente, permutando as variáveis:

$$\cos B = \frac{c}{a} \quad \text{ou seja} \quad c = a \cos B$$

Em resumo:

*Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.*

Imediatamente se reconhece que

$$\cos B = \text{sen } (90^\circ - B)$$

A letra B designa *qualquer ângulo agudo* (ou, mais precisamente, qualquer grandeza de ângulo agudo). Em vez desta letra podem usar-se aqui outros símbolos, tais como $\alpha$, $\varphi$, $\omega$, $x$, etc.

Em seguida, deve levar-se o aluno a redescobrir as identidades fundamentais:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad [\text{observar que } \operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2, \text{ etc.}]$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Destas, por sua vez, deduz-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Assim, as funções *seno, co-seno, tangente* e *cotangente,* definidas por enquanto no conjunto $]0°, 90°[$, estão relacionadas entre si pelas fórmulas anteriores: *uma vez dado o valor de uma, podem ser calculados os valores das outras, sem ambiguidade.* Mas, para comodidade de cálculos, as tábuas fornecem os valores de todas, aproveitando apenas as fórmulas dos ângulos complementares, que reduzem a metade a extensão das tábuas:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha), \\ \operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha) \\ \operatorname{tg}\alpha = \cot(90° - \alpha) \end{cases}$$

Finalmente, as duas últimas fórmulas anteriores podem servir de pretexto para introduzir as funções *secante* e *co-secante*. Por definição:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad , \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

tendo-se, manifestamente, $\operatorname{cosec} \alpha = \sec (90^\circ - \alpha)$.

Agora as duas fórmulas referidas podem escrever-se:

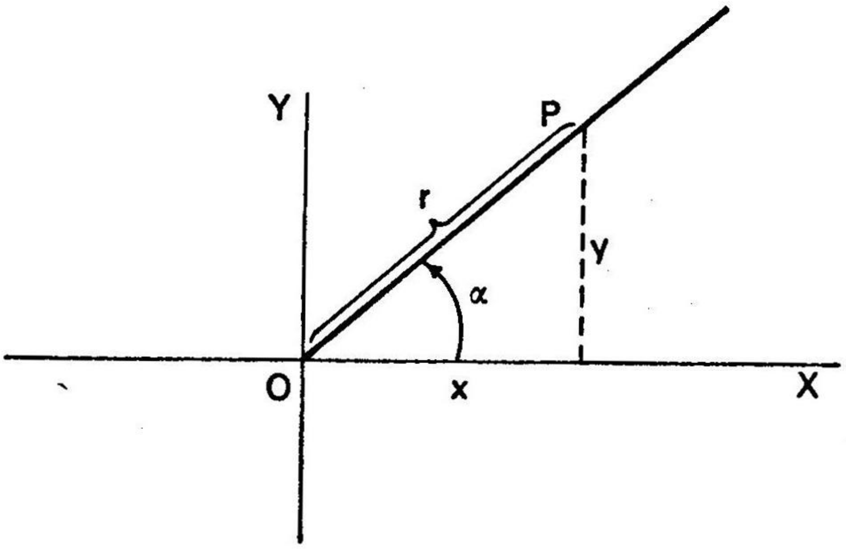
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Assim ficará completa a lista das *funções trigonométricas* (directas), às quais, oportunamente, se dará a designação sinónima de 'funções circulares'. Em vez de 'trigonométricas' também se pode dizer 'goniométricas' (do grego *gônia*, ângulo; por isso, 'trígono' é sinónimo de 'triângulo' e 'trigonometria' significa etimologicamente 'medição de triângulos').

*Podem agora fazer-se exercícios numéricos sobre os vários casos de resolução de triângulos rectângulos, utilizando primeiro a régua de cálculo e introduzindo em seguida as tábuas logarítmicas, mostrando que se obtém assim maior aproximação.*

6. Chegou agora o momento de *prolongar* as funções trigonométricas a ângulos quaisquer (tomando como base de estudo o *Compêndio de Trigonometria* adoptado). Primeiro que tudo há que introduzir o conceito generalizado de 'ângulo orientado', partindo da noção intuitiva de 'rotação no plano' e admitindo a possibilidade de um número qualquer de rotações completas nos dois sentidos: o sentido que se toma para *positivo* e o sentido *negativo*.

*Não será oportuno introduzir já a noção de radiano, porque isso vem desviar do objectivo imediato em vista, que é o prolongamento das funções trigonométricas ao conjunto de todas as grandezas de ângulo ou arco.*




Bastará definir directamente, à maneira usual, as funções *seno, co-seno, tangente*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

porquanto as funções *co-secante, secante* e *cotangente* continuam a definir-se como inversos aritméticos das anteriores.

Convém que o aluno seja levado a notar espontaneamente os seguintes factos:

1) Para ângulos $\alpha$ tais que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, estas definições coincidem com as anteriormente dadas: as funções trigonométricas tomam então só *valores positivos.*

2) Nos restantes casos, podem-nos aparecer valores negativos ou nulos e, quando $x = 0$, surge um problema para a tangente: como interpretar o símbolo $y/0$, sendo $y \neq 0$? A discussão desse problema será feita mais tarde.

3) Em qualquer dos casos, vê-se, por semelhança de triângulos, que o valor do seno e do co-seno não depende *propriamente* da posição do ponto P, considerado no segundo lado do ângulo (ou da distância, r, de P à origem), mas sim do ângulo $\alpha$, sendo portanto sen $\alpha$ e cos $\alpha$ funções *unívocas* de $\alpha$. O mesmo para tg $\alpha$, excluindo por enquanto o caso em que $x = 0$.

4) Mantêm-se válidas, para *qualquer ângulo* $\alpha$, as fórmulas:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \qquad (\text{com}\ \cos\alpha \neq 0)$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha} \qquad (\text{com sen}\ \alpha \neq 0)$$

das quais se deduzem como anteriormente:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$$

5) Mantêm-se igualmente as fórmulas:

$$\cos\alpha = \text{sen}\ (90^\circ - \alpha) \quad , \quad \cot\alpha = \text{tg}(90^\circ - \alpha),$$

Para as demonstrar com toda a generalidade, convém recorrer à simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares, que muda x em y e $\alpha$ em $90^\circ - \alpha$ (considerar ângulos nos vários quadrantes).

A observação 3) conduz, de modo natural, à representação geométrica do seno e do co-seno por meio do círculo trigonométrico. Por sua vez, esta representação permite, como é sabido, fazer comodamente o estudo geral das funções seno e co-seno, no que se refere a *contradomínio, zeros, sinal* e *sentido de variação.*

Um facto que deve surgir espontaneamente ao espírito do aluno é a *periodicidade destas duas funções, com o período de* 360°.

Deve seguir-se a representação gráfica das duas funções, mas é muito importante notar o seguinte:

*a*) o domínio das funções não é agora IR, mas sim o *conjunto das grandezas e ângulo* (ou *arco);*

b) O comprimento escolhido para representar o grau, no eixo das abcissas, deve ser muito mais pequeno do que o comprimento escolhido para representar o número 1, no eixo das ordenadas;

c) se um ângulo fosse dado em graus, minutos e segundos, seria necessário reduzir a sua expressão só a graus.

7. Quanto ao estudo da função *tangente,* convém neste momento recordar a noção de *'declive duma recta'* definida no 6.° ano, como razão entre a diferença das ordenadas de dois pontos e a diferença das respectivas abcissas. O aluno já deve ter-se apercebido da ligação entre os dois conceitos, mas, para formular essa ligação de modo preciso, há que introduzir o conceito de *'inclinação duma recta',* tal como se define no *Compêndio de Geometria Analítica Plana.* Assim, o declive aparece como *tangente da inclinação.*

***É agora o momento de recordar as considerações intuitivas***

*feitas no* Guia do 6.º ano, *a propósito de declive infinito, na* p. 60. Será então natural escrever:

$$\text{tg } 90^\circ = \infty \quad , \quad \text{tg } 270^\circ = \infty \quad , \quad \text{etc.}$$

e a fórmula $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ passa a ser válida mesmo no caso em que $\cos \alpha = 0$ (considerações análogas para a cotangente .

Torna-se ao mesmo tempo intuitivo que, por exemplo, tg $\alpha$ *tende para* $+\infty$ *quando* $\alpha$ *tende para* 90° *por valores menores que* 90° *e que* tg $\alpha$ *tende para* $-\infty$ *quando* $\alpha$ *tende para* $-\infty$. Estas intuições serão *legalizadas* na teoria dos limites, *mas é pedagogicamente acertado que apareçam antes.*

Nenhuma dificuldade terá agora o aluno em redescobrir como se representa geometricamente a tangente por meio do círculo trigonométrico (representação que justifica a designação 'tangente'), bem como em reconhecer por si mesmo a identidade

$$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

e, mais ainda, que *a função* tang *é periódica de período* 180°.

Segue-se o estudo geral, no que se refere *a contradomínio, zeros, sinais e sentido de variação* desta função, bem como a sua representação gráfica.

*Não vale a pena fazer tal estudo para as funções* cot, sec *e* cosec. Quando muito poderá, a título de curiosidade, indicar-se como se representa geometricamente a secante, por meio do círculo trigonométrico.

**A representação das funções trigonométricas por meio de um círculo justifica a designação 'funções circulares', que se atribui igualmente a tais funções.**

8. As relações entre senos, co-senos e tangentes de *ângulos associados* também podem e devem ser redescobertas pelo aluno.

*Deve-se dar uma atenção especial às fórmulas*

$$\text{sen}(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \cos(90^\circ+\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha,$$

que se podem estabelecer directamente ou deduzir das anteriores.

A *redução ao primeiro quadrante* aparece como aplicação prática, permitindo achar, por meio de tábuas, o valor das funções trigonométricas de qualquer ângulo (com a aproximação permitida pela tábua).

Convirá ainda resolver equações dos tipos:

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha \quad , \quad \cos x = \cos\alpha \quad , \quad \text{tg}\,x = \text{tg}\,\alpha$$

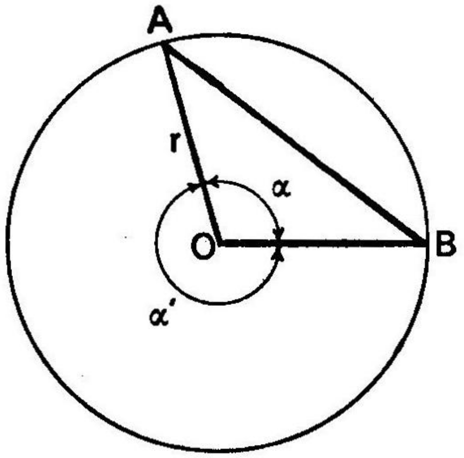
$$\text{sen}\,x = k \quad , \quad \cos x = k \quad , \quad \text{tg}\,x = k$$

sendo $\alpha$ e k *dados* e x a *incógnita.*

*Quanto a exercícios, vêm a propósito as recomendações de ordem geral feitas no início deste* Guia. Todos os assuntos até agora tratados são na verdade muito simples, muito elementares, e não convém estar a complicá-los com dificuldades artificiais, que consomem tempo e energia.

9. Será, agora, oportuno apresentar ao aluno o problema clássico:

*Dada uma circunferência de raio* r, *determinar o comprimento duma corda* AB *como função da grandeza* $\alpha$ *do arco* AB *correspondente.*




Trata-se de um problema como outro qualquer. Mas, desde logo, surge uma questão:

*Quantos arcos correspondem a uma corda* $\overline{AB}$?

Na realidade, *dois*. Assim, a designação $\overset{\frown}{AB}$ é *ambígua,* a não ser que se convencione designar por este símbolo o *menor dos arcos.* Mesmo assim, a ambiguidade subsiste no caso particular das semicircunferências.

Seja então $\alpha$ a grandeza do menor dos arcos, supondo

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Já se disse atrás, nas CONSIDERAÇÕES DE ORDEM GERAL, que todo o exercício com algum interesse tem uma ideia-chave e que deve ser o aluno a encontrar essa ideia. Aqui, a ideia-chave é conduzir pelo centro O da circunferência uma perpendicular a AB. Posto isto, o que o aluno já sabe sobre a geometria da circunferência e sobre a trigonometria dos triângulos rectângulos, conduz facilmente ao resultado:

$$(1) \qquad |AB| = 2r \text{ sen } \frac{\alpha}{2}$$ [1]

Primeiro que tudo, esta fórmula permite esclarecer a etimologia da palavra 'seno'. Deve, agora, notar-se que a fórmula continua a ser válida nos seguintes casos:

*a*) substituindo $\alpha$ pela grandeza $\alpha'$ do outro arco de extremos A, B;

*b*) nos casos extremos em que $\alpha = 0°$ e $\alpha = 180°$ (por verificação directa).

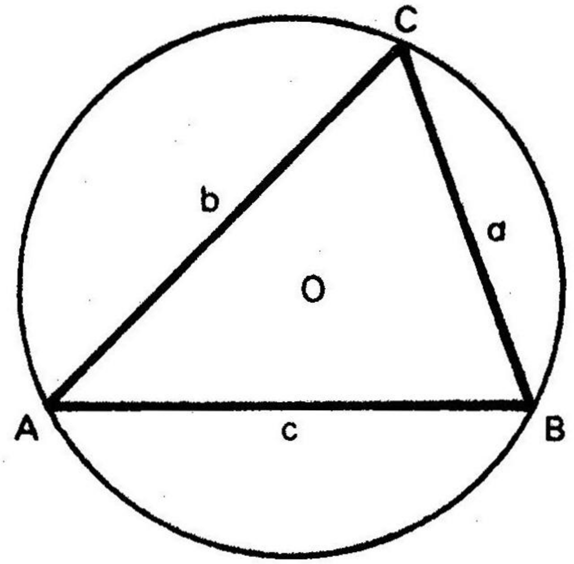
Posto isto, há que fazer duas espécies de aplicações da fórmula:

1.º *Dedução do seno, do co-seno e da tangente de* 30°, 45° *e* 60°.

2.º *Dedução da fórmula dos senos, para triângulos quaisquer.* Neste caso, seguindo sempre o método heurístico, o professor perguntará como se determina a circunferência que passa pelos vértices A, B, C dum triângulo.

---

(1) Designamos por $|AB|$ o comprimento do segmento $\overline{AB}$ (classe de equivalência dos segmentos geometricamente iguais a este). Pode, no entanto, por abuso cómodo de escrita, escrever-se $\overline{AB}$ em vez de $|AB|$.




Suponhamos traçada a circunferência e apagadas todas as linhas auxiliares. Formula-se, agora, o objectivo:

*Relacionar os lados do triângulo com os ângulos opostos.*

Aqui, a ideia-chave é unir o centro com os vértices e relacionar cada ângulo interno (inscrito) com o ângulo ao centro correspondente, aplicando o respectivo teorema. A aplicação da fórmula anterior e a eliminação de r conduz, então, ao objectivo final:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \tag{2}$$

É este um resultado imprevisto, que impressiona pela singela beleza, *independentemente de qualquer aplicação.* De acordo com o que se disse nas CONSIDERAÇÕES DE ORDEM GERAL, é muito importante que o aluno tome consciência do aspecto estético da matemática.

*Resta um pormenor de crítica sobre a validade lógica da anterior dedução.* Três casos se podem dar quanto à posição do centro O em relação ao triângulo: ou é interior ao triângulo, ou é exterior ou está sobre um dos lados. A figura a que normalmente se refere a dedução está no primeiro caso. *Ora a dedução deve ser independente da figura.* Há, portanto, que analisar os outros dois casos. Não é difícil ver, com as observações que se fizeram acerca da fórmula (1), que a fórmula (2) continua a ser verdadeira(¹).

Mais uma vez se confirma pois o que foi dito sobre as duas fases da investigação: uma fase inicial, em que predomina a intuição, e uma fase final, de crítica e apuramento lógico dos resultados. Ambas as fases são fundamentais, como aspectos complementares do pensamento matemático.

10. É agora e só agora que, a nosso ver, vem a propósito tratar do conceito de radiano e da conversão de graus em radianos ou vice-versa (deve também falar-se do sistema centesimal). A questão que importa depois focar é a seguinte:

O domínio das funções circulares, tais como estas foram até agora definidas, é o conjunto de todas as grandezas de ângulo (ou de arco), que não se confunde com o conjunto $\mathbb{R}$. Por exemplo, sabemos o que significa a expressão sen 30° (seno da *grandeza 30* graus), cujo valor é 1/2, mas não definimos, significado da expressão sen 30 (seno do *número* 30). Podíamos, é certo, convencionar dizer que *seno de* 30 é o mesmo que *seno de 30 graus*. Mas por que razão deve *sen 30* ser o

---

(¹) Convirá fazer uma aplicação numérica ao caso de um triângulo obliquângulo, do qual são dados um lado e dois ângulos adjacentes, e se pede um dos outros lados.

mesmo que *seno de 30 graus* e não o mesmo que *seno de 30 grados* ou *seno de 30 radianos?* Haverá porventura alguma afinidade que para esse fim mereça preferência?

Pois bem, a resposta é esta:

*Existe efectivamente uma unidade que merece preferência para esse fim: é o radiano.*

Agora, o aluno está no direito de perguntar porquê. É claro que se tem de responder:

*Só mais tarde, a propósito do estudo das derivadas, se pode conhecer a razão desta preferência.*

Assim, por definição, o *seno de um número real* x será o *seno da grandeza* x *radianos,* isto é:

DEFINIÇÃO. $\text{sen } x = \text{sen } (x \text{ rad}) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

E analogamente para as restantes funções trigonométricas.

Por exemplo:

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \text{rad} \right) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \text{tg} \frac{\pi}{3} = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos \pi = \cos 180^\circ = -1 \quad , \text{ etc.}$$

É claro que as novas funções assim definidas, embora designadas pelos mesmos símbolos, sen, cos, tg, cot, sec, cosec, e chamadas ainda *'funções circulares'* ou *'funções trigonométricas'*, não são as mesmas que as anteriores, uma vez que o seu domínio é diferente: o conjunto IR, em vez do conjunto das grandezas do ângulo. Só por comodidade se mantém a mesma terminologia e a mesma notação.

*Devem-se agora traduzir na nova linguagem todos os resultados anteriores.*

Mais tarde se verá que:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \quad , \quad D \cos x = - \operatorname{sen} x \quad , \quad D \operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

*As fórmulas das derivadas das funções circulares seriam mais complicadas se, porventura, na definição anterior, se tivesse escolhido uma unidade diferente do radiano:* eis a razão da preferência que, ao tratar do assunto das derivadas, será apontada ao aluno.

Convém, pois, salientar o seguinte:

> *Esta mudança de ponto de vista no estudo das funções circulares (sendo o domínio o conjunto* R *em vez do conjunto das grandezas de ângulo ou arco), dá-se precisamente quando é preciso passar do âmbito da trigonometria – ramo da matemática aplicada que está na base da topografia, da geodesia e da astronomia – ao domínio muito mais amplo da análise matemática, como ciência pura. Ver-se-á depois como tais funções podem ser representadas analiticamente por meio de séries.*

11. As funções circulares inserem-se naturalmente no quadro da análise matemática, por intermédio dos números complexos, como

se faz no 3.º vol. do *Compêndio. Aí se indica a maneira, a nosso ver mais natural, de deduzir as fórmulas de adição de ângulos.*

É claro que este assunto só poderá ser tratado depois da introdução ao cálculo vectorial que, por sua vez, convém que seja precedida dos elementos de geometria analítica no espaço (sem vectores) que são dados no *Guia do 6.º ano* ([1]) e que, de futuro, deverão ser introduzidos precisamente no 6.º ano (quanto às cónicas, só depois das matrizes convirá fazer o seu estudo). Os assuntos começam a interpenetrar-se, a associar-se entre si, num processo fecundo de *complexificação* que caracteriza toda a marcha ascensional do pensamento – e não seria portanto pedagógico separá-los artificialmente, ocultando as suas múltiplas correlações. Mas convém, desde já, ter uma ideia de como se completa o estudo das funções circulares.

Esse estudo adquire agora unidade e simplicidade, graças à função E, que tem a propriedade notável:

$$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)\ E(\beta) \tag{1}$$

Esta fórmula, da qual irão sair as fórmulas trigonométricas de adição e outras mais, diz-nos que a função E transforma a adição em multiplicação, à semelhança do que sucede com qualquer função exponencial. E, na verdade, em matemática superior, acaba-se por identificar E(x) com a exponencial $e^{ix}$. Mas convém notar, de passagem, que esta função é uma aplicação *não biunívoca* do conjunto

---

([1]) Parece-nos vantajoso que o aluno tome o *primeiro contacto* com a geometria analítica pela via mais elementar possível, a fim de facilitar a aplicação do método heurístico.

$\mathbb{R}$ sobre o conjunto dos números complexos de módulo 1 (cuja imagem é uma circunferência).

Tal aplicação não é, portanto, um isomorfismo do *grupo aditivo* $\mathbb{R}$ sobre o *grupo multiplicativo* dos números complexos de módulo 1, visto não ser injectiva; mas, como é sobrejectiva e transforma a adição em multiplicação, segundo (1), diz-se que é um *homomorfismo* do primeiro grupo sobre o segundo.

12. A propósito das *fórmulas de bissecção,* é importante observar o seguinte:

Essas fórmulas, *restringidas* ao 1.º *quadrante,*

$$(2) \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \,, \quad \operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

fornecem um processo de cálculo numérico do seno e do co-seno dum ângulo com a aproximação que se quiser. Será, portanto, esse *um* dos meios de resolver o problema que ficou em aberto nos n.ºs 1 e 2 deste capítulo, após ter-se verificado que o método gráfico não permite ir além de certo grau de aproximação, insuficiente para muitos fins.

*Suponhamos que se toma para unidade o ângulo recto.* Já se conhecem o seno e o co-seno dos ângulos de medidas 0, 1/2 e 1. Em seguida as fórmulas (2) permitem calcular o seno e o co-seno do ângulo de medida 1/4, que são respectivamente iguais ao co-seno e ao seno do ângulo de medida 3/4.

Posto isto, as fórmulas (2) permitem calcular o seno e o co-seno dos ângulos de medidas

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\ ,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

que são iguais, respectivamente, ao co-seno e ao seno dos ângulos de medidas

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\ ,\quad 1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

Analogamente se calculam o seno e o co-seno dos ângulos de medidas

$$\frac{1}{16}\ ,\ \frac{3}{16}\ ,\ \frac{5}{16}\ ,\ \frac{7}{16}\ ,\ \frac{9}{16}\ ,\ \frac{11}{16}\ ,\ \frac{13}{16}\ ,\ \frac{15}{16}$$

E assim sucessivamente, repetindo as operações de bissecção e de passagem ao ângulo complementar.

Suponhamos, por exemplo, que se pretendia calcular sen 63°. Ora 63° é igual a 0,7 do ângulo recto e tem-se, sucessivamente:

$$\frac{1}{2} < 0{,}7 < \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8} < 0{,}7 < \frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{11}{16} < 0{,}7 < \frac{12}{16}$$

..............................

o que permite calcular valores aproximados de sen 63°, por defeito e por excesso, com erro tão pequeno quanto se queira.

Os cálculos exigidos por este processo são laboriosos, mas, quando se dispõe de um bom computador, podem ser efectuados rapidamente. No entanto, mesmo quando se trabalhe com um bom computador, procura-se sempre, entre vários métodos de aproximação, aquele que seja mais *expedito* e mais fácil de *programar,* porquanto o objectivo, nestes casos, é obter *a máxima economia de tempo e de energia,* que se traduz em *economia de dinheiro.* No caso das funções circulares, recorre-se normalmente a desenvolvimentos em série, para o cálculo numérico por meio de computadores.

Entretanto, convém não esquecer este pormenor: *do ponto de vista pedagógico, é sempre importante que o aluno conheça, pelo menos, um processo de cálculo, mesmo que não seja o mais expedito.*

13. Quanto ao *teorema dos co-senos* (ou *de Carnot*), já se disse que convém apresentá-lo em íntima ligação com a noção de produto interno, como se indica no *3.° vol., do Compêndio.* Aliás essa noção, bem como as suas aplicações à geometria analítica, pode ser tratada logo a seguir ao estudo dos números complexos.

O desenvolvimento a dar a estes assuntos dependerá, evidentemente, do estado de adiantamento de cada turma-piloto. Haverá casos em que seja preciso susbtituir as demonstrações por esclarecimentos de carácter intuitivo e haverá assuntos que terão de ser mesmo omitidos.

Há, no entanto, deduções que o aluno deverá ficar a saber sem hesitações, como sejam por exemplo aquelas relativas a números complexos sob forma trigonométrica. Por outro lado, há assuntos sobre os quais o aluno deverá ficar a ter ideias bastante claras, como por exemplo *vectores, transformações geométricas, representação analítica de afinidades e cálculo matricial* (com matrizes quadradas de 2.ª ordem).

14. Todo o conceito é introduzido com uma determinada *finalidade:* quanto menos o conceito surgir ligado à sua finalidade, menos interesse poderá despertar. Qual é, por exemplo, o interesse das funções circulares inversas? Porque se introduziram os símbolos arc sen, arc cos, etc.? Se estes símbolos não fossem necessários para algum fim, ninguém se teria provavelmente lembrado de os inventar.

O interesse das funções circulares inversas aparece no problema na integração de funções tais como $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, etc. O momento mais oportuno para as introduzir será, talvez, o que se segue ao estudo das derivadas das funções circulares directas e *não muito antes da introdução ao cálculo integral.*

As funções circulares inversas podem aparecer com dois aspectos: a) como funções plurívocas; *b*) como determinados ramos unívocos de tais funções.

Por exemplo, a expressão

*'arco cujo seno é 1/2'*

é ambígua, uma vez que existe uma infinidade de arcos (ou de números), cujo seno é 1/2. Mas já a expressão

$$\iota_\alpha \left(\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

não é ambígua: o seu valor é $\pi/6$.

Normalmente, adoptam-se as seguintes definições de funções circulares inversas unívocas:

$$\text{arc sen } x = \iota y \left(x = \text{sen } y \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{arc cos } x = \iota y \left(x = \cos y \wedge 0 \leqslant y \leqslant \pi\right)$$

$$\text{arc tg } x = \iota y \left(x = \text{tg } y \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

Como se vê, trata-se de funções *reais* de variável *real*. A primeira tem por domínio o intervalo $[-1, 1]$ e por contradomínio o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$: é a função inversa da função *seno, restringida esta ao intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$. O aluno terá facilidade em reconhecer o domínio e o contradomínio das outras duas[1].

Para isto convém, é claro, examinar os gráficos das funções circulares inversas plurívocas (que podemos representar pelas exrpressões Arc sen, Arc cos, Arc tg) e *destacar desses* os gráficos das funções arc sen, arc cos, e arc tg.

Das definições anteriores deduz-se, pela regra de derivação das funções inversas:

$$D \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \text{ arc cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \text{ arc tg } x = \frac{1}{1+x^2}$$

E com isto terminará propriamente o estudo da trigonometria no curso-piloto.

---

(1) É manifesto o carácter convencional destas definições. Convém lembrar que também, por exemplo, a função $x \curvearrowright x^2$ não é biunívoca e que se representa pelo símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ a inversa dessa função *restringida ao intervalo* $[0, +\infty[$.

## II

## OBSERVAÇÕES ACERCA DO CAPÍTULO I DO 2.º VOLUME

1. O n.º 1 deve constituir assunto para discussão na aula e leitura em casa. A 'Nota Histórica' do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra* (6.º ano), relativamente a filósofos gregos, bem como as palavras de Castelnuovo citadas no início deste *Guia*, também deveriam ser motivo de leitura e reflexão.

*Aliás, logo na primeira aula se deve começar (ou recomeçar) o uso da régua de cálculo, que põe o aluno em contacto directo com a ideia de aproximação.*

Numa outra aula deverá dizer-se que há dois tipos principais de computadores (ou calculadores): os computadores *numéricos* (ou *digtiais*) e os computadores *analógicos*. Os primeiros fornecem directamente os resultados dos cálculos com algarismos exactos em maior ou menor número; os segundos baseiam-se na medição de grandezas (tais como comprimentos, tensões eléctricas, etc.), geralmente com um grau de aproximação não muito elevado, variável e pouco preciso. Os computadores digitais vão desde a simples máquina de somar de Pascal até aos modernos computadores electrónicos, com transistores. Os computadores analógicos vão desde a simples régua de cálculo até aos computadores análógicos modernos, igualmente transistorizados. Em particular, os métodos gráficos, cujo estudo sistemático se chama *nomografia*, podem ser incluídos na classe dos sistemas analógicos. E a propósito, chamando a atenção dos alunos para um campo de pesquisa hoje em rápida expansão, convém citar os sistemas analógicos da autoria da Senhora Dr.ª D. Marília de Lima Monteiro, bem como os computadores eléctricos de valores lógicos da autoria dos alunos do Liceu D. João de Castro, Senhores António Vítor Adragão Anunciada e Luís Henrique Borges de Almeida.

2. No n.º 1 fala-se já de probabilidades. Embora este assunto, segundo aconselha a experiência adquirida, deva ser reservado para o final do 7.º ano, conviria que o conceito empírico de probabilidades fosse dado mais cedo, de *maneira informal*, em conversa, partindo de exemplos sugestivos, susceptíveis de despertar curiosidade e conduzir a discussão. Um tal exemplo poderia ser a seguinte frase:

*'É pequena a probabilidade de ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'*

Não se trata agora de discutir o valor lógico desta afirmação, mas apenas o seu significado. Compare-se esta frase com as seguintes:

*'É impossível ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'*

*'É raro ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'*

O aluno imediatamente reconhece que a primeira não equivale à segunda, mas tem praticamente o significado da terceira. Como definir esse significado?

Primeiro que tudo, é preciso supor que se dispõe de um critério que permita distinguir *música boa* de *música que não é boa* (critério necessariamente discutível). Posto isto, teria de se proceder a uma *estatística,* que consistiria em sintonizar um receptor *ao acaso,* em numerosas ocasiões com emissores portuguesse. Se for *m* o número de provas (ou experiências) em que se ouviu boa música e *n* o número total de provas em que se ouviu música, o número m/n (que se pode exprimir em percentagens) dará um valor aproximado da *probabilidade de ouvir boa música em emissores portugueses* — valor este que será *tanto mais aproximado quanto maior for* n.

Suponhamos que o valor achado foi cerca de 4 % (ou 0,04), isto é, que, *em* 100 *emissões de música, há em média* 4 *que dão música boa.* Será pequena neste caso a probabilidade? Parece bem que sim: mas é claro que este juízo terá igualmente carácter subjectivo.

Tudo isto pode ser desenvolvido em diálogo. *Não quer dizer que deva ser logo numa das primeiras aulas, mas sim num momento oportuno, em que convenha variar de assunto para amenizar.* Numa outra ocasião, poderá fazer-se a experiência do lançamento da moeda ou da *punaise* (por exemplo, cada aluno fará 20 provas e reúnem-se depois numa única as estatísticas parciais). Assim, quando mais tarde se iniciar o estudo sistemático das probabilidades, já o aluno estará *mentalizado* para o assunto e o rendimento será bem maior.

3. **A majoração do erro duma soma, dum produto ou dum quociente, e os respectivos problemas inversos, são** *assuntos centrais,*

aos quais é preciso dedicar uma atenção especial. Aliás, o assunto só começa a adquirir um certo grau de dificuldade (e portanto maior interesse), no problema inverso relativo ao produto (n.º 9).

A orientação seguida no texto *não é cem por cento heurística.* As seguintes observações permitirão ao professor aproximar-se mais deste tipo de orientação, com vantagem para o aluno, que entrará assim muito mais facilmente no assunto.

Depois de formular o problema como se faz na pg. 32 e de o esclarecer como vem nas últimas cinco linhas da pg. 33, pergunta-se ao aluno:

*Qual é a fórmula que parece indicada para resolver este problema?*

O aluno dirá certamente que é a fórmula deduzida no número anterior:

$$|\Delta(xy)| \leqslant \hat{x}\,|\Delta x| + \hat{y}\,|\Delta y|$$

Mas deve ser usada em sentido contrário, raciocinando do seguinte modo:

Se $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, então

$$|\Delta(xy)| \leqslant (\hat{x}+\hat{y})\ \varepsilon$$

Logo, para que seja $|\Delta(xy)| < \delta$, *basta que seja*

$$(\hat{x}+\hat{y})\ \varepsilon < \delta$$

ou, o que é equivalente,

$$(1) \qquad \varepsilon < \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}}$$

O problema *parece* pois resolvido, *mas não está*. Porquê? Tem de intervir neste momento o *espírito crítico*. O que são $\hat{x}$ e $\hat{y}$? Segundo a convenção anterior, $\hat{x}$ é um majorante de $|x|$, enquanto $\hat{y}$ é um majorante de $|y|$ e de $|y_1|$. Mas $y_1$ é precisamente um dos valores *procurados*. Portanto, a fórmula (1) não permite, sem mais, determinar $\varepsilon$, visto que não se conhece ainda $y_1$. *A dificuldade está pois neste pequeno pormenor, à primeira vista insignificante* (podem mudar-se os papéis de x e de y, mas a dificuldade subsiste).

Para simplificar o problema, comecemos por supor x e y positivos. Então $|x| = x$ , $|y| = y$.

Em que consiste a *ideia-chave* aqui?

Em obrigar *primeiro* $\hat{x}$ e $\hat{y}$ às condições

$$\hat{x} \geqslant x \quad , \quad \hat{y} > y$$

e em procurar *depois* um número positivo $\varepsilon$, que verifique não só a condição (1), mas também a seguinte:

> *Se* $y_1$ *é um valor positivo aproximado de* $y$ *a menos de* $\varepsilon$, *então* $y_1 < y$ (deste modo y ficará a ser, automaticamente, majorante de $|y|$ *e* de $|y_1|$).

Impõe-se, neste momento, *recorrer à intuição geométrica* para acabar de resolver o problema. Convide-se o aluno a representar sobre um eixo y e $\hat{y}$ de modo que se verifique a relação $0 < x < \hat{y}$:

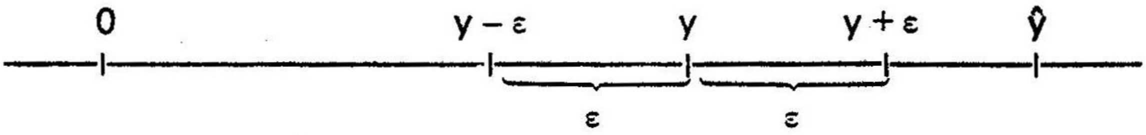
O problema está, agora, reduzido ao seguinte:

*A que condições deve satisfazer* $\varepsilon$ *para que todo o valor aproximado de* $y$ *a menos de* $\varepsilon$ *seja menor que* $y$?

Olhando para a figura não é difícil responder:

*À condição* $\varepsilon < \hat{y} - y$.

Convide-se o aluno a indicar na mesma figura uma vizinhança ($\varepsilon$) de $y$ nestas condições. Por exemplo:




O raciocínio, pode agora, aparecer sob forma puramente lógica, independente da intuição geométrica:

Se $\varepsilon \leqslant \hat{y} - y$, tem-se $y + \varepsilon \leqslant \hat{y}$. Então, se $y_1$ é valor aproximado de $y$ a menos de $\varepsilon$, tem-se:

$$y_1 < y + \varepsilon \quad \text{e portanto} \quad y_1 < \hat{y}$$

Assim, o problema está resolvido quando se consideram apenas números positivos: basta tomar $\varepsilon$ de modo que se tenha simultaneamente

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}} \quad , \quad \varepsilon \leqslant \hat{y} - y$$

sendo $\hat{x} \geqslant x$ e $\hat{y} > y$.

No caso geral de números reais quaisquer (e não apenas números positivos), é preciso passar aos módulos e *basta então aplicar o teorema 2 da pg. 26. para o problema ficar reduzido ao caso anterior.* E assim se chega ao teorema da pg. 35.

Vale a pena gastar tempo com este teorema porque, uma vez esclarecido o assunto, tudo o resto virá com facilidade, por acréscimo. Podemos mesmo dizer que este é um dos *teoremas-chave* da teoria dos limites: o tipo de raciocínio que exige vai repetir-se várias vezes com pequenas variantes.

Uma dessas variantes aparece logo no n.º 11, a propósito do *problema análogo para o quociente.* Neste caso, o bom aluno já será capaz de caminhar facilmente pelo seu próprio pé.

Problemas análogos se apresentam depois a propósito da potência e da raiz. *Mas aí não valerá a pena fazer as deduções para o problema inverso: bastará indicar o resultado (que não será preciso fixar no caso da potência).*

Note-se que a demonstração, aliás facultativa, do teorema do n.º 13, pg. 47, é feita segundo uma orientação diametralmente oposta à do método heurístico. Como se pode verificar, essa demonstração oculta a *génese das ideias,* não deixando traços do caminho seguido na investigação, para chegar àquele resultado. As demonstrações como esta – *do tipo expositivo clássico* – apresentam a matemática como ciência feita, estática, cem por cento lógica, e não como ciência em via de crescimento, impulsionada pela intuição criadora. Tal orientação só permite ao aluno conhecer a matemática *por fora,* dando-lhe a impressão de que jamais poderia colaborar na construção desta ciência.

3. *As fórmulas aproximadas dos desvios* têm a vantagem de familiarizar desde logo o aluno com *regras de derivação* (ou diferenciação), que só mais tarde virá a identificar como tais. Em particular, a fórmula aproximada do desvio da raiz será utilmente aplicada, logo a seguir, na redescoberta do método de Newton para raízes de índice qualquer.

Quanto a *erros relativos,* bastará que o aluno adquira a noção. Será interessante dizer-lhe, a propósito, que os melhores *computadores analógicos* permitem uma aproximação da ordem de 0,05 %, o que já pode ser considerado muito bom para certos fins. Também haverá interesse em que o aluno aprenda, de *modo informal,* que o desvio relativo do *produto* é aproximadamente igual à soma dos desvios relativos dos factores, etc.

4. O assunto do n.º 18 coloca o aluno imediatamente em contacto com a ideia dos métodos de aproximação, que domina toda a *análise numérica moderna, ligada ao uso de computadores.* Constitui, por isso também, uma excelente motivação concreta para a introdução do conceito de convergência duma sucessão. O aluno *sente* que tal conceito é algo de real e de importante, que interessa estudar a fundo. Convém, pois, dedicar um *interesse* especial ao referido assunto, fazendo-o surgir e desenvolver-se de modo acentuadamente heurístico. Como? Discorrendo mais ou menos do seguinte modo:

Uma vez que tenhamos um valor aproximado, $x_1$, de $\sqrt{a}$, o seu quadrado, $x_1^2$, será um valor aproximado de $a$. Então, se designarmos $x_1^2$ por $a_1$, *a fórmula aproximada do desvio da raiz* dá(1):

---

(1) Há, aqui, apenas uma troca entre os papéis de $a$ e $a_1$, relativamente à fórmula que foi dada. Mas o aluno já está habituado a essa espécie de simetria das fórmulas, em relação ao valor aproximado e ao valor exacto (consequência do princípio de substituição de variáveis aparentes em quantificadores universais).

$$\sqrt{a} - \sqrt{a_1} \approx \frac{a - a_1}{2\sqrt{a_1}}$$

ou seja

$$\sqrt{a} - x_1 \approx \frac{a - x_1^2}{2x_1}$$

ou ainda

(1) $$\sqrt{a} \approx x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

Mostra a experiência (e depois se verá porquê) que é sempre mais eficaz começar com um valor $x_1$ aproximado *por excesso:* foi, por isso, que escrevemos $x_1^2 - a$ em vez de $a - x_1^2$, mudando o sinal.

Mas a fórmula (1) *é apenas aproximada*. Quer dizer, se pusermos:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_2 - a}{2x_1}$$

$x_2$ será um novo valor aproximado de $\sqrt{a}$. O que interessa é que $x_2$ seja *mais próximo de* $\sqrt{a}$ *que* $x_1$.

Vamos ver se isso acontece, na hipótese em que $x_1^2 > a$. Neste caso, a fórmula (1) mostra imediatamente que $x_2 < x_1$. Resta saber se $\sqrt{a} < x_2$. Para isso, basta considerar a diferença $x_2 - \sqrt{a}$ e ver que é positiva, como se fez no *Compêndio*.

*Surge, agora, espontânea a ideia de proceder para* $x_2$ *como se fez para* $x_1$*, pondo:*

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - a}{2x_2}$$

*e para $x_3$ como se fez para $x_2$, pondo:*

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - a}{2x_3}$$

*e assim sucessiva e indefinidamente.*

Deste modo se gera uma *sucessão,* cujo primeiro termo é $x_1$ e cujos termos seguintes são dados pela *fórmula de recorrência*

$$(2) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \quad , \quad \forall_n \in \mathbb{N}$$

e fica automaticamente provado, pelo princípio de substituição das variáveis aparentes, que

$$\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$$

Posto isto, o aluno *pressente* que os valores aproximados $x_1, x_2, \ldots$ são *cada vez mais próximos de a,* isto é, tem a intuição de que a sucessão assim definida *converge* para $\sqrt{a}$. Uma primeira justificação intuitiva deste facto é dada nas páginas 57 e 58 do texto, *mas pode ser omitida* (os exemplos numéricos dados a seguir já são bastante esclarecedores, nesta fase introdutória). A demonstração rigorosa só pode ser dada por meio da teoria dos limites, que tem assim, no estudo anterior, uma boa motivação.

5. Os processos de recorrência (baseados no princípio da indução matemática, que depois será estudado em pormenor) constituem um dos muitos assuntos da matemática que têm sido postos na ordem do dia pelos computadores.

Uma vez *escolhido* o valor inicial $x_1$, da sucessão atrás considerada, a determinação dos valores $x_2, x_3, \ldots$ segue-se automaticamente – *mecanicamente* – por meio da fórmula de recorrência. E é esse *automatismo,* essa *rotina,* que o computador – como servo fidelíssimo do homem – executa com velocidade prodigiosa. Vê-se neste exemplo, bem delimitado, o que compete à máquina e o que compete ao homem([1]).

Convirá talvez, para esclarecimento do assunto, que o aluno resolva um exercício, no caso da raiz quadrada, efectuando os cálculos pelos processos usuais. Mas não fará sentido maçá-lo com cálculos fastidiosos que competem à máquina. Nas cidades onde haja computadores electrónicos acessíveis à população escolar, será do maior interesse que se organizem *visitas de estudo,* em que os alunos vejam como a máquina executa programas, relativos a problemas desta ou de outra natureza.

6. A teoria dos limites, que se começa a desenvolver no n.º 19 com todo o rigor lógico moderno, está na base do *cálculo infinitesimal* (ou *análise infinitesimal*). Mas convém, na devida oportunidade (nota da pg. 71), analisar o significado etimológico da palavra 'infinitésimo', em ligação com a história do cálculo infinitesimal, que

---

([1]) Também se pode dizer, num certo sentido, que os computadores mais evoluídos são capazes de efectuar *escolhas* e tomar *decisões.* Uma análise aprofundada do assunto permitirá mostrar que tudo isso é feito segundo planos preestabelecidos pelo homem e em que não se exclui eventualmente a intervenção do acaso, segundo as leis do cálculo das probabilidades. Mas isto conduz-nos ao campo da *cibernética,* em que as opiniões se dividem: há quem pretenda que o cérebro humano não é mais do que um computador extremamente evoluído e há quem considere essa hipótese simplesmente absurda.

também poderíamos chamar *'cálculo de infinitésimos'* (ou *'de quantidades infinitamente pequenas'*).

O aluno já sabe o que significa 'um décimo', 'um centésimo', 'um milésimo', etc. Por exemplo, um milésimo de uma dada grandeza, que se toma para unidade, é a grandeza que se obtém dividindo a unidade por 1000 (ou, como também se diz, em *mil partes iguais*). O que será então *um infinitésimo*? Deveria ser a grandeza que se obtém dividindo a unidade *num número infinito de partes iguais*. Mas o que se pode obter, dividindo por exemplo um segmento de recta num número infinito de partes iguais? Obtêm-se *pontos,* dirão os alunos. Como o comprimento dos pontos é nulo, um infinitésimo deveria ser então uma grandeza nula. *Mas como pode um comprimento não nulo resultar da soma de comprimentos nulos*? A intuição diz-nos que tal não é possível: somando grandezas nulas, por maior que seja o seu número, apenas se obtêm grandezas nulas. Mas é pensando assim que se chega ao *paradoxo da seta* – um dos três paradoxos com os quais Zenão pretendia provar que o movimento é uma ilusão dos sentidos.

Por isso, os precursores do cálculo infinitesimal foram levados a conceber um infinitésimo como *algo que é ao mesmo tempo nulo e não nulo* (o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO), ou então como *algo que está numa posição intermédia entre ser nulo e não ser nulo* (o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO). Esses matemáticos tinham mais ou menos consciência de que tal conceito era ilógico; mas, como, por outro lado, conseguiam obter assim facilmente resultados certos e úteis, não se preocupavam com a validade dos meios, atendendo apenas aos resultados.

É verdade que está hoje posta de lado essa ideia contraditória de infinitésimo (chamado 'infinitésimo actual'), a qual foi substituída pela ideia de 'infinitésimo potencial' (como *variável que tende para zero*). Mas, no fundo, continua-se muitas vezes, em considerações de ordem intuitiva (sobretudo em matemática aplicada e em física), a fazer uso implícito de tal ideia, como veremos a propósito de conceito de diferencial.

Nesses casos, chama-se 'infinitésimo' a uma *quantidade tão pequena que pode ser considerada como nula para certos efeitos* (embora não seja necessariamente nula).

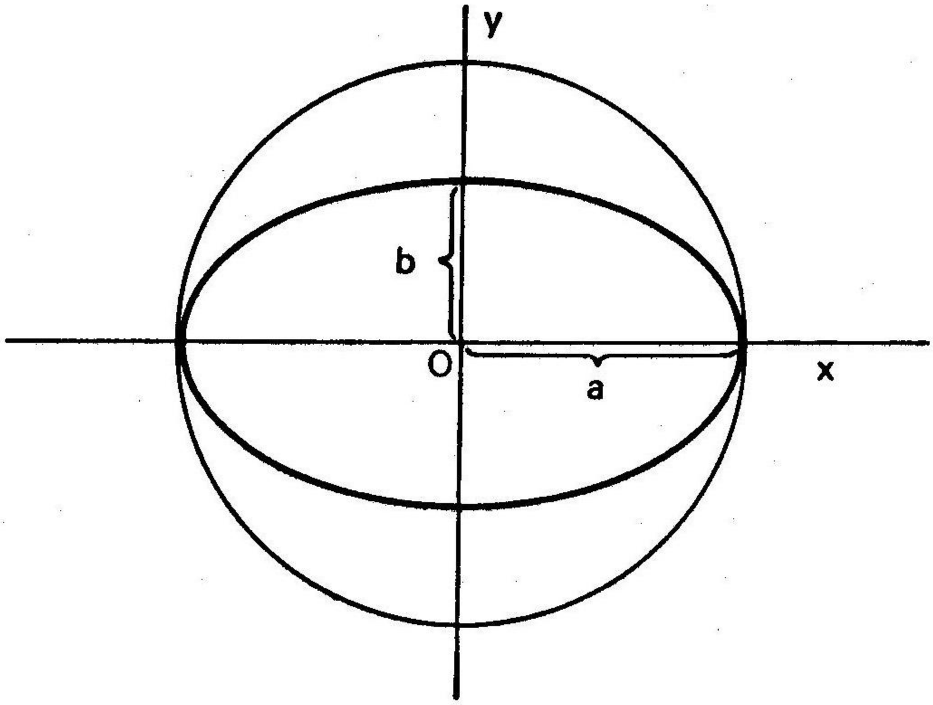
Como quer que seja, o método dos infinitésimos conserva um valor heurístico considerável, do qual há que tirar partido no ensino da matemática, se queremos que este seja autenticamente vivo e fecundo – ensino de *ciência que se faz* e não ensino de *ciência feita.*

Na 'Nota Histórica' do capítulo V do *Compêndio de Álgebra* indica-se como o método dos infinitésimos pode ser usado para *descobrir* a fórmula da área do círculo (uma vez conhecida a fórmula do perímetro). Poder-se-ia então encorajar os alunos a *redescobrirem* por este método a fórmula do volume da esfera, supondo já conhecidas as fórmulas que dão o volume do cone e a área da esfera([1]).

Mas isto, afinal, já deveria ter sido feito no 2.º ciclo, antes de se passar à demonstração pelo método dos limites, que, como é sabido, permite alcançar mais tarde um completo rigor lógico. Na verdade, o interesse do aluno será muito maior, quando se trata de redescobrir um facto que seja *realmente novo* para ele. Um exemplo simples e sugestivo, no 3.º ciclo, será o da *fórmula da área da elipse,* redescoberta pelo referido método, a partir da fórmula da área do círculo.

---

(1) Estas considerações podem ser transmitidas ao aluno sob a forma de leituras, antes de se entrar no cálculo integral.




Consideremos uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

num referencial ortonormado (1). Resolvendo a equação em ordem a y obtém-se:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

(1) Não é indispensável que, nesta altura, já tenha sido feito o estudo sistemático das cónicas. Basta que o aluno saiba que é esta a equação da elipse, quando se tomam para eixos coordenados os eixos de simetria da elipse, ficando o eixo maior (de comprimento 2a) sobre o eixo dos x, e o eixo menor (de comprimento 2b) sobre o eixo dos y. Antecipações *informais* como esta podem mesmo ser úteis do ponto de vista didáctico.

Consideremos, por outro lado, a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Resolvendo esta em ordem a y obtém-se, agora:

$$(2) \qquad y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Comparando (2) com (1), vê-se que se passa afinal da circunferência para a elipse, por meio da transformação que *transforma cada ponto da circunferência no ponto da elipse de igual abcissa, sendo a ordenada desta igual ao produto da ordenada da primeira por* b/a. Como b/a é constante, vê-se que as ordenadas são assim todas *reduzidas* na mesma proporção, enquanto as abcissas se mantêm inalteradas (esta transformação é pois uma *afinidade,* como poderá ser reconhecido mais tarde).

Consideremos, agora, várias rectas paralelas ao eixo dos y, *muito próximas entre si.* O círculo limitado pela circunferência e o domínio limitado pela elipse ficam assim decompostos em *tiras muito estreitas, que se aproximam de rectângulos.* Usando a linguagem intuitiva dos infinitésimos, pode então dizer-se que cada um dos referidos domínios fica decomposto numa *infinidade de rectângulos de bases infinitésimas.* Então a área de cada um desses domínios é a soma das áreas dos respectivos rectângulos. Ora a área de cada rectângulo é o produto da base pela altura respectiva. Além disso, a cada rectângulo em que fica decomposto o círculo corresponde na elipse um rectângulo de igual base e de altura igual à do primeiro multiplicada por b/a. Logo a área limitada pela elipse será igual ao produto da área do círculo por b/a [1]. Representando a primeira por A,

---

[1] Subentende-se que o aluno é levado a fazer *por si* todas estas considerações, de contrário o método perderá o seu interesse, que é essencialmente *heurístico.*

virá, pois:

$$(3) \qquad A = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi a b$$

Assim, a validade desta fórmula surge clara ao nosso espírito, por via da intuição. É como se estivéssemos a *vê-la directamente com os olhos do espírito* (usando a linguagem de Platão). Mas impõe-se depois a *análise crítica* do resultado, lembrando mais uma vez o seguinte: o método usado é intuitivo, mas não rigoroso; não devemos confiar inteiramente na intuição, pois esta por vezes ilude-nos. A fórmula (3) pode ser estabelecida com rigor, pelo método dos limites. Aliás, como se verá depois, o cálculo integral oferece meios por assim dizer *mecânicos,* para a dedução desta e de outras fórmulas de áreas e de volumes. Trata-se porém de *técnicas de cálculo,* sem dúvida muito valiosas, e que por isso mesmo convém aprender e dominar, mas que *não iluminam o espírito com aquele lampejo de visão intuitiva imediata, própria do método heurístico dos infinitésimos.*

Foi aplicando este método que o frade italiano Cavalieri, professor de matemática na Universidade de Bolonha a partir de 1629, conseguiu descobrir várias fórmulas novas de áreas e de volumes. Em 1627, Cavalieri escrevia a Galileu, de quem fora aluno:

'Aperfeiçoei uma obra de geometria [...] e é coisa nova, não só quanto às coisas encontradas, mas também quanto ao modo de encontrá-las, por ninguém utilizado até agora, que eu saiba'.

Mas, de acordo com o que sucede geralmente na história da ciência, a novidade do método de Cavalieri é relativa. Ele próprio admite como seu precursor Kepler, e é muito provável que tenha sido também influenciado por Galileu. O *método dos indivisíveis* foi aperfeiçoado por Torricelli, que o aprecia nos seguintes termos:

'A nova teoria dos indivisíveis vai pelas mãos dos doutos como milagre de ciência, e por ela aprendeu o mundo que os séculos de Arquimedes e de Euclides foram os anos da infância para a ciência da nossa adulta geometria!'

Mas, como era inevitável, começaram a chover as críticas ao novo método, às quais respondia Pascal do seguinte modo em 1568:

'Tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la riguer et à la manière des anciens. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'utiliser ce langage'.

Aliás, é muito provável que também os antigos, em especial Arquimedes, tivessem seguido na investigação caminho semelhante ao deste método e o que só depois tivessem procurado demonstrar com rigor, aliás relativo, os resultados obtidos.

Note-se que os fundadores do cálculo infinitesimal foram fortemente influenciados por Cavalieri. Assim, por exemplo, Newton adoptou os termos 'fluentes' e 'fluxões' (introduzidos por Cavalieri), para designar, respectivamente, as funções e as respectivas derivadas. E os indivisíveis reaparecem sob a forma de diferenciais com Leibniz, que introduziu o sinal $\int$ de integral (deformação da letra S, inicial de 'soma'), para representar a soma dos indivisíveis, segundo Cavalieri.

A análise infinitesimal procurava exprimir o que, segundo os antigos, era inexprimível: a *mudança,* o eterno *fluir* da realidade, também chamado *devir* (do francês 'devenir'), simbolizado por Heráclito na sua célebre imagem do rio que *nunca é o mesmo*. Para os filósofos racionalistas (ou filósofos do Ser), cujo pensamento se reflecte na estruturação lógica da geometria, *a mudança* (e, em particular, *o movimento*) é uma série de contradições (ver os paradoxos de Zenão). Não é, pois, de admirar que tais contradições reapareçam no método dos infinitésimos cujo objectivo era nada menos do que matematizar o *fluir* do mundo físico. Ainda em fins do século XVIII Lagrange resumia nos seguintes termos o estado da análise infinitesimal (ver 'Nota Histórica' do Cap. V, *Compêndio de Álgebra*):

'Esta ciência é um formigueiro de contradições e se, apesar disso, conduziu a grandes resultados, é poque a infinita clemência de Deus dispôs as coisas de modo que os erros se compensassem uns aos outros'.

Tais contradições só puderam ser completamente eliminadas em fins do século passado, depois de se ter construído a análise sobre uma *teoria dos limites,* deduzida logicamente de uma axiomática *não contraditória* (p. ex. a das grandezas ou a dos números reais). Mas, note-se bem: aquelas contradições não impediram que a análise, associada à física, tivesse sido até então o mais rico manancial de ideias e de resultados, em toda a história da matemática. Mais, ainda, na logificação da análise, perde-se um elemento precioso, sem o qual é impossível qualquer progresso na ciência: *o dinamismo da intuição criadora.* Por isso mesmo, é de toda a conveniência que, na *fase inicial da investigação,* bem como na fase *heurística do ensino,* e nas *aplicações concretas,* se continue a usar a linguagem intuitiva, embora contraditória, dos infinitésimos, como se pode ver claramente a propósito dos integrais. Se não se proceder assim, corre-se o grave risco de criar sucessivas gerações deformadas mentalmente, inibidas de criar, por uma preocupação intempestiva de rigor lógico.

7. A teoria dos limites de sucessões, tal como se desenvolve no *Compêndio,* em estreita ligação com o cálculo numérico aproximado, estabelece desde logo uma *síntese da teoria com a prática,* na forma em que esta se apresenta com mais viva *actualidade:* a do cálculo numérico por meio de computadores. Escusado será acentuar quanto esta orientação deverá contribuir para despertar o interesse do aluno, que reage quase sempre com desagrado ao aspecto exclusivamente teórico e abstracto de uma teoria dos limites dada *a priori,* sem qualquer motivação. E note-se que, ao estímulo prático-intuitivo, se segue depois uma estruturação lógica perfeitamente rigorosa. É claro que falta ainda, como base, uma teoria dos números reais. Mas esta só deve ser dada *a posteriori,* segundo o método analítico da investigação, tal como se indica na ADVERTÊNCIA. E, deste modo, também se estará a seguir em parte a ordem histórica.

No n.º 30 faz-se o estudo do limite da função exponencial $a^n$, definida em $\mathbb{N}$, depois aplicado ao estudo da série geométrica no n.º 31. Desnecessário salientar a importância destes assuntos. No que se refere às expressões sinónimas 'crescimento exponencial' e 'crescimento em progressão geométrica' bastará lembrar que estas fazem hoje parte da linguagem das pessoas cultas; e adquiriram actualidade, aliás, inquietante, a propósito da tendência para crescimento exponencial que se manifesta hoje na população do Globo, e, por isso, também na *população escolar* (fenómeno conhecido por 'explosão escolar'), no consumo da energia eléctrica, etc.

*O exemplo histórico do tabuleiro de xadrez deveria ser familiar a todos os alunos que passam pelo ensino secundário.*

Aliás, estes e outros assuntos deveriam ser tratados logo no 2.º ciclo, por via intuitivo-racional, como se fazia há cerca de 35 anos. O programa de matemática no 2.º ciclo era então bastante mais desenvolvido e, sem dúvida dúvida, mais interessante, mais rico em sugestões e em ligações com o concreto, portanto mais atraente e formativo. É certo que o regime de 3 tempos lectivos por semana não chegava para um desenvolvimento eficaz desse programa. Mas três circunstâncias concorriam para que os bons professores pudessem cumpri-lo de maneira satisfatória, pelo menos em relação aos alunos bem dotados: 1) menor número médio de alunos por turma; 2) inexistência de colecções de exercícios-cliché, como as que se difundem actualmente, criando a ansiedade de os resolver, em número cada vez maior, *para se conseguir passar no exame;* 3) menor extensão dos programas de carácter informativo, que exigem grande esforço de memória e bloqueiam o espírito do aluno, impedindo-o de se concentrar e reflectir.

Nos tempos actuais o já referido fenómeno da *explosão escolar,* aumentando rapidamente a *quantidade* dos alunos, tende a degradar a *qualidade* do ensino.

A instituição de turmas-piloto, como está a ser feita em vários países, tem exactamente por fim salvar da avalanche a qualidade do ensino.

8. Impõe-se aqui uma observação quanto aos exercícios I, *b*), *d*), *e*) da p. 110 do 2.º volume. Bastará considerar o primeiro. Uma vez resolvido o exercício I, *a*), o aluno não terá dificuldade em *descobrir* a ideia-chave do que se lhe segue. Tem-se:

$$\sqrt[n]{5^n + 2^n} = \sqrt[n]{5^n \left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]} = 5\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Ora

$$1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 1 + 0 = 1$$

*Por intuição ou por hábito em situações análogas,* o aluno aceitará em seguida que

$$\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \to \sqrt[n]{1} = 1$$

Dum modo geral ele aceitará que

(1) $$x_n \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to 1$$

qualquer que seja a sucessão $x_n$ que tenda para 1. Porém, a demonstração rigorosa deste facto não é tão fácil como à primeira vista parece. O que se pode e convém é levar sucessivamente o aluno a tomar consciência do seguinte:

1.º Nenhum dos anteriores teoremas sobre limites permite demonstrar (1), pois que, no caso presente, o radicando e o índice da raiz *são ambos variáveis.*

2.º Utilizando, por exemplo, logaritmos decimais, tem-se:

$$\sqrt[n]{x_n} = (10^{\log x_n})^{1/n} = 10^{\frac{1}{n} \log x_n}$$

donde se deduz $\sqrt[n]{x_n} \to 10^{\frac{1}{\infty}} = 1$, admitindo que

(2) $$\lim (\log u_n) = \log (\lim u_n)$$

(3) $$\lim 10^{u_n} = 10^{\lim u_n}$$

quaisquer que sejam as sucessões convergentes $u_n$ e $v_n$, sendo $u_n > 0$, $\forall n$. Mais geralmente, vê-se deste modo que

(1') $$x_n \to a \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to 1 \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

3.º Não vale a pena demonstrar, por enquanto, os factos intuitivos (2) e (3), aos quais se *reduz* a demonstração de (1').

Estaremos assim, mais uma vez, a proceder à semelhança do que se faz em investigação. Se porventura Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace e outros mais tivessem ficado à espera de uma demonstração rigorosa dos seus resultados antes de os publicarem, não teriam sido possíveis os enormes progressos que, desde então até hoje, se têm realizado em matemática e nas ciências afins.

Os referidos exercícios conduzem, de modo natural, a *redescobrir* um método geral para o cálculo numérico de *todas* as raízes de uma equação algébrica: o *método de Graffe*. Os fundamentos deste método, relativamente elementar, são acessíveis a qualquer bom aluno que, porventura, sinta curiosidade pelo assunto. Por outro lado, as dificuldades de cálculo numérico inerentes ao método estão hoje em grande parte removidas pelos computadores electrónicos. Por isso não resistimos à tentação de o inserir no texto, a título facultativo, com exemplos numéricos, pensando sobretudo numa das várias incongruências que se verificam no *ensino universitário da matemática:* os alunos aprendem aí teorias, mais ou menos profundas, relativas a equações algébricas; mas se alguém lhes perguntar *como se calculam todas as raízes de uma dada equação algébrica, de grau arbitrário, com a aproximação que se queira,* terão de reconhecer que *não sabem.* Isto dá bem a nota de quanto o ensino tradicional da matemática tem sido afastado da realidade.

9. Para um ensino realista e actual da matemática, afigura-se indispensável a *síntese da análise numérica com a análise infinitesimal.*

A separação dos dois aspectos parece-nos um erro pedagógico, pelo menos na fase de iniciação.

Já se viu como os teoremas de cálculo numérico aproximado, de que se tratou no capítulo I, servem para demonstrar os teoremas do limite da soma, do produto, etc. No fundo, esses teoremas dizem-nos que *as funções* $x + y$, $xy$, $x/y$ (com $y \neq 0$) e $\sqrt[p]{x}$ (com $p \in \mathbb{N}$) *são contínuas,* tal como se observa no n.º 39, p. 147-148.

Depois, as *fórmulas dos desvios,* em que esses mesmos teoremas se baseiam, vão-nos fornecer as *regras de derivação da soma, do produto, do quociente e da raiz*. Deste modo, a coesão entre os diversos assuntos é reforçada consideravelmente e estamos a aproximar-nos de um dos ideais em ciência e pedagogia, que é: A UNICIDADE NA MULTIPLICIDADE.

Mas a ideia inicial, lançada no § 1. do capítulo I, ainda não foi explorada completamente. Para apreender todas as suas potencialidades, há que introduzir o *conceito de diferencial.* Aliás, este é indispensável para realizar eficazmente a *síntese da análise infinitesimal com as ciências experimentais (em especial com a física*), o que se impõe igualmente na fase de iniciação. E é ainda o ponto de vista do cálculo numérico que nos permitirá introduzir tal conceito de modo simples e natural, tornando-o palpável. Eis pois a orientação que propomos, para corrigir o aspecto demasiado formal com que o conceito é introduzido no texto.

Consideraremos, por exemplo, as FÓRMULAS APROXIMADAS DOS DESVIOS DA POTÊNCIA E DA RAIZ:

$$\Delta(x^n) \approx nx^{n-1}\,\Delta x \quad , \quad \Delta\sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,\Delta x$$

Como se vê, os coeficientes de $\Delta x$ são, respectivamente, as *derivadas de* $x^n$ *e de* $\sqrt[n]{x}$ *em ordem a* x. Assim, dum modo geral, dada uma função f que admita derivada finita num ponto x, é-se levado a considerar como *fórmula aproximada do desvio de* f(x) a seguinte:

$$\Delta f(x) \approx f'(x)\, \Delta\, x$$

ou ainda, pondo $f(x) = y$ :

$$(1) \qquad \Delta y \approx f'(x)\, \Delta x$$

sendo $\Delta y$ o desvio (ou acréscimo) correspondente a $\Delta x$, isto é:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Resta, porém, saber qual o *grau de aproximação* que a fórmula (1) pode fornecer. Para isso, recordemos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Então, se pusermos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = r$$

vê-se, por um lado, que

$$r \to 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0$$

e, por outro lado, que

$$(2) \qquad \Delta y = f'(x)\, \Delta x + r\, \Delta x$$

Mas o termo $r\Delta x$, *dividido por* $\Delta x$, tende para 0 com $\Delta x$. Portanto, passa-se da fórmula exacta (2) para a fórmula aproximada (1), desprezando o termo $r\Delta x$, que é *um infinitésimo com* $\Delta x$ *de ordem superior à de* $\Delta x$. Na prática, isto quer dizer o seguinte:

*O erro que se comete ao adoptar a fórmula* (1) *para calcular* $\Delta y$ *torna-se desprezável quando* $|\Delta x|$ *é suficientemente pequeno.*

Mas, o significado desta afirmação não será devidamente apreendido pelo aluno, se não se der logo em seguida um exemplo numérico simples. Seja

$$y = x^2 \quad , \quad x = 1{,}3 \quad , \quad \Delta x = 0{,}02$$

Então $y' = 2x$ e, assim:

$$\Delta y \approx 2x\Delta x = 2 \times 1{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}052 \tag{3}$$

Ter-se-á, pois:

$$y + \Delta y \approx x^2 + 2x\,\Delta x = 1{,}3^2 + 0{,}052 = 1{,}742$$

Por outro lado, o valor exacto de $\Delta y$ é:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 0{,}0524$$

O erro que se comete usando (3) é portanto $(\Delta x)^2 = 0{,}0004$, e *será desprezável se quisermos apenas* o *resultado amenos de* 0,001.

Posto isto, podem seguir-se as considerações da p. 155 do texto, a partir da linha 13, assim como a do n.º 42 sobre as regras de diferenciação. A propósito destas convém talvez chamar desde já a atenção do aluno para o seguinte:

A fim de simplificar as notações, convenciona-se escrever $dx^2$ em vez de $(dx)^2$, $dx^3$ em de $(dx)^3$, etc. Assim, sendo *n* um número natural qualquer, a potência *n* de dx será representada por $dx^n$ e o diferencial de $x^n$ por $d(x^n)$, isto é:

$$d(x^n) = nx^{n-1}\, dx$$

Por isso, também conviria escrever a fórmula aproximada do desvio da potência sob a forma

$$\Delta(x^n) \approx n\, x^{n-1}\, \Delta x$$

## III

## OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO II DO 2.º VOLUME

1. A análise infinitesimal é, sem dúvida, uma das mais belas e úteis criações do espírito, impondo-se quer pela elegância e fecundidade dos métodos, quer pela importância das aplicações. *Mais é sobretudo no cálculo integral que estes aspectos adquirem vulto.* Foi pelo cálculo integral que o método matemático afirmou, desde Newton, as suas altas potencialidades, numa das mais audaciosas tentativas da inteligência humana para interpretar o *devir* do mundo físico, de modo a ser capaz de prever, tanto quanto possível, os fenómenos naturais e de intervir no curso dos acontecimentos, produzindo-os ou evitando-os, conforme interessa. Não foi sem razão que Newton deu à sua obra o título PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (1).

Daí o elevado valor formativo do cálculo integral, desde que seja ensinado de maneira conveniente (2). Excluí-lo por completo do ensino liceal é privar os alunos de um dos factores essenciais de

---

(1) Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.

(2) Não se deve no entanto minimizar o interesse do cálculo diferencial, que permitiu a Newton *deduzir* das leis de Kepler a lei da gravitação universal.

formação de *cultura científica*, condicionando-os demasiado à ciência imobilista dos Gregos, que não puderam ir além da geometria e da estática. E quem diz 'cultura científica', diz 'cultura moderna'. Pois pode haver cultura sem base científica, na era em que vivemos?

Por outro lado, é preciso ter presente que o cálculo integral e o cálculo diferencial nasceram conjuntamente como frutos da mesma intuição, como aspectos complementares do mesmo método e como meios para o mesmo fim: a aplicação da matemática ao estudo dos fenómenos naturais. Portanto, separá-los inteiramente no ensino é uma amputação deplorável, um erro pedagógico que se irá repercutir mais tarde em inibições mais ou menos profundas no espírito do aluno.

E recordemos uma vez mais este facto várias vezes apontado: a análise infinitesimal nasceu com a física e com esta assumiu rápido incremento, num processo típico de interacção. Grandes matemáticos — tais como Newton, Lagrange, Fourier, Gauss, Hamilton, etc. — foram ao mesmo tempo grandes físicos. E ainda hoje é da física que a análise recebe o estímulo mais vigoroso. Mantêm viva actualidade as seguintes palavras de Henri Poincaré na sua obra intitulada '*La valeur de la science*':

> Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.
>
> Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.
>
> Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.
>
> Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles?

C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne pouvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres.

Quand même le but physique et le but esthétique ne seraient pas solidaires, nous ne devrions sacrifier ni l'un l'autre.

Mais il y a plus: ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un c'est de viser l'autre, en du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applicatinos.

Le mathématicien ne doit pas être pour le physicien un simple fournisseur de formules; il faut qu'il y ait entre eux une collaboration plus intime.

La physique mathématique et l'analyse pure ne sont pas seulement des puissances limitrophes, entretenant des rapports de bon voisinage; elles se pénétrent mutuellement et leur esprit est le même.

C'est ce que l'on comprendra mieux quand j'aurai montré ce que la physique reçoit de la mathématique et ce que la mathématique, en retour, emprunte à la physique'.

Poincaré indica primeiro o que a física deve à matemática:

'Le physicien ne peut demander à l'analyste de lui révéler une vérité nouvelle; tout au plus celui-ci pourrait-il l'aider à la pressentir.

Il y a longtemps que personne ne songe plus à devancer l'experience, ou à construire le monde de toutes pièces sur quelques hypothèses hâtives. De toutes ces constructions ou l'on se complaisait encore naivement il y a un siècle, il ne reste plus aujourd'hui que des ruines.

Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis.

Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques: elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler'.

E mais adiante:

'Mais ce n'est pas tout; la loi sort de l'expérience, mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale;

l'expérience n'est qu'approchée, la loi est précise ou du moins prétend l'être. L'expérience se fait dans des conditions toujours complexes, l'énnoncé de la loi élimine ces complications. C'est ce qu'on appelle «corriger les erreurs systématiques».

En un mot, pour tirer la loi de l'expérience, il faut généraliser; c'est une nécessité qui s'impose à l'observateur le plus circonspect.

Mais comment généraliser? Toute vérité particulière peut évidemment être étendue d'une infinité de manières. Entre ces mille chemins qui s'ouvrent devant nous, il faut faire un choix, au moins provisoire; dans ce choix, qui nous guidera?

Ce ne pourra être que l'analogie. Mais que ce mot est vague! L'homme primitif ne connait que les analogies grossières, celles qui frappent les sens, celles des couleurs ou des sons. Ce n'est pas lui qui aurait songé à rapprocher par exemple la lumière de la chaleur rayonnante.

Qui nous a appris à connaitre les analogies véritables, profundes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine?

C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers.

Si les quaternions, dont je viens de parler, n'avaient été si promptement utilisés par les physiciens anglais, bien des personnes n'y verraient sans doute qu'une rêverie oiseuse, et pourtant, en nous apprenant à rapprocher ce que les apparences séparent, ils nous auraient déjà rendus plus aptes à pénétrer les secrets de la nature.

Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité, il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste.

Ce que nous lui demandons c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui s'offre à nous. Or, celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut!

E, depois de examinar alguns exemplos históricos que ilustram o seu ponto de vista (a lei da gravitação universal de Newton, a teoria matemática do electromagnetismo de Maxwel, que precedeu de 20 anos a descoberta experimental das ondas hertzianas, e as analogias matemáticas que permitiram aproximar a hidrodinâmica, do electromagnetismo e da termodinâmica), Poincaré conclui:

'Ainsi les analogies mathématiques, non seulement peuvent nous faire pressentir les analogies physiques, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.

En résumé, le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.

Il est encore, il est surtout de lui faire connaitre l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais.

De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir!

Em seguida Poincaré aponta o que a matemática deve à física:

'Il faudrait avoir complètement oublié l'histoire de la science pour ne pas se rappeler que le désir de connaitre la nature a ou sur le développement des mathématiques l'influence la plus constante et la plus heureuse.

En premier lieu, le physicien nous pose des problèmes dont il attend de nous la solution. Mais en nous les proposant, il nous a payé largement d'avance le service que nous pourrons lui rendre, si nous parvenons à les résoudre.

Si l'on veut me permettre de poursuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur, serait semblable à un pointre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraieht défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.'

E mais adiante:

'Mais ce n'est pas tout; la physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières.

Elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements.

J'ai parlé plus haut de l'équation de Laplace que l'on rencontre dans une foule de théories physiques fort éloignées les unes des autres. On la retrouve en géométrie, dans la théorie de la représentation conforme et en analyse pure, dans celle des imaginaires.

De cette façon, dans l'étude des fonctions de variables complexes, l'analyste, à côté de l'image géométrique, qui est son instrument habituel, trouve plusieurs images physiques dont il peut faire usage avec le même succès.

Grâce à ces images, il peut voir d'un coup d'oeil ce que la déduction pure ne lui montrerait que successivement. Il rassemble ainsi les éléments épars de la solution, et par une sorte d'intuition devine avant de pouvoir démontrer.

Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes?

Combien de vérités que les analogies physiques nous permettent de pressentir et que nous ne sommes pas en état d'établir par un raisonnement rigoureux!'

2. É, portanto, útil que o ensino da análise não seja inteiramente dissociado do das ciênicas físico-naturais. Torna-se aqui bem evidente o facto a que diversas vezes temos aludido e que Poincaré deixou expresso em termos lapidares: a intuição precede geralmente a lógica, no processo de criação matemática. E o ensino deve respeitar esta ordem, se não quisermos abafar no aluno o espírito de pesquisa, obrigando-o a admirar passivamente (ou a detectar) uma construção acabada e perfeita.

Convém recordar, por outro lado, que os métodos da análise se tornavam inaplicáveis em muitos casos – sobretudo no domínio da técnica – por originarem cálculos numéricos inexequíveis. Mas os computadores trouxeram a possibilidade de vencer grande parte dessas dificuldades, com repercussões no progresso técnico-científico, hoje patentes ao mundo inteiro. Assim, para estar de acordo com o espírito da época, a iniciação na análise infinitesimal – e, mais ainda, no cálculo integral – deve subordinar-se, tanto quanto possível, ao ponto de vista do cálculo numérico automático.

3. É claro que, dos elementos de cálculo integral, só podemos exigir, no ensino secundário, o *quantum satis*. Mas a escolha terá de ser muito criteriosa, para que não se esteja a fazer sementeira inútil ou, pior ainda, prejudicial. O objectivo é lançar algumas ideias mestras, *de maneira que possam realmente germinar.* Exactamente o oposto do que se está fazendo cada vez mais: afogar desde logo as ideias em cálculos puramente formais, que o aluno acabará por executar mecanicamente – e mal. Não quer isto dizer, de modo algum, que não se devam também fazer alguns cálculos! Sucede até que os exercícios de primitivação, *especialmente os de primitivação imediata,* oferecem uma excelente oportunidade para que o aluno se possa aperfeiçoar nas técnicas de cálculo, que requerem uma certa iniciativa e um certo desembaraço, quando se trata de transformar uma dada expressão numa outra equivalente, *adaptando-a ao fim em vista.*

Mas é na motivação concreto-intuitiva do conceito de integral e na sua definição que se deve pôr o máximo de empenho, procurando fazer sentir ao aluno a beleza e o interesse empolgante do assunto. O que é essencial aqui, mais uma vez, é acender-lhes no espírito a chama da ideia: *o resto virá por acréscimo.* Que estejam seguros desta verdade eterna os mestres a quem comece a minguar a fé, o que é aliás compreensível, atendendo ao condicionalismo geral do nosso ensino.

Se não houver tempo – o que é bem provável – podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar, pelas razões acima invocadas.

4. Quanto aos *métodos elementares de primitivação,* pode-se, em caso de necessidade, omitir, na prática, os dois últimos: primitivação por partes e primitivação por substituição. Importa, no entanto,

fazer-lhes uma breve referência, dizendo que provêm, respectivamente, das regras de derivação do produto e da função composta, e dando um ou dois exemplos, mas só de primitivação por partes. *Isto pode ser feito antes de introduzir o conceito de integral, ao contrário do que se indica em nota no* Compêndio, *uma vez que se gaste pouco tempo com o assunto.*

É certo que aparecem depois exemplos importantes em que intervém o método de substituição. Um desses exemplos é o da função *exponencial integral,* dada pela fórmula $\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{Li}(e^x)$; mas nesse caso basta verificar directamente (aplicando a regra de derivação das funções compostas) que se tem, pondo $e^x = u$,

$$D_x \mathrm{Ei}(x) = D_u \mathrm{Li}(u) \cdot D_x u$$

$$= \frac{1}{\log u} \cdot e^x = \frac{e^x}{x}$$

e que, portanto, $\mathrm{Ei}(x)$ é *uma primitiva de* $e^x/x$.

O outro exemplo é o cálculo da área da elipse, por meio do integral

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Mas aí pode-se evitar o cálculo do integral por meio da primitiva, notando que o valor de

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

é precisamente a *área de um quarto de círculo de centro* O *e raio* a. Ter-se-á, pois:

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{4} = \frac{1}{4} \pi ab$$

e, assim, a área pedida será $\pi ab$ (cf. n.º 6 deste *Guia*). É claro que neste cálculo intervém a propriedade segundo a qual o *integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo integral da função.*

Deste modo se evita submergir desde logo o aluno em cálculos mais ou menos fastidiosos, o que, como se observou atrás, só contribui para lhe ocultar o mais importante, que são as ideias.

5. No exemplo da p. 240 do *Compêndio*, houve um erro curioso, e convém desde já mostrar o partido que se pode muitas vezes tirar, pedagogicamente, *de certos erros.*

Está subentendido, no texto, que os valores aproximados foram obtidos segundo a fórmula

$$S_n = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

em que $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ são os valores da função integranda f nos *extremos inferiores* dos intervalos de decomposição:

$$y_0 = f(x_1) \quad , \quad y_1 = f(x_1) \quad , \quad \dots \quad , \quad y_{n-1} = f(x_{n-1})$$

Se, em vez disso, considerarmos os valores de f nos extremos superiores dos referidos intervalos, obtemos, para o cálculo dos valores aproximados do integral, a fórmula

$$T_n = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

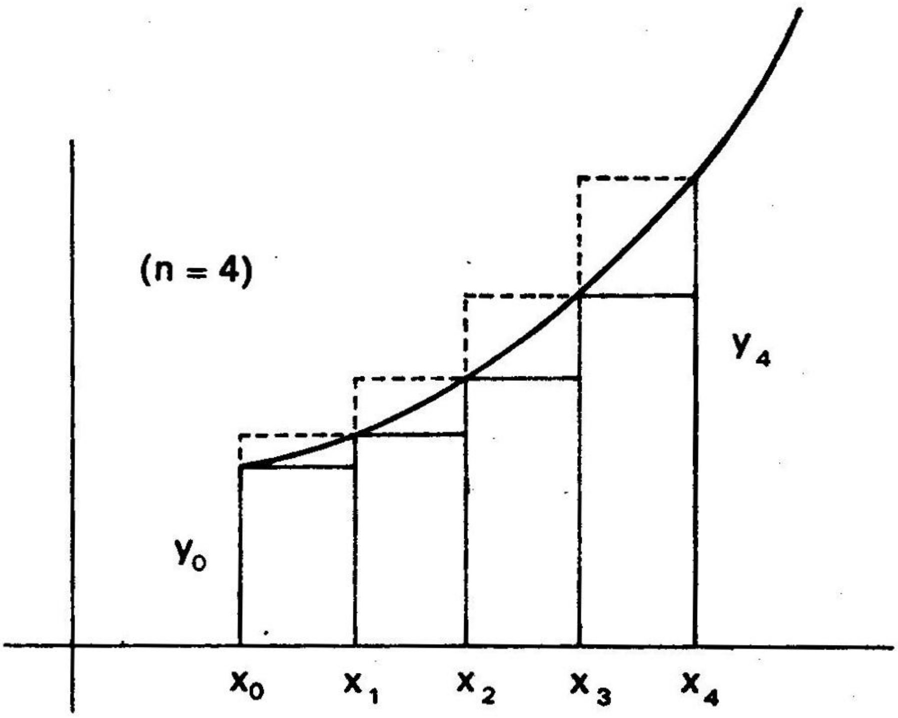
em que $y_n = f(x_n)$.

Ora sucede que, neste caso, a função integranda, $e^x/x$, é *crescente no intervalo de integração* [1,5], como se pode ver facilmente por meio da derivada. Ter-se-á, pois:

$$y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n$$

donde se conclui que

$$S_n < T_n$$



Mais ainda, o significado geométrico do integral mostra-nos claramente que se tem, neste caso:

$$S_n < \int_a^b f < T_n$$

para todo o valor de n.

Então, um majorante do erro de $S_n$, como valor aproximado do integral, será:

$$T_n - S_n = \frac{b-a}{n} [(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})]$$

$$= \frac{b-a}{n} (y_n - y_0)$$

ou seja:

$$T_n - S_n = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]$$

Ora, no caso em estudo, tem-se $a = 1$ , $b = 5$ e (1)

$$f(1) = e \approx 2{,}7 \quad , \quad f(5) = \frac{e^5}{5} \approx \frac{150}{5} = 30$$

---

(1) Basta utilizar a régua de cálculo.

donde, para n = 1280:

$$T_n - S_n \approx \frac{4 \times 27{,}3}{1280} < \frac{110}{1280} < 0{,}1$$

O erro será, portanto, inferior a 0,1 e a observação da figura mostra que não deve andar longe de metade de 0,1, ou seja 0,05. Assim, o último valor obtido por este processo só deveria estar aproximado até às décimas, ou seja com 3 algarismos exactos (38,2). Como se explica que, pelo contrário, apareça com 5 algarismos exactos (ou mesmo 6), nos cálculos efectuados?

A razão, que depois apurámos, é a seguinte:

Pela força do hábito, o programa elaborado para este fim no L.N.E.C. não mandava calcular os valores da função nos extremos inferiores nem nos extremos superiores – mas sim nos *pontos médios* dos intervalos parciais! Daí resultou, sem qualquer agravamento de trabalho para a máquina, *uma precisão muito maior,* o que aliás se compreende recorrendo mais uma vez à figura: neste caso, cada rectângulo estará compreendido entre dois, correspondentes aos dois casos anteriores, o que dá uma compensação considerável dos respectivos erros.

Este simples exemplo mostra como, por vezes, uma ligeira modificação no método de cálculo numérico adoptado, pode aumentar grandemente a sua eficiência. E mostra também como a prática do cálculo automático pode chamar a atenção para factos importantes. *Na verdade, o uso dos computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos.*

Interessa, agora, ver quais os valores aproximados que se obtêm pelos dois primeiros processos indicados. São os seguintes, para n = 40, 80, 160, 320, 640, 1280:

| $S_n$ | $T_n$ |
|---|---|
| 36,961691 | 39,658128 |
| 37,620962 | 38,969180 |
| 37,954306 | 38,628415 |
| 38,121906 | 38,458961 |
| 38,205937 | 38,374465 |
| 38,248011 | 38,332275 |

*Como se vê, o último valor é de facto aproximado apenas até às décimas.*

Surge, entretanto, a ideia de tomar como valores aproximados as semi-somas de $S_n$ com $T_n$. Ora

$$\frac{S_n + T_n}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

Assim, os valores obtidos serão as somas dos números

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}, \dots, \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

que dão as áreas de sucessivos trapézios de altura $(b-a)/n$ e de bases $y_0, y_1, \dots, y_n$: trata-se do *método dos trapézios,* que consiste em substituir a função integranda, em cada intervalo parcial, pela *função linear* que toma o mesmo valor nos extremos, o que equivale a substituir o gráfico pela respectiva *corda* (Cf. p. 291 do *Compêndio*).

Os valores obtidos por este método são os seguintes:

38,309909
38,285071
38,291361
38,290433
38,290201
38,290143

Comparando-os com os valores obtidos pelo primeiro processo (p. 240 do *Compêndio*), vê-se que não houve vantagem sensível.

Há, no entanto, um método bastante mais potente que o dos trapézios, para o cálculo de integrais: é a *regra de Simpson,* que consiste em substituir a função integranda, em cada par de intervalos sucessivos, pela função quadrática que toma os mesmos valores nos três extremos consecutivos (Cf. p. 292 e 196-197 do *Compêndio*).

38,290137 $(n = 40)$
38,290125 $(n = 80)$
38,290124 $(n = 160)$

Estes valores mostram que, logo no primeiro, correspondente a $n = 40$, se obteve a mesma aproximação que com os primeiros – ou sejam precisamente 5 algarismos exactos. Neste caso, como se vê, a vantagem da regra de Simpson é grande. Observe-se que o menor número de parcelas diminui consideravelmente os erros de arredondamento, permitindo-nos agora garantir que o algarismo das décimas milésimas é efectivamente exacto.

Mas, neste caso, em que a função integranda é $e^x/x$, o método mais aconselhável é de longe o método de integração por séries, que se pode aplicar a esta função (Cf. p. 304-305 do

*Compêndio*). Neste caso, o tempo de cálculo na máquina é insignificante: praticamente, o que conta é o tempo da teleimpressão. Aliás, convém aqui observar que a maior parte dos cálculos automáticos a que se referem os exemplos do *Compêndio* foram programados em *linguagem Algol*, que é muito cómoda para o programador, mas exige bastante mais tempo do que o *código de máquina*.

Observe-se ainda como bastou um exemplo, tomado como *centro de interesse*, para pôr imediatamente o aluno em contacto com várias linhas mestras do cálculo integral, do ponto de vista teórico-prático, e para mostrar em que consiste afinal, no campo da análise, a *verdadeira prática*, muito diferente da pseudoprática dos cursos tradicionais, secundários ou universitários, feita à base de inúmeras receitas que na maioria dos casos nunca virão a ser aplicadas.

Haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino destes assuntos fosse normalmente orientado a partir de centros de interesse como o anterior – e tanto quanto possível *laboratorial*, isto é, baseada no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo.

# IV

## PROBABILIDADES, ESTATÍSTICA, E CIÊNCIA EXPERIMENTAL

1. A introdução ao cálculo das probabilidades terá de ser muito mais breve do que se projectou inicialmente e deverá ser tratada no final do 7.º ano. Os assuntos a manter serão aqueles tratados nos seguintes números do último capítulo do *Compêndio de Matemática, 1.º volume, 2.º tomo:*

N.º 7 (sem referência necessária à lógica de atributos), n.º 9 (exceptuada a definição 2 e tudo o que se lhe segue), n.ºs 10, 11, 12 e 13, n.º 19 (excepto o que se refere à distribuição binomial) e n.º 20 (excluídos os pormenores relativos a seguros de vida, a partir da p. 275). Convém ainda que os alunos leiam a nota da p. 223.

No n.º 7 é preciso dar exemplos de operações lógicas sobre acontecimentos. Pode-se recorrer aos exemplos das bolas que se tiram duma urna, dos resultados de um desafio de futebol, etc. Assim, se tivermos numa urna bolas brancas e bolas pretas numeradas de 1 a 20 e se designarmos, respectivamente, por $\alpha$ e por $\beta$ os acontecimentos *sair bola branca* e *sair número par*, então $\alpha\beta$ é o acontecimento *sair bola branca com número par*, $\alpha + \beta$ é o acontecimento *sair bola branca ou número par*, $\tilde{\alpha}$ o acontecimento não sair bola branca (equivalente neste caso a *sair bola preta*), etc.

No n.º 9 as propriedades das frequências relativas devem ser introduzidas a partir de exemplos como os anteriores. A propriedade IV pode ser omitida, bastando considerar a propriedade V, caso particular da primeira, e que se pode introduzir facilmente a partir do exemplo inicial dos resultados de um desafio de futebol. A demonstração no caso geral é fácil:

Seja *n* o número total de provas, $\mu$ a frequência absoluta de $\alpha$ e $\nu$ a frequência absoluta de $\beta$. Como $\alpha$ e $\beta$ são *incompatíveis,* o acontecimento $\alpha+\beta$ ($\alpha$ ou $\beta$) verifica-se ao todo $\mu+\nu$ vezes na sequência de n provas. Portanto a frequência relativa de $\alpha+\beta$ será:

$$\text{fn }(\alpha+\beta) = \frac{\mu+\nu}{n} = \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n} = \text{fr}(\alpha) + \text{fr}(\beta)$$

Devem seguir-se exemplos com bolas.

O conceito empírico, quantitativo, da probabilidade (p. 231) deve ser introduzido experimentalmente, por lançamento de moedas e de *punaises*. É imprescindível que o aluno não fique a ter a *ideia errada* de que a probabilidade é o limite para que tende a frequência relativa, quando o número de provas tende para infinito. O que se pode dizer apenas é o seguinte:

*Em certos casos de prática, podemos admitir que a frequência relativa se aproxima cada vez mais de um certo número (a probabilidade do acontecimento), quando o número de provas aumenta consideravelmente.* Mas esta aproximação não se faz, de modo nenhum, com o rigor lógico da teoria dos limites: é uma *aproximação empírica,* em que intervêm sempre as irregularidades e as contingências do acaso. Aliás, na prática, não faz sequer sentido falar de *valor exacto* da probabilidade de um acontecimento, do mesmo modo que não faz sentido falar da *medida exacta* do comprimento de uma mesa ou da energia eléctrica gasta num certo período. É preciso pois, mais uma vez, adoptar aqui a atitude mental própria da matemática aplicada, em que o *rigor lógico* cede o lugar à *intuição* e ao *bom senso*. É claro que também no n.º 12 o teorema 3 poderá ser omitido.

2. Há um mínimo de elementos de estatística que se impõe dar no ensino secundário, em anos futuros, se não quisermos ficar lamentavelmente atrasados em relação a outros países. Aliás, esses elementos deverão ser introduzidos progressivamente, desde muito cedo, logo a partir do 1.º ciclo, juntamente com *aplicações da matemática à vida corrente, à economia,* etc. Tal introdução pressupõe, evidentemente, um aumento do número de tempos lectivos de matemática, no 1.º e no 2.º ciclos, elevando-o, se possível, até seis horas por semana, à semelhança do que se verifica em vários países estrangeiros. Observe-se entretanto que, há uns 35 anos, o programa de matemática do 2.º ciclo incluía *juros compostos, anuidades,* etc., além do estudo dos logaritmos. A pouco e pouco, pelas razões atrás expostas, o ensino da matemática nos nossos liceus foi-se esvaziando de todo o conteúdo concreto, até se reduzir a um formalismo quase inteiramente oco, que o aluno não consegue dominar, em grande parte porque esse jogo de símbolos não lhe diz nada. É tempo de começar a remar contra a corrente.

3. Entre os elementos de estatística a introduzir no 3.º ciclo figura imprescindivelmente o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO A PROBLEMAS DE REGRESSÃO.

O método de indução experimental, tal como se descreve no

*Compêndio*, aplica-se apenas ao estabelecimento de leis qualitativas, tais como:

'O gelo flutua na água'

'O calor dilata os gases'

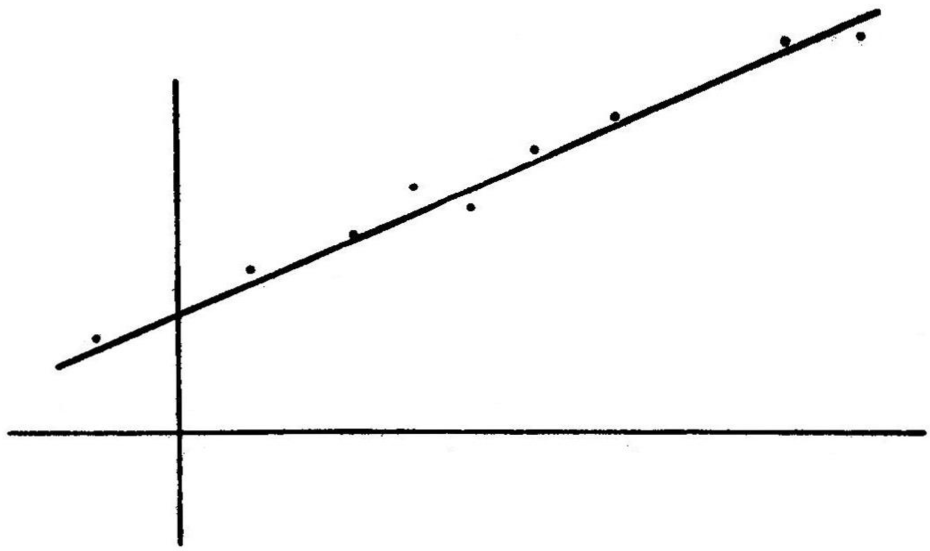
'O volume dum gás diminui quando a pressão aumenta', etc.

Porém, as leis de maior interesse, as que marcam um nítido progresso científico em relação às primeiras, são as LEIS QUANTITATIVAS. Por exemplo, pode ter algum interesse prático saber que o calor dilata os gases, mas tem muito mais interesse saber *de que modo o volume de um gás varia quantitativamente com a temperatura*.

Suponhamos que se ignorava esta lei e que se queria investigar, por exemplo, como o volume de uma dada porção de hidrogénio varia com a temperatura. Então o que haveria a fazer seria um *número razoável de experiências em que o gás fosse submetido a diversas temperaturas sob pressão constante* (1) *e proceder a medições, tão precisas quanto possível, das temperaturas e dos respectivos volumes*. Os dados experimentais assim colhidos seriam registados numa *tabela numérica*. Contudo, para poder tirar conclusões das experiências, estaria indicado recorrer a uma *representação gráfica* dos pares de números obtidos, tomando por exemplo, para abcissas, as temperaturas e para ordenadas os volumes correspondentes.

---

(1) Uma vez verificado que a pressão é o outro factor que influi no volume do gás.



Verificar-se-ia então que os pontos se encontram *sensivelmente* em linha recta. Isto viria logo reforçar no espírito a seguinte *ideia* (ou *hipótese*), que se tem *a priori*, por intuição:

*O volume do gás é uma função linear da temperatura.*

Todavia, em rigor, os pontos nunca estarão em linha recta, visto que as medidas são sempre aproximadas, a pressão nunca pode ser rigorosamente constante, etc. Nestas condições, não existe nenhuma recta que passe pelos referidos pontos: existem apenas rectas que se *aproximam mais ou menos* desses pontos, considerados em conjunto. Qual dessas rectas convém pois escolher, isto é, qual é a função linear que mais *se ajusta* a exprimir a variação do volume com a temperatura?

Estamos aqui em presença de um PROBLEMA DE REGRESSÃO, e mais precisamente, de um PROBLEMA DE REGRESSÃO LINEAR.

Suponhamos, agora, que se tratava de averiguar como o volume do gás (hidrogénio) varia com a pressão, a temperatura constante. Neste caso, a experiência mostraria que o volume do gás se reduz sensivelmente a metade, a um terço, etc., quando a pressão duplica, triplica, etc. A hipótese que se apresenta agora é a de uma LEI DE PROPORCIONALIDADE INVERSA, isto é, uma lei do tipo:

$$pv = k \quad , \quad \text{com } k \text{ constante}$$

O gráfico de uma tal relação é, como se sabe, uma hipérbole equilátera, que tem por assímptotas os eixos coordenados. Mas, na prática, não existirá nenhuma dessas hipérboles que passe rigorosamente pelos pontos representativos dos pares de valores observados. *Em geral, a hipótese estatística não se verifica exactamente: o que se trata então é de determinar a constante* k *de modo que a hipérbole se ajuste o mais possível ao conjunto de pontos.*

Mas, por enquanto, não sabemos ainda, precisamente, o que significa a expressão 'ajusta-se o mais possível'. Estamos agora em presença de um PROBLEMA DE REGRESSÃO CURVILINEA.

Antes de ver como se resolvem tais problemas, observemos que o *raciocínio de indução* interveio no estabelecimento das leis de Gay-Lussac e de Mariotte do seguinte modo:

A ideia de que o *volume de um gás é função linear da temperatura (a pressão constante) e é inversamente proporcional à pressão (a temperatura constante)* tem sido confirmada *aproximadamente* num grande número de experiências, efectuadas não só com o hidrogénio mas também com vários outros gases – desde que a temperatura ou a pressão variem dentro de certos limites, dependentes da natureza do gás. Isto não dá, porém, a *certeza absoluta* de que essas leis não venham a falhar de maneira muito acentuada numa experiência futura.

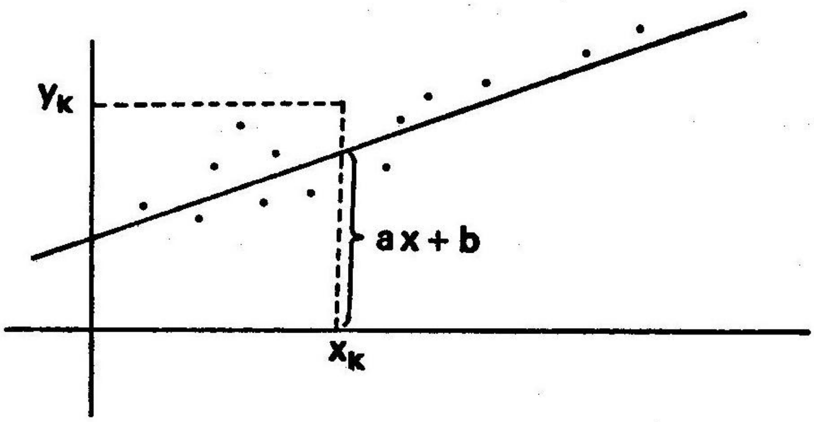
Por outro lado, é sabido que a *equação de Van der Waals* dá, nestes casos, uma aproximação bastante melhor do que a fornecida pela *equação dos gases perfeitos,* que engloba as duas referidas leis.

4. Para a resolução dos problemas de regressão existem vários métodos não equivalentes, cuja escolha é mais ou menos arbitrária. Um desses é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, que passamos a expor, no caso da regressão linear. Suponhamos o seguinte:

Admite-se a hipótese de que certa grandeza Y seja aproximadamente função linear de outra gradeza X. Para verificar esta hipótese, fizeram-se várias experiências e obtiveram-se *n* pares de números,

$$(x_k, y_k) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

em que, para cada valor de k, $x_k$ é uma medida de X e $y_k$ é uma medida correspondente de Y.




Representaram-se graficamente estes pares de números (usando um referencial cartesiano) e verificou-se que os pontos obtidos são *aproximadamente* colineares [1]. Pretende-se, agora, calcular dois números *a* e *b* de modo que a função linear

(1) $$y = ax + b$$

---

[1] Aqui a palavra 'aproximadamente' será tomada num sentido mais ou menos lato, conforme o assunto a ser estudado.

se *ajuste o mais possível* ao conjunto dos pontos obtidos. Este problema de *ajustamento* (ou de *regressão*) pode ser interpretado de vários modos, um dos quais é o que vamos descrever:

Quaisquer que sejam os números *a* e *b*, a fórmula (1) dá, para cada valor $x_k$ de x, o valor

$$y_k^* = ax_k + b\,, \tag{2}$$

que, *em geral*, é distinto de $y_k$ (para k = 1, ..., n). A diferença $y_k^* - y_k$ entre o *valor calculado*, $y_k^*$, e o *valor observado*, $y_k$, chama-se *desvio*. Posto isto, pretende-se determinar *a* e *b*, de modo que a soma *dos quadrados dos desvios*

$$Q = (y_1^* - y_1)^2 + (y_2^* - y_2)^2 + \ldots + (y_n^* - y_n)^2$$

seja *mínima*.

Trata-se agora, como se vê, de um problema de MATEMÁTICA PURA, enunciando de maneira precisa – problema que vamos resolver. Atendendo a (2), a soma dos quadrados dos desvios será:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (y_k^* - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2 \tag{3}$$

Ora(1)

$$(ax_k+b-y_k)^2 = a^2x_k^2 + b^2+y_k^2 + 2abx_k - 2ax_ky_k - 2by_k$$

(1) É fácil ver que se tem $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Somando, agora, as *n* expressões que resultam desta para $k = 1, 2, \ldots, n$ e usando simplesmente o sinal $\Sigma$ em vez de $\sum_{k=1}^{n}$, obtemos:

$$Q = a^2 \Sigma x_k^2 + nb^2 + \Sigma y_k^2 + 2ab\Sigma x_k - 2a\Sigma x_k y_k - 2b\Sigma y_k$$

Ponhamos, para simplificar:

$$\Sigma x_k y_k = [xy] \quad , \quad \Sigma x_k^2 = [xx] \quad , \quad \Sigma y_k^2 = [yy]$$

$$\Sigma x_k = [x] \quad , \quad \Sigma y_k = [y]$$

Então $\Sigma(y_k^* - y_k)^2$ será igual a

(4) $$Q = [xx]\,a^2 + nb^2 + [yy] + 2\,[x]\,ab - 2\,[xy]\,a - 2\,[y]\,b$$

Como se vê, Q é uma função quadrática das variáveis *a* e *b*. O que se pretende é determinar *a* e *b* de modo que o *valor da função seja mínimo*. Ora, *para cada valor atribuído* b, a função reduz-se a um polinómio do 2.º grau em *a*, em que o coeficiente de $a^2$ é $[xx] > 0$. Assim, sendo b constante, existe um valor de *a* que torna a função mínima; esse valor é o que *anula a derivada da função em ordem a* a:

(5) $$Q'_a = 2\,[xx]\,a + 2\,[x]\,b - 2\,[xy]$$

Analogamente se vê que, *para cada valor atribuído* a, existe um valor de b que torna a função mínima; esse valor é o que *anula a derivada em ordem a* b:

(6) $$Q'_b = 2nb + 2\,[x]\,b - 2\,[y]$$

*Parece,* pois, que Q tomará um valor *menor que qualquer outro,* sse *a* e *b* verificarem simultaneamente (5) e (6), isto é, sse verificarem o sistema de equações:

$$\begin{cases} [xx]\ a + [x]\ b = [xy] \\ [x]\ a + n\ b = [y] \end{cases}$$

Ora este sistema tem sempre uma única solução, que é dada pelas fórmulas:

$$a = \frac{n[xy] - [x]\ [y]}{n[xx] - [x]^2}\ , \quad b = \frac{[xx]\ [y] - [x]\ [xy]}{n\ [xx] - [x]^2}$$

Serão, pois, estas fórmulas que resolvem o problema, tal como foi posto(1).

EXEMPLO. O exemplo que vamos apresentar encontra-se na obra de Finney *'An introduction to statistical science in agriculture'* e é uma adaptação de resultados expostos pelo Sr. Engenheiro Augusto José de Oliveira, num seu trabalho de investigação publicado na revista 'Agronomia Lusitana', vol. 8 (1946), pp. 147-159 (Estação Agronómica Nacional). Trata-se do seguinte problema:

*Averiguar se a percentagem de proteína nas sementes de trigo depende da densidade de produção (isto é, da quantidade de sementes produzidas por unidade de área) e se essa dependência pode ser traduzida razoavelmente por uma função linear.*

---

(1) Omitimos aqui a demonstração deste facto.

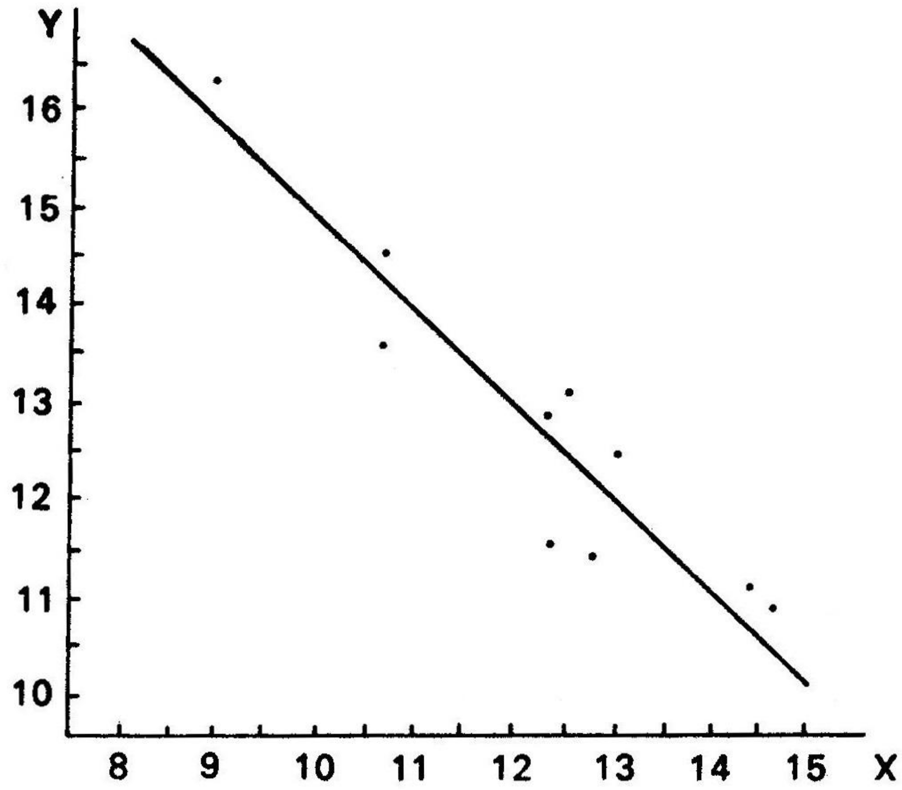
Os dados experimentais, relativos a 10 talhões, onde se colheu o trigo, encontram-se registados na tabela seguinte, em que os valores de x são as medidas da densidade de produção, em cwt por acre (cwt ≈ 50,802 kg, acre ≈ 0,40467 ha); e os valores de y são as percentagens de proteína observadas.

| N.º do talhão | x = produção em cwt/acre | y = proteína % |
|---|---|---|
| 1 | 14,3 | 10,8 |
| 2 | 12,8 | 11,4 |
| 3 | 12,7 | 13,0 |
| 4 | 10,6 | 14,6 |
| 5 | 10,7 | 13,8 |
| 6 | 13,0 | 12,2 |
| 7 | 14,4 | 10,7 |
| 8 | 12,5 | 12,8 |
| 9 | 8,7 | 16,2 |
| 10 | 12,2 | 11,8 |

A equação de regressão obtida neste caso, pelo processo atrás indicado, é.

$$y = 0{,}95x + 24{,}3$$

A recta correspondente está representada na figura seguinte.




Vê-se então que o teor das sementes em proteínas diminui quando a densidade de produção aumenta e que essa variação se *aproxima* efectivamente de uma lei linear. Também é visível que a recta de regressão *se ajusta* razoavelmente ao conjunto de pontos marcados.

Em que casos se deve considerar como *significativo,* isto é, como revelador de alguma relação de *causa-efeito,* um dado ajustamento deste tipo? Existem critérios estatísticos *(testes de significância)* que permitem excluir, como não significativos, certos ajustamentos. Os não excluídos ficarão ainda sujeitos ao veredicto posterior da experiência, até poderem ser admitidos com relativa segurança. Nessas exclusões adopta-se um grau de exigência (chamado *'nível de significância'*), que é variável com a questão em estudo: será, por exemplo, maior numa questão de física que numa de biologia.

5. Há muitos casos em que as leis lineares não se prestam, de modo nenhum, para exprimir aproximadamente uma grandeza como

função de outra, mas em que existem outros tipos de funções, relativamente simples, que se adaptam bem ao mesmo fim. Entre essas figuram as funções polinomiais

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p$$

de grau p pouco elevado. Para ajustar o mais possível uma tal função a uma sequência de pontos

$$(x_k, y_k) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

determinados experimentalmente, pode ainda seguir-se o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, calculando os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$, de modo a minimizar a *soma dos quadrados dos desvios*

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (y_k^* - y_k)^2$$

em que $y_k^* = a_0 + a_1 x_k + \dots + a_p x_k^p$. Raciocinando como no caso particular das funções lineares, conclui-se que existe *uma e uma só* sequência $(a_0, a_1, \dots, a_p)$ que torna mínima a soma Q e que tal sequência é a solução do sistema

$$a_0 + [x] \; a_1 + \dots + [x^n] \, a_n = [y]$$

$$[x] \, a_0 + [x^2] \, a_1 + \dots + [x^{n+1}] \, a_n = [xy]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[x^n] a_0 + [x^{n+1}] a_1 + \dots + [x^{2n}] \, a_n = [x^n y]$$

em que se põe $[x^r y^s] = \sum_{k=1}^{n} x_k^r y_k^s$ , para r, s = 0, 1, ..., p.

Assim fica resolvido o PROBLEMA DA REGRESSÃO POLINOMIAL.

De modo inteiramente análogo se resolve o PROBLEMA DA REGRESSÃO LINEAR para mais de duas variáveis, isto é, o problema que consiste em ajustar uma função linear

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p$$

a uma sequência de pontos de espaço $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$(y_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{pk}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ou, mais geralmente, o PROBLEMA DA REGRESSÃO POLINOMIAL, para mais de duas variáveis.

6. Mas há ainda casos em que as funções polinomiais não são as mais aptas a descrever o fenómeno em estudo. Pode estar indicada, por exemplo, uma função de *tipo exponencial:*

$$y = C\,a^x \quad , \quad \text{com} \quad C, a \in \mathbb{R}^+$$

ou uma função do *tipo potência:*

$$y = C\,x^\alpha \quad , \quad \text{com} \quad C \in \mathbb{R}^+ \ \text{ e } \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Para efectuar o ajustamento, no primeiro caso, o que se costuma fazer é passar a logaritmos. Pondo $u = \log y$ , $a_0 = \log C$ e $a_1 = \log a$, vem:

$$u = a_0 + a_1x$$

Assim, a função é *linearizada*. Para determinar $a_0$ e $a_1$, usa-se o método dos mínimos quadrados, com u em vez de y.

Neste caso, será cómodo, para a representação gráfica, dispor de papel em que, no eixo das ordenadas, cada ponto é representado por um *número* y *cujo logaritmo é a distância* u *do ponto à origem* (sendo portanto $y = e^u$, no caso dos logaritmos neperianos). Diz-se então que se adopta sobre este eixo *uma escala logarítmica* (como as das réguas de cálculo, para multiplicações e divisões). Por outro lado, a escala do eixo das abcissas deve ser a usual (isto é, *linear*).

Nestas condições, bastará marcar directamente os valores $y_k$ de y no eixo das ordenadas e os valores $x_k$ de x no eixo das abcissas: se os pontos correspondentes aos pares $(x_k, y_k)$ se apresentarem aproximadamente em linha recta, está indicada a *regressão linear* entre log y e x, correspondente a uma lei exponencial, $y = C a^x$.

Chama-se *papel semilogarítmico* o papel em que estão traçadas linhas coordenadas (paralelas aos eixos), usando escala linear num dos eixos e escala logarítmica no outro eixo.

Além do papel semilogarítmico, também se usa *papel logarítmico* (isto é, com escalas logarítmicas em ambos os eixos). Se os pontos correspondentes aos pares $(x_k, y_k)$, marcados em papel logarítmico, se apresentarem *aproximadamente* em linha recta, está indicada uma função do *tipo potência,* $y = C x^\alpha$. Com efeito, passando a logaritmos e pondo $\log y = v$, $\log x = u$ e $\log C = b$, vem

$$v = \alpha u + b$$

relação linear entre as variáveis u e v, cujos valores são, respectivamente, as abcissas e as ordenadas dos pontos no sentido usual. Neste caso, os valores mais convenientes de $\alpha$ e de b serão determinados pelo método dos mínimos quadrados, como se indicou anteriormente (com $u = \log x$ em vez de x e $v = \log y$ em vez de y).

Em particular, pode-se obter, aproximadamente:

$$\alpha = 2 \quad , \quad \alpha = 3 \quad , \quad \alpha = -1 \quad , \quad \alpha = -2 \quad , \quad \alpha = 1/2 \quad , \quad \text{etc.}$$

No 1.º caso y será *proporcional ao quadrado de* x, no 2.º caso y será *proporcional ao cubo de* x, no 3.º caso y será *inversamente proporcional* a x, no 4.º caso y será *proporcional à raiz quadrada de* x, etc.

Quando $\alpha = -1$, já sabemos que o gráfico é uma hipérbole que tem por assímptotas os eixos. Mais geralmente, uma função homográfica do tipo

$$y = \frac{1}{ax + b}$$

terá, por gráfico, uma hipérbole que tem por assímptotas as rectas $y = 0$ e $x = -b/a$. Uma tal função pode ser linearizada por meio de mudança de variável $u = 1/y$ que a transforma na função

$$u = ax + b$$

7. Muitas vezes, na prática, ao procurar uma *lei quantitativa*, isto é, uma relação funcional que se aplique aproximadamente a certos fenómenos, já se tem alguma ideia sobre o tipo dessa relação — umas vezes por intuição directa, *a priori*, outras vezes por deduções feitas a partir de dados intuitivos ou experimentais anteriores. Por exemplo, a *lei exponencial para os fenómenos de crescimento biológico* é deduzida, *por cálculo integral*, a partir do seguinte *facto intuitivo:*

*O aumento populacional* dx *num intervalo de tempo* [t, t + dt] *relativamente pequeno é proporcional à população* x *existente no* *instante* t *e ao tempo* dt (cf. *Compêndio de Matemática, 2.º volume,* pp. 222-223).

Analogamente, a *lei exponencial da desintegração radioactiva* é deduzida, *por cálculo integral,* a partir do seguinte facto, *induzido da experiência:*

*A perda de massa de uma substância radioactiva num intervalo de tempo* [t, t + dt] *suficientemente pequeno é proporcional à massa da substância no instante* t *e ao intervalo de tempo* dt (ibidem, pp. 220-221.

Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva – todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros. Vêm a propósito as seguintes palavras, sempre oportunas, de Claude Bernard na sua obra prima 'Introduction à l'étude de la médicine expérimentale', no parágrafo intitulado 'L'intuition ou le sentiment engendre l'idée expérimentale':

Nous avons dit plus haut que la méthode expérimentale s'appuie sucessivement sur le *sentiment,* la *raison* et l'*expérience.*

Le sentiment engendre l'idée ou l'hipothèse expérimentale, c'est-à-dire l'interprétation anticipée des phénomènes de la nature. Toute l'initiative expérimentale est dans l'idée, car c'est elle qui provoque l'expérience. La raison ou le raisonnement ne servent qu'à déduire les conséquences de cette idée et à les soumettre à l'expérience.

Une idée anticipée ou une hypothèse est donc le point de départ nécessaire de tout raisonnement expérimental. Sans cela on ne saurait faire aucune investigation ni s'instruire; on ne pourrait qu'entasser des observations stériles. Si l'on *expérimentait* sans idée préconçue, on irait à l'aventure; mais d'un autre côté, ainsi que nous l'avons dit ailleurs, si l'on *observait* avec des idées préconçues, on ferait de mauvaises observations et l'on serait exposé à prendre les conceptions de son esprit pour la réalité.

Il n'y a pas de règles à donner pour faire naître dans le cerveau, à propos d'une observation donnée, une idée juste et féconde qui soit pour l'expérimentateur une sorte d'anticipation intuitive de l'esprit vers une recherche heureuse. L'idée une fois émise, on peut seulement dire comment il faut la soumettre à des préceptes définis et à des règles logiques précises dont aucun expérimentateur ne saurait s'écarter; mais son apparitien a été toute spontanée, et sa nature est tout individuelle. C'est un sentiment particulier, un *quid proprium* qui constitue l'originalité, l'invention ou le génie de chacun. Une idée neuve apparaît comme une relation nouvelle o inrattendue que l'esprit aperçoit entre les choses.

Il arrive même qu'un fait ou une observation reste très longtemps devant les yeux d'un savant sans lui rien inspirer; puis tout à coup vient un trait de lumière, et l'esprit interprète le même fait tout autrement qu'auparavant et lui trouve des rapports tout nouveaux. L'idée neuve apparaît alors avec la rapidité de l'éclair comme une sorte de révélation subite; ce qui prouve bien que dans ce cas la découverte réside dans un sentiment des choses qui est non seulement personnel, mais qui est même relatif à l'état actuel dans lequel se trouve l'esprit.

La méthode expérimentale ne donnera donc pas des idées neuves et fécondes à ceux qui n'en ont pas; elle servira seulement à diriger les idées chez ceux qui en ont et à les développer afin d'en retirer les meilleurs résultats possible.

L'idée expérimentale résult d'une sorte de pressentiment de l'esprit qui juge que les choses doivent se passer d'une certaine manière. On peut dire sous ce rapport que nous avons dans l'esprit l'intuition ou le sentiment des lois de la nature, mais nous n'en connaissons pas la forme. L'expérience peut seule nous l'apprendre(1).

Les hommes qui ont le pressentiment des vérités nouvelles sont rares; dans toutes les sciences, le plus grand nombre des hommes développe et poursuit les idées d'un petit nombre d'autres. Ceux qui font des *découvertes* sont les promoteurs d'idées neuves et fécondes.

---

(1) Note-se que as palavras de Claude Bernard são de longa data anteriores à introdução sistemática dos métodos estatísticos na investigação experimental. Essa introdução deve-se principalmente às obras de Pearson e de Fisher, neste século.

8. Os cálculos exigidos pelos métodos estatísticos são geralmente muito laboriosos. Por esse facto, não será fácil nem aconselhável resolver nas aulas problemas numéricos de estatística, mesmo simples, sem o auxílio de máquinas de calcular (a régua de cálculo não está indicada para esse fim).

*O que não é difícil e nos parece muito aconselhável, é resolver alguns problemas gráficos, com papel milimétrico normal, papel logarítmico e papel semilogarítmico, para ver qual o tipo de função que mais parece convir para exprimir a lei de variação de uma grandeza com outra e para fazer uma primeira determinação gráfica aproximada dos parâmetros dessa função.*

Note-se que actualmente, em certos laboratórios, nomeadamente laboratórios de física nuclear, a investigação experimental de rotina é feita em grande parte por computadores electrónicos que controlam as experiências, registam um enorme número de observações e seleccionam os dados, submetendo-os inclusivamente a análises estatísticas e acabando algumas vezes por fazer os ajustamentos necessários, para obter a lei que descreve os fenómenos.

Pode perguntar-se qual é então o papel que resta ao investigador experimental. A resposta é simples: na investigação propriamente dita será preciso, cada vez mais – *pensar.* E assim, com a expansão do uso dos computadores, será cada vez maior o número de pessoas que precisam de *saber pensar,* o que pressupõe, primeiro que tudo, *liberdade criadora do espírito,* como contrapartida do *predomínio da máquina em trabalhos de rotina.* Ainda neste ponto mantêm actualidade as palavras de Claude Bernard na sua obra atrás citada; diz o grande fisiologista no parágrafo intitulado *L'expérimentateur doit douter, fuir les idées fixes et garder toujours sa liberté d'esprit:*

La première condition que doit remplir un savant qui se livre à l'investigation dans les phénomènes naturels, c'est de conserver une entière liberté d'esprit assise sur le doute philosophique. Il ne faut pourtant point être sceptiques; il faut croire à la science, c'est'à 'dire au déterminisme, au rapport absolu et nécessaire des choses, aussi bien dans les phénomènes propros aux êtres vivants que dans tous les autres; mais il faut en même temps être bien convaincu que nous n'avons ce rapport que d'une manière plus ou moins approximative, et que les théories que nous possédons sont loin de représenter des vérités immuables. Quand nous faisons une théorie générale dans nos sciences, la seule chose dont nous soyons certains, c'est que toutes ces théories sont fausses absolument parlant. Elles ne sont que des vérités partielles et provisoires qui nous sont nécessaires, comme des degrès sur lesquels nous nous reposons, pour avancer dans l'investigation; elles ne représentent que l'état actuel de nos connaissances, et, par conséquent, elles devront se modifier avec l'accroissement de la science, et d'autant plus souvent que les sciences sont moins avancées dans leur évolution.

É preciso pois evitar, por um lado, o empirismo excessivo, que conduz ao cepticismo, e, por outro lado, o racionalismo *à outrance,* a fé absoluta nas teorias, que são apenas simplificações da realidade e não a própria realidade. Esta forma de platonismo tem efeito equivalente ao do cepticismo, ou pior ainda, criando ilusões perigosas. É esse apego a esquemas rígidos, voltando as costas à realidade, que Claude Bernard critica, apontando os seus perigos no campo particular da medicina:

Si un médecin se figurait que ses raisonnements ont la valeur de ceux d'un mathématicien, il serait dans la plus grande des erreurs et il serait conduit aux conséquences les plus fausses. C'est malheureusement ce qui est arrivé et ce qui arrive encore pour les hommes que j'appellerai des systématiques. En effet, ces hommes partent d'une idée fondée plus ou moins sur l'observation et qu'ils considèrent comme une vérité absolue. Alors ils raisonnent logiquement et sans experimenter et arrivent, de conséquence en conséquence, à construire un système qui est logique, mais qui n'a aucune réalité scientifique. Souvent les personnes superficielles se laissent éblouir par cette apparence de logique, et c'est ainsi que se renouvellent parfois de nos jours des discussions dignes de l'ancienne scolastique. Cette foi trop grande dans le raisonnement, qui conduit un physiologiste à une fausse simplification des choses, tient d'une part à l'ignorance de la science dont il parle, et d'autre part à l'absence du sentiment de complexité des phénomènes naturels. C'est pourquoi nous voyons quelquefois des mathématiciens purs très grands esprits d'ailleurs, tomber dans des erreurs de ce genre; ils simplifient trop et raisonnent sur les phénomènes tels qu'il les font dans leur esprit, mais non tels qu'ils sent dans la nature.

Le grand principe expérimental est donc le doute, le doute philosophique qui laisse à l'esprit sa liberté et son iniciative, et d'ou dérivent les qualités les plus précieuses pour un investigateur en physiologie et en médicine. Il ne faut croire à nos observations, à nos théories que sous bénéfice d'inventaire expérimental. Si l'on croit trop, l'esprit se trouve lié et rétréci par les conséquences de son propre raisonnement; il n'a plus de liberté d'action et manque par suite de l'initiative que possède celui qui sait se dégager de cette foi aveugle dans les théories, qui n'est au fond qu'une superstition scientifique.

A estas palavras de Claude Bernard só falta acrescentar: o que se diz para a investigação em fisiologia ou medicina, aplica-se, em certa medida, à investigação matemática, isto é, não será possível a criação matemática sem liberdade de espírito e sem aquela atitude interrogativa que implica a dúvida sistemática e leva a evitar os esquemas abstractos que não se apliquem a situações concretas, fora ou dentro da matemática.

Estas considerações estendem-se ao ensino e muito especialmente ao ensino liceal. É certo que a maioria dos alunos não irão ser investigadores. Mas não é menos certo que as profissões modernas estão a exigir cada vez mais a iniciativa pessoal e a imaginação que se requerem de um investigador. Quer dizer: *os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação*. De tudo isto há a concluir o seguinte:

Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as intuições, o método heurístico e as aplicações concretas, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser.

9. Além da indução propriamente dita, um dos tipos vulgares de inferência indutiva, em que intervém o conceito de probabilidade, é o chamado 'raciocínio plausível'. Consideremos o seguinte exemplo:

'A apendicite manifesta-se geralmente por vómitos, febre e dores agudas na parte inferior direita do abdómen.

Ora eu tenho vómitos, febre e dores na parte inferior direita do abdómen.

Logo tenho uma apendicite'.

É claro que não se trata aqui de um silogismo correcto, mas sim de *paralogismo:* estamos a concluir do *particular para o geral,* e portanto, mesmo admitindo que as premissas são verdadeiras, não podemos garantir que a conclusão o seja. *No entanto, poderíamos dizer que a conclusão tem certa probabilidade de ser verdadeira.* Nesta ordem de ideias, a conclusão correcta seria:

*É provável (ou plausível) que eu tenha uma apendicite.*

Mesmo assim, o raciocínio é *vago,* sobretudo porque a 1.ª premissa nada nos diz a respeito da frequência relativa dos casos de apendicite, entre as doenças que se manifestem com os referidos sintomas.

Vejamos outro exemplo. Consideremos o seguinte cálculo, com a respectiva prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 538 \\ 96 \\ \hline 3228 \\ 4842\phantom{0} \\ \hline 51648 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$$

Analisemos, agora, a seguinte maneira de raciocinar:

'Se esta conta está certa, a sua prova dos nove dá certa. Ora a prova dos nove desta conta dá certa. Logo a conta está certa'.

Estamos em presença de um paralogismo já apontado no *Compêndio de Matemática, 1.° volume, 1.° tomo,* p. 42. Também aqui se conclui do *particular para o geral* e, assim, não podemos garantir que a conclusão seja verdadeira. Por exemplo, se o resultado da operação tivesse sido 51738, a prova continuaria a dar certa e a conta estaria errada. O máximo que podemos concluir objectivamente das premissas é o seguinte:

*'Há uma probabilidade não nula de a conta estar certa'.*

Porém, agora, analisando a questão mais a fundo, podemos ter uma ideia um pouco mais precisa da probabilidade em causa. Escolhendo os 5 algarismos do produto inteiramente *ao acaso* e supondo que a prova dava certa, a probabilidade de a conta estar certa seria cerca de $1/10^4$ – na verdade pequeníssima. Todavia, nos casos normais, os algarismos não são escolhidos ao acaso. Se a pessoa que faz a conta domina bem o processo de cálculo e tem o desejo de acertar, a situação muda radicalmente de aspecto: a probabilidade de a conta estar certa, quando a prova dos nove dá certa, é bastante próxima de 1 ([1]). Por outras palavras:

*Quando se conhece bem o processo de cálculo e se deseja acertar, é raro que a conta esteja errada quando a prova dos nove dá certa.*

---

([1]) Mais precisamente, se for p a probabilidade de a *pessoa errar a conta,* será p/9 a probabilidade de *a conta estar errada, dando a prova dos nove certa.*

Este facto, que pode ser previsto por intuição, é confirmado pela experiência.

Convém, agora, observar que as teorias físicas se baseiam cada vez mais em raciocínios plausíveis, do género da prova dos nove. Na verdade, as teorias físicas mais evoluídas partem de *hipóteses* (tomadas como *axiomas*) que, em geral, não são acessíveis à experiência, isto é, não podem ser verificadas *directamente* por meio de experiências. No entanto, essas hipóteses implicam diversos factos ou leis (a que podemos chamar *teoremas*), que já podem ser verificados experimentalmente, com maior ou menor aproximação – e é essa *verificação experimental indirecta,* que leva a considerar tais hipóteses como verdadeiras. Mas, se exprimirmos por $\mathcal{H}$ a conjunção dessas hipóteses e por $\mathcal{T}$ a conjunção dos factos verificados experimentalmente, essa maneira de raciocinar é traduzida pelo seguinte esquema

$$\begin{array}{r} \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \\ \mathcal{T} \\ \hline \therefore \quad \mathcal{H} \end{array}$$

que constitui manifestamente um paralogismo, o qual porém, neste caso, é usado como *raciocínio plausível.*

Todavia, como veremos mais adiante com exemplos, não podemos sequer dizer:

'Há certa probabilidade de $\mathcal{H}$ ser verdadeira'

mas apenas:

***'É cómodo admitir que as referidas hipóteses são verdadeiras, porque explicam um grande número de factos conhecidos, unifi-***

*cando-os, e permitem por outro lado prever e descobrir novos factos'* (1).

Sob este aspecto, a teoria física é afinal uma *teoria hipotética-dedutiva* (portanto uma teoria matemática) que se desenvolve, por lógica dedutiva, a partir do sistema $\mathcal{H}$ de axiomas, conduzindo não somente a factos conhecidos, *mas ainda a outros, que são descobertos pelo método matemático* e depois confirmados experimentalmente. *A teoria será então aplicável no domínio dos fenómenos em que os seus teoremas são confirmados pela experiência com aproximação razoável; para lá desse domínio, quando começa a ser nitidamente negada pela experiência, a teoria terá de ser abandonada, cedendo porventura o lugar a outra mais próxima da realidade (mas que se pode reduzir aproximadamente à primeira no domínio inicial).*

O primeiro exemplo de teoria física que se nos apresenta, nesta ordem de ideias, é a *geometria de Euclides*. Como verificar *experimentalmente* o axioma das paralelas? Como verificar *directamente* que duas rectas de um plano não se encontram? A verdade é que, *em rigor*, não existem rectas no mundo físico, e muito menos *rectas complanares que não se encontrem:* duas verticais, num dado lugar, são *aproximadamente* paralelas e, contudo, encontram-se *teoricamente* no centro da Terra (aliás, a existência de um tal ponto é igualmente *teórica*). Trata-se, pois, de *ficções cómodas*. Mas a teoria que se constrói sobre estas e outras ficções – a geometria de Euclides – conduz a um grande número de factos utilíssimos (o teorema segundo o qual a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos, o

---

(1) Não é portanto necessário, sequer, *acreditar* nas hipóteses: *basta que estas sejam eficientes.*

teorema de Pitágoras, os teoremas da trigonometria, etc.), que são confirmados experimentalmente, com grande aproximação, *no mundo médio* – isto é, numa zona próxima do homem, situada entre a *escala atómica* e a *escala astronómica*. Fora desse domínio deixa de ser aplicável.

Depois da geometria de Euclides, aparecem sucessivamente outras teorias físicas, hipotético-dedutivas: a *mecânica de Newton*, a *termodinâmica de Carnot-Clausius*, a *teoria matemática do electromagnetismo* (cujos axiomas são as equações de Maxwell), *a teoria da relatividade*, a *mecânica quântica ondulatória*, etc.

A teoria do electromagnetismo permitiu descobrir, por exemplo, as ondas electromagnéticas, que foram depois produzidas experimentalmente por Hertz. A teoria da relatividade, partindo de hipóteses sugeridas pelo electromagnetismo e pelas experiências históricas de Michelson e Morley sobre a velocidade da luz, conduziu, pelo método matemático, a factos revolucionários, hoje confirmados brilhantemente, quer no domínio astronómico, quer no domínio atómico – em particular relacionados com a produção de energia nuclear. *Os próprios conceitos de matéria e de energia acabaram por se revelar também como ficções cómodas e úteis, à semelhança dos conceitos geométricos.* A mecânica quântica, que baniu praticamente as fronteiras entre *matéria* e *energia*, conseguiu conciliar duas teorias rivais, contraditórias entre si – a *teoria corpuscular* e a *teoria ondulatória* – cada uma das quais era confirmada experimentalmente por certos fenómenos, que infirmavam a outra. E – coisa curiosa – esforçando-se por ser uma *ciência do concreto*, a física tem-se tornado cada vez mais *abstracta*, substituindo progressivamente por formalismos matemáticos, na interpretação do mundo atómico, os modelos materiais sugeridos pelo mundo macroscópico (v. os sucessivos modelos do átomo). E assim, à medida que progride, tornando-se mais humilde, mais consciente das suas próprias limitações – *a física tem-se tornado muito mais eficiente e alcançado os seus êxitos mais espectaculares.*

Ultimamente, como é sabido, utilizando aparelhagem cada vez mais dispendiosa, em que dominam os grandes aceleradores de partículas atómicas (sincrotrões, betatrões), têm-se descoberto vários fenómenos que levam a admitir sucessivamente a existência de novas partículas. E os físicos teóricos fazem actualmente grandes esforços para fundar uma *teoria das partículas elementares,* que permita explicar, de maneira lógica, *sem contradições,* os fenómenos relativos às novas partículas. Mas esbarram em sérias dificuldades, que são em grande parte, como era de prever, *dificuldades de ordem matemática.* Esperemos que, tal como tem sucedido nos casos anteriores, esses problemas da física venham a determinar novos progressos da MATEMÁTICA PURA, tendentes a resolvê-los.

10. O físico e filósofo austríaco Ernst Mach (1838-1916) enunciou no século passado um princípio metodológico, aparentemente sem grande interesse, mas que viria a ter repercussões incalculáveis no desenvolvimento da física:

*Uma proposição só tem significado (físico) se pode ser verificada experimentalmente.*

Nesta ordem de ideias, o significado de uma proposição consiste precisamente no *processo físico da sua verificação.* Por exemplo, a proposição:

**'A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180 graus'**

significa o seguinte:

'Se medirmos os ângulos internos de um triângulo qualquer, tomando para unidade o grau, e se depois somarmos os números obtidos, obtemos aproximadamente 180'.

Analogamente, o significado de um conceito consistiria na maneira de aplicar fisicamente, *operacionalmente,* esse conceito, Por exemplo, os conceitos de 'triângulo equilátero' e 'triângulo equiângulo' têm ambos significado, na medida em que é possível verificar se dois triângulos têm lados iguais ou ângulos iguais; esses significados são *diferentes,* pois que se trata de processos diferentes de verificação; mas são *equivalentes,* de acordo com a seguinte proposição, que se pode *verificar fisicamente:*

'Se um triângulo é equilátero, também é equiângulo, e reciprocamente'.

Mas consideremos, agora, a seguinte proposição:

'Se duas rectas distintas, cortadas por uma terceira, formam com esta ângulos correspondentes iguais, essas duas rectas não se encontram'.

É claro que nunca podemos verificar uma tal proposição e, portanto, segundo o princípio de Mach tal como foi atrás enunciado, esta proposição seria desprovida de sentido. Mas então seriam também desprovidas de sentido várias hipóteses que têm vindo a ser introduzidas em física. Simplesmente, essas hipóteses, assim como a anterior proposição, podem ser verificadas *indirectamente,* por meio das suas *consequências lógicas,* que lhes conferem incontestável valor *explicativo e heurístico.* Isso obrigou, desde logo, a alargar o princípio de Mach, que se apresentava demasiado restritivo.

Daqui, em parte, nasceu uma nova corrente de filosofia natural – o *neopositivismo do Círculo de Viena* – em que, ao empirismo clássico, de origem britânica (Locke, Berkeley e Hume), se associa um largo uso da matemática e da lógica simbólica, sobretudo na *análise lógica da linguagem,* tendente a eliminar jogos de palavras (sem sentido) e a evitar discussões puramente verbais, que se arrastavam em filosofia desde a antiguidade. As figuras mais representativas dessa escola são L. Wittgenstein ('Tratactus Logico-Philosophicus') e R. Carnap ('Logische Syntax der Sprache'). Bertrand Russell é um dos pioneiros do movimento ([1]).

Mas, ainda antes disso, as concepções de Mach influíram poderosamente no advento das *teorias relativistas* (Mach é considerado, ele próprio, um precursor dessas teorias) as quais, por sua vez, contribuíram substancialmente para a estruturação do pensamento filosófico do Círculo de Viena.

Antes das experiências de Michelson-Morley, admitia-se a HIPÓTESE DO ÉTER, segundo a qual a luz e as radiações electromagnéticas se propagavam por meio de ondas de um *meio elástico* chamado 'éter'. Este seria uma espécie de *fluido imaterial,* que se distinguia da matéria por ser *contínuo,* ao contrário desta, e por encher todo o espaço, mantendo-se *absolutamente imóvel,* no seu conjunto,

---

([1]) O empirismo e, mais explicitamente, o positivismo apresentam-se como a antítese da *metafísica,* identificada esta, de certo modo, com o racionalismo cem por cento apriorístico, que constrói teorias *não verificáveis* e, portanto, *sem sentido.* Porém, como todas as correntes filosóficas, o positivismo tende a exagerar e a fazer extrapolações que, em certos casos, parecem pouco legítimas, podendo assim criar barreiras à liberdade criadora do espírito. Para ver até que ponto podem variar neste campo as opiniões basta comparar as duas seguintes frases: 'Para criar uma sã filosofia, é preciso renunciar à metafísica e ser apenas bom matemático' (B. Russell). 'A matemática é a única boa metafísica' (Lord Kelvin).

mas susceptível de vibrações, à semelhança da pele de um tambor ou da superfície ligeiramente ondulada da água de um lago. Esta hipótese, como se vê, era apenas uma espécie de *metáfora* (como as imagens poéticas) sugerida pela observação do mundo macroscópico, para dar conta dos fenómenos electromagnéticos. Era, por assim dizer, o próprio *espaço absoluto* da mecânica clássica, considerado como *substância*.

Mas, as referidas experiências vieram mostrar que esta hipótese, além de inútil, era também um obstáculo para a explicação dos fenómenos observados, que se tornavam *absurdos,* admitindo tal hipótese. Ora, quando uma teoria está em desacordo com a experiência, o que há a fazer é pôr de parte a teoria e tentar substituí-la por outra. Por isso, e porque também estava em desacordo com a própria teoria do electromagnetismo que se mostrava amplamente satisfatória, foi abandonada a hipótese do éter. *Mas, com esta, ruíram conceitos seculares, nomeadamente o de 'espaço absoluto', o de 'tempo absoluto' e o de 'matéria (ou massa) absoluta'.* A tarefa ingente a que se propôs Einstein, foi a de *criar uma nova mecânica que fosse, por um lado, compatível com a teoria do electromagnetismo, e, por outro lado, coincidisse praticamente com a mecânica clássica de Newton, para velocidades bastante inferiores à velocidade da luz.*

Ora, uma das *regras de ouro* que nortearam constantemente Einstein nas suas investigações físico-matemáticas foi precisamente o *princípio de Mach*. Tendo chegado à conclusão de que *não há nenhuma experiência capaz de revelar o que seja movimento absoluto ou repouso absoluto (em relação a qualquer coisa como o éter) ou o que seja simultaneidade de dois acontecimentos (por exemplo na Terra e em Júpiter),* Einstein, aplicando a referida regra, aboliu os conceitos de espaço absoluto e de tempo absoluto, como ilusões que embaraçam o pensamento – como preconceitos inúteis e enganadores, arreigados no nosso espírito por um longo hábito estabelecido, sem reflexão. E não hesitou perante afirmações como esta:

'Tanto faz dizer que a Terra tem um movimento de rotação em relação ao conjunto das estrelas, como dizer que o conjunto das estrelas tem um movimento de rotação em relação à Terra'.

11. Não é só na física, mas também na química, na biologia, na psicologia, etc. que se pocura chegar a teorias hipotético-dedutivas, consideradas como o produto mais avançado e eficiente do método científico, baseado na razão e na experiência. Assim, é que se procura hoje, por exemplo, explicar certos *macrofenómenos* de psicologia, tais como os reflexos condicionados e outros, mediante *modelos neuronais,* que assimilam os neurones a elementos lógicos de um circuito, segundo o ponto de vista da CIBERNÉTICA.

A própria GENÉTICA procede de maneira análoga, partindo de hipóteses que muito se assemelham a axiomas de uma teoria hipotético-dedutiva.

Compreende-se, então, que a matemática (nomeadamente as álgebras de Boole, o cálculo das probabilidades, etc.), intervenham cada vez mais nestas investigações.

Outro facto que ressalta das considerações anteriores é o papel que, a par da intuição, desempenha a *imaginação criadora* na investigação científica. É pela imaginação que o cientista *inventa* hipóteses mais ou menos plausíveis, mais ou menos felizes, sugeridas pela experiência. Foram as *leis macroscópicas de* Dalton, Richter e Proust, relativas à combinação de elementos químicos, que sugeriam as *hipóteses atómica* e *molecular,* e ainda as *fórmulas de estrutura, planas ou espaciais.*

Justificam-se, deste modo, as seguintes palavras de Tyndall:

'Com experimentação acurada e trabalho minucioso de observação sobre as experiências, a imaginação torna-se o arquitecto de toda a teoria física'.

E as de Max Planck, criador da teoria quântica:

'Uma vez, outra e outra, o plano de imaginação sobre o qual tentamos erigir uma ordem vem abaixo, e depois experimentamos outro ainda. A *visão imaginativa* e *fé no êxito final* são indispensáveis([1]). Aqui, o racionalista puro não tem lugar'.

Por sua vez Einstein:

'No caminho lógico para a descoberta... Há só o caminho da intuição...'.

A intuição pertence, em grande parte, ao domínio do subconsciente e, como tal, dificilmente pode ser analisada. Mas, a intuição criadora de ciência também é produto de esforço e de educação. Vejamos o que a tal respeito diz o cientista W. Beveridge, no seu livro' The art of scientific investigation':

'As circunstâncias mais características de uma intuição consistem num período de trabalho intenso sobre o problema, acompanhado pelo desejo da sua solução, depois abandono do trabalho com a atenção dirigida em qualquer outro sentido e, finalmente, a aparição da ideia de maneira espectacular e repentina, muitas vezes com o sentimento da certeza. Experimenta-se então, geralmente, uma intensa alegria e, às vezes, surpresa por não ter ocorrido mais cedo uma tal ideia'. [Muitas vezes é *uma espécie de ovo de Colombo...*].

---

([1]) O sublinhado é nosso, não de Max Planck.

*Assim, a investigação científica não é em si mesma uma ciência, mas antes uma arte* (o que justifica o título da referida obra).

Não é, então, de admirar que os ambientes de elevado nível cultural e científico sejam óptimos estimulantes da criação científica. É conhecido o interesse que muitos cientistas – e em especial matemáticos – manifestam pela música, na qual sentem certas afinidades com as recônditas harmonias do pensamento abstracto. Conta-se a respeito de Einstein que, quando era apenas um rapazinho de catorze anos, tendo-lhe perguntado um amigo, estudante universitário, como conseguia resolver, sem a mínima dificuldade, os mais complexos problemas de matemática, o jovem Alberto (que os seus professores tinham na conta de 'aluno lento e distraído'), respondeu:

'É tão fácil! Tudo na geometria e na álgebra é maravilhosamente claro como... como uma sonata de Beethoven'.

Quanto à possível correlação entre o cultivo das artes plásticas e o desenvolvimento científico, bastará lembrar os exemplos da Grécia antiga e da Itália renascentista. Sob este aspecto, Leonardo da Vinci é um símbolo.

A referida correlação foi sintetizada por Fernando Pessoa nestes dois versos:

'O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso'.

Para o vulgo, ciência e poesia são dois pólos contrários. Ouçamos agora Antero de Quental:

'O chão sobre que assenta a *certeza* de hoje, formou-se pelas aluviões sucessivas da *intuição* antiga. O que é ciência foi já poesia: o sábio foi já cantor, o legislador poeta; e a evidência uma adivinhação, um admirável *palpite,* cujas profundas conclusões são ainda o espanto, e porventura o desespero das mais rigorosas filosofias. E, se nadamos hoje em plena luz da razão, foi entretanto a poesia, foi essa doce mão que nos guiou por entre o pálido crepúsculo dos velhos sonhos. Velhos? Não: sonhos eternos ([1])'.

Se o nosso poeta-filósofo tivesse podido contactar com cientistas, teria verificado que esta transição gradual da poesia para a ciência não é apenas um processo secular: dá-se a cada momento, no acto da criação científica. Weierstrass não estava a sonhar quando observou:

'Um matemático que não seja ao mesmo tempo um pouco poeta não será nunca um matemático completo'.

Na verdade as intuições, primeiro nebulosas, inexprimíveis, depois balbuciantes e pouco a pouco concretizadas por meio de *imagens, analogias* ou *metáforas* – antes da formulação lógica precisa – tudo isso que é senão poesia? Como fantasmas shakespearianos, as verdades vão-se aproximando através de uma neblina. Porém, depois, ao contrário do que sucede na poesia, a intuição cede o lugar à lógica inflexível do *ser ou não ser;* a neblina vai-se dissipando ao sol da razão – e, em vez de fantasmas, encontram-se muitas vezes *factos positivos.* É aí que está a diferença.

Que ilações nos podem sugerir, do ponto de vista pedagógico, as considerações anteriores? É bem simples:

Um ensino das ciências, que não seja acompanhado de uma

---

([1]) Extraímos esta citação do interessante ensaio do Dr. António Lobo Vilela, 'Ciência e Poesia'.

boa educação estética e que não fale à imaginação dos alunos, está condenado *a priori*, pela sua própria aridez, a afastar muitos dos melhores talentos. Por isso acontece, especialmente entre nós, que muitos se voltam para outros interesses.

Possamos nós, professores, orientar em boa parte a imaginação poética da nossa juventude, para os sonhos lúcidos, no campo imenso onde germinam e florescem as grandes ideias da ciência contemporânea.

# V

## INDUÇÃO EXPERIMENTAL E INDUÇÃO MATEMÁTICA

1. A introdução de novos assuntos no programa liceal só é possível, obviamente, eliminando outros que eram desenvolvidos tradicionalmente. Um dos assuntos que, infelizmente, se torna forçoso sacrificar em grande parte é o da chamada 'artimética racional'. E dizemos 'infelizmente', porque esta é o exemplo simples de uma teoria dedutiva, baseada numa axiomática categórica – muito embora suceda, na maior parte dos casos, que por falta de tempo ou por outras razões, o ensino da aritmética racional se tenha reduzido quase unicamente à resolução de mais uns tantos exercícios-cliché, muitos deles desprovidos de qualquer interesse.

Mas há um mínimo da aritmética dos inteiros que é necessário preservar – e nesse mínimo achamos por bem incluir o método de indução matemática. Simplesmente, este método deve ser tratado agora com maior largueza de vistas, em íntima ligação com assuntos situados fora do âmbito estrito da aritmética, especialmente os que se referem aos *fundamentos matemáticos do método experimental,* que o devem preceder (ver capítulo anterior). Pois se é verdade, como parece, que a matemática está a assumir cada vez mais as funções de FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS – onde podem estes assuntos ser tratados de maneira conveniente senão no programa de matemática do 3.º ciclo?

2. O estudo do método de indução matemática deve ser amplamente motivado, como tema de filosofia das ciências, se quisermos que tenha alguma eficácia e não seja mais uma *forma de doutrina imposta,* a que o espírito do aluno não adere espontaneamente.

Um dos modos possíveis de introduzir naturalmente este assunto é o que vamos sugerir.

Apresente-se, como tema de discussão, a seguinte pergunta:

*O que é mais valioso: descobrir um teorema ou demonstrar esse teorema?*

Poderá objectar-se, desde logo, que um teorema não está definitivamente descoberto, enquanto não for demonstrado com todo o rigor: antes disso não temos a certeza de que seja verdadeiro e de que seja, portanto, um teorema autêntico. Mas várias vezes temos lembrado que, na investigação matemática, a *intuição* precede normalmente a *lógica,* isto é, começa-se por ter o *pressentimento* dos factos e só depois este pressentimento (ou intuição) é confirmado ou confirmado por *demonstração*.

Consideremos, por exemplo, a seguinte proposição:

'Se uma função tem derivada positiva em todos os pontos de um intervalo, a função é crescente nesse intervalo'.

No *Compêndio de Álgebra, 6.º ano,* pp. 242-243, este facto é admitido como verdadeiro apenas por intuição geométrica (considerando o gráfico da função), do mesmo modo que se podem admitir como verdadeiros, por exemplo, os seguintes factos:

'Dados um ponto e um plano, existe sempre um plano e um só que passa pelo ponto dado e é paralelo ao plano dado'.

'Dados um ponto e um plano, existe sempre uma infinidade de rectas que passam pelo ponto e são paralelas ao plano; e a reunião dessas rectas é um plano paralelo ao plano dado'.

Nestes casos, a *intuição sensível* apresenta-nos os factos com tal grau de evidência, que nos parece desnecessário demonstrá-los. E, todavia, só podemos ter a certeza de que são verdadeiros (relativamente aos axiomas adoptados), uma vez que sejam demonstrados com todo o rigor lógico, *prescindindo por completo da intuição baseada em figuras.*

Aliás, esses factos são *triviais,* isto é, podem ser *descobertos* por qualquer pessoa que não seja desprovida de intuição geométrica: é bastante mais difícil *demonstrá-los,* do que *descobri-los.* Mas os factos com real interesse em matemática, como por exemplo o teorema de Pitágoras, certas regras de derivação ou integração, etc., não são geralmente triviais, não são *evidentes,* e não podem, portanto, ser descobertos por qualquer pessoa.

Por isso mesmo, vários teoremas, fórmulas ou métodos que foram descobertos antes de serem demonstrados rigorosamente, têm o nome dos matemáticos que os descobriram, mesmo que estes não os tenham demonstrado, pelo menos de maneira completa. *A bem dizer, quase todos os teoremas, fórmulas e métodos descobertos em análise infinitesimal, desde Newton até Lagrange, figuram nessa categoria.*

3. Assim, a demonstração, constituída por uma cadeia de silogismos, segundo as regras da lógica dedutiva, é um processo técnico que se usa em matemática para distinguir o verdadeiro do falso, o certo do errado – e não *propriamente* um método que permita

chegar a resultados essencialmente novos. *A criação científica, tal como a criação artística, não obedece a regras.*

Podemos, pois, dizer que as técnicas de demonstração representam para o matemático, o que as técnicas de experimentação representam para o físico: são meios para confirmar ou infirmar *hipóteses*, concebidas *a priori*. Sob este aspecto são comparáveis às provas das operações aritméticas: prova dos nove em física, prova real em matemática.

Todavia, a demonstração (tal como a experiência), é muitas vezes o ponto de partida para *novas descobertas:* uma vez demonstrado o que tinha apenas pressentido, o matemático começa a ver as questões de maneira muito mais clara, e assim lhe ocorrem *novas ideias*, que o fazem progredir, por vezes com maior vigor.

Não é, portanto, exacto dizer que a lógica nada tem que ver com a descoberta – *que a razão não influi no processo de criação.* Na verdade o matemático, quando disciplinado pelo raciocínio, no processo dialéctico *intuição-lógica, lógica-intuição,* acaba por refinar a sua própria intuição, adquirindo uma espécie de *intuição supra-sensível* que o torna muito mais apto a apreender novos factos. A esta quase poderíamos chamar *intuição racional* (apesar da aparente contradição nos termos), pois que, na realidade, não há uma fronteira nítida entre intuição e lógica: não se pode dizer exactamente onde acaba uma e começa a outra.

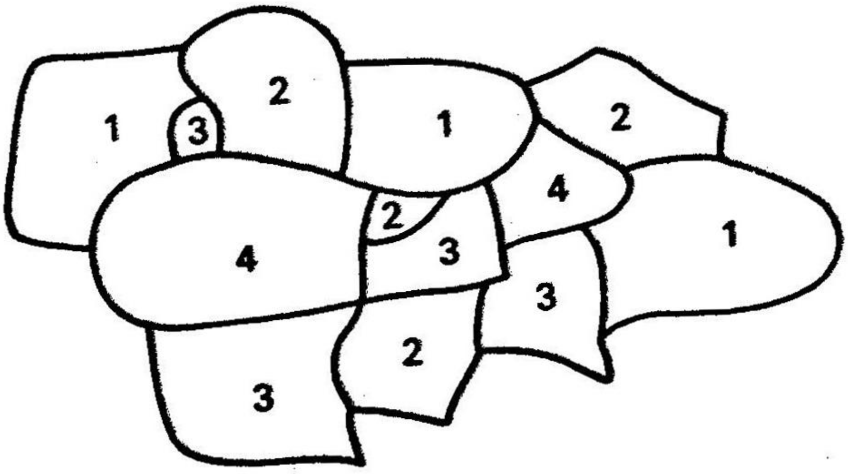
4. Também não se pode dizer exactamente onde acaba a indução e começa a dedução. A matemática é, todos o sabemos, essencialmente dedutiva na confirmação dos seus resultados. Mas isto não impediu o electrotécnico Heaviside (a quem se devem progressos importantes em matemática) de proclamar em dado momento:

*A matemática é uma ciência experimental.*

Ora tal afirmação é em parte verdadeira: há, com efeito, diversos factos que, em matemática, se apresentam primeiro por indução, a partir de *experiências* feitas com figuras, com símbolos, etc. Começaremos por apresentar três exemplos históricos ([1]):

1.º *exemplo* (TEOREMA DAS QUATRO CORES). Consideremos o seguinte problema:

*Pretende-se colorir um mapa, de modo que dois países figurem representados com cores diferentes, desde que tenham fronteira comum e que essa fronteira não se reduza a pontos isolados. Quantas cores são necessárias, no mínimo, para tal fim?*




Têm-se experimentado os mais diversos mapas, relativamente a países reais ou imaginários e o resultado tem sido sempre o mesmo:

*Não são precisas mais de 4 cores para colorir o mapa de modo que seja verificada a referida condição.*

---

([1]) Estes exemplos poderão, eventualmente, ser aconselhados aos alunos como tema de leitura.

Podemos pois, segundo o método de indução experimental, admitir que *esta conclusão é válida em qualquer caso.* Estamos assim em presença de uma *lei,* a que é costume chamar 'TEOREMA DAS QUATRO CORES'. *Mas ninguém, até hoje, conseguiu demonstrar tal teorema, embora tenham sido já apresentadas algumas supostas demonstrações, que, depois de uma análise lógica mais ou menos profunda, se verifica estarem erradas.*

Como se pode então chamar 'teorema' a uma proposição que não foi ainda demonstrada? Quem nos garante que não se venha a descobrir um mapa para o qual sejam precisas mais de 4 cores nas referidas condições? Trata-se pois, quando muito, de uma *hipótese de teorema,* a não ser que convencionemos chamar teoremas também a proposições falsas ou duvidosas.

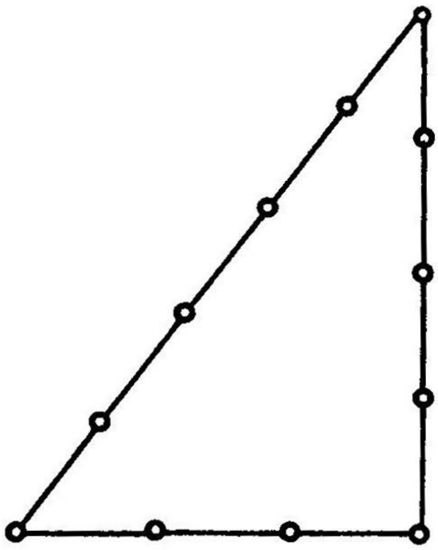
Verdadeiro ou falso, o TEOREMA DAS QUATRO CORES diz respeito a um novo ramo importante da geometria – chamado *topologia* – em que só interessam as *propriedades topológicas* das figuras, isto é, as propriedades de posição relativa que não se alteram por *deformação contínua* ([1]).

2.º *exemplo* (TEOREMA DE PITÁGORAS). Ao que parece, o teorema de Pitágoras foi sendo a pouco e pouco desvendado por via experimental. Assim, os Egípcios tinham verificado o seguinte facto, milhares de anos antes de Cristo:

'Se os três lados de um triângulo medem respectivamente 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades, o triângulo é rectângulo, sendo os dois primeiros lados os catetos'.

---

([1]) Dito de maneira intuitiva, sem pretensões de rigor.




Os Egípcios utilizavam, na prática, este *facto experimental* para construir ângulos rectos, recorrendo a uma corda com vários nós equidistantes. Fixavam, por exemplo, dois desses nós por meio de estacas, deixando 3 nós intermédios, e procuravam depois formar com a corda um triângulo como se indica na figura. Ao que parece, foi este o processo utilizado para construir as bases quadradas das pirâmides: assim, o referido facto será já conhecido há cerca de 500 anos!

*Verificava-se* ao mesmo tempo o seguinte:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

e, analogamente, para outros ternos de números tais como (6, 8, 10) (9, 12, 15), etc., aos quais os Egípcios atribuíam *carácter místico.*

Por sua vez, os Indianos e os Chineses, em épocas também muito remotas, tinham *observado* que, para construir um ângulo recto, se podia utilizar uma corda dividida em partes de comprimentos 5, 12, 13 ou em partes de comprimentos 8, 15, 17. E também nestes casos acontecia que

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad , \quad 8^2 + 15^2 = 17^2$$

Estranhas e curiosas coincidências estas, que não podiam deixar de impressionar vivamente a *imaginação poética, mitológica,* dos antigos, inclinados naturalmente a ver em tais coincidências SÍMBOLOS MÍSTICOS, reveladores de uma divina harmonia subjacente à natureza.

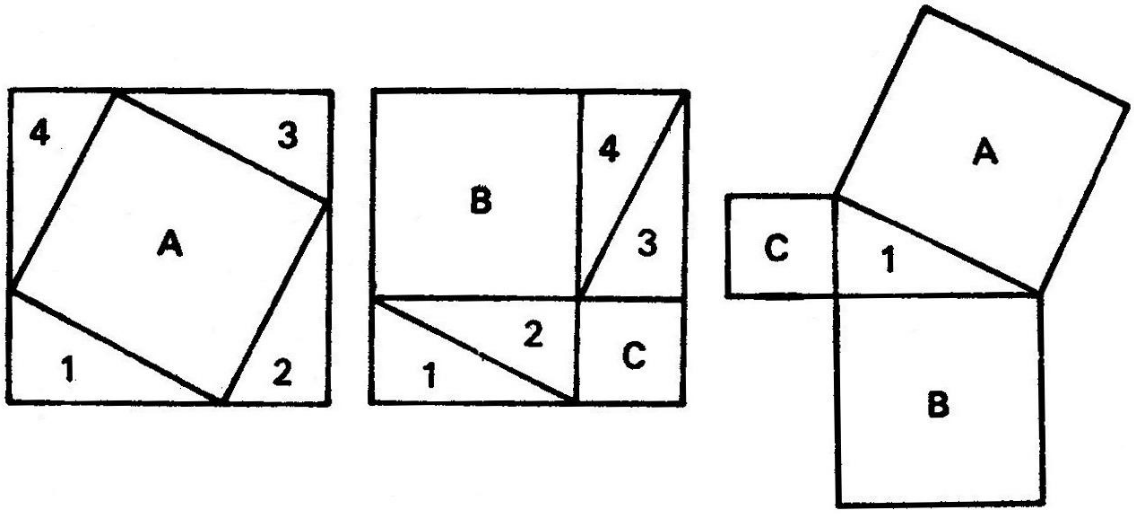
Mas estava-se então apenas numa *fase empírica,* em que não se conseguia sequer subir, por *indução,* dos factos particulares observados, a uma *lei experimental* (1). O salto para a *fase racional* foram os Gregos que o deram, começando por admitir, como hipóteses, o seguinte facto geral:

*'O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos'.*

Foi, segundo se diz, Pitágoras, quem primeiro *demonstrou* este facto, partindo de outros que são (ou parecem) *evidentes.* Hoje, o TEOREMA DE PITÁGORAS pode ser demonstrado com o máximo rigor lógico, sem apelo à intuição, a partir de uma axiomática bem definida da geometria euclidiana, como por exemplo a axiomática de Hilbert. Porém, a demonstração que se atribui a Pitágoras tem um carácter fortemente intuitivo, que nos *rende à evidência,* fazendo-nos *ver,* num relance, a veracidade do teorema. Os *factos evidentes* a que tal demonstração reduz o teorema são essencialmente *propriedades intuitivas das áreas,* que poderiam ser tomadas como

---

(1) Ainda hoje, em algumas regiões, por exemplo no Sul da França, os camponeses aplicam o referido *método da corda,* como simples *receita empírica,* transmitida por tradição, desde tempos imemoriais. Sobre este assunto, veja-se a bela obra da Prof.ª Emma Castelnuovo, 'La Geometria' (Ed. La Nuova Italia, Firenza), para a Escola Média Italiana, correspondente aos 3 primeiros anos dos nossos liceus.




axiomas (numa axiomática larga, *não independente*), mas que é difícil demonstrar a partir dos axiomas usuais.

Assim apareceu o MÉTODO DA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA, que consistia em provar um facto geral, sem recorrer à experiência, mas apenas por *dedução,* reduzindo esse facto a outros que são (ou parecem ser) evidentes. As provas por este método, ao contrário das que se baseavam na experiência, davam um sentimento de *certeza absoluta*. Por isso mesmo, a sua descoberta – que marca o nascimento histórico do *racionalismo* e da *matemática como ciência dedutiva* – foi causa de deslumbramento para os pitagóricos, que se sentiam assim mais próximos dos deuses.

Aos referidos ternos de números naturais, que verificam a equação em três incógnitas

$$x^2 + y^2 = z^2$$

chamados hoje *números pitagóricos,* e a que eram atribuídas, desde os Egípcios, virtudes mágicas, induziram naturalmente os filósofos da escola de Pitágoras a admitir como certa uma outra hipótese mais ousada:

'Qualquer que seja o triângulo rectângulo, é sempre possível escolher uma unidade de comprimento tal que as medidas dos catetos e da hipotenusa sejam números inteiros [portanto números pitagóricos]'.

Mais geralmente ainda, foram ao ponto de admitir que *toda a linha é formada por um número finito de unidades indivisíveis (a que poderíamos chamar 'átomos' ou 'mónadas')* e que, portanto, *dois comprimentos são sempre comensuráveis entre si* (cf. *Compêndio de Álgebra*. 'Nota Histórica' do Cap. I).

Assim, aos pitagóricos, a natureza aparecia como um ente geométrico perfeito, em que as relações entre todas as coisas, desde os corpos celestes aos sons musicais, se podiam exprimir harmonicamente por meio de números – e precisamente *números inteiros*. Era isso, no fundo, o que eles queriam dizer quando afirmavam: 'Os números são a essência de todas as coisas'.

Mas foi o próprio teorema de Pitágoras que, por ironia, os levou a descobrirem que *era falsa a hipótese segundo a qual duas grandezas são sempre comensuráveis entre si!* Assim, caía pela base esta primeira tentativa da matematização do universo – e compreende-se bem o drama que tal descoberta representou, atendendo ao carácter religioso que os pitagóricos atribuíam à sua teoria. Foram portanto eles, provavelmente, os primeiros seres humanos que, depois de terem descoberto, com deslumbramento, as potencialidades do método racional, conheceram em seguida o seu rigor inexorável e as amargas desilusões a que conduz – ao verem ruir, à luz crua desse método, as generalizações apressadas a que os tinha conduzido o seu entusiasmo. Quais Ícaros ingénuos, lançados na aventura do espírito, o sol da Razão derreteu-lhes a cera com que tinham colado as asas do pensamento.

3.º *exemplo* (TEOREMA DE FERMAT). É fácil ver que existe uma infinidade de soluções inteiras e positivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$

(números pitagóricos), dadas pelas fórmulas:

$$x = \sqrt{uv} \quad , \quad y = \frac{u-v}{2} \quad , \quad z = \frac{u+v}{2}$$

em que *u* e *v* são números naturais arbitrários (distintos).

Neste momento, ocorre naturalmente considerar equações tais como

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad , \quad x^4 + y^4 = z^4 \quad , \quad x^5 + y^5 = z^5 \quad , \quad \text{etc.}$$

e procurar *ternos de números naturais* que as verifiquem. Ora, por mais tentativas que se façam, não se consegue encontrar nenhum terno de números nessas condições, o que leva a admitir como hipótese o seguinte facto:

*Qualquer que seja o número natural* $n > 2$, *não existe nenhum terno de números naturais* $x, y, z$ tal que $x^n + y^n = z^n$; isto é, simbolicamente:

$$n \in \mathbb{N} \wedge n > 2 \underset{n}{\Rightarrow} \sim \exists (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^n + y^n = z^n$$

Esta proposição é hoje conhecida com o nome de ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT. A razão é a seguinte:

Durante as leituras de uma edição da aritmética de Diofanto, Fermat tinha, por hábito, escrever observações à margem do livro. Ora, precisamente quando Diofanto trata do problema das soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$, Fermat observa que o problema análogo é impossível para equações da forma $x^n + y^n = z^n$, sendo *n* um número natural $> 2$, e acrescenta, a propósito deste facto:

'J'ai découvert une démonstration vraiment admirable que cette marge est trop petite pour contenir'.

Já lá vão três séculos e nenhum matemático conseguiu até hoje encontrar uma demonstração de tal teorema! No entanto, Fermat disse que tinha uma demonstração *admirável*. Mais ainda, em todos os outros casos em que omitiu as demonstrações dos seus teoremas, estes acabaram por ser demonstrados, por vezes com dificuldade. Que pensar então?

Vários matemáticos estão convencidos de que Fermat se enganou, dessa vez, ao dizer que tinha descoberto uma demonstração do facto enunciado. Porém, até hoje, o *teorema* (se podemos chamar-lhe assim) ainda não foi desmentido. Mais do que isso, já pôde ser demonstrado, no *caso particular* em que o expoente $n$ é um número primo $< 14000$ e em que nenhum dos números x, y, z é múltiplo de n, o que, *do ponto de vista da indução experimental,* aumenta em nós a convicção de que é verdadeiro *no caso geral*. Mas continuamos a não ter a *certeza absoluta* (ou antes, *a certeza matemática*), de que a proposição geral seja de facto verdadeira.

Acontece até que certos matemáticos, nomeadamente os INTUICIONISTAS, se inclinam para a seguinte

HIPÓTESE: *Existem proposições a respeito das quais é impossível demonstrar se são verdadeiras ou falsas.*

O chamado 'teorema de Fermat' poderia estar, precisamente, nestas condições, e, sendo assim, não seria *nem verdadeiro nem falso,* pois que, segundo os intuicionistas, só é verdadeiro ou falso em matemática, aquilo que se pode demonstrar como tal ([1]). Chama-se *indecidível* um problema que não se pode decidir nem pela afirmativa

---

([1]) Neste ponto, o intuicionismo transporta para a matemática o PRINCÍPIO DE MACH, atribuindo à *demonstração* o papel da *verificação exerimental.*

nem pela negativa. Exemplo de uma questão indecidível pode ser precisamente a seguinte:

*Saber se a hipótese anterior é verdadeira ou falsa.*

Tem-se verificado, porém, que uma questão pode ser indecidível num dado *formalismo* (com determinados processos de demonstração) e tornar-se decidível num *formalismo mais rico* (com processos mais potentes de demonstração).

Na verdade, a matemática é apta a *criar* para seu uso – sobretudo graças à lógica simbólica — sistemas de linguagem precisa (chamadas 'formalismos rigorosos') cada vez mais ricos, que oferecem novos processos de demonstração (e, portanto, novos tipos de silogismo) cada vez mais potentes. Isto é semelhante ao que sucede com a aparelhagem da física experimental, que se torna cada vez mais complexa e poderosa. Entre os processos de demonstração que se tornam progressivamente mais complexos figuram os MÉTODOS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, de que bastará apresentar o caso mais simples no ensino liceal.

Mas, antes disso, impõem-se ainda mais algumas observações:

I. O facto de haver problemas que são indecidíveis num dado formalismo e depois se tornarem decidíveis em formalismos mais potentes veio pôr em evidência o *poder criador do espírito humano e o carácter dialéctico* do desenvolvimento da matemática, cuja evolução é em parte imprevisível, tal como a evolução do mundo físico. Para os intuicionistas, o chamado 'teorema de Fermat' é comparável a uma frase como a seguinte:

'No dia 12 de Março do ano 3000, chove em Lisboa pelas 3 horas da tarde'.

Que é que nos leva, inconscientemente, a convencer-nos de que o teorema de Fermat é, por força, *verdadeiro ou falso?* Apenas a ideia *platónica* de que, experimentando *todos* os possíveis ternos (x, y, z) de números naturais e *todos* os números naturais *n* maiores que 2, se pode saber se existe ou não algum terno (x, y, z) e algum número $n > 2$ tal que $x^n+y^n = z^n$. Mas essas verificações seriam em número *infinito* e, portanto, irrealizáveis na sua totalidade ([1]). Assim:

*Uma demonstração só é válida quando é constituída por uma cadeia finita de silogismos.*

O carácter *finitista* das demonstrações matemáticas é exigido não só pelos *intuicionistas* (escola de Brouwer), mas também pelos *formalistas* (escola de Hilbert). Mas estes, ao contrário dos primeiros, aceitam o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO (e até o PRINCÍPIO DE ZERMELO) como axiomas da lógica (ver *Compêndio de Matemática, 2.° volume*, p. 103).

Note-se que os intuicionistas *não afirmam nem negam explicitamente a existência de um terceiro valor lógico*. Há, no entanto, lógicas que admitem explicitamente a existência de mais de dois valores (*lógicas plurivalentes*).

---

([1]) Platão e os filósofos neoplatónicos, em especial Santo Agostinho, diriam neste caso: 'Os números existem desde a Eternidade, independentes de nós, no Mundo das Ideias, onde são abrangidos, *na sua totalidade*, pela Inteligência Divina'. Note-se como este ponto de vista é semelhante ao de Laplace ao formular o *determinismo mecanicista* (1.° volume, 2.° tomo, p. 223). No fundo, o determinismo absoluto na física, assim como o *fixismo* em biologia, são formas de racionalismo platónico. Mas já é diferente o ponto de vista de Aristóteles, depois retomado por S. Tomás de Aquino (ver no *Compêndio, 2.° volume*, a nota sobre *nominalismo e realismo*, p. 371).

II. Os exemplos anteriores mostram que, em certos casos excepcionais, é mais importante encontrar a demonstração de um teorema do que descobrir o próprio teorema. Assim, por exemplo, se alguém vier a descobrir uma demonstração do 'teorema das 4 cores' ou do 'último teorema de Fermat', esse alguém ficará para sempre, *ipso facto,* na história da matemática. Mas nunca se aconselhe um principiante a tentar a sua *chance* contra esses baluartes praticamente inexpugnáveis! Vários matemáticos, altamente experimentados, têm já tentado o mesmo. Alguns obtiveram resultados parciais importantes; por exemplo Kummer, nas suas tentativas de demonstração do teorema de Fermat, foi levado a introduzir novos conceitos que fizeram progredir grandemente a álgebra e a teoria dos números. Mas as investigações sobre este caso parece terem chegado a ponto morto – a não ser que surjam inesperadamente novos métodos de ataque.

Em 1908 um professor alemão deixou em testamento um prémio de 100 000 marcos para quem conseguisse demonstrar o último teorema de Fermat; mas a inflação consecutiva à 1.ª Grande Guerra reduziu quase a zero esse prémio.

III. Como regra, um jovem que deseje fazer investigação em qualquer ramo da ciência, deve procurar ser encaminhado para a *fronteira do conhecimento,* onde se desenvolvem as mais recentes pesquisas, procurando evitar campos muito explorados, *onde é extremamente improvável obter resultados positivos, que não tenham sido já obtidos por outrem no passado.*

5. A última observação anterior aplica-se, em particular, a uma tentativa de investigação do aluno Hélio Bernardo Lopes, de uma turma clássica do 7.º ano do Liceu D. João de Castro. Essa tentativa é sem dúvida interessante, pelo que representa de imaginação

e de esforço prometedor da parte de um aluno liceal, e pode constituir um *centro de interesse eficaz,* como motivação para introduzir o método de indução matemática.

Meditando sobre a propriedade $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, que despertou o seu interesse, o referido aluno começou a fazer *experiências* com o triângulo de Pascal e concluiu, por *indução experimental,* que deve ser válida a seguinte fórmula sobre arranjos:

$$ {}^{m}A_p = p\,({}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1}) \quad \text{para } m \geqslant p \geqslant 1 $$

A sua professora, a quem apresentou este resultado, em vez de o desencorajar, aconselhou o aluno, e muito bem, a tentar *demonstrar* a fórmula, indicando-lhe, para esse fim, o método de *indução matemática.* Passado algum tempo, o aluno conseguiu, por este método, provar o que se pretendia. A demonstração, que se reduz à aplicação simples do referido método, será apresentada mais adiante.

Entretanto, surge a questão:

*Será esta fórmula um resultado novo?*

Num campo tão explorado e tão elementar como o da análise combinatória, a probabilidade de encontrar um resultado *essencialmente* novo é muito pequena. A única dificuldade pode estar em descobrir um livro, um artigo, uma enciclopédia, onde se encontre esse resultado ou um outro equivalente. No caso presente não foi necessário procurar muito: a fórmula em questão deduz-se *trivialmente* da seguinte, já conhecida, relativa a combinações[1]:

$$ \binom{m}{p} = \binom{m-1}{p-1} + \binom{m-2}{p-1} + \ldots + \binom{p-1}{p-1} \quad , \quad \text{para } m \geqslant p \geqslant 1 $$

---

(1) No *Compêndio de Álgebra* faz-se uma breve referência a esta *propriedade,* em *linguagem comum.*

Basta multiplicar ambos os membros por factorial de p.

Mas o aluno Hélio Lopes ganhou alguma coisa com esta sua primeira tentativa: 1.º, ficou a ter uma primeira ideia de como se pode fazer investigação, que proporciona a aventura do espírito e a conhecer as emoções – alegrias e desenganos; 2.º, tornou-se muito mais consciente da necessidade da demonstração matemática, assim como do significado e do alcance do método de indução matemática; 3.º, aprendeu que, para conseguir resultados essencialmente novos, é preciso evitar assuntos que não estejam na fronteira actual do conhecimento. E, para que não fique desanimado, bastará dizer-lhe o seguinte:

Mesmo trabalhando na fronteira do conhecimento, um investigador arrisca-se a encontrar resultados que já foram obtidos por outrem, algum tempo antes. Por vezes, os resultados são *exactamente* iguais, sem que tenha havido a mínima influência de um investigador sobre o outro. É por isso mesmo que, quando um matemático encontra resultados novos que lhe parecem importantes, se apressa a publicá-los, *a fim de não perder a prioridade;* muitas vezes anuncia-os, antes disso, *sem demonstração,* em breves comunicações a Academias ou Congressos. E, antes ainda de fazer qualquer espécie de publicação, tem geralmente o cuidado de se informar com colegas e de averiguar se não há referência a resultados análogos, em certas revistas internacionais, que fazem *mensalmente* um resumo de quase todos os trabalhos de matemática que se publicam no mundo inteiro, incluindo as simples comunicações.

6. Ficam atrás sugeridas várias possíveis maneiras de motivar o estudo do método de indução matemática. O professor poderá aproveitar estas sugestões, na medida em que a sua experiência e o seu bom senso o aconselharem.

A introdução do referido método pode fazer-se como no Cap. III do 2.º volume, tentando traduzir por símbolos na lógica matemática a seguinte propriedade, que o aluno conhece intuitivamente:

*O número* 1 *gera todos os outros números naturais, por adição sucessiva:*

$$1+1 \quad , \quad 1+1+1 \quad , \quad 1+1+1+1 \quad , \quad 1+1+1+1+1 \quad , \ \ldots$$

A tradução simbólica desta propriedade – O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA EM IN — é feita no n.º 2 desse capítulo *em termos de conjuntos*. Não interessa, por enquanto, tratar da propriedade VI, nem das restantes que caracterizam o grupóide aditivo IN.

Pode apresentar-se, depois, a seguinte definição por recorrência (de uma sucessão $u_n$):

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pede-se ao aluno que determine alguns termos e que indique uma *possível* expressão do termo geral (isto é, uma *expressão analítica* desta função de n). A expressão sugerida será:

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

Verifica-se que, *para muitos valores de* n, tal expressão é efectivamente válida. Mas resta provar que é válida para *todos* os valores de *n*, isto é, que se tem de facto:

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para isso, há que recorrer ao METODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, baseado no princípio anterior. *Mas antes é preciso formular este princípio em termos de compreensão, tal como se faz no n.º* 3 (substituindo o exemplo que se considera nesse número, pelo anterior).

Repare-se na *metáfora dos soldados de chumbo*. Essa imagem preciosa, como tantas outras que se devem utilizar no ensino, à semelhança do que se faz na investigação, estimula a *imaginação* (como *imagem* que é). Como já temos observado, uma das graves deficiências do ensino tradicional, sobretudo entre nós, é a de não falar à imaginação dos alunos.

Uma vez posto o princípio da indução sob a forma de silogismo, pode-se demonstrar o que se pretendia. Em geral começa-se por provar a premissa menor e só depois se prova a premissa maior. Neste caso P(n) é a propriedade

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

Esta propriedade é, evidentemente, verificada para n = 1:

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Seja, agora, k um *determinado* número natural, tomado *arbitrariamente* [1], e suponhamos que a propriedade P(n) é verificada para n = k, isto é, que

$$u_k = \frac{k}{k+1} \quad \textit{(hipótese de indução)}$$

---

[1] O símbolo k será pois, neste caso, uma *constante arbitrária*.

Trata-se de provar que a propriedade é verificada também para $n = k + 1$. Ora tem-se, por definição,

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k}$$

donde, *pela hipótese de indução,*

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}}$$

e, portanto

$$u_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

Ficou, assim, provado que a referida propriedade é *hereditária* e, como além disso, é verificada para $n = 1$, fica provado que é verificada para todo o $n \in \mathbb{N}$, q. e. d.

*Um segundo exemplo* pode ser o da definição de recorrência

$$u_1 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 3 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Trata-se, como se vê, da progressão aritmética cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 3. O aluno já *sabe* que a expressão do termo geral, neste caso, é:

$$u_n = 5 + 3(n-1)$$

*Mas ainda não conhece uma demonstração rigorosa deste facto.* Uma tal demonstração pode ser dada pelo método de indução matemática, cuja aplicação, neste caso, é muito simples.

Em seguida pode passar-se ao caso geral da definição:

$$u_1 = a \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + r \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

em que *a* e *r* são constantes arbitrárias (progressão aritmética cujo primeiro termo é *a* e cuja razão é *r*).

Prova-se então, pelo mesmo método, que, neste caso,

$$u_n = a + (n-1)\,r \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a, r \in \mathbb{R}$$

(Mais geralmente ainda, *a* e *r* podem ser elementos de um *módulo qualquer*).

Depois virá o caso geral da *progressão geométrica:*

$$u_1 = a \quad ; \quad u_{n+1} = u_n r \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que difere do caso anterior apenas em que *a linguagem aditiva é substituída pela linguagem multiplicativa.*

A propósito destes exemplos simples, o aluno terá aprendido a distinguir as *constantes arbitrárias* das *variáveis de indução,* nas demonstrações por indução matemática. Será depois mais fácil tratar dos exemplos I e II directamente, *sem ser já necessário particularizar as constantes arbitrárias.*

Devem seguir-se os exemplos III, IV, V e VI. Note-se que os exemplos IV e V têm a vantagem, sempre importante, de constituirem novidade para o aluno, sendo por isso mais aptos a despertar o seu interesse. Mas importa levá-lo a reconhecer que, nestes casos, o método de indução matemática é, cem por cento, uma *técnica de demonstração,* que nada nos diz sobre a maneira de chegar a essas fórmulas – sobre a *ideia* que conduziu ao resultado. Para isso, é bom comparar, por exemplo, a dedução intuitiva habitual das fórmulas dos exemplos III e VI, com a demonstração por indução matemática(¹).

6. E chegou agora o momento, por certo emocionante, de demonstrar por indução matemática a fórmula redescoberta pelo aluno Hélio Lopes. Vamos expô-la tal qual este aluno a apresenta numa sua nota.

1.ª parte: $m = p$

$$p \cdot {}^{p-1}A_{p-1} = p\,(p-1)! = p! = {}^{p}A_p$$

Está então verificado que ${}^{p}A_p = p \cdot {}^{p-1}A_{p-1}$

2.ª parte:

Hipótese: ${}^{m}A_p = p({}^{m-1}A_p + {}^{m-2}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1})$

Tese: ${}^{m+1}A_p = p({}^{m}A_{p-1} + {}^{m-1}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1})$

$$p({}^{m}A_{p-1} + {}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1}) =$$

$$= p \cdot {}^{m}A_{p-1} + p({}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1})$$

---

(¹) É também muito importante — é mesmo imprescindível — salientar que a indução matemática não é *indução* (no sentido experimental), mas sim *dedução*: é uma das muitas formas de raciocínio dedutivo, embora menos trivial do que as de tipo clássico.

$$= p \cdot {}^{m}A_{p-1} + {}^{m}A_{p} = p \cdot \frac{m!}{(m-p+1)!} + \frac{m!}{(m-p)!}$$

$$= p \cdot \frac{m!}{(m-p+1)!} + \frac{m!\,(m-p+1)}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,p + m!(m-p+1)}{(m-p+1)!}$$

$$= \frac{m!\,(p+m-p+1)}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,(m+1)}{(m-p+1)!} = \frac{(m+1)!}{(m-p+1)!} = {}^{m+1}A_{p}$$

Está assim provado que

$${}^{m}A_{p} = p({}^{m-1}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1}) \Rightarrow {}^{m+1}A_{p} = p({}^{m}A_{p-1} + \ldots + {}^{p-1}A_{p-1})$$

Como se vê, a demonstração é perfeitamente correcta, mas o método não foi aplicado *com o aspecto habitual.* Para o aplicar, tal como foi indicado, haverá que pôr $m = p + n$ e tomar $n$ para *variável de indução,* sendo p uma *constante arbitrária.* Por outro lado, teremos de fazer a indução em $\mathbb{N}_0$ e não em $\mathbb{N}$.

Assim, na 1.ª parte demonstrou-se que a fórmula é verdadeira para $n = 0$, pois que então ${}^{n+p}A_{p} = {}^{p}A_{p}$ e

$${}^{p}A_{p} = p \cdot {}^{p-1}A_{p-1} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Por sua vez, na 2.ª parte, demonstrou-se que, se a fórmula é verdadeira para $m = p+n$, também é verdadeira para $m = p+(n+1)$, quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}_0$ , $p \in \mathbb{N}$.

7. No ensino deste método, como em geral no ensino da aritmética, convém alternar os assuntos *essencialmente novos,* de

interesse palpitante (como o anterior), com *assuntos já conhecidos do aluno,* que se trata agora de demonstrar com todo o rigor lógico (1). Mas, até neste caso, convém introduzi-los de maneira *imprevista,* como *problemas* que o aluno terá de resolver por si (sempre de acordo com o método activo e heurístico!).

Resolvam-se primeiro os exercícios I e V do n.º 2 do 2.º volume (Cap. III), que põem o aluno em contacto com diversas modalidades de definições de recorrência. Note-se que é infinita a variedade de tais definições e que esse infinito é qualitativo, isto é: *estão sempre a surgir novas formas imprevisíveis de definição por recorrência (assim como novas formas imprevisíveis de demonstração por indução matemática)*.

Note-se também que não existe nenhuma expressão usual para a sucessão $\varphi$ do exercício II: *este facto não é excepção, mas sim a regra, em sucessões definidas por recorrência.*

Posto isto, proponha-se ao aluno o seguinte exercício: determinar vários termos das sucessões f e g, definidas em $\mathbb{N}_0$ pelo seguinte *sistema de condições:*

$$g(0) = 0 \quad , \quad f(0) = 0$$

$$g(n+1) = g(n) + 1 \Leftarrow g(n) < 3$$

$$g(n+1) = 0 \Leftarrow g(n) = 3$$

$$f(n+1) = f(n) \Leftarrow g(n) < 3$$

$$f(n+1) = f(n) + 1 \Leftarrow g(n) = 3$$

---

(1) Os assuntos deste número só serão tratados se houver tempo para isso.

Pode começar-se pela sucessão g; os seus 20 primeiros termos são:

0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3,...

Os 12 primeiros termos da sucessão f são:

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2,...

Por indução experimental, o aluno *verá* que

f(n) = quociente inteiro da divisão de *n* por 4

g(n) = resto da divisão de *n* por 4

Que quer isto dizer? Recordemos que o PROBLEMA DA DIVISÃO INTEIRA consiste no seguinte:

*Dados dois números* $a \in \mathbb{N}_0$ *e* $b \in \mathbb{N}$, *determinar dois números* $q, r \in \mathbb{N}_0$ *tais que*

$$a = bq + r \quad , \quad \textit{sendo} \quad r < b$$

Os números q e r serão chamados, respectivamente, *quociente inteiro* e *resto, da divisão de* a *por* b.

Ora no caso presente tem-se a = n, b = 4 e quer-se provar que q = f(n) e r = g(n). Pretende-se, pois, provar que

$$(1) \qquad n = 4\,f(n) + g(n) \quad \wedge \quad g(n) < 4 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

A demonstração será feita por *indução matemática:*

$$f(0) = 0 \quad , \quad g(0) = 0 \;.\cdot.\; 0 = 4\,f(0) + g(0) \quad , \quad g(0) < 4$$

Hipótese de indução: $n = 4\,f(n) + g(n) \quad , \quad g(n) < 4$

Tese de indução: $n+1 = 4\;f(n+1) + g(n+1) \quad , \quad g(n+1) < 4$

Para provar esta, há que distinguir dois casos:

1.º caso: $g(n) < 3$. Então:

$$g(n+1) = g(n) + 1 < 4 \quad , \quad f(n+1) = f(n)$$

$$\therefore \quad 4f(n+1) + g(n+1) = 4f(n) + g(n)+1 = n+1 \quad , \quad g(n+1) < 4$$

$$\therefore \quad n+1 = 4f(n+1) + g(n+1) \quad , \quad g(n+1) < 4$$

2.º caso: $g(n) = 3$. Então:

$$g(n+1) = 0 < 4 \quad , \quad f(n+1) = f(n) + 1$$

$$\therefore \quad 4f(n+1) + g(n+1) = 4f(n) + 4 = 4f(n) + g(n) + 1 = n+1$$

$$\therefore \quad n+1 = 4\,f(n+1) + g(n+1) \quad , \quad g(n+1) < 4$$

q.e.d.

É claro que, em vez do número 4, se pode considerar um *outro número natural* qualquer: as considerações serão perfeitamente análogas. Mas agora surge-nos, de improviso, uma *nova ideia:*

Deve ser possível demonstrar, por este processo, que o problema DA DIVISÃO INTEIRA é sempre *possível* e *determinado,* isto é, que:

$$\forall\, a \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad b \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists\, q,r \in \mathbb{N}_0 : \quad a = bq + r \wedge r < b$$

Para a demonstração convém tomar *a* para *variável de indução*, b *para constante arbitrária* e pôr:

$$(1) \qquad q = f(a) \quad , \quad r = g(a)$$

O problema exige que se tenha q, $r \in \mathbb{N}_0$ e

$$(2) \qquad a = bq + r \quad , \quad \text{com } r < b$$

Então é óbvio que, sendo $a = 0$, só pode ser $q = 0$ e $r = 0$, isto é:

$$(3) \qquad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad q(0) = 0$$

Por outro lado, se o dividendo aumenta de uma unidade, dois casos se podem dar: ou aumenta o resto ou aumenta o quociente. Mais precisamente, de (1) e (2) deduz-se:

$$(4) \qquad \begin{array}{l} g(a) < b-1 \Rightarrow f(a+1) = f(a) \wedge g(a+1) = g(a) + 1 \\ g(a) = b-1 \Rightarrow f(a+1) = f(a) + 1 \wedge g(a+1) = 0 \end{array}$$

Como é fácil ver, estas fórmulas definem por recorrência duas funções f e g em $\mathbb{N}_0$ para cada $b \in \mathbb{N}$. Ora, como no caso particular anterior, demonstra-se, por indução matemática, que, para todo o $a \in \mathbb{N}_0$, os números $q = f(a)$ e $r = g(a)$ constituem de facto *uma* solução do problema. Por outro lado, essa solução é *única,* visto que as condições (3) e (4) são impostas pelo problema.

Como já foi dito a propósito dos *métodos de iteração,* o estudo dos processos de recorrência tornou-se muito importante e tem-se desenvolvido com a expansão do uso dos computadores.

8. Uma vez terminado o estudo do método de indução matemática, convirá que o professor refira, sem entrar em pormenores, que as propriedades A1–A5 consideradas no n.º 6 *caracterizam a estrutura do grupóide* $(\mathbb{N},+)$. Quer isto dizer o seguinte: qualquer outro grupóide $(A, \theta)$ que verifique tais propriedades, com A no lugar de N e $\theta$ no lugar de +, é *necessariamente isomorfo a* $(\mathbb{N},+)$. Daí resulta que *qualquer outra proposição verdadeira em* $\mathbb{N}$ *(que não seja definição) é consequência lógica das proposições* A1–A5 *(e das definições que porventura forem introduzidas)*. Sendo assim, as proposições A1–A5 podem ser tomadas para *axiomas* da teoria dos números naturais e então as outras (que não forem definições) chamam-se *teoremas*.

O facto de qualquer grupóide que verifique a axiomática A1–A5 ser isomorfo a $(\mathbb{N},+)$ exprime-se dizendo que esta axiomática é *categórica*. Pelo contrário, a axiomática dos grupóides, a dos grupos, a dos anéis, a dos corpos, a dos conjuntos ordenados, a dos espaços vectoriais, etc., etc., são axiomáticas *não categóricas*, embora sejam *compatíveis* (isto é, existem realizações de cada uma dessas axiomáticas não isomorfas entre si).

Convém, por último, apresentar a axiomática de Peano, tal como esta aparece no *Compêndio*.

9. Há um assunto que ainda não ficou inteiramente esclarecido no *Guia do 6.º ano* e que convém, de futuro, ir a pouco e pouco precisando, a propósito do exemplo do BAILADO DAS HORAS e outros análogos: é o da *noção de congruência*. Note-se que em $\mathbb{Z}$ a definição deste conceito pode ser a seguinte:

Dados $a, b, m \in \mathbb{Z}$, sendo $m \neq 0$, diz-se que a é *congruente com* b *módulo* m, sse $a-b$ é múltiplo de m.

Mas esta definição não é facilmente adaptável a $\mathbb{N}_0$, visto que, nesse caso, a−b só existe se $a \leqslant b$.

*Quanto às classes de congruência, é claro que não serão as mesmas em* $\mathbb{N}$, *em* $\mathbb{N}_0$ *e em* $\mathbb{Z}$. Suponhamos por, exemplo, m = 3; então as classes de congruência em $\mathbb{N}_0$ serão os conjuntos de valores que toma cada uma das expressães 3n, 3n+1, 3n+2, *quando* n *varia em* $\mathbb{N}_0$, ou seja:

$$\{3n\} = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots\},$$

$$\{3n+1\} = \{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots\},$$

$$\{3n+2\} = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots\},$$

ao passo que, em $\mathbb{Z}$, são os conjuntos de valores que tomam aquelas mesmas expressões, *quando* n *varia em* $\mathbb{Z}$, ou seja:

$$\{3n\} = \{0,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ \ldots\}$$

$$\{3n+1\} = \{1,\ 4,\ -2,\ 7,\ -5,\ \ldots\}$$

$$\{3n+2\} = \{2,\ 5,\ -1,\ 8,\ -4,\ \ldots\}$$

A propósito do estudo dos anéis (no 6.º ano) convém demonstrar as seguintes propriedades, *relativamente a um módulo* m *qualquer:*

$$a \equiv a' \wedge b \equiv b' \Rightarrow a + b \equiv a' + b'$$

$$a \equiv a' \wedge b \equiv b' \Rightarrow ab \equiv a'b'$$

A demonstração é mais cómoda em $\mathbb{Z}$ do que em $\mathbb{N}_0$. As fórmulas $a \equiv a' \pmod{m}$, $b \equiv b' \pmod{m}$ significam então que $a - a'$ e $b - b'$ são múltiplos de *m* ou seja:

$$\exists\, p \in \mathbb{Z}:\ a - a' = mp \quad , \quad \exists\, q \in \mathbb{Z}:\ b - b' = mq$$

Por sua vez as fórmulas $a - a' = mp$, $b - b' = mq$ equivalem às seguintes:

$$a = a' + mp \quad , \quad b = b' + mq$$

donde

$$a + b = a' + b' + m(p+q)$$

$$ab = a'b' + m(a'q + b'p + mpq),$$

ou seja, pondo $p + q = h \quad , \quad a'q + b'q + mpq = k$:

$$(a+b) - (a'+b') = mh$$

$$ab - a'b' = mk$$

o que prova as teses, visto que $h, k \in \mathbb{Z}$.

Estas propriedades permitem provar que são unívocas as seguintes operações definidas no conjunto das classes de congruência módulo *m*:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad , \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

As mesmas propriedades permitem justificar a PROVA DOS NOVE, notando que $10 \equiv 1 \pmod 9$. Bastará fazer a justificação com exemplos numéricos, como o seguinte:

$$375 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5 \quad , \quad 57 = 5 \times 10 + 7$$

$$375 \times 57 = 21375 = 2 \times 10^4 + 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$$

donde se deduz, relativamente ao módulo 9:

$$375 \equiv 3 + 7 + 5 \equiv 6 \quad , \quad 57 \equiv 5 + 7 \equiv 3$$

$$3 \times 6 = 18 \equiv 0 \quad , \quad 21375 \equiv 2 + 1 + 3 + 7 + 5 \equiv 0$$

10. Um outro ponto que ficou em suspenso foi o que se refere ao *conceito de partição*. A nossa opinião actual é que este conceito deve ser introduzido logo no 6.º ano, ou mesmo mais cedo, se a modernização do ensino da matemática se estender aos dois primeiros ciclos. Como sempre, convém partir de exemplos concretos e sugestivos.

A *classificação* dos vertebrados em *mamíferos, aves, répteis, batráquios, peixes* e *ciclóstomos* pode constituir um primeiro exemplo. Pondo (1):

$$V = \{\text{vertebrados}\} \quad , \quad M = \{\text{mamíferos}\} \quad , \quad A = \{\text{aves}\},$$

$$R = \{\text{répteis}\} \ , \ B = \{\text{batráquios}\} \ , \ P = \{\text{peixes}\} \ , \ C = \{\text{ciclóstomos}\}$$

vê-se que, pelo menos em teoria:

1) os conjuntos M, A, R, B, P, C são disjuntos dois a dois e nenhum deles é vazio,

2) $V = M \cup A \cup R \cup B \cup P \cup C$.

(1) Não esquecer que a expressão {vertebrados} se lê 'conjunto dos vertebrados', e analogamente para as outras do mesmo tipo.

Exprime-se este facto dizendo que o *conjunto de conjuntos* {M, A, R, B, P, C,} é uma *partição* (ou uma *classificação*) do conjunto V.

Analogamente, o conjunto, T, das turmas de um liceu, é uma *partição* de conjunto, A, dos alunos do liceu, visto que: 1) as turmas são conjuntos não vazios de alunos, disjuntos dois a dois; 2) a reunião desses conjuntos é A.

Por sua vez, o conjunto

$$\Big\{\{1, 2\}\ ,\ \{3, 4, 5\}\ ,\ \{6\}\ ,\ \{7, 8, 9, 10\}\Big\}$$

é, por idênticas razões, uma partição de conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

A propósito, convém observar o seguinte: uma coisa é aquele *conjunto de conjuntos*, outra coisa é a sua *reunião*; o primeiro é de tipo 2 e o segundo de tipo 1, em relação a IN. Convirá, ainda, que os alunos indiquem *outras partições do mesmo conjunto.*

Consideremos, agora os seguintes conjuntos, no *universo* U *dos portugueses:*

$$C = \{\text{casados}\}\ ,\ E = \{\text{empregados}\}\ ,\ M = \{\text{maiores de 5 anos}\}$$

Imediatamente se reconhece que o conjunto {C, E, M} não é uma partição de U. Mas cada um destes conjuntos com o seu complementar constitui uma partição (ou classificação) do universo U:

$$\{C\ ,\ \tilde{C}\}\ ,\ \{E\ ,\ \tilde{E}\}\ ,\ \{M\ ,\ \tilde{M}\}.$$

Chamam-se *classificações dicotómicas* as partições deste tipo (são também dicotómicas a classificação dos animais em vertebrados e invertebrados, a das plantas em fanerogâmicas e criptogâmicas, etc.). Por sua vez, intersectando os conjuntos C, $\bar{C}$, E, $\bar{E}$, M, $\bar{M}$ três a três, obtém-se a seguinte partição de U:

$$\{CEM, \bar{C}EM, C\bar{E}M, CE\bar{M}, \bar{C}\bar{E}M, C\bar{E}\bar{M}, \bar{C}E\bar{M}, \bar{C}\bar{E}\bar{M}\}$$

Por exemplo, $C\bar{E}M$ = {casados, desempregados e maiores de 25 anos}.

Posto isto, o aluno será conduzido a reconhecer, também com exemplos (como se indica no *Guia do 6.° ano*), que *toda a relação de equivalência definida num universo* U *determina uma partição de* U *(em classes de equivalência)*. Tal conclusão é assim obtida por indução experimental. Vamos em seguida dar a demonstração rigorosa do facto, *a título de curiosidade.*

Seja $\rho$ uma relação de equivalência definida em U e ponhamos [1]:

$$K(a) = \{x: x \rho a\}, \ \forall a \in U$$

Assim, a cada elemento *a* de U o operador K faz corresponder um conjunto K(a), que *não é vazio,* visto que $a \in K(a)$ *(porquê?)*. Notemos, agora, que:

$$(1) \qquad a \rho b \Leftrightarrow K(a) = K(b)$$

Com efeito, suponhamos $a \rho b$ e seja *x* um elemento qualquer de K(a). Então $x \rho a$ e, como $a \rho b$, também $x \rho b$ *(porquê?)*, isto é, $x \in K(b)$. Seja agora y um elemento qualquer de K(b). Então $y \rho b$ e, como $b \rho a$ *(porquê?)*, também em $y \rho a$, ou seja $y \in K(b)$. Logo $K(a) = K(b)$.

Reciprocamente, se $K(a) = K(b)$, tem-se $a \in K(b)$ e portanto $a \rho b$.

---

(1) Para comodidade, a expressão $x \rho y$ pode ler-se '*x é equivalente a* y'.

Posto isto, sejam *a* e a' dois elementos quaisquer de U e suponhamos que K(a) $\neq$ K(a'). Vamos ver que, neste caso, K(a) e K(a') são *disjuntos*. Com efeito, se tal não sucede, existe um x tal que $x \in K(a)$ e $x \in K(a')$, ou seja tal que $x \rho a$ e $x \rho a'$, donde $a' \rho x$ e portanto $a' \rho a$ *(porquê?)*. Mas então, segundo a conclusão anterior K(a') = K(a), o que é contra a hipótese.

Assim, todos os conjuntos K(a), K(a'), K(a''),..., tais que $a \not\rho a'$, $a \not\rho a''$, $a' \not\rho a''$,... são *disjuntos dois a dois* (e *não vazios*). Além disso, *a reunião desses conjuntos é* U, visto que cada elemento x de U pertence a um deles: o conjunto K(x). Por conseguinte, esses conjuntos (classes de equivalência) constituem uma partição de U,

q. e. d.

É evidente que, reciprocamente, *toda a partição de um conjunto* U *determina uma relação de equivalência em* U, *cujas* classes de equivalência *são os conjuntos da partição.*

Por exemplo, à partição do conjunto dos alunos de um liceu em turmas corresponde a relação de equivalência:

x *pertence à mesma turma que* y

Em resumo:

TEOREMA. *Qualquer que seja o conjunto* U *não vazio, cada relação de equivalência* $\rho$ *em* U *determina uma partição* $\mathcal{D}$ *de* U *tal que*

$$x \rho y \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{D}: \ x, y \in C$$

*Reciprocamente, cada partição de* U *determina uma relação de* *equivalência* $\rho$ *em* U *que verifica esta condição. Em qualquer dos casos, pondo*

$$K(x) = \{y: y \rho x\}$$

K *é uma aplicação de* U *sobre* $\mathcal{D}$.

Como já foi observado no 6.° ano, a propósito das *definições por abstracção,* é mais natural, em muitos casos, considerar, em vez das classes de equivalência, as *propriedades* que definem essas classes (ou conjuntos). Neste caso, podíamos definir K como o operador que faz corresponder a cada $a \in U$ a *propriedade* que é comum a todos os elementos x tais que $x \rho a$ (e só a esses).

Em qualquer dos casos, diremos que K é um *operador de abstracção.* São exemplos de operadores de abstracção os seguintes:

*direcção de, forma de, comprimento de, cor de, volume de, peso de, nacionalidade de,* etc.

Assim, tem-se:

$$r // s \Leftrightarrow \text{direcção de } r = \text{direcção de } s$$

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \Leftrightarrow \text{forma de } \mathcal{F} = \text{forma de } \mathcal{G}, \text{ etc.}$$

sendo r, s rectas e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ figuras quaisquer de $\mathcal{E}$.

*Em qualquer dos casos, o operador de abstracção converte a relação de equivalência em relação de identidade.* Por isso mesmo se chama 'operador de abstracção', visto que *abstrai,* por assim dizer das diferenças que há entre dois elementos equivalentes.

Recordemos, ainda, o seguinte exemplo:

$$A \text{ é equivalente a } B \Leftrightarrow \# A = \# B$$

sendo A e B conjuntos *quaisquer*. Neste caso, como também já foi observado no *Guia do 6.º ano*, o universo *não é um conjunto*, mas sim uma *classe* (a classe de *todos* os conjuntos), na acepção mais larga atribuída à palavra 'classe'.

11. No decurso das suas aulas – e em especial no 6.º ano, a propósito do estudo da lógica – o professor deverá recordar como se definem os conceitos de *divisor, de múltiplo*, de *máximo divisor comum*, de *mínimo múltiplo comum* e de *número primo* (de preferência em IN). Convirá definir 'máximo divisor comum' e 'mínimo múltiplo comum', atribuindo às palavras 'máximo' e 'mínimo' o sentido usual, ligado à *relação de grandeza*.

Deverá ainda ser recordado o *algoritmo de Euclides* para o m. d. c., bem como o facto de um número natural ser sempre decomponível em factores primos (e de um só modo, à parte a ordem).

*Quanto a demonstrações*, poucas são necessárias e podem ser feitas no 6.º ano, após o capítulo III do *Compêndio, com introdução heurística:*

1.º CENTRO DE INTERESSE: *Redescobrir o algoritmo de Euclides*. São dados dois números naturais a, b e pretende-se achar o m. d. c. (a, b). Suponhamos $a \geqslant b$. Dois casos se podem dar:

1) a *é divisível* por b. Qual é então o máximo divisor comum? Evidentemente, b.

2) a *não é divisível por* b. Seja, então, q o quociente inteiro e r o resto da divisão de *a* por *b* [1]:

(1) $$a = bq + r$$

---

[1] Admite-se nesta altura que o PROBLEMA DA DIVISÃO INTEIRA é sempre possível e determinado.

Seja, agora, *n* um divisor comum qualquer de a e de b. Será *n* também divisor de r? *Parece que sim.* Vamos ver se é verdade. Designemos por a' e b' os quocientes de a e de b por n:

$$a = a'n, \quad b = b'n$$

Então de (1) vem:

$$a'n = b'nq + r$$

donde:

$$r = (a' - b'q)n$$

Portanto *n* também é divisor de r, *como se previu.*

Seja por sua vez *m* um divisor comum qualquer de b e de r. Será também divisor de *a*? Designemos por b' e r' os quocientes de b e de r por m:

$$b = b'm \quad , \quad r = r'm$$

Então, $a = b'mq + r'm = (b'q + r')m$

Logo $m \dashv a$, *como se previu.*

CONCLUSÕES QUE O ALUNO DEVE TIRAR POR SI:

*O conjunto dos divisores comuns de* a *e* b *é o mesmo que o conjunto dos divisores comuns de* b *e* r (porquê?).

Logo

$$\text{m.d.c. } (a, b) = \text{m.d.c. } (b, r) \qquad \textit{(porquê?)}$$

Pergunta-se': *Que ideia nos sugere este resultado para achar o* m. d. c. (a, b)? A resposta deve partir espontaneamente do aluno(1):

O problema de achar o m. d. c. (a, b) foi reduzido ao de achar o m. d. c. (b, r). Seja

$$b = rq' + r' \quad , \quad \text{com } r' < r \quad (q' \in \mathbb{N},\ r' \in \mathbb{N}_0).$$

Se $r' = 0$, então $r \dashv b$ e, portanto, $r =$ m. d. c. $(b, r) =$ m. d. c. $(a, b)$.

Se $r' \neq 0$, seja

$$r = r'q'' + r'' \quad , \quad \text{com } r'' < r' \quad (q'' \in \mathbb{N},\ r'' \in \mathbb{N}_0).$$

E, agora, a situação repete-se. Pergunta-se:

*Pode acontecer que nunca se chegue a resto zero por este caminho?* É preciso lembrar que

$$a > b > r' > r'' > \ldots$$

Ora, se nunca se chegasse a resto zero, teríamos assim uma *sucessão infinita decrescente de números naturais,* o que é impossível. Impossível porquê? O aluno sabe-o por intuição ou por experiência. Mas o facto só pode ser demonstrado por indução matemática, o que não interessa fazer no 6.º ano (2).

Por consguinte, o referido processo (*algoritmo de Euclides* ou *método das divisões sucessivas)* conduz, sempre, a um resto

(1) Antes das considerações gerais que vão seguir-se, agora, convém considerar um caso particular, por exemplo $a = 950$ e $b = 144$.

(2) Ver-se-á mais adiante.

nulo: *o último resto não nulo que se obtém é precisamente o* m. d. c. (a, b).

Posto isto, nova pergunta:

*O que acontece quando, numa divisão inteira, se multiplica o dividendo e o divisor por um mesmo número natural?*

É provável que o aluno já não se lembre da resposta; mas é talvez melhor assim, porque pode então *redescobri-la*. *Sejam* a, $b \in \mathbb{N}$ e

$$a = bq + r \quad , \quad \text{com } q, r \in \mathbb{N}_0 \quad \text{e} \quad r < b$$

Multiplicando por qualquer $k \in \mathbb{N}$, virá então:

$$ak = (bk)q + rk \quad , \quad rk < bk$$

Conclusão: *o quociente não muda e o resto vem multiplicado por* k.

E agora:

*Que propriedade pode resultar daqui para o* m. d. c. ?

Multiplicando a e b por k, os sucessivos restos, no algoritmo de Euclides vêm todos multiplicados por k e, portanto, o mesmo acontece ao m. d. c. *Conclusão:*

$$\text{m. d. c. } (a, b) = D \Rightarrow \text{m. d. c. } (ak, bk) = kD$$

*(Traduzir em linguagem comum)*

Suponhamos, agora, que k é um divisor comum de a e de b, e seja

$$a = a'k \quad , \quad b = b'k \quad , \quad \text{m. d. c. } (a', b') = D'$$

Então, pela propriedade anterior:

$$\text{m. d. c. } (a'k,\ b'k) = kD'$$

*Conclusão:*

$$\text{Se } k \dashv a \text{ e } k \dashv b \text{ , então } k \dashv \text{m. d. c. } (a, b) \text{ e}$$

$$\text{m. d. c. } (a, b) = D \Rightarrow \text{m. d. c. } (a/k\ ,\ b/k) = D/k$$

*(Traduzir tudo isto em linguagem comum)*

Por outro lado, como (1)

$$k \dashv \text{m. d. c. } (a, b) \Rightarrow k \dashv a \wedge k \dashv b$$

segue-se a *propriedade característica do m.d.c.:*

$$k \dashv a \wedge k \dashv b \Leftrightarrow k \dashv \text{m. d. c. } (a, b)$$

Recorde-se, agora, a DEFINIÇÃO:

| |
|---|
| Diz-se que a é *primo com* b , sse m. d. c. (a, b) = 1 |

---

(1) É conveniente mostrar que a relação $\dashv$ definida em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem parcial lata. É costume usar o sinal | como abreviatura de 'divide'. Mas, tratando-se de uma relação que não é simétrica, parece-nos preferível o sinal que adoptamos. Neste caso, o sinal $\vdash$ significará 'o múltiplo de' (relação: inversa da primeira).

Posto isto, apresente-se a seguinte hipótese em IN:

$$k \dashv ab \wedge k \text{ é primo com } a$$

e procure-se levar o aluno a uma conclusão. Que quer dizer 'k é primo com a '? Resposta:

$$\text{m.d.c. } (a, k) = 1$$

Que se conclui daqui para o produto ab? Resposta:

$$\text{m.d.c. } (ab, kb) = b \qquad \textit{(porquê?)}$$

Mas olhe-se de novo para a hipótese: $k \dashv ab$. Ora $k \dashv kb$. Logo $k \dashv b$ *(porquê?)*.

RECAPITULANDO:

$$k \dashv ab \wedge k \text{ é primo com } a \Rightarrow k \dashv b$$

Traduzindo em linguagem comum:

> Se um número divide um produto de dois factores e é primo com um deles, então divide o outro factor.

Este é o importante TEOREMA DE EUCLIDES, que nos vai servir de base para o estudo a seguir.

2.º CENTRO DE INTERESSE: *Redescobrir o teorema da decomposição de um número em factores primos.*

Muitas vezes, interessa decompor um número natural em factores tão pequenos quanto possível, mas todos diferentes de 1. Por exemplo:

$$20 = 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 5$$

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times 9 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 5, \text{ etc.}$$

Verificou-se então o seguinte: acaba-se por chegar sempre a factores que *já não se podem decompor mais,* e a última decomposição assim obtida é sempre a mesma *qualquer que seja o modo como se faz a decomposição.* Mas trata-se, por enquanto, de uma *verificação experimental.* Pergunta-se:

*Será possível demonstrar rigorosamente estes factos, com toda a generalidade?*

Os factores indecomponíveis a que se chega (a que poderíamos chamar os *átomos* da decomposição) têm o nome de *números primos* (1). Portanto, um número natural *a* diz-se *primo,* sse é diferente de 1 e não pode decompor-se num produto:

$$a = m \times n \quad , \quad \text{com } m \neq 1 \text{ e } n \neq 1$$

É claro que esta definição equivale à seguinte:

DEFINIÇÃO. Diz-se que um número *a* é *primo,* sse é diferente de 1 e só é divisível por 1 e por a.

(1) Etimologicamente, 'número primo' significa 'número primeiro' (ou 'número primitivo').

Simbolicamente (no universo IN):

$$a \text{ é primo } \underset{\cdot}{\Leftrightarrow} a \neq 1 \wedge (x \dashv a \underset{x}{\Rightarrow} x = 1 \vee x = a)$$

Um número diz-se *composto* (ou *decomponível*), sse é diferente de 1 e não é primo.

Seja *a* um número composto. Então existem $m \neq 1$ e $n \neq 1$, tais que

$$a = m \times n \quad , \quad \text{sendo portanto} \quad m < a \quad \text{e} \quad n < a \qquad \textit{(porquê?)}$$

*Se* m *e* n *são primos, o número* a *está decomposto em factores primos*. Se não, um pelo menos dos números *m, n* não é primo; seja por exemplo m; então existem $m' \neq 1$ e $n' \neq 1$, tais que $m = m' \times n'$; portanto:

$$a = m' \times n' \times n \qquad (m' < m \quad , \quad n' < m)$$

Se os números m', n', n são primos, o número *a* está *decomposto em factores primos*. Se não, um pelo menos dos factores é decomponível como no caso anterior. E assim sucessivamente. Enquanto houver um factor que não seja primo, o processo continuará. Pergunta-se agora:

*Este processo poderá não ter fim? O que aconteceria se o processo não mais terminasse?* A resposta é, naturalmente:

Nesse caso, as sucessivas decomposições davam origem a uma infinidade de números cada vez mais pequenos, o que já sabemos que é impossível. Logo:

*O número acaba sempre por ficar decomposto em factores primos.*

Agora resta só um ponto a esclarecer:

*Se fizermos a decomposição de um número a em factores primos por caminhos diferentes, os resultados poderão ser diferentes?*

Suponhamos que se obteve, por dois processos:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_m \quad , \quad a = q_1 q_2 \cdots q_n$$

sendo $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots q_n$ números primos. Então

$$(2) \qquad p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 q_2 \cdots q_n$$

Suponhamos, por exemplo, $m \leqslant n$ e vejamos se $p_1$ é igual a algum dos factores do 2.º membro. Se $p_1 \neq q_1$, então $p_1$ é primo com $q_1$ *(porquê?)* e como divide o produto de $q_1$ por $q_2 \ldots q_n$, então divide $q_2 \ldots q_n$. Se $p_1 \neq q_2$, então $p_1$ é primo com $q_2$ e, portanto, divide $q_3 \cdots q_n$. E assim sucessivamente, até chegar $q_n$. *Logo* $p_1$ *tem de ser igual a um dos números* $q_1, \ldots, q_n$. Como o produto é comutativo, podemos, por comodidade, supor escolhida a ordem dos factores de modo que seja $p_1 = q_1$. Então de (2) vem:

$$p_2 \cdots p_m = q_2 \cdots q_n$$

Raciocinando de modo análogo, concluímos que $p_2$ é igual a um dos factores do 2.º membro e podemos supor escolhida a ordem dos factores de modo que seja $p_2 = q_2$. Procedendo assim sucessivamente, conclui-se que

$$p_1 = q_1 \quad , \quad p_2 = q_2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad p_m = q_m$$

**Ora $m \leqslant n$, por hipótese. Poderá ser $m < n$? Não, porque, nesse caso,**

dividindo ambos os membros do (2) por $p_1 ... p_m$ obtínhamos $1 = q_{m+1} ... q_n$, o que é impossível *(porquê?)*. Em conclusão:

TEOREMA. *Um número composto admite sempre uma e uma só decomposição em factores primos (à parte a ordem destes).*

(Normalmente os factores são escritos por ordem crescente de grandeza, em sentido lato.)

É claro que a demonstração anterior (aliás a seguida no ensino tradicional) tem carácter parcialmente intuitivo. Uma demonstração rigorosa só poderia ser dada no 7.º ano, pelo método de indução matemática; mas não vale a pena fazê-lo.

Convém ainda recordar o processo usual, para decompor um número em factores primos, e apontar o teorema segundo o qual o conjunto dos números primos é infinito (pode omitir-se a demonstração).

Designemos por $p_n$ o número primo de ordem *n*, para cada $n \in \mathbb{N}$. Fica, assim, definida a *sucessão dos números primos:*

$$p_1 = 2 \quad , \quad p_2 = 3 \quad , \quad p_3 = 5 \quad , \quad ...$$

O teorema anterior equivale a dizer o seguinte:

*Para cada número composto* a, *existe sempre uma e uma só sucessão* $x_n$ *de números inteiros absolutos tal que*

$$a = 2^{x_1} \times 3^{x_2} \times 5^{x_3} \times 7^{x_4} \times 11^{x_5} \times ... \times p_n^{x_n} ...$$

*sendo* $x_n = 0$ *a partir de certa ordem.*

Por exemplo, se $a = 20$, tem-se $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_n = 0$ para $n > 3$.

Deste modo, como se vê, a sucessão dos números primos desempenha, no *semigrupo multiplicativo* IN, um papel análogo ao de uma *base de um espaço vectorial de dimensão infinita*. Então os expoentes $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ da decomposição em factores primos são comparáveis às *componentes* de um vector nessa base; *multiplicar* dois elementos de IN equivale a *somar* ordenadamente as respectivas componentes.

Isto mostra bem como é diferente a estrutura dos semigrupos (IN,+) e (IN,·); uma caracterização axiomática do segundo é, com certeza, muito mais complicada que a do primeiro [1].

12. A determinação do m. m. c. a partir do m. d. c. ou a determinação de ambos por decomposição em factores primos podem também ser assuntos a recordar no 6.º ano (há 40 anos, estes assuntos faziam parte do programa do ensino primário!). *O que deve inteiramente abolir são clássicos problemas-cliché, sem interesse algum, a que acabou por se reduzir quase todo o ensino da aritmética racional no 3.º ciclo, desvirtuando-se por completo a sua finalidade.*

Mas a inclusão destes assuntos, mesmo abreviadamente, como atrás se indica, no moderno 6.º ano, levanta o eterno problema do tempo: para o tratar de maneira satisfatória, há que eliminar uma outra parte do programa. Propomos que esta parte a suprimir seja a *introdução à geometria analitica no espaço*.

Não nos parece grave dispensar, no ensino liceal, o estudo da geometria analítica no espaço. Pelo contrário, o teorema da decomposição em factores primos é essencial para poder *justificar a intro-*

---

[1] O semigrupo (IN, +) admite um único automorfismo: a identidade. O semigrupo (IN, •) admite uma infinidade de automorfismos, determinados por todas as aplicações biunívocas do conjunto dos números primos sobre si mesmo.

*dução dos números irracionais* e deve, por esse e outros motivos, fazer parte da cultura geral que compete ao ensino secundário. O aluno a quem se consegue despertar o espírito crítico e a curiosidade intelectual, de acordo com as finalidades do ensino, sente vivamente a necessidade de uma tal justificação e mostra-se insatisfeito quando não a encontra.

Poderiam ser apresentados vários exemplos, em prova desta afirmação. Não devem ser precisos milagres, para convencer os incrédulos... Entre outros casos, é de assinalar a tentativa do aluno Fernando Saraiva de uma turma-piloto do Liceu de Oeiras, para demonstrar o seguinte

TEOREMA: *Sendo* a *e* n *números naturais, se não existe nenhum número natural* x *tal que* $x^n = a$, *também não existe nenhum número fraccionário que verifique a mesma condição (isto é, não existe* $\sqrt[n]{a}$ *em* (Q).

Para isso, o referido aluno estabeleceu previamente um outro teorema e um corolário, de maneira bastante curiosa, revelando qualidades muito apreciáveis, que devem ser encorajadas. Mas os seus raciocínios omitem um ponto: admite implicitamente, em certa passagem, sem o mencionar, o seguinte facto essencial:

> Se um número primo divide um produto, divide pelo menos um dos factores do produto.

Este teorema([1]), consequência imediata do TEOREMA DE EUCLI-

([1]) Mais precisamente, o aluno utiliza o chamado 'teorema de Gauss', caso particular deste aqui enunciado (cf. 'Compêndio de Aritmética Racional', do Dr. J. J. Gonçalves Calado).

DES, pode ser usado directamente para demonstrar o teorema anterior. Bastará fazê-lo num caso particular, para dar a ideia:

Seja $a = 5$ e $n = 3$. É claro que não existe nenhum número natural $x$ tal que $x^3 = 5$ (*porquê?*). Suponhamos agora que existe um número fraccionário $x$ tal que $x^3 = 5$. Esse número poderá ser representado por uma *fracção irredutível* $m/n$, isto é, tal que $m$ e $n$ sejam *primos entre si*. Tem-se então $(\frac{m}{n})^3 = 5$ ou seja

$$(1) \qquad m^3 = 5n^3$$

Mas, nesse caso, $5 \dashv m^3$ e portanto $5 \dashv m$ (*porquê?*). Existe pois um $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 5k$ e, assim, atendendo a (1),

$$5^3 k^3 = 5\,n^3, \quad \text{donde:} \quad 5^2 k^2 = n^3$$

Então $5 \dashv n^3$ e portanto $5 \dashv n$. Ora já vimos que $5 \dashv m$. Mas isto é absurdo, porque tínhamos suposto que *m* e *n* são primos entre si.

Logo $\sim \exists\, x \in \mathbb{Q}^+ : x^3 = 5$; e, como também não existe nenhum $x < 0$ tal que $x^3 = 5$, conclui-se:

*Não existe* $\sqrt[3]{5}$ *em* $\mathbb{Q}$.

O referido teorema, caso particular do teorema de Euclides, pode apresentar-se com o seguinte aspecto:

*O anel* $A_\mu$ *das classes de congruência módulo* $\mu$ *não tem divisores de zero, sse* $\mu$ *é primo.*

A partir daqui, demonstra-se que:

$A_\mu$ *é um corpo, sse* $\mu$ *é primo.*

Com efeito, suponhamos que $\mu$ é primo e seja *a* um elemento qualquer de $A_\mu$ diferente de 0. Então, a aplicação

$$x \curvearrowright ax \quad \text{de} \quad A_\mu \quad \text{em} \quad A_\mu$$

é *injectiva* (*porquê?*) e, como $A_\mu$ é finito, a aplicação é *sobrejectiva*. Logo existe um elemento x de $A_\mu$ (e um só) tal que $ax = 1$,

q. e. d.

Como aplicação do TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO EM FACTORES PRIMOS convém ainda propor, aos alunos, o seguinte exercício:

*Demonstrar que, se um número natural* a *não é potência de expoente inteiro de* 10, *então* $\log_{10} a$ *é um número irracional.*

13. Vamos terminar este capítulo com mais uma observação. Várias vezes temos salientado, invocando o testemunho de grandes cientistas, que o processo da criação científica começa pela *intuição*; e temos insistido em que o ensino de qualquer assunto deve igualmente começar pela *fase intuitiva*. Mas a *fase racional,* que se lhe segue, é igualmente indispensável. Especialmente em matemática, nenhum resultado pode merecer inteira confiança, enquanto não for sancionado pela *razão,* isto é, demonstrado logicamente. Por isso, se é muito importante estimular no aluno a intuição e a imaginação criadora, não menos importante é desenvolver nele o espírito crítico, o hábito da análise lógica e do raciocínio rigoroso.

Numa tentativa de demonstração, tal como num cálculo, basta um pequeno lapso – a simples ausência de um elo quase imperceptível – para faslear o resultado. Por isso, todos os pormenores da demonstração devem ser analisados, por assim dizer, *à lupa*. *De contrário, o aluno será capaz de aceitar como verdadeiras várias proposições falsas, após uma cadeia de raciocínios que lhe pareçam impecáveis.*

Note-se bem:

Esta situação é muito mais frequente do que possa parecer à primeira vista!

*Um dos principais deveres do ensino é ensinar o aluno a pensar.*

E todo o aluno deve ambicionar adquirir autonomia mental e espírito crítico suficiente, para não se deixar facilmente convencer com argumentos errados – e menos ainda com *argumentos de autoridade*.

## VI

# RACIONALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO CONTÍNUO

'A harmonia do universo não conhece senão uma forma musical — o *legato*; enquanto a sinfonia dos números só conhece o oposto — o *staccato*'.

TOBIAS DANTZIG (*O número, linguagem da ciência*)

1. O conceito de número irracional, que obriga a substituir o *esquema discreto* dos números inteiros pelo *esquema contínuo* dos números reais, nasceu de um drama na história do pensamento: a descoberta dos incomensuráveis em geometria, *por necessidade de coerência lógica*. 'Diz-se que as pessoas que primeiro divulgaram os números irracionais pereceram todos num naufrágio; porque o inexprimível, o informe, deve ser mantido absolutamente secreto'. O que estas palavras de Procio encerram de emoção dramática deve surpreender todos aqueles que, não tendo vivido a experiência da investigação, se obstinam em ver na matemática uma ciência árida e fria.

Só em fins do século passado se conseguiu chegar a uma teoria lógica dos números reais, com a qual se procura racionalizar o devir contínuo do mundo físico. Dizia Platão: '*O Tempo é a imagem móvel da Eternidade*'. Modernamente, os filósofos do devir, desde

Hegel a Bergson, dizem algo de semelhante em sentido inverso, que se pode traduzir mais ou menos nestes termos:

'O contínuo matemático é uma imagem imóvel da mobilidade; uma imitação descontínua do devir contínuo'([1]).

Os paradoxos de Zenão renascem, sob novos aspectos, no campo filosófico. A polémica entre nominalistas e realistas ressurge, mais acesa do que nunca, sob novas e variadas vestes, revelando uma inquietude de espírito que é sempre salutar, dentro de certos limites.

Mas, entretanto, continua o êxito espectacular da análise infinitesimal na exploração do mundo físico. O sistema dos números reais é apenas um *esquema lógico,* como tantos outros, que há muito não pretende ser uma imagem fiel da realidade, mas que se tem revelado indubitavelmente *cómodo* e *eficiente.* Interessa, portanto, estudar a fundo esse esquema, aperfeiçoá-lo de maneira a eliminar dele toda a possibilidade de contradição interna e assentar sobre essa base sólida, por via dedutiva, todo o edifício da análise.

2. Vimos como, nas demonstrações mais delicadas relativas a números naturais, intervém essencialmente o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, que traduz uma propriedade característica do grupóide ($\mathbb{N}$, +), e que dá origem a novos tipos de raciocínio dedu-

---

([1]) Para Bergson, o protótipo da continuidade é o tempo, considerado como *duração pura,* essência da vida, de que tomamos consciência no interior do nosso eu. Assim, o tempo é reunião de passado e presente, num *processo evolutivo* em que há interpenetração de estados conscientes, e que não se reduz portanto a um conjunto de *elementos distintos* (instantes). Segundo Bergson, 'distintos' significa 'sem ligação mútua', o que é precisamente o oposto da *continuidade.*

tivo. Pergunta-se agora: 'Não haverá, no sistema dos números reais, uma propriedade análoga (embora diferente) na qual se baseiem necessariamente as demonstrações mais delicadas? Vamos ver que sim. *Mas para isso é necessário substituir o princípio de indução matemática em* $\mathbb{N}$ *por um outro equivalente, formulado em termos da relação* $<$.

Seja A um conjunto de números naturais. Diz-se que um número m é *elemento máximo* de A, sse *m* pertence a A e é superior ou igual a todo o elemento de A, isto é, sse:

$$m \in A \;\wedge\; \forall x \in A \;:\; m \geqslant x$$

Analogamente se define 'elemento mínimo'. Há conjuntos de números naturais que não têm elemento máximo (por exemplo, o próprio conjunto $\mathbb{N}_0$, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números primos, etc.); mas, quando um conjunto A de números naturais tem um elemento máximo, *não pode ter mais nenhum elemento máximo,* como é fácil ver (se tivesse dois, um deles teria de ser menor que o outro e não seria, portanto, máximo).

O elemento máximo de um conjunto A, quando existe, representa-se por max A, e também se chama *último elemento de* A. O elemento mínimo de A representa-se por min A e também se chama *primeiro elemento de* A. Exemplos (em $\mathbb{N}$):

$$\max\{3, 2, 7, 5\} = 7 \quad , \quad \min\{3, 1\} = 1$$

$$\max\{5\} = \min\{5\} = 5$$

$$\max\{x: 5x \leqslant 23\} = 4 \quad , \quad \min\{x: 5x > 23\} = 5$$

$$\max\{n: n^2 \leqslant 27\} = 5 \quad , \quad \min\{n: n^2 > 27\} = 6$$

$$\max\{n: n \dashv a \wedge n \dashv b\} = \text{m. d. c. } (a, b)$$

$$\min\{m: a \dashv m \wedge b \dashv m\} = \text{m. m. c. } (a, b)$$

Aliás, estas notações podem ser introduzidas com vantagem logo no 6.º ano, *ou mesmo antes,* e usadas em diversos exercícios, sem qualquer teoria prévia.

Diz-se que um conjunto A de números naturais é *limitado,* sse existe pelo menos um número natural k superior ou igual a todo o elemento de A. É óbvio que, se A tem elemento máximo, A é limitado (pela própria definição). Mas a recíproca também será verdadeira? A intuição diz-nos que sim, isto é, diz-nos que:

PROPOSIÇÃO 1. *Se um conjunto* A *não vazio de números naturais é limitado, tem com certeza elemento máximo.*

Mas, para demonstrar esta proposição (que nos parece *evidente,* por intuição), temos de recorrer ao MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, associado ao MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO[1]. Suponhamos que A *é limitado, mas não tem elemento máximo,* e designemos por X o conjunto constituído por *todos os números naturais inferiores ou iguais a algum elemento de* A, isto é:

$$X = \{x \in \mathbb{N} \; : \; \exists y \in A \; : \; x \leqslant y\}$$

Então $1 \in X$ e é fácil ver que, se $n \in X$, também $n+1 \in X$ (de contrário *n* seria elemento máximo de A). Logo $X = \mathbb{N}$. Mas existe um número natural k superior ou igual a todo o elemento de A (*porquê?*) e esse número será também superior ou igual a todo o elemento de X (*porquê?*). Mas isto é impossível, por ser $X = \mathbb{N}$.

---

(1) Esta demonstração e as seguintes são aqui dadas apenas a título de curiosidade.

A partir da proposição anterior, demonstra-se agora facilmente a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2. *Todo o conjunto* A *não vazio de números naturais tem elemento mínimo.*

(Basta considerar o conjunto $A'$ dos números inferiores ou iguais a todo o elemento de A e ver que: 1.º $A'$ não é vazio; 2.º $A'$ é limitado; 3.º $\max A' = \min A$.)

O mais curioso é que, a partir da PROPOSIÇÃO 2 e dos axiomas A1-A4 dos números naturais, se pode demonstrar o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM $\mathbb{N}$ (definindo a relação $<$ a partir da adição, como se tem indicado, e o número 1 como o *primeiro elemento de* $\mathbb{N}$).

Com efeito, seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica as duas seguintes condições:

$$1 \in X \quad , \quad n \in X \Rightarrow n+1 \in X$$

Queremos provar que $X = \mathbb{N}$. Suponhamos o *contrário,* isto é, que $X \neq \mathbb{N}$, e seja Y o complementar de X em $\mathbb{N}$, isto é:

$$Y = \mathbb{N} \setminus X$$

Então Y *não é vazio* e tem, portanto, um elemento mínimo, *m.* Mas $m \neq 1$ e $m-1 \in X$ (*porquê?*). Portanto $m \in X$ (*porquê?*). *Mas isto é impossível, porque* $m \in Y$.

Assim, em conclusão:

A PROPOSIÇÃO 2 é equivalente ao PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM $\mathbb{N}$, desde que se admitam os axiomas A1-A4, bem como as referidas definições da relação < e do número 1. E o mesmo se pode dizer quanto à PROPOSIÇÃO 1, visto que:

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM IN $\Rightarrow$ PROPOSIÇÃO 1

PROPOSIÇÃO 1 $\Rightarrow$ PROPOSIÇÃO 2

PROPOSIÇÃO 2 $\Rightarrow$ PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM IN

Verifica-se, pois, *equivalência* entre as três proposições consideradas, desde que se admitam os axiomas A1-A4 e as referidas definições (1). E não haverá *círculo vicioso* na teoria dedutiva, desde que *uma* destas proposições seja admitida como axioma.

3. Vejamos, agora, o que se passa no universo IR, quanto às propriedades de máximo e de mínimo. Para isso, convém desde já introduzir as seguintes definições:

Dado um conjunto A de números reais, diz-se que um número real k é *majorante de* A, sse k é superior ou igual a todo o elemento de A, isto é, sse:

$$\forall x \in A \;:\; k \geqslant x$$

Diz-se que k é *minorante* de A, sse:

$$\forall x \in A \;:\; k \leqslant x$$

(1) Pode parecer que, para provar que a prop. 1 implica a prop. 2, seja necessário admitir como axioma a existência do primeiro elemento de IN. Uma análise mais fina da questão mostra que tal não é necessário.

O conjunto A diz-se *limitado superiormente,* sse existe pelo menos um majorante de A em $\mathbb{R}$; diz-se *limitado inferiormente,* sse existe pelo menos um *minorante* de A em $\mathbb{R}$; diz-se *limitado,* sse é limitado superiormente e limitado inferiormente. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}^+$ é limitado inferiormente, o conjunto $\mathbb{R}^-$ é limitado superiormente e o conjunto $[0,1]$ é limitado.

Se existe um majorante de A que seja elemento de A, este chama-se *elemento máximo (ou último elemento) de* A, e representa-se por max A. Se existe um minorante de A que seja elemento de A, este chama-se *elemento mínimo* (ou *primeiro elemento) de* A, e representa-se por min A. Por exemplo:

$$\max\,[0,1] = 1 \quad , \quad \min\,[0,1] = 0$$

Estas definições podem ser estendidas a *qualquer conjunto ordenado,* em vez de $\mathbb{R}$. Quando se trata do conjunto ordenado $(\mathbb{N}, <)$, todo o conjunto A contido em $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente; por isso, neste caso, dizer que o conjunto A é *limitado superiormente* equivale a dizer que é *limitado,* o que justifica a definição deste conceito dada no número anterior.

Voltemos ao universo $\mathbb{R}$ e seja A, por exemplo, o conjunto dos *números positivos menores que* 1, isto é:

$$(1) \qquad A = \{x : 0 < x < 1\} = ]0, 1[$$

Este conjunto é, evidentemente, limitado: são majorantes de A o número 1 e qualquer número maior que 1; são minorantes de A, o número 0 e qualquer número negativo. Mas, pergunta-se:

*Tem este conjunto elemento máximo? Tem este conjunto elemento mínimo?*

A resposta a qualquer das perguntas é negativa, *embora o conjunto seja limitado*. Com efeito, vejamos:

O número 1 é majorante de A, *mas não pertence a* A. Se existisse um elemento *m* máximo de A, teria de ser, segundo (1):

$$m < 1$$

Mas então existiria, pelo menos, um número real *m'* tal que

$$(2) \qquad m < m' < 1 \quad , \quad \text{por exemplo } m' = m + \frac{1-m}{2}$$


Então, segundo (1), m' seria elemento de A, e, segundo (2), m não seria elemento máximo de A, contra a hipótese.

Analogamente se prova que não existe mínimo de A.

Assim, como se vê, a PROPOSIÇÃO 1 do número anterior não se estende a IR. No entanto, observa-se o seguinte:

A demonstração anterior mostra que 1 é *o menor dos majorantes de* A e que 0 é o *maior dos minorantes de* A. Exprimem-se estes factos dizendo que 1 é o *extremo superior* (ou o *supremo*) *de* A e que 0 é o *extremo inferior* (ou o *ínfimo*) *de* A; e escrevendo:

$$1 = \sup A \quad , \quad 0 = \inf A$$

Dum modo geral:

DEFINIÇÕES. Diz-se que *k* é o *supremo* de um conjunto A (limitado superiormente), sse k é o menor dos majorantes de A, isto é, o elemento mínimo do conjunto dos majorantes de A. Diz-se que *k* é o *ínfimo* de um conjunto A (limitado inferiormente), sse k é o maior dos minorantes de A, isto é, o elemento máximo do conjunto dos minorantes de A. No primeiro caso escreve-se $k = \sup A$ e no segundo $k = \inf A$.

Facilmente se reconhece que um conjunto não pode ter mais de um supremo nem mais de um ínfimo. Por outro lado, é evidente que

$$\sup A = \max A \quad , \quad \text{sse} \quad \sup A \in A$$

$$\inf A = \min A \quad , \quad \text{sse} \quad \inf A \in A$$

Por exemplo:

$$\sup \left]0, 2\right] = \max \left]0, 2\right] = 2$$

$$\inf \left[0, 2\right[ = \min \left[0, 2\right[ = 0$$

Mas *não existe* $\max \left[0, 2\right[$, porque $2 \notin \left[0, 2\right[$ , etc.

Analogamente, se designarmos por M o conjunto dos *números inversos dos números naturais,* isto é:

$$M = \left\{ 1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \ldots \ , \ \frac{1}{n} \ , \ \ldots \right\}$$

teremos $\sup M = 1 = \max M$ , $\inf M = 0 \notin M$.

Ora a propriedade que, em $\mathbb{R}$, substitui a PROPOSIÇÃO 1 (em $\mathbb{N}$) é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1'. *Todo o conjunto de números reais limitado superiormente tem supremo em* $\mathbb{R}$.

Esta propriedade pode ser demonstrada, *se admitirmos que os números reais são representados pelas dízimas infinitas (precedidas ou não do sinal −), com as convenções usuais relativas à relação* $<$.

Com efeito, seja A um conjunto de números reais limitado superiormente. Dois casos se podem dar:

1.º $\exists x \in A: x > 0$. Ponhamos $A^+ = \{x: x \in A \wedge x > 0\}$. Então $A^+$ não é vazio e o conjunto das *partes inteiras* dos elementos de $A^+$ é limitado *(porquê?)*. Seja $a_0$ o elemento máximo desse conjunto de inteiros e designemos por $A_1^+$ o conjunto dos elementos de $A^+$ cuja parte inteira é $a_0$. Então $A_1^+$ não é vazio. Seja $a_1$ o *maior dos algarismos das décimas* dos elementos de $A_1^+$. Dum modo geral, seja (1)

$$\begin{cases} a_n = \text{máx. algarismo decimal de ordem } n \text{ dos elementos de } A_n^+ \\ A_{n+1}^+ = \{x : x \in A_n^+ \wedge \text{algarismo decimal de ordem n de } x = a_n\} \end{cases}$$

Posto isto, seja s o número representado pela dízima infinita cuja parte inteira é $a_0$ e cujo algarismo decimal de ordem n é $a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; isto é, *em notação intuitiva:*

$$s = a_0,\ a_1 a_2 \ \dots\ a_n \ \dots \quad (^2)$$

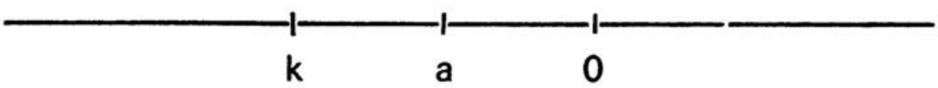
Então $s = \sup A^+ = \sup A$ *(porquê?)*.

---

(1) Seria mais correcto dizer: '$a_n$ é o maior dos números representados pelos algarismos decimais de ordem *n* dos elementos de $A^+$'.

(2) Se a dízima for periódica de período 9, pode substituir-se pela dízima normal equivalente.

2.º $\forall x \in A$: $x \leqslant 0$. Tomemos arbitrariamente $a \in A$ , $k < a$, e seja B o conjunto dos números $y = x - k$ com $x \in A$.




Então $0 < a - k \in B$ e assim B está no 1.º caso:

Seja $r = \sup B$, $s = r + k$. Então $s = \sup A$ *(porquê?)*.

DA PROPOSIÇÃO 1' fácilmente se deduz a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2'. *Todo o conjunto de números reais limitado inferiormente tem ínfimo em* $\mathbb{R}$.

Com efeito, se for A um tal conjunto e se designarmos por M o conjunto dos minorantes de A, M é limitado superiormente e é fácil ver que $\sup M = \max M = \inf A$.

De modo análogo podíamos deduzir a PROPOSIÇÃO 1' da PROPOSIÇÃO 2'. Ora bem:

*A* PROPOSIÇÃO 1' *(ou a* PROPOSIÇÃO 2' *equivalente) é muitas vezes tomada como axioma da teoria dos números reais, desempenhando aí papel análogo ao do* PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM $\mathbb{N}$

4. Para ver como a PROPOSIÇÃO 1' pode ser tomada para axioma de uma teoria dedutiva dos números reais, convém adoptar o ponto de vista geral das *estruturas de ordem.*

Consideremos um conjunto ordenado $(U, \preceq)$ qualquer (subentende-se que se trata de uma relação de *ordem total estrita)*. As definições de 'majorante', 'minorante', 'supremo', 'ínfimo', etc. podem ser dadas como em $\mathbb{R}$. Para indicar que um elemento k de U é majorante ou minorante de um subconjunto A de U, escreveremos, respectivamente:

$$A \preceq k \quad , \quad k \preceq A \text{ (}^1\text{)}$$

Será pois, *por definição:*

$$A \preceq k \Leftrightarrow \forall x \in A \ : \ x \preceq k$$

e analogamente para $k \preceq A$.

Por sua vez, as definições de *sup* e *max* serão:

$$m = \sup A \Leftrightarrow A \preceq m \wedge (A \preceq k \underset{k}{\Rightarrow} m \preceq k)$$

$$m = \max A \Leftrightarrow m = \sup A \wedge m \in A$$

Analogamente se definem *inf* e *min.*

Designando agora por $\mathcal{L}_s$ a classe dos conjuntos limitados superiormente em U, tem-se, *por definição:*

$$A \in \mathcal{L}_s \Leftrightarrow \exists k \in U \ : \ A \preceq k$$

Analogamente se define a classe $\mathcal{L}_i$ dos conjuntos *limitados inferiormente*. Posto isto:

DEFINIÇÃO. Diz-se que o conjunto ordenado U é *completo*

---

(1) Recordemos que o sinal $\preceq$ se lê 'precede ou é igual a'.

sse todo o conjunto limitado superiormente em U tem supremo em U, isto é, sse:

$$\forall A \in s \quad , \quad \exists m \in U \quad : \quad m \mathcal{L} = \sup A$$

Facilmente se reconhece que esta condição é equivalente à seguinte:

$$\forall A \in \mathcal{L}^i \quad , \quad \exists m \in U \quad : \quad m = \inf A$$

À propriedade de *ser completo* chamaremos '*completude*'.

Desde logo se vê que são completos os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$, com a relação de ordem usual. Mas, em qualquer destes casos, o *supremo* é sempre *máximo* e o *ínfimo* é sempre *mínimo*.

Vejamos ainda um exemplo concreto. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das palavras do *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, de Cândido de Figueiredo. É evidente que $\mathcal{D}$, com a ordem alfabética, é um *conjunto ordenado completo* (limitado). Seja $\mathcal{D}_B$ o conjunto das palavras de $\mathcal{D}$ começadas por 'B'; o supremo de $\mathcal{D}_B$ é a palavra 'Bisantino', que, por pertencer a $\mathcal{D}_B$, é também o máximo (ou último elemento) deste conjunto.

Aliás, é intuitivo e pode-se provar que:

*Se um conjunto ordenado* U *é finito, todo o subconjunto de* U *tem primeiro elemento e último elemento (e portanto* U *é completo).*

A recíproca desta proposição também é verdadeira e pode servir para uma nova definição de '*conjunto finito*'.

Vejamos mais dois exemplos:

1) Designemos por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto de todos os números reais que podem ser representados por *dízimas finitas*, precedidas ou não

do sinal −. É claro que $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{Q}$. Será $\mathbb{Q}^*$ um conjunto ordenado completo (com a relação de ordem usual)? É fácil ver que não. Seja, por exemplo, A o conjunto dos números

$$0{,}6 \quad ; \quad 0{,}66 \quad ; \quad 0{,}666 \quad ; \quad \ldots \quad ,$$

representados por todas as dízimas finitas cuja parte inteira é 0 e cujos algarismos decimais são todos 6. O conjunto A tem supremo em $\mathbb{Q}$ (o número 2/3), mas não em $\mathbb{Q}^*$, visto que 2/3 não é representável por nenhuma dízima finita.

2) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, ordenado segundo o critério usual, não é completo. Seja, por exemplo, A o conjunto dos números racionais cujo quadrado é menor que 2:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \quad : \quad x^2 < 2\}$$

Este conjunto tem supremo em $\mathbb{R}$ (o número $\sqrt{2}$), mas não em $\mathbb{Q}$, visto que $\sqrt{2}$ não é racional.

O conjunto ordenado $\mathbb{R}$ obtém-se precisamente *completando* $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}^*$).

5. Chegou, agora, o momento de apresentar uma *axiomática* dos números reais em termos de *'adição'*, *'multiplicação'* e *'relação de grandeza'*. Trata-se de caracterizar axiomaticamente o sistema $(\mathbb{R}, +, \times, <)$. Uma tal caracterização pode ser a seguinte:

I) $\mathbb{R}$ é um corpo a respeito das operações + e ×.

II) $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado completo, a respeito da relação <.

III) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad : \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$

IV) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad : \quad a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

A propriedade III é a *monotonia da adição* e a propriedade IV, a *monotonia parcial da multiplicação.*

É claro que esta axiomática se apresenta já extremamente condensada. Assim, o axioma I é a conjunção dos seguintes: axiomas de grupo comutativo ($\mathbb{R}$, +), axiomas de semigrupo comutativo ($\mathbb{R}$, ×), axiomas da existência de elemento unidade, axioma da existência de inverso para todo o elemento $\neq 0$ e distributividade da multiplicação a respeito da adição. Por sua vez, o axioma II é a conjunção dos seguintes: axioma de conjunto ordenado e *axioma da completude.*

Provaremos mais adiante que esta axiomática é *categórica,* isto é, que *duas realizações da axiomática são necessariamente isomorfas* (a respeito das operações +, × e da relação <). Por conseguinte, a axiomática define efectivamente a *estrutura do corpo ordenado* ($\mathbb{R}$, +, ·, <), mas não o conceito de *número real.*

Assim, todas as proposições verdadeiras relativas a números reais – todos os *teoremas de análise real* – podem ser demonstradas a partir do anterior sistema de axiomas e das definições que forem sendo introduzidas para simplificar a linguagem.

Quanto ao *conceito de número real,* já sabemos que surge naturalmente no PROBLEMA DA MEDIÇÃO DE GRANDEZAS (de que trataremos mais adiante), assim como o *conceito de número natural* nasce do problema da CONTAGEM DOS ELEMENTOS DE UM CONJUNTO FINITO.

6. Observemos entretanto que, nos conjuntos ordenados $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$, etc., se verifica a seguinte propriedade, muito importante:

*Quaisquer que sejam os elementos* a, b, *sendo* a $\neq$ b, *existe sempre, pelo menos, um elemento* x *do conjunto situado entre* a *e* b.

Com efeito, em qualquer dos conjuntos considerados, existe por exemplo o número $x = \frac{a+b}{2}$, que está situado entre *a* e *b*. Assim, se for por exemplo $a < b$, tem-se $2a < a + b < 2b$, donde, dividindo por 2:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Ora bem:

I. Diz-se que um conjunto ordenado U é *denso*, sse tem mais de um elemento e possui a referida propriedade. Esta pode traduzir-se do seguinte modo:

$$\forall a,b \in U \quad : \quad a \prec b \Rightarrow \exists x \in U \quad : \quad a \prec x \prec b$$

II. Diz-se que um conjunto ordenado U é *contínuo*, sse é denso e completo.

Desde logo se vê que:

1) Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ *não são densos* e, portanto, *não são contínuos*, embora sejam *completos*.

2) Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^*$ são *densos*, mas *não contínuos*, visto que *não são completos*.

3) O conjunto $\mathbb{R}$ é *denso e completo*, portanto *contínuo*. E o mesmo se pode dizer dos conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e, dum modo geral, de todos os intervalos em $\mathbb{R}$ que não se reduzem a um ponto.

Convém, agora, registar uma terceira definição:

III. Diz-se que um conjunto ordenado U é *discreto*, sse todo o subconjunto limitado de U, não vazio, tem máximo e tem mínimo em U.

Desde logo se vê que *todo o conjunto discreto é completo, mas não contínuo*. Com efeito, seja *a* um elemento qualquer de um conjunto discreto; então, três casos se podem dar:

1.º $\exists x \in U \ : \ a \prec x$. Neste caso, seja $x_0$ um tal elemento e ponhamos

$$A = \{x \in U \ : \ a \prec x \prec x_0\}$$

Como A é limitado tem mínimo em U: seja min A = b. Então é claro que $\sim \exists x \in U: a \prec x \prec b$ e diz-se que b é *o sucessor de* a (ou que a é *o antecessor de* b).

2.º $\exists x \in U \ : \ x \prec a$. Analogamente se prova que, neste caso, a *tem antecessor em* U.

3.º U tem um só elemento. Neste caso U *também não é denso*, por definição.

Posto isto, não é difícil reconhecer que:

*Todo o conjunto ordenado discreto, com primeiro elemento e sem último elemento, é isomorfo a* $\mathbb{N}$. *Todo o conjunto ordenado discreto sem primeiro e sem último elemento é isomorfo a* $\mathbb{Z}$. *Todo o conjunto ordenado discreto com primeiro e com último elemento é finito.*

Vemos pois, aqui, caracterizações axiomáticas dos conjuntos ordenados $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_0$) e $\mathbb{Z}$.

Quando um conjunto discreto U tem *primeiro* elemento, chama-se *segundo* elemento de U o sucessor do primeiro, *terceiro* elemento de U o sucessor do segundo, e assim sucessivamente. Os adjectivos 'primeiro', 'segundo', 'terceiro', etc., são *numerais ordinais,* que se distinguem nitidamente dos *numerais cardinais* 'um', 'dois', 'três', etc.

Convém ainda notar que um conjunto ordenado pode não ser discreto e não ser contínuo; exemplos: os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^*$, etc.

7. Põe-se, agora, a seguinte questão:

Entre as noções anteriores, qual o mínimo que se deverá exigir a um aluno do 3.º ciclo?

Em primeiro lugar, parece-nos que seria conveniente dar-lhes as noções de 'majorante', 'minorante', 'supremo', 'ínfimo', 'máximo', 'mínimo' (de um conjunto), bem como as de 'conjunto ordenado completo', 'conjunto ordenado denso', 'conjunto ordenado contínuo' e 'conjunto ordenado discreto' – com exemplos, mas sem demonstrações.

Em segundo lugar, haveria todo o interesse em apresentar-lhes uma axiomática da teoria dos números reais, como a anterior.

Mas não conviria ficar por aqui: mais tarde, quando o condicionalismo do nosso ensino secundário o permitisse, deveriam fazer-se algumas demonstrações em que interviesse o AXIOMA DA COMPLETUDE, para o aluno ficar a ter uma ideia do seu papel na estruturação lógica da análise – papel esse comparável ao do PRINCÍPIO DE INDUÇÃO em $\mathbb{N}$, como já foi observado atrás. Na verdade, quase todos os teoremas importantes da análise fazem intervir o axioma da completude: deixam de ser verdadeiros num domínio em que não se verifique tal axioma (por exemplo em $\mathbb{Q}$).

Exemplos de teoremas em que intervém o axioma da completude:

1) *Teoremas de Cauchy e de* Weierstrass *sobre funções contínuas* (em particular, o teorema de Cauchy permite afirmar a existência de $\sqrt[n]{a}$ e $\log_b a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{N}$, com $b \neq 1$).

2) *Os teoremas que relacionam o sinal da derivada de uma função num dado intervalo com o sentido da variação da função nesse intervalo.*

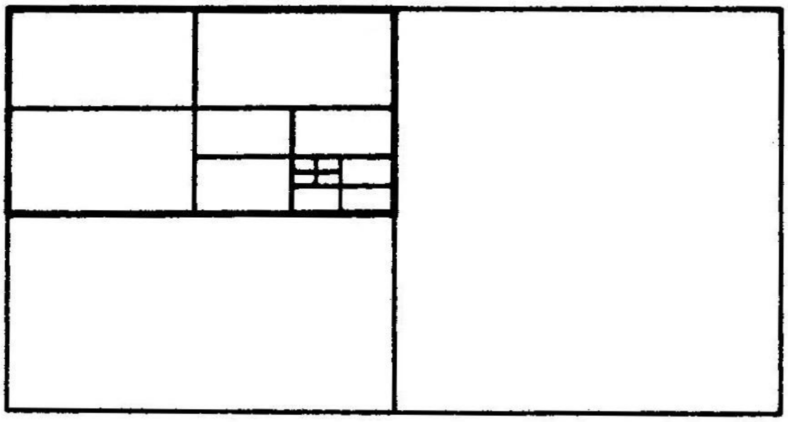
3) *O teorema segundo o qual toda a função contínua num intervalo limitado e fechado é integrável nesse intervalo.*

4) *O teorema segundo o qual toda a função monótona num intervalo limitado é integrável nesse intervalo.*

Acontece, porém, que as demonstrações destes teoremas são pouco acessíveis a alunos do 3.º ciclo, a não ser talvez as dos teoremas indicados em 1) e 2), que foram admitidos intuitivamente (trata-se efectivamente de factores muito intuitivos).

Haveria bastante interesse em que, pelo menos os alunos *muito bons,* vissem a demonstração de alguns desses teoremas. E, para tornar mais atraente o assunto , conviria mostrar-lhes primeiramente que, tal como sucede com o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, o PRINCÍPIO DE COMPLETUDE dá origem a *novos métodos de raciocínio dedutivo,* alguns dos quais se podem apresentar com aspecto bastante pitoresco, apto a excitar a imaginação juvenil. Um desses é o MÉTODO DAS SUBDIVISÕES SUCESSIVAS DE INTERVALOS, a que certo matemático chamou humoristicamente, 'MÉTODO DE CAÇAR LEÕES'. Em vez de 'leões', poderíamos falar de 'jacarés', 'bandidos', 'pulgas', 'mixordeiros', etc.: depende do gosto e da fantasia de cada um. Adoptando a interpretação de caça aos bandidos' ou 'caça aos mixordeiros' o método pode ser apresentado sob a forma de *história de tipo policial,* que, como já sabemos, se presta muito para exemplificações de raciocínio lógico. Imaginemos a seguinte versão:

'Na cidade X do país Y começaram a aparecer no mercado grandes quantidades de carne ensacada imprópria para o consumo. Posta em campo a polícia, descobriu-se que o artigo provinha de certo bairro da cidade.



Para proceder metodicamente, a polícia marcou, numa planta da cidade, o bairro em questão, traçando à sua volta um rectângulo R, que dividiu em 4 rectângulos iguais. Após várias pesquisas, as suspeitas concentraram-se principalmente num desses rectângulos, $R_1$. Este foi então dividido em quatro rectângulos, $R_2$. Procedendo assim, *por aproximações sucessivas,* a polícia acabou por se encontrar defronte de um tapume alto, entre dois prédios. Ora, atrás do tapume e encoberto por este, achava-se uma vivenda de aspecto romântico, meio arruinada: era ali que se fabricavam (pelo menos em parte) os referidos produtos de salsicharia. Com grande surpresa, verificou-se que estes eram feitos com carne de jumento!'(1)

---

(1) O caso deu muito que falar e a argúcia dos detectives foi justamente louvada. Aliás, tudo decorreu pacatamente – sem aquelas cenas emocionantes

Como se pode ajuizar por este exemplo pitoresco, o MÉTODO DAS SUBDIVISÕES SUCESSIVAS é já em si um *método de aproximações sucessivas.* Na realidade, os variadíssimos métodos de aproximações sucessivas que se usam na prática do cálculo numérico *exigem o axioma da completude, para poderem ser inteiramente justificados.*

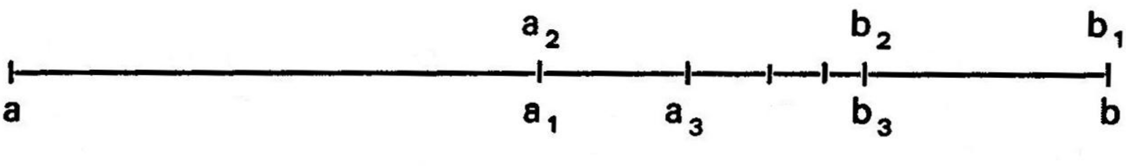
No exemplo anterior, tal como foi esboçado, o método é aplicado no plano. Na recta, em vez dos rectângulos $R, R_1, R_2, \ldots$, é-se conduzido a uma sucessão de intervalos,

$$I = [a, b] \quad , \quad I_1 = [a_1, b_1] \quad , \quad \ldots \quad , \quad I_n = [a_n, b_n] \quad , \ldots$$

cada um dos quais, a partir do segundo, é uma metade do anterior:

$$(1) \qquad a \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \quad , \quad b \geqslant b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

$$(2) \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \; , \; b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4} \; , \; \ldots \; , \; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad , \; \ldots$$




Nestas condições, a sucessão $a_n$ *converge para um número* $\lambda$ (por ser limitada e crescente em sentido lato), a sucessão $b_n$ *con-*

---

dos filmes de *suspense*, com que, por esse mundo fora, a TV se esforça por melhorar o intelecto e os instintos dos cidadãos. O método seguido foi, na verdade, engenhoso. É claro que há muitos outros processos para detectar mixordeiros. Mas, como a imaginação humana não tem limites, são também muitos os modos de vender carne de jumento.

*verge para um número* $\mu$ (por ser limitada e decrescente em sentido lato) e tem-se $\lambda = \mu$, visto que, de (2), resulta:

$$\lim b_n - \lim a_n = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$$

Em conclusão:

*Existe um e um só ponto* $\lambda$ *que pertence a todos os intervalos* $I, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ *nas condições indicadas.*

Este ponto $\lambda$ é o *leão que foi caçado,* segundo a primeira interpretação humorística que foi citada ([1]).

Resta um ponto importante a esclarecer:

*Onde intervém aqui o axioma da completude?*

É precisamente na existência do limite das sucessões $a_n, b_n$. No *2.° volume do Compêndio,* p. 85, o CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DAS SUCESSÕES MONÓTONAS é demonstrado, *admitindo que os números reais são representados pelas dízimas infinitas segundo as convenções usuais.* Ora é aí mesmo que intervém o axioma.

---

([1]) No plano, as considerações são análogas, tomando as coordenadas dos vértices dos sucessivos restângulos considerados. Analogamente para o espaço, tomando paralelipípedos em vez de rectângulos.

# Índice

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA