J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

1.º volume

1.º tomo

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

COMPÊNDIO
DE
MATEMÁTICA

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

1.º VOLUME

(1.º TOMO)

CURSO COMPLEMENTAR
DO ENSINO SECUNDÁRIO

1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA

Av. Miguel Bombarda, 20 — Lisboa

O texto deste Compêndio *foi utilizado no âmbito de uma experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação Nacional em colaboração com a O.C.D.E. (Projecto Especial STP--4/SP). Nesta experiência estiveram envolvidos alunos dos antigos 6.º e 7.º anos do ensino liceal, (idades entre 15 e 17 anos).*

NOTA DE APRESENTAÇÃO

Com raras excepções, os mais admiráveis textos científicos de conteúdo pouco especializado (obras de divulgação ou compêndios destinados ao ensino secundário) foram escritos por grandes cientistas, que não hesitaram em afastar-se temporariamente dos domínios de investigação em que se celebrizaram para poderem contribuir, de forma mais directa e imediata, para o progresso cultural da sociedade em que viviam. Para além da excepcional cultura humanística e dos dotes pedagógicos e até literários, que muitas dessas obras revelam, todas se distinguem por uma elevação de perspectiva só possível a autores que sejam, eles próprios, criadores de Ciência.

Neste quadro deve ser situado o Compêndio de Matemática, *de José Sebastião e Silva, cuja publicação agora se inicia.*

Falecido em 25 de Maio de 1972, com 57 anos, Sebastião e Silva deixou publicada uma vastíssima obra de investigação que, no consenso de muitos especialistas, não tem paralelo na Matemática portuguesa do nosso tempo. Consciente, porém, da degradação sofrida no nosso país e nas últimas décadas pelo ensino liceal da matemática, cada vez mais desactualizado e corroído por hábitos incorrectos de memorização, por excesso de exercícios rotineiros e carência de ideias e de contactos com a realidade concreta, sentiu o dever moral de intervir no aperfeiçoamento de programas e, sobretudo, na racionalização de métodos de ensino. Um dos aspectos mais *importantes dessa intervenção revolucionária foi precisamente a redacção deste* Compêndio.

Para efeito de publicação, a obra foi agora dividida em três volumes (cinco tomos). Os dois primeiros contêm introduções a diversos domínios matemáticos fundamentais: Lógica, Teoria dos conjuntos, Álgebra (grupos, anéis, corpos, álgebra de Boole, álgebra linear, etc.), Análise (incluindo cálculo diferencial e integral), Probabilidades e Cálculo numérico aproximado. Mesmo no que respeita apenas ao conteúdo informativo e não obstante a reduzida preparação prévia requerida aos leitores, os temas tratados são excepcionalmente desenvolvidos, ultrapassando largamente o âmbito do que era tradicional no ensino secundário.

No último volume, onde se incluem «guias» para a utilização dos precedentes, concentra-se um manancial de ideias sobre pedagogia, história e filosofia da Matemática, além de complementos importantes ao conteúdo dos textos anteriores. Aparentemente dedicados em primeiro lugar aos professores, estes «guias» foram redigidos por forma a serem de igual valor para os estudantes (aos quais, aliás, foram sempre facultados no decurso das experiências-piloto realizadas nos nossos liceus).

Assim, este Compêndio de Matemática *é uma obra de valor científico e pedagógico muito invulgar, certamente destinada a desempenhar por longo tempo um papel fundamental na formação, não* *apenas de muitos professores e estudantes das nossas escolas secundárias e até superiores, mas também das pessoas que aspiram a atingir, como autodidactas, uma compreensão clara das grandes ideias que estão na base das Ciências Exactas dos nossos dias, mesmo que não pretendam prosseguir estudos superiores relacionados com essas Ciências.*

Por estas razões se considerou imperiosa uma divulgação mais ampla desta obra, que nunca fora impressa.

Gabinete de Estudos e Planeamento
do Ministério da Educação e Cultura

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

1. **Sinais e expressões.** Toda a língua, falada ou escrita, consiste em agrupamentos de *sinais elementares* que podem ser *sonoros* (linguagem falada) ou *gráficos* (linguagem escrita).

Há duas espécies principais de escritas: *fonéticas* e *ideográficas*. Nas escritas fonéticas os sinais elementares (*letras*) correspondem mais ou menos aos sons indecomponíveis que pronunciamos. Nas escritas ideográficas os sinais ideográficos (*ideogramas*) representam directamente ideias, como sucede, por exemplo, na escrita chinesa e japonesa.

A escrita simbólica da matemática pode considerar-se de tipo ideográfico. Assim, quando se escreve 'três mais dois é igual a cinco', a escrita é fonética; quando se escreve '$3 + 2 = 5$', a escrita é ideográfica.

Entre todos os possíveis agrupamentos de sinais elementares numa língua, uns têm *significado*, outros não. Assim, a sucessão de letras AMRO não tem significado na língua portuguesa; mas têm-no, por exemplo, os agrupamentos ROMA, AMOR, ARMO, MORA, MORAR, etc. Analogamente, o agrupamento de símbolos $X-)\,2\,(5\sqrt{\quad}$ não tem significado em matemática, mas tem-no por exemplo o agrupamento $\sqrt{5-(2-5)}$.

É natural chamar sinais compostos aos agrupamentos de sinais elementares (que não se reduzam a um sinal isolado). A todos os sinais, elementares ou compostos, poderemos ainda chamar *expressões*, conquanto este termo seja usado, de preferência, para sinais compostos.

Os sinais ideográficos da matemática são também chamados símbolos, donde a designação 'escrita simbólica'.

2. **Termos e proposições.** Quando uma criança está aprendendo a falar, começa por dizer os *nomes* de coisas, pessoas, etc. e só depois tenta construir *frases*. Nomes e frases constituem as duas espécies principais de expressões numa língua:

$$\textit{Expressões com significado} \begin{cases} \textit{termos, nomes} \text{ ou } \textit{designações} \\ \textit{frases} \text{ ou } \textit{proposições} \end{cases}$$

São termos, na língua portuguesa, as expressões:

Lisboa, copo, Luís de Camões, alegria, etc.

São termos matemáticos as expressões:

$$3,\ \ 3+2,\ \sqrt{2}\,,\ \ \pi\ ,\ \ \frac{2}{3}\,,\ \ 3{,}2\ ,\ \ 10^7,\ \text{etc.}$$

Assim, os termos *nomeiam* ou *designam entes* (coisas, pessoas, números, etc.). Dum modo geral, chama-se *ente* (*ser* ou *entidade*) a tudo aquilo que se considera como existente e a que, por isso, se pode aplicar uma designação. Certos entes são considerados *concretos* (objectos materiais, plantas, animais, pessoas, etc.), outros são considerados *abstractos* (qualidades, estados, grandezas, números, etc.). Em gramática, os termos são chamados *substantivos* ou *expressões substantivas*, conforme os casos.

São proposições (ou frases) em português, por exemplo:

'Lisboa é uma cidade', 'Vasco da Gama descobriu o Brasil', etc.

sendo *verdadeira* a primeira e *falsa* a segunda.

São proposições simbólicas em matemática, por exemplo, as fórmulas:

$2 + 3 = 7$, $\sqrt{8} < 3$, etc.

falsa a primeira, *verdadeira* a segunda.

Assim, as proposições são aquelas expressões a respeito das quais faz sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. As proposições transmitem pensamentos, isto é, *afirmam factos* ou *exprimem juízos* que formamos a respeito de entes.

3. **Distinção entre a designação e o designado.** Quando se pretende designar uma expressão, é costume escrevê-la entre aspas, para evitar confusões. Considerem-se, por exemplo, as duas seguintes frases:

Lisboa é a capital de Portugal
'Lisboa' é um substantivo

Claro é que a segunda se refere à palavra 'Lisboa' (designação), enquanto a primeira se refere à cidade com esse nome (ente designado). Se a designação fosse o mesmo que o designado, poderíamos concluir que:

A capital de Portugal é um substantivo,

o que é, evidentemente, absurdo. Daí a necessidade do uso de aspas.

Estas considerações estendem-se à linguagem simbólica da matemática. Quando, por exemplo, escrevemos:

'5' é um algarismo árabe

5 é um número ímpar

estamos a referir-nos, no primeiro caso, a um símbolo (designação) e, no segundo caso, ao número designado por esse símbolo, número esse que também pode ser designado pelos símbolos 'V', '2 + 3', etc., ou pela palavra 'cinco'.

Assim, em toda a língua (escrita ou falada) há que distinguir os termos, que escrevemos ou pronunciamos, dos entes que esses termos designam.

Note-se que para designar uma proposição também se deve escrevê-la entre aspas. Exemplo:

A proposição 'O Sol é uma estrela' é verdadeira.

Muitas vezes, porém, quando não houver perigo de confusão, evitaremos o uso das aspas, para simplificar a escrita.

4. **Relação lógica de identidade.** Para indicar que dois termos designam o mesmo ente, escreve-se entre ambos o sinal =. Assim, quando escrevemos

$$3 + 2 = 5$$

estamos a indicar que os termos '3 + 2' e '5' designam o mesmo ente.

Analogamente poderíamos escrever:

Lisboa = capital de Portugal

25 = quadrado de 5

Estes exemplos mostram que o sinal = substitui as expressões 'é o' ou 'é a' da língua portuguesa. Assim, este sinal, que se lê usualmente 'é igual a', deveria antes ler-se 'é o mesmo que' ou 'é idêntico a' (a palavra 'idêntico' vem do pronome latino 'idem', que significa 'o mesmo'). Daqui o chamar-se *relação de identidade* à relação expressa pelo sinal =.

Mas esta relação refere-se aos entes designados pelos dois termos e não aos próprios termos, que em geral não são idênticos. Por exemplo, é falso que '3 + 2' = '5'; apenas poderemos escrever: '5' = '5', '3 + 2' = '3 + 2', etc.

Dois termos dizem-se *equivalentes* ou *sinónimos*, quando designam o mesmo ente. Por exemplo, 'Lisboa' é equivalente a 'capital de Portugal', '3 + 2' é equivalente a '5' e a 'cinco', etc.

Para indicar que dois termos não designam o mesmo ente, escreve-se entre ambos o sinal '$\neq$' (ler 'distinto de' ou 'diferente de'). Por exemplo:

$$2 \times 3 \neq 7 \quad , \quad '2 + 3' \neq '5', \qquad \text{etc.}$$

Assim, os sinais = e $\neq$ exprimem duas relações lógicas, contrárias uma da outra, correspondentes aos pronomes 'o mesmo' e 'outro':

Todo o ente é idêntico a si mesmo.

Todo o ente é distinto de outro ente.

A primeira destas proposições é um axioma da lógica, chamado PRINCÍPIO DA IDENTIDADE, que pode ser expresso simbolicamente escrevendo:

$$a = a, \textit{ qualquer que seja o ente } a.$$

5. **Indivíduos e classes; relação de pertença.** Em gramática é feita a distinção dos substantivos em *próprios* e *comuns*. Um substan-

tivo é próprio quando se aplica a um só *indivíduo*; é comum quando se aplica indistintamente a todos os indivíduos de uma mesma *classe*. Por exemplo, 'Sol' é um substantivo próprio, 'estrela' um substantivo comum. A proposição

O Sol é uma estrela

afirma que o Sol é um indivíduo da classe das estrelas ou que *pertence* à classe das estrelas.

Os conceitos de 'indivíduo' e de 'classe' são indefiníveis, pois que, como se vê, estão na base da própria linguagem e, portanto, do pensamento. Para indicar que um indivíduo *a* pertence a uma classe C escreve-se simbolicamente:

$a \in C$ (ler '*a pertence a* C')

Por exemplo, se designarmos por E a classe das estrelas, podemos exprimir a proposição anterior sob a forma:

$\text{Sol} \in E$

Analogamente, se designarmos por Pr a classe dos números primos, a frase '5 é um número primo', pode exprimir-se simbolicamente por:

$5 \in \text{Pr}$ (ler '*5 pertence a Pr*')

Deste modo, o símbolo '$\in$' exprime uma relação lógica — chamada *relação de pertença* — inteiramente distinta da relação lógica de identidade.

Para indicar que um indivíduo *a* não pertence a uma classe C escreve-se:

$a \notin C$ (ler '*a não pertence a C*')

Por exemplo, com as notações anteriores:

$$\text{Lua} \notin E \quad , \quad 9 \notin Pr \quad , \quad \text{etc.}$$

OBSERVAÇÃO — Recordámos atrás que um substantivo comum se aplica indistintamente a qualquer indivíduo duma mesma classe: não é, portanto, uma designação dessa classe. Por exemplo, 'estrela' não é sinónimo de 'classe das estrelas'. Deste modo, a expressão 'classe das estrelas' comporta-se como um substantivo próprio, visto que designa um único ente. *Na verdade, uma classe, embora formada de vários indivíduos, é considerada como um todo, isto é, como um indivíduo de novo tipo.* Este conceito será desenvolvido no número seguinte.

6. **Relatividade dos conceitos de indivíduo (ou elemento) e de classe (ou conjunto). Universo lógico e tipos lógicos.** Em matemática, as palavras 'elemento' e 'conjunto' são geralmente usadas como sinónimos de 'indivíduo' e 'classe', respectivamente. Assim, podemos dizer 'O Sol é um elemento do conjunto das estrelas', '5 é um elemento do conjunto dos números primos'.

Até aqui temos usado as palavras 'indivíduo' e 'classe', como se tivessem um significado *absoluto*. Ora, a verdade é que estas palavras têm muitas vezes um significado *relativo* e até *convencional*, isto é: um mesmo ente pode ser indivíduo (ou elemento) *em relação* a certos entes, e classe (ou conjunto) *em relação* a outros entes. Por exemplo, uma turma dum liceu é um *conjunto* de alunos, mas também é um *elemento* do conjunto das turmas do liceu; analogamente, uma recta é um *conjunto* de pontos, mas é também um *elemento* do conjunto de todas as rectas, etc.

Por isso, quando se quiser tratar um assunto qualquer com o rigor da matemática, é necessário, primeiro que tudo, precisar quais são os entes considerados nesse assunto como *indivíduos*. Chama-se *universo lógico, universo do discurso* ou simplesmente *universo* duma teoria o conjunto de todos os entes que são sempre considerados como indivíduos nessa teoria ([1]). Por exemplo, em aritmética elementar, o universo é o conjunto de todos os números naturais (1, 2, 3, ...); em geometria o universo é o conjunto de todos os pontos (ou seja o espaço), etc.

É claro que, partindo de um dado universo, os conjuntos de indivíduos podem ser tomados como elementos de novos conjuntos (chamados conjuntos de *tipo* 2), estes por sua vez como elementos de outros conjuntos (chamados conjuntos de *tipo* 3) e assim sucessivamente. Por exemplo, suponhamos que o universo é o conjunto dos pontos, em geometria elementar, e seja *a* um ponto, C uma recta que passa por *a* e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as rectas. Lembremos que *uma recta é um conjunto de pontos;* então, dizer que a recta C passa pelo ponto *a* significa que *a é um ponto do conjunto* C. Por sua vez, C *é um elemento do conjunto* de todas as rectas. Assim, teremos:

$$a \in C \quad \text{e} \quad C \in \mathcal{R}$$

Neste caso *a* é um indivíduo, C um conjunto e $\mathcal{R}$ um conjunto de conjuntos (ou conjunto de tipo 2). Também podemos dizer que C é um *conjunto de tipo* 1 ou um *indivíduo de tipo* 2. Esta *noção de tipo lógico* foi introduzida por Bertrand Russell.

7. **Dar ou definir um conjunto.** Comecemos por alguns exemplos. Suponhamos que o universo é o conjunto dos números naturais e seja Pr o conjunto dos números primos. Como se sabe, diz-se que um número natural *n* é primo, quando é diferente de 1 e só é divisível por si mesmo e por 1. Com esta definição, dado um número natural *n, qualquer que ele seja,* estamos sempre habilitados a saber se *n* é ou não é primo, isto é, *se pertence ou não ao*

([1]) O universo lógico também é, por vezes, chamado *domínio dos indivíduos ou conjunto fundamental da teoria.*

conjunto Pr [1]. Exprime-se este facto, dizendo que o conjunto Pr está *definido* (ou *dado*).

Suponhamos, agora, que o universo é o conjunto dos seres vivos e seja P o conjunto das plantas. Como se sabe, há seres vivos a respeito dos quais se hesita em dizer se são plantas ou animais. A verdade é que não existe uma *definição rigorosa* de 'planta'; por outras palavras: *o conjunto das plantas não está definido.* O mesmo aliás, se pode dizer a respeito do *conjunto dos animais, do conjunto das árvores, do conjunto das pessoas louras, do conjunto dos homens calvos,* etc., etc. Vendo bem, desde que saímos do âmbito da matemática, a maior parte dos conjuntos de que falamos não estão definidos, mas apenas imperfeitamente delimitados.

Em resumo, diz-se que um conjunto A é *dado* ou *definido* num universo, quando se conhece uma definição que permita sempre, a respeito de qualquer indivíduo c, saber se $c \in A$ ou se $c \notin A$ (devendo verificar-se uma e uma só destas hipóteses).

Note-se que, em matemática, *definir* e *definir rigorosamente* são uma e a mesma coisa: o advérbio 'rigorosamente' torna-se neste caso um pleonasmo.

8. **Conjuntos finitos e conjuntos infinitos.** Não vamos aqui definir 'conjunto finito' nem 'conjunto infinito', mas apenas procurar esclarecer, por meio de alguns exemplos, o significado destas expressões.

Consideremos de novo o conjunto Pr (dos números primos). Nós podemos indicar vários números naturais que são primos (por exemplo, 2, 7, 13, 37, ...), mas não podemos mencioná-los *todos* porque o conjunto Pr é *infinito*. Outros exemplos de conjuntos infinitos: o próprio conjunto dos números naturais, o conjunto dos números

---

[1] Se o número *n* é excessivamente grande, pode ser muito difícil, ou até praticamente impossível, mesmo com os actuais recursos da ciência (computadores electrónicos, etc.), acabar por saber se *n* é ou não primo.

pares, o conjunto dos quadrados perfeitos, o conjunto dos números primos maiores que 10^6, etc., etc.

Pelo contrário, o conjunto dos números primos menores que 10^6 é *finito*. Outros exemplos: o conjunto dos cidadãos portugueses numa dada época, o conjunto dos grãos de trigo contidos num depósito, o conjunto dos átomos de hidrogénio contidos num balão, etc., etc.

Quando um conjunto é infinito, é impossível defini-lo indicando quais são os seus elementos. Logo, se um conjunto pode ser definido pela indicação dos seus elementos, esse conjunto não é infinito: *é finito*.

Mas há conjuntos finitos que, no estado actual da ciência, não podemos definir fazendo uma lista dos seus elementos: tal é, por exemplo, o caso do conjunto dos números primos menores que 10^{1000}.

Em escrita simbólica, é costume designar um conjunto finito (quando possível) pelas designações dos seus elementos, escritas entre chavetas e separadas por vírgulas. Assim, as expressões

$$\{\text{Sol, Terra, Lua}\} \quad , \quad \{1, 5, 40, 327\}$$

designam, respectivamente, o conjunto cujos elementos são o Sol, a Terra e a Lua, e o conjunto cujos elementos são os números 1, 5, 40 e 327. Se designarmos o primeiro conjunto por A e o segundo por B, teremos portanto:

$$\text{Sol} \in A \quad , \quad \text{Sirius} \notin A \quad , \quad 5 \in B \quad , \quad 2 \notin B \quad , \quad \text{etc.}$$

9. **Valores lógicos das proposições.** Dizemos que são *verdadeiras*, por exemplo, as proposições: 'A Terra é um planeta', 'Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil', '3 + 2 = 5', etc., etc. Dizemos que são *falsas*, por exemplo, as proposições: 'A Lua é uma estrela', 'Dante escreveu a Odisseia', '9 é um número primo', etc.

Mas não é raro surgir uma proposição, a respeito da qual se diz que é ao mesmo tempo verdadeira e falsa ou então que é parcialmente verdadeira ou aproximadamente verdadeira ou duvidosa ou desprovida de sentido. Pode acontecer isto, por exemplo, a respeito de frases tais como 'A música de Strawinski é bela', 'Évora é uma cidade' [1], 'Ava Gardner é uma estrela', 'Os satélites artificiais são astros', '25 é um número pequeno', 'A água é um líquido incolor', 'O calor dilata os corpos', 'Amanhã chove', etc., etc.

A dúvida suscitada por tais proposições provém geralmente, ou da nossa *ignorância* sobre o assunto, ou (o que por vezes é equivalente) da *imprecisão de linguagem,* resultante do uso de termos não definidos ou ambíguos, bem como da ausência de termos necessários para completar o sentido da frase. Ora, a matemática aspira ao rigor absoluto de linguagem, procurando evitar *termos imprecisos* e *frases incompletas.*

Nestas condições, a lógica matemática adopta como regras fundamentais do pensamento, os dois seguintes princípios (ou axiomas):

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).*

Diz-se que o valor duma proposição é a *verdade* ou a *falsidade,* conforme essa proposição é verdadeira ou falsa. Os valores lógicos verdade e falsidade podem ser designados abreviadamente pelas letras V e F ou pelos símbolos 1 e 0, respectivamente. Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.

Diz-se que duas proposições são *equivalentes* quando têm o mesmo valor lógico, isto é, quando são ambas verdadeiras ou

---

(1) Existe uma povoação na Beira com este nome.

ambas falsas. Para indicar que duas proposições são equivalentes, escreve-se entre ambas o sinal =. Exemplos:

7 é primo = 2 é par

Lisboa é uma aldeia = Marte é uma estrela

Assim, o sinal = exprime apenas identidade entre os valores lógicos das proposições: não se refere propriamente ao significado das mesmas. Poderíamos dizer que uma proposição *representa* um dos valores V, F, embora não seja designação.

10. **Operações lógicas sobre proposições.** Quando pensamos, efectuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. Estas estão submetidas a regras dum cálculo (chamado *cálculo proposicional*) semelhante ao da aritmética sobre números. Vamos estudar as operações lógicas fundamentais:

a) *Negação.* A mais simples operação lógica é a negação, que consiste em converter uma dada proposição numa outra, que é verdadeira se a primeira é falsa, e falsa se esta é verdadeira. A proposição assim obtida também se diz negação da primeira.

Na linguagem comum, a negação efectua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio 'não' ao verbo da proposição dada. Assim, por exemplo, a negação de 'O Sol é um planeta' é 'O Sol não é um planeta'. Mas já a negação de 'Todos os homens são inteligentes' é 'Nem todos os homens são inteligentes' e a de 'Nenhum homem é inteligente' é 'Algum homem é inteligente'.

Em lógica simbólica a negação é indicada antepondo um determinado sinal à proposição a negar. Para esse fim, usaremos o sinal '$\sim$' que se pode ler 'não é verdade que'. Assim, a negação de '*Todos os homens são inteligentes*' escreve-se:

$\sim$ *Todos os homens são inteligentes* o que se pode ler: '*Não é verdade que todos os homens são inteligentes*'. Analogamente, a negação da proposição '$7 > 3$' (verdadeira) é a proposição (falsa):

$$\sim (7 > 3)$$

que se lê: 'Não é verdade que 7 é maior que 3' ou simplesmente '7 não é maior que 3'.

b) *Conjunção*. Consideremos as duas seguintes proposições:

'O Sol é uma estrela' , 'A Lua é um satélite da Terra'.

Ambas são verdadeiras e é, portanto, verdadeira a proposição:

'O Sol é uma estrela e a Lua é um satélite da Terra'

que se obtém ligando as duas primeiras pela conjunção copulativa 'e'. Mas já é falsa a proposição:

'Vénus é uma estrela e a Lua é um planeta'

por não serem verdadeiras ambas as proposições ligadas pela palavra 'e' (embora seja verdadeira a segunda).

A palavra 'e' funciona pois aqui como sinal de uma operação lógica que, aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se as proposições dadas forem ambas verdadeiras (e só nesse caso). A esta operação lógica dá-se o nome de *conjunção*; diz-se também que a proposição obtida é a conjunção das duas primeiras.

Em lógica simbólica, indicaremos a conjunção com o sinal '$\wedge$' que se lê 'e'. Assim, poderemos escrever:

O Sol é uma estrela $\wedge$ a Lua é um satélite da Terra.

Analogamente, são verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{8} \neq 3 \wedge \pi < 3{,}15$$

e falsas as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \pi > 4 \quad , \quad 3 < 1 \wedge \sqrt{-4} = -2$$

c) *Disjunção.* Consideremos as duas seguintes proposições (1):

'Carlos é médico ou professor, ou ambas as coisas'.

'Vamos ao teatro ou vamos dar um passeio, mas não as duas coisas'.

No primeiro caso está-se a indicar que uma, pelo menos, das proposições 'Carlos é médico', 'Carlos é professor', é verdadeira, podendo sê-lo ambas. No segundo caso está-se a precisar que uma e só uma das proposições 'Vamos ao teatro', 'Vamos dar um passeio' é verdadeira.

De um modo geral, quando, a respeito de duas proposições, se indica que uma delas, pelo menos, é verdadeira, forma-se uma nova proposição, que se chama *disjunção inclusiva* das primeiras. Quando se indica que uma, e só uma, das proposições consideradas é verdadeira, forma-se uma nova proposição, denominada *disjunção exclusiva* das primeiras. Também se dá o nome de *disjunção* (inclusiva ou exclusiva) à operação lógica que consiste em passar das proposições dadas para a sua disjunção (respectivamente inclusiva ou exclusiva).

Assim, a primeira proposição do exemplo anterior é a disjunção inclusiva das proposições 'Carlos é médico', 'Carlos é professor', enquanto a segunda é a disjunção exclusiva das proposições 'Vamos ao teatro,' 'Vamos dar um passeio'.

Como se vê, a palavra 'ou' (que em gramática se chama conjunção disjuntiva) não permite, só por si, distinguir a disjunção inclusiva da exclusiva. Em latim, a palavra 'vel' tem aproximadamente o signi-

---

(1) Presume-se que estas frases são ditas em circunstâncias particulares, em que assumem um significado preciso e, portanto, um valor determinado.

ficado do 'ou' inclusivo; daí o adoptar-se, em lógica matemática, para a disjunção inclusiva, o sinal '$\vee$' que, por comodidade, se lê simplesmente 'ou'. Assim, a primeira proposição do exemplo anterior pode escrever-se, agora, sem perigo de confusão:

Carlos é médico $\vee$ Carlos é professor.

Segundo esta convenção, serão verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$3 < 5 \vee 3 + 2 = 5 \quad , \quad \pi = 4 \vee \pi < 4$$

e falsas as proposições:

$$5 < 3 \vee 3 + 2 = 7 \quad , \quad \sqrt{-4} = -2 \vee \sqrt{10} = 3$$

Para a disjunção exclusiva usaremos o sinal '$\dot{\vee}$'.

Normalmente, quando se diz apenas 'disjunção' subentende-se que se trata da disjunção inclusiva.

11. **As operações lógicas, consideradas como operações sobre valores lógicos.** Já atrás se disse que designamos por 'V' o valor verdade e por 'F' o valor falsidade. Para determinar o valor lógico da negação, da conjunção e da disjunção, a partir dos valores lógicos das proposições dadas, podem utilizar-se as seguintes tabelas, habitualmente chamadas *tabelas de verdade:*

p	~p
V	F
F	V

$p \wedge q$

p \ q	V	F
V	V	F
F	F	F

$p \vee q$

p \ q	V	F
V	V	V
F	V	F

As duas últimas são tabelas de duas entradas, semelhantes à tábua pitagórica da multiplicação: por elas se vê imediatamente que o valor da conjunção é V, quando ambos os dados têm o valor V (e só nesse caso); e que o valor da disjunção é V, quando um pelo menos dos dados tem o valor V (e só nesse caso).

Estas tabelas induzem-nos a considerar a negação, a conjunção e a disjunção, não propriamente como operações sobre proposições, mas sim como operações sobre valores lógicos. Assim, o resultado da negação sobre os valores lógicos V e F será, respectivamente, F e V, ou seja, em símbolos:

$$\sim V = F \quad , \quad \sim F = V.$$

Analogamente, ter-se-á:

$$V \wedge V = V \quad , \quad V \wedge F = F \wedge V = F \quad , \quad F \wedge F = F$$
$$V \vee V = V \quad , \quad V \vee F = F \vee V = V \quad , \quad F \vee F = F$$

Trata-se agora, muito simplesmente, de operações definidas num conjunto formado apenas por dois elementos (o valor V e o valor F), conjunto que podemos designar abreviadamente pela notação $\{V, F\}$.

Tais operações são definidas pelas anteriores tabelas, tabuadas dessas operações.

Este novo ponto de vista simplifica consideravelmente o estudo da lógica, como teremos ocasião de verificar.

12. **As operações lógicas e as máquinas de calcular.** O funcionamento dos modernos computadores electrónicos baseia-se em grande parte na lógica matemática. Vamos apresentar os esquemas de circuitos eléctricos que efectuam as operações de conjunção, disjunção e negação, em máquinas de tipo simples, com base em electroímanes (nas máquinas electrónicas, muito mais rápidas, a ideia é essencialmente a mesma, sendo os electroímanes substituídos por válvulas electrónicas).

O *circuito de conjunção* (ou *circuito 'e'*) é esquematizado na fig. 1; o *circuito de disjunção* (ou *circuito* 'ou') na fig. 2 e o circuito de negação (ou *circuito 'não'*) na fig. 3.

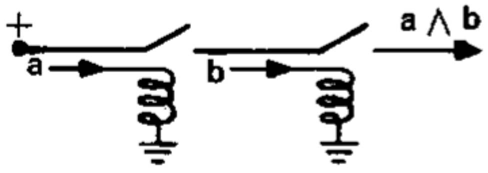


Fig. 1

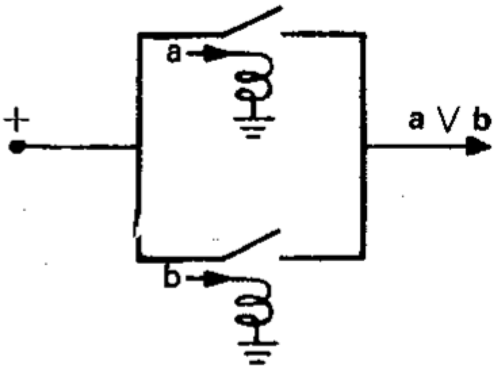


Fig. 2

O valor lógico V traduz-se, neste caso, por *passagem da corrente* e o valor F por *ausência de corrente.*

No primeiro esquema os interruptores estão postos *em série* e, portanto, só haverá corrente no circuito quando se lançar corrente nas duas bobinas *ao mesmo tempo,* fechando os dois interruptores que, de outro modo, se mantêm abertos por meio de molas. Assim, o resultado será V, quando, e só quando, *ambos* os dados *a* e *b* forem V: trata-se, pois, da conjunção.

No segundo esquema os interruptores estão postos *em paralelo* e, portanto, passará corrente no circuito quando (e só quando) se lançar corrente numa, pelo menos, das bobinas: trata-se, pois, da disjunção.

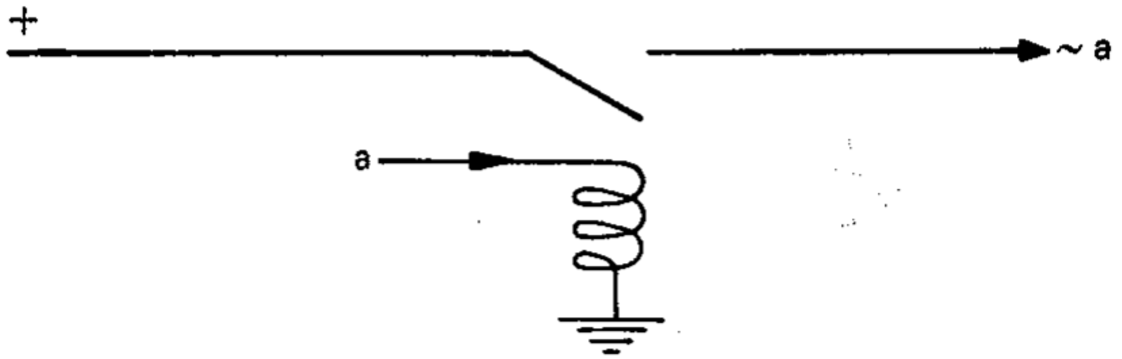


Fig. 3

Finalmente, no terceiro esquema o lançamento de corrente na bobina produz interrupção no circuito e existe uma mola que fecha automaticamente o interruptor quando não há corrente na bobina: trata-se pois da negação.

A partir destes três tipos de circuitos elementares, que podemos indicar respectivamente pelos símbolos:

é fácil construir vários circuitos que efectuem outras operações lógicas, mais ou menos complicadas, visto que todas, em última análise, se podem definir a partir daquelas três.

Por exemplo, a disjunção exclusiva, dada pela tabela junta, pode ser definida a partir da conjunção, da disjunção e da negação, por meio da fórmula:

$$a \dot{\vee} b$$

a \ b	V	F
V	F	V
F	V	F

$$a \dot{\vee} b = (a \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim a)$$

(isto é, *verifica-se* $a \dot{\vee} b$, *quando se verifica só* a *ou só* b).

De acordo com esta fórmula, apresentamos na fig. 4 o esquema de um circuito que efectua a *disjunção exclusiva.*

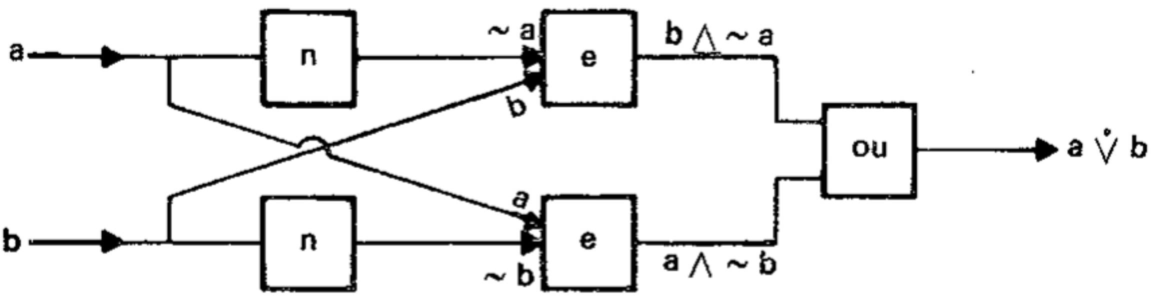


Fig. 4

Ainda se podem imaginar outros circuitos para efectuar esta operação, pois podemos defini-la de outros modos a partir das operações fundamentais, por exemplo segundo a fórmula:

$$a \dot{\vee} b = (a \vee b) \wedge \sim (a \wedge b)$$

(isto é, *verifica-se* a $\dot{\vee}$ b, *quando se verifica* a *ou* b *mas não* a *e* b *ao mesmo tempo*).

Um dos tipos de problemas de lógica matemática postos pelos cérebros electrónicos, que exigem cada vez mais o concurso de especialistas na matéria, é o seguinte:

Dada uma expressão de cálculo proposicional, reduzi-la a uma expressão mínima, isto é, a uma expressão equivalente que requeira o mínimo de circuitos elementares ('e', 'ou' e 'não') e portanto o mínimo de consumo energético do cérebro.

Consegue-se isto, aplicando as propriedades das operações lógicas, que vamos estudar, e cuja utilidade fundamental é: ECONOMIA DE TEMPO, ECONOMIA DE PENSAMENTO, ECONOMIA DE ESFORÇO.

A título de exemplo observe-se que, das duas fórmulas anteriores para definir a $\dot{\vee}$ b, a segunda é a mais económica, visto que poupa um circuito 'não'.

13. **Propriedades da conjunção e da disjunção.** Consideremos a seguinte proposição:

'Carlos estuda e Pedro ouve música ou lê'.

É óbvio que esta proposição equivale à seguinte:

'Carlos estuda e Pedro ouve música, ou Carlos estuda e Pedro lê'.

Usando as letras a, b, c, respectivamente, como abreviaturas das proposições 'Carlos estuda', 'Pedro ouve música', 'Pedro lê', a referida equivalência é traduzida pela fórmula:

$$a \wedge (b \vee c) \;=\; (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

É evidente que esta fórmula é verdadeira, *quaisquer que sejam as proposições nos lugares das letras.* Exprime-se este facto, dizendo que *a conjunção é distributiva a respeito da disjunção.* Esta maneira de dizer foi adoptada por analogia com o que sucede a respeito dos números; neste caso a *multiplicação é distributiva a respeito da adição,* isto é, tem-se:

$$a \,.\, (b + c) \;=\; (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$$

sendo a, b, c números quaisquer.

Muitas vezes, para comodidade de linguagem, a conjunção também é chamada *produto lógico,* escrevendo-se então $p.q$ (ler 'p vezes q'), em vez de $p \wedge q$. Por seu turno, a disjunção é chamada *soma lógica,* escrevendo-se $p + q$ (ler 'p mais q') em vez de $p \vee q$. Neste caso, os valores lógicos V e F costumam ser designados pelos símbolos 1 e 0. Então o produto lógico coincide com o produto usual no conjunto $\{0, 1\}$, mas o mesmo não sucede com a soma lógica, visto que $V \vee V = V$ ou seja $1 + 1 = 1$.

Note-se que *a disjunção também é distributiva a respeito da conjunção:*

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Por exemplo, a proposição

'Ou chove ou faz vento e frio'

equivale a afirmar as duas proposições:

'Chove ou faz vento' e 'Chove ou faz frio'.

Pelo contrário, no caso dos números, a adição não é distributiva a respeito da multiplicação, isto é, não se tem geralmente

$$a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$$

Por exemplo, $3 + (2 \,.\, 5) \neq (3 + 2) \,.\, (3 + 5)$.

Notemos, desde já, o partido que se pode tirar destas propriedades da conjunção e da disjunção nos cérebros electrónicos. Por exemplo, traduzida à letra, a expressão $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ conduz ao esquema da fig. 5, enquanto a expressão equivalente $a \wedge (b \vee c)$ conduz ao esquema da fig. 6: *esta é pois mais económica, poupando um circuito* 'e'.

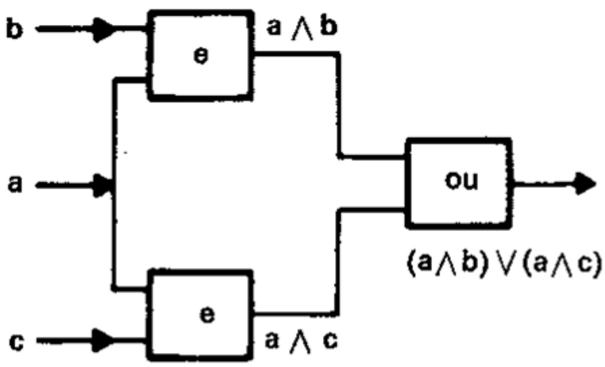


Fig. 5

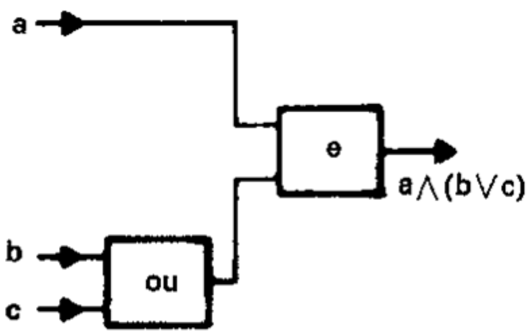


Fig. 6

Mas há outras propriedades da adição e da multiplicação sobre números que se estendem à disjunção e à conjunção (sobre proposições ou sobre valores lógicos). Para fazer uma lista das propriedades da conjunção e da disjunção, vamos supor que as letras, a, b, c designam qualquer dos valores lógicos V, F.

A) *Propriedades da conjunção*

1. A conjunção é *comutativa,* isto é, tem-se sempre:

$$a \wedge b = b \wedge a$$

2. A conjunção é *associativa,* isto é, tem-se sempre:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

3. O elemento V é tal que:

$a \wedge V = a$, *qualquer que seja* a (V ou F)

4. O elemento F é tal que:

$a \wedge F = F$, *qualquer que seja* a

B) *Propriedades da disjunção*

1'. A disjunção é *comutativa:*

$$a \vee b = b \vee a$$

2'. A disjunção é *associativa:*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

3'. O elemento F é tal que:

$a \vee F = a$, *qualquer que seja* a

4'. O elemento V é tal que:

$a \vee V = V$, *qualquer que seja* a

C) *Propriedades mistas (da conjunção e da disjunção)*

5. A conjunção é *distributiva a respeito da disjunção:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

5'. A disjunção é *distributiva a respeito da conjunção:*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

A demonstração destas propriedades pode reduzir-se a uma simples verificação, utilizando as tabuadas da conjunção e da disjunção, e considerando todas as substituições possíveis das letras a, b, c por valores lógicos. Com efeito, como cada letra só pode ter dois valores (V e F), tais *substituições são em número finito.* Assim, por exemplo, a propriedade comutativa da conjunção resulta da respectiva tabuada, notando que:

1) se $a = V$ e $b = V$, vem $a \wedge b = b \wedge a = V$;
2) se $a = V$ e $b = F$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$;
3) se $a = F$ e $b = V$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$;
4) se $a = F$ e $b = F$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$.

Analogamente, para a propriedade associativa:

1) se $a = V$, $b = V$ e $c = V$, vem
$$(a \wedge b) \wedge c = (V \wedge V) \wedge V = V \quad \text{e} \quad a \wedge (b \wedge c) = V \wedge (V \wedge V) = V,$$
portanto $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

2) se $a = V$, $b = F$ e $c = V$, vem
$$(a \wedge b) \wedge c = (V \wedge F) \wedge V = F \quad \text{e} \quad a \wedge (b \wedge c) = V \wedge (F \wedge V) = F,$$
portanto $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

e assim por diante (neste caso o número de substituições possíveis é 8).

Deste modo, adquirimos a *certeza* de que todas as referidas propriedades são válidas.

Note-se que, usando as notações a . b, a + b, 1 e 0 (em vez das notações a $\wedge$ b, a $\vee$ b, V e F) as propriedades 3, 4, 3', 4', relativas a V e F tomam respectivamente a forma:

$$a . 1 = a \quad , \quad a . 0 = 0 \quad , \quad a + 0 = a \quad , \quad a + 1 = 1,$$

sendo *a* qualquer dos valores lógicos. Destas propriedades, só a última não é verificada no caso da adição e da multiplicação usuais sobre números.

As propriedades 3, 4, 3' e 4' exprimem-se respectivamente dizendo: V é *elemento neutro* da conjunção, F *é elemento absorvente* da conjunção, F é *elemento neutro da disjunção,* V é elemento absorvente da *disjunção.*

As propriedades da conjunção e da disjunção revelam a harmonia das leis do pensamento. Olhando para a lista anterior, um facto chama logo a atenção:

As propriedades da conjunção e da disjunção são formalmente idênticas, isto é, passa-se duma para as outras apenas mudando '$\wedge$' em '$\vee$' e 'V' *em* 'F'.

Neste facto e em outros que serão oportunamente apontados (que não se verificam no caso das operações sobre números) consiste o PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA.

14. **Propriedades da negação; suas relações com a conjunção e a disjunção.** A propriedade mais simples da negação é a PROPRIEDADE DA DUPLA NEGAÇÃO:

$$\sim\sim a = a \quad , \quad \textit{qualquer que seja } a$$

(isto é, a dupla negação equivale à afirmação).

Notemos, agora, que a negação pode ser definida por meio da seguinte propriedade da conjunção e da disjunção:

Qualquer que seja o valor lógico a *existe sempre um valor lógico* x, *e um só, tal que*

$$a \wedge x = F \quad \text{e} \quad a \vee x = V$$

É claro que este valor x é precisamente o *contrário de* a ou seja $\sim a$, igual a F se $a = V$, igual a V se $a = F$. Teremos pois:

$$a \wedge \sim a = F, \quad a \vee \sim a = V, \quad \textit{qualquer que seja } a.$$

Estas fórmulas, aplicadas a proposições, traduzem sob nova forma os princípios da lógica bivalente:

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Dizer que uma proposição é verdadeira e falsa ao mesmo tempo é sempre falso.*

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.*

Finalmente, é fácil deduzir das tabelas de verdade as duas seguintes propriedades:

$$\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b \quad , \quad \sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$$

Supondo que nos lugares de *a* e *b* estão proposições, estas fórmulas exprimem as duas seguintes leis do pensamento, chamadas *primeiras leis de* DE MORGAN:

I. *Negar que duas dadas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma, pelo menos, é falsa.*

II. *Negar que uma, pelo menos, de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.*

Por exemplo, a negação de 'É inteligente *e* estuda' equivale a 'Não é inteligente *ou* não estuda'; a negação de 'É médico ou professor' equivale a 'Não é médico *e* não é professor'.

Estas propriedades podem exprimir-se ainda dizendo que *a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.* Assim, as leis de De Morgan explicam o já referido PRINCÍPIO DE DUALIDADE LÓGICA e mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$$a \vee b = \sim (\sim a \wedge \sim b) \quad , \quad a \wedge b = \sim (\sim a \vee \sim b)$$

Quer isto dizer que um cérebro electrónico poderia funcionar apenas com dois tipos de circuitos elementares: circuitos de conjunção e de negação, ou circuitos de disjunção e de negação.

15. **Implicação material e dedução.** Consideremos, por exemplo, a frase:

'Se Carlos não telefona, vem à hora marcada'.

Trata-se aqui duma proposição [1] que relaciona os valores lógicos (ainda não conhecidos) das duas proposições:

a) 'Carlos não telefona';

b) 'Carlos vem à hora marcada'

de tal modo, que, se a primeira for verdadeira a segunda também

---

[1] Supõe-se, como nos exemplos anteriores, que esta frase é dita em condições particulares que lhe conferem um significado preciso.

será verdadeira, mas, se a primeira for falsa, a segunda pode ser verdadeira ou falsa (está subentendido: 'se Carlos telefona, pode vir ou não à hora marcada'). Exprime-se este facto dizendo que a proposição a) *implica* a proposição b) e escrevendo:

Carlos não telefona $\Rightarrow$ Carlos vem à hora marcada.

Dum modo geral, se no lugar das letras p, q estiverem duas proposições, escreveremos

$$p \Rightarrow q \qquad \text{(ler 'p implica q')},$$

quando, e só quando, se der um dos seguintes casos: 1) a primeira é verdadeira e a segunda também; 2) a primeira é falsa e a segunda é verdadeira; 3) a primeira é falsa e a segunda é falsa. Na fórmula $p \Rightarrow q$ a primeira proposição diz-se *antecedente* e a segunda *consequente*.

Deste modo, o sinal $\Rightarrow$ traduz uma *relação* entre os valores lógicos, tendo-se por definição:

$$V \Rightarrow V, \quad F \Rightarrow V, \quad F \Rightarrow F$$

mas não $V \Rightarrow F$. Por outros termos: as fórmulas $V \Rightarrow V$, $F \Rightarrow V$ e $F \Rightarrow F$ são proposições verdadeiras, enquanto a fórmula $V \Rightarrow F$ é uma proposição falsa; isto é:

$$(V \Rightarrow V) = V \quad , \quad (F \Rightarrow V) = V$$

$$(F \Rightarrow F) = V \quad , \quad (V \Rightarrow F) = F$$

Mas é claro que, nestas condições, também se pode dizer que o sinal $\Rightarrow$ representa uma operação sobre valores lógicos (ou sobre proposições), a qual é definida pela seguinte tabuada:

$$a \Rightarrow b$$

a \ b	V	F
V	V	F
F	V	V

Em qualquer dos casos, a relação ou operação lógica assim definida é chamada *implicação*. Mas convém, desde já, notar que este significado da palavra 'implicação' se afasta, muitas vezes, do significado usual. Por exemplo, nós podemos dizer que a proposição '7 é ímpar' implica a proposição 'Lisboa é uma cidade', e escrever:

7 é ímpar $\Rightarrow$ Lisboa é uma cidade

visto que ambas as proposições são verdadeiras e V $\Rightarrow$ V por definição. Analogamente, podemos escrever:

$2 + 3 = 7 \Rightarrow$ Pedro Nunes descobriu o Brasil

visto que F $\Rightarrow$ F, por definição. Mas isto não significa, de modo nenhum, que o facto de Lisboa ser uma cidade *se deduz* do facto de 7 ser ímpar, ou que a proposição 'Pedro Nunes descobriu o Brasil' (falsa) é uma consequência da proposição '2 + 3 = 7' (igualmente falsa). O que se afirma unicamente é uma relação entre os valores lógicos das proposições, de acordo com a tabela anterior.

Para evitar confusões com o significado usual das palavras 'implica' e 'implicação', a referida relação lógica é muitas vezes chamada *'implicação material'* e o sinal '$\Rightarrow$' é traduzido por *'implica materialmente'*.

Todavia, a implicação material só tem geralmente interesse quando se aplica a proposições cujo valor lógico ainda não é conhecido. Ora, neste caso, corresponde exactamente ao conceito usual de implicação.

É isto o que sucede, por exemplo, com a frase anterior 'Se Carlos não telefona, vem à hora marcada'. Entende-se que os valores lógicos das proposições 'Carlos não telefona' e 'Carlos vem à hora marcada' ainda são ignorados: sabe-se apenas que a primeira implica materialmente a segunda.

Vejamos outro exemplo. Consideremos a proposição:

'Se existem plantas em Marte, existem seres vivos em Marte'. Esta é evidentemente verdadeira [1], embora não conheçamos os valores lógicos das proposições 'Existem plantas em Marte', 'Existem seres vivos em Marte'; o que sabemos apenas é que a primeira implica materialmente a segunda:

Existem plantas em Marte $\Rightarrow$ Existem seres vivos em Marte

Mas, precisamente porque se desconhecem os valores das duas referidas proposições, a implicação material corresponde à ideia normal da implicação.

Seja agora a proposição:

'Se Marte tem atmosfera, existem seres vivos em Marte'.

---

[1] Admite-se evidentemente que a classe das plantas e a classe dos seres vivos estão definidas mesmo fora da terra. Em caso contrário as proposições não teriam sentido.

Está-se, pois, a afirmar o seguinte:

'Marte tem atmosfera $\Rightarrow$ Existem seres vivos em Marte'.

Mas, agora, não sabemos sequer se a implicação é verdadeira ou falsa: será falsa se Marte *tem* atmosfera e *não* existem seres vivos em Marte; será verdadeira, na hipótese contrária.

Outro exemplo ainda. É bem fácil determinar directamente o valor lógico de cada uma das proposições:

'$2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6', '$2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3'.

Porém, mesmo antes de o saber, já podemos afirmar que a primeira implica materialmente a segunda, isto é:

$2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6 $\Rightarrow$ $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3

visto que, como se prova em aritmética, *todo o múltiplo de* 6 *é múltiplo de* 3. Assim, mais uma vez, a implicação material concorda com a implicação no sentido usual, em virtude das razões atrás apontadas.

Nestes casos, o sinal $\Rightarrow$, que geralmente se lê 'implica', substitui com propriedade a palavra 'se' (conjunção condicional), anteposta à proposição antecedente. Algumas vezes, para salientar a implicação, em linguagem comum, antepõe-se a palavra 'se' à proposição antecedente e a palavra 'então' à proposição consequente. Assim:

Se $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6, *então* $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.

Ainda a propósito deste exemplo, note-se que, se efectuarmos os cálculos, vemos que a proposição antecedente é afinal verdadeira. *Conclui-se então, sem necessidade de mais cálculos, que a proposição consequente também é verdadeira.*

De um modo geral, quando, dadas duas proposições A e B, se consegue averiguar, por um lado, que A $\Rightarrow$ B e, por outro lado, que A é verdadeira, conclui-se imediatamente que B também é verdadeira. Nisto mesmo consiste a *dedução lógica* ou *raciocínio dedutivo,* numa das suas formas mais simples e mais frequentes, tanto em matemática como na vida corrente.

O esquema do raciocínio é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow B & \textit{(premissa maior)} \\ A & \textit{(premissa menor)} \\ \hline \therefore B & \textit{(conclusão)} \end{array}$$

Aqui, o sinal $\therefore$ lê-se 'logo' e indica que a proposição B *se deduz logicamente* das duas anteriores. Estas são chamadas *premissas* do raciocínio (respectivamente *premissa maior* e *premissa menor*), enquanto a última é chamada *conclusão.* Na lógica tradicional um raciocínio deste tipo é denominado *silogismo condicional, regra de dedução* ou *modus ponens.* Algumas vezes, a premissa menor é precedida da palavra 'ora', outras vezes é escrita simplesmente. Exemplos:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Se } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 6, } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 3.} \\ \text{Ora } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 6.} \\ \text{Logo } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 3.} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Se este animal é um peixe, tem guelras.} \\ \text{Ora este animal é um peixe.} \\ \text{Logo este animal tem guelras.} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Se este livro tem uma folha dobrada, pertence-me.} \\ \text{Este livro tem uma folha dobrada.} \\ \text{Logo este livro pertence-me.} \end{array}\right.$$

Note-se que uma dedução pode estar certa sem que as premissas sejam necessariamente verdadeiras. É óbvio que o facto de uma dedução ser correcta não garante a verdade da conclusão.

Mas também pode haver deduções erradas. As deduções erradas de tipo elementar são chamadas *paralogismos*. Um tipo de paralogismo bastante frequente é o que se indica no seguinte esquema:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \\ \hline \quad \therefore A \end{array}$$

Exemplo: 'Se este animal é um peixe, tem guelras. Ora este animal tem guelras. Logo é um peixe'.

Recordemos que, muitas vezes, para saber se uma conta está certa, recorremos à prova dos nove. Na realidade, estamos a seguir um paralogismo, pois a prova pode dar certa, estando a conta errada: o mais que podemos dizer é que, se a conta está certa, a prova tem de dar certa, e que, se a prova dá certa, é *muito provável* que a conta não esteja errada.

15a. **Propriedades da implicação; relações desta com as outras operações lógicas. Novos tipos de silogismo.** Sejam *a, b, c* valores lógicos quaisquer. Então é fácil verificar, usando a tabuada da implicação, que:

$$\textit{Se } a \Rightarrow b \quad \textit{e} \quad b \Rightarrow c, \textit{ então } a \Rightarrow c$$

ou seja, usando símbolos:

$$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

Exprime-se este facto, dizendo que a implicação é uma *relação transitiva*.

Esta propriedade, aplicada a proposições, conduz a um novo tipo de silogismo, descrito pelo seguinte esquema:

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \end{array} \Big\} \text{ premissas}$$

$$\therefore A \Rightarrow C \quad \textit{(conclusão)}$$

Exemplo: 'Se estudares, terás boas notas. Se tiveres boas notas, darás alegria a teus pais. Portanto, se estudares, darás alegria a teus pais'.

Usando as tabuadas da implicação, da disjunção e da negação, que em seguida reproduzimos:

$a \Rightarrow b$

a \ b	V	F
V	V	F
F	V	V

$a \vee b$

a \ b	V	F
V	V	V
F	V	F

a	$\sim a$
V	F
F	V

é fácil verificar que se tem sempre:

$$(a \Rightarrow b) = b \vee \sim a$$

Como se vê, esta propriedade permite exprimir a implicação na disjunção e na negação (o que facilmente permite traduzi-la num esquema de circuitos). Aplicada a proposições, a fórmula anterior pode traduzir-se do seguinte modo:

Dizer que uma proposição implica outra proposição equivale a dizer que ou a segunda é verdadeira ou a primeira é falsa.

Por exemplo, dizer:

'Se este animal é um peixe, tem guelras'

equivale a dizer:

'Ou este animal tem guelras ou não é peixe' (1).

Reciprocamente, a disjunção pode exprimir-se na implicação e na negação, como é fácil verificar:

$$a \vee b = \sim a \Rightarrow b.$$

Assim, afirmar que uma, pelo menos, de duas proposições é verdadeira, equivale a afirmar que, se uma delas é falsa, a outra é verdadeira.

Esta propriedade dá lugar a um novo tipo de raciocínio dedutivo, chamado *silogismo disjuntivo,* que é descrito pelo esquema:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} A \vee B \\ \sim A \end{array}\right\} \textit{premissas} \\ \hline \therefore \quad B \quad \textit{(conclusão)} \end{array}$$

Exemplo: 'Ou ele é mentiroso ou foi enganado. Ora ele não é mentiroso. Logo foi enganado'.

Aliás, podemos dizer a respeito da disjunção o que já tínhamos dito a respeito da implicação material: *só tem geralmente interesse, quando se desconhece o valor das proposições às quais se aplica* (estas dizem-se então *hipóteses*). Quando por exemplo escrevemos $3 \leqslant \pi$, estamos a afirmar que $3 < \pi$ ou $3 = \pi$, o que é verdade; mas, como

(1) Lembramos que há peixes (dipnóicos) que respiram por guelras e pulmões.

já sabemos que $3 < \pi$, parece inútil a disjunção. Analogamente no caso em que se escreve $3 \leqslant 3$, etc.

As propriedades anteriores conduzem a esta outra:

Dizer que uma proposição implica outra equivale a dizer que, se a segunda é falsa, a primeira também é falsa.

Isto é, simbolicamente:

$$(A \Rightarrow B) = (\sim B \Rightarrow \sim A)$$

Nesta propriedade (que pode também ser verificada directamente), baseia-se o tipo de silogismo chamado *regra de conversão* ou *modus tollens:*

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ \sim B \end{array}\right\} & \textit{premissas} \\ \hline \therefore \ \sim A & \textit{(conclusão)} \end{array}$$

Exemplo: 'Se este animal é um peixe, tem guelras. Ora este animal não tem guelras. Logo não é um peixe'.

Por sua vez, da fórmula $(A \Rightarrow B) = (B \vee \sim A)$ e das leis de De Morgan, deduz-se:

$$\sim (A \Rightarrow B) = A \wedge \sim B$$

isto é: *dizer que* A *não implica* B *equivale a dizer que* A *é verdadeira e* B *é falsa.*

Mas há ainda outras propriedades que relacionam a implicação com a conjunção e com a disjunção. Assim, é fácil ver que:

1. $A \wedge B \Rightarrow A$ 1'. $A \Rightarrow A \vee B$

2. Se $P \Rightarrow A$ e $P \Rightarrow B$, então $P \Rightarrow A \wedge B$

2'. Se $A \Rightarrow P$ e $B \Rightarrow P$, então $A \vee B \Rightarrow P$

As propriedades 1 e 1′ dão lugar a *silogismos com uma só premissa,* como por exemplo este: 'π é menor que 4; logo π é menor ou igual a 4'.

As propriedades 2 e 2′ dão lugar a silogismos tais como:

'Se estudares, darás alegria a teus pais. Se estudares, serás recompensado. Logo, se estudares, darás alegria a teus pais *e* serás recompensado'.

'Se o ladrão sai pela porta, é apanhado. Se foge para o telhado, é apanhado. Logo, se sai pela porta *ou* foge para o telhado, é apanhado'.

16. **Equivalência material.** Em vez de escrever $A \Rightarrow B$, podemos também escrever, com o mesmo significado, $B \Leftarrow A$. O sinal $\Leftarrow$, que representa a *relação inversa da implicação,* pode ler-se 'é implicado por', 'se', 'desde que', 'contanto que', etc. Assim, a frase:

'Vem, se não telefona'

pode escrever-se

'Vem $\Leftarrow$ não telefona'.

Suponhamos que se tem ao mesmo tempo

$$A \Rightarrow B \text{ e } A \Leftarrow B,$$

estando as letras a indicar proposições quaisquer. Então é claro que as proposições são *equivalentes,* isto é, são ambas verdadeiras ou ambas falsas . Para exprimir este facto, temos escrito até aqui $A = B$, em que o sinal $=$ está a exprimir identidade entre os valores lógicos das proposições. Porém, neste caso particular, a relação de identidade chama-se *equivalência material* e convém muitas vezes representá-la pelo sinal $\Leftrightarrow$, que se lê 'equivale a'. Tal como a implicação, a equivalência material é ao mesmo tempo uma relação e uma operação. Tem-se, com efeito:

$$(V \Leftrightarrow V) = V, \quad (F \Leftrightarrow F) = V$$
$$(V \Leftrightarrow F) = F, \quad (F \Leftrightarrow V) = F$$

donde, a tabuada:

$$x \Leftrightarrow y$$

x \ y	V	F
V	V	F
F	F	V

Desde logo se vê que, ao contrário do que sucede com a implicação, a equivalência é *simétrica* (ou *comutativa*), isto é:

$$(x \Leftrightarrow y) = (y \Leftrightarrow x).$$

Esta operação reduz-se às anteriores, de acordo com qualquer das fórmulas:

$$(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$
$$(a \Leftrightarrow b) = (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge \sim b)$$

Esta última fórmula mostra que a equivalência é o contrário da disjunção exclusiva, visto que:

$$\sim (a \Leftrightarrow b) = \sim (a \wedge b) \wedge (a \vee b) = a \dot{\vee} b$$

É fácil assim imaginar uma associação de circuitos elementares que efectue esta operação.

Tal como a implicação, a equivalência material de duas proposições só tem geralmente interesse enquanto se aplica a proposições cujo valor lógico é ignorado. Neste caso, o sinal $\Leftrightarrow$ pode traduzir-se pela expressão 'se e só se'. Por exemplo, a proposição 'Este animal é um peixe, se e só se tem guelras e escamas' exprime equivalência entre duas proposições, das quais se ignora ainda o valor lógico. Poderíamos também escrever:

'Este animal é um peixe $\Leftrightarrow$ tem guelras e escamas'

Dizem-se *bicondicionais* as proposições de equivalência como a anterior.

CONVENÇÃO. Como abreviatura da expressão 'se e só se' escreveremos 'sse'.

Vimos atrás que se tem sempre $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$. Para a equivalência virá então:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\sim A \Leftrightarrow \sim B)$$

isto é: *a equivalência de duas proposições equivale sempre à equivalência das suas negações.*

Assim, a equivalência $A \Leftrightarrow B$ fornece quatro formas correctas de silogismo: podemos deduzir B de A, A de B, $\sim A$ de $\sim B$ e $\sim B$ de $\sim A$:

$$\begin{array}{c}A \Leftrightarrow B\\ A\\ \hline B\end{array} \qquad \begin{array}{c}A \Leftrightarrow B\\ B\\ \hline A\end{array} \qquad \begin{array}{c}A \Leftrightarrow B\\ \sim A\\ \hline \sim B\end{array} \qquad \begin{array}{c}A \Leftrightarrow B\\ \sim B\\ \hline \sim A\end{array}$$

Exemplos:

'Este triângulo tem os lados iguais, sse tem os ângulos iguais. Ora este triângulo tem os lados iguais. Logo tem os ângulos iguais'.

'Este animal é um peixe, sse tem escamas e guelras. Ora este animal não é peixe. Logo não tem escamas ou não tem guelras'.

17. **Polissilogismos. Dedução e indução. Teorias dedutivas.** Consideremos as seguintes proposições:

1) Se o ladrão saiu pela porta da rua, foi apanhado.

2) Se o ladrão saiu pela varanda do quintal, foi apanhado.

3) Logo, se o ladrão saiu pela porta da rua ou pela varanda do quintal, foi apanhado.

4) Mas, se o ladrão foi apanhado, está preso.

5) Ora o ladrão não está preso.

6) Logo não foi apanhado.

7) Logo não saiu pela porta da rua nem pela varanda do quintal.

8) Mas, se o ladrão não saiu pela porta da rua nem pela varanda do quintal, está escondido.

9) Logo o ladrão está escondido.

Estas proposições formam uma *cadeia de silogismos* (ou um *polissilogismo*), isto é, uma sucessão de silogismos, em que as conclusões de uns servem de premissas a outros. Assim, o primeiro silogismo tem 1) e 2) por premissas e 3) por conclusão; o segundo tem 4) e 5) por premissas e 6) por conclusão; o terceiro tem 3) e 6) por premissas e 7) por conclusão; o quarto e último tem 7) e 8) por premissas e 9) por conclusão.

Poderíamos também dizer que silogismo é *dedução imediata,* enquanto polissilogismo é *dedução mediata*.

Dum modo geral, a dedução (ou *raciocínio dedutivo*) constitui o método característico da matemática, para a obtenção de novos conhecimentos. Este método assemelha-se um pouco ao que é usado pelos detectives para descobrir a verdade num dado acontecimento envolvido em mistério.

À *dedução* contrapõe-se a *indução*, que constitui o método fundamental usado pelas ciências de observação e de experiência, para o estabelecimento de *leis*, isto é, de factos científicos. Por exemplo, a lei:

'Todo o peixe tem vértebras'

não é demonstrada como um teorema de matemática: *foi estabelecida por indução.* Quer isto dizer o seguinte: como *todos os peixes observados têm vértebras,* conclui-se que será sempre assim em *todos os peixes que vierem a aparecer.* A indução é também chamada *raciocínio indutivo,* mas é evidente que não tem a segurança do raciocínio dedutivo; na realidade assemelha-se a um paralogismo: *conclui-se do particular para o geral, o que, segundo a lógica dedutiva, não é lícito.* Daí o carácter *contingente* das referidas leis, em contraste com o carácter de *certeza absoluta* que se atribui às deduções da matemática.

Se, porventura, aparecer um peixe sem vértebras, dir-se-á que este caso é uma *anomalia*, uma *monstruosidade* que não conta e então a lei anterior será corrigida, dizendo 'Todo o peixe normal tem vértebras' ou 'Em condições normais, todo o peixe tem vértebras'. O carácter contingente das leis assim estabelecidas é bem expresso pelo aforismo popular: *não há regra sem excepção.*

Nas ciências físico-químicas encontramos a cada passo exemplos análogos. Por exemplo, a lei:

'O volume dum gás diminui com a pressão e aumenta com a temperatura',

foi estabelecida por indução, a partir dum grande número de casos em que se verificou. Mas quem nos garante que, em casos ou circunstâncias muito especiais, não deixe de verificar-se? Aliás, trata-se apenas duma *lei qualitativa,* pouco precisa. Em experiências de maior precisão, Mariotte e Gay-Lussac chegaram à *lei quantitativa* que tem o seu nome e se estuda em física. Porém, é sabido que *nenhum* gás segue rigorosamente essa lei, também conhecida por *lei dos gases perfeitos,* porque se convencionou chamar *gás perfeito* a um *gás ideal* que a seguisse rigorosamente. Assim, não existem gases perfeitos. mas apenas gases que se aproximam mais ou menos desse caso ideal,

Tornando ao raciocínio dedutivo, observemos que, quando um facto é estabelecido por dedução, é deduzido de outro ou de outros anteriormente estabelecidos. Estes, por sua vez, podem ter sido deduzidos de factos precedentes. Mas é evidente que tal processo há-de ter um princípio, isto é, tem de haver *premissas iniciais,* que não são deduzidas de outros factos. E, *se não deduzidas,* são necessariamente estabelecidas *por outro método:*

— ou por *informação directa*
— ou *por indução*
— ou por *intuição*
— ou por *conjectura.*

A intuição é uma espécie de visão mental que nos faculta o conhecimento directo dos factos. Na realidade, trata-se muitas vezes duma indução efectuada de maneira mais ou menos inconsciente, a partir de um grande número de experiências quotidianas. Tal é o caso da *intuição geométrica,* que nos faz *ver,* por exemplo, que *duas rectas dum plano perpendiculares a uma terceira são sempre paralelas entre si.*

A conjectura é um método muito usado em física, principalmente em física atómica: os factos observados levam a imaginar certas *hipóteses,* que os expliquem. Essas hipóteses não são directamente verificáveis pela experiência, mas apenas indirectamente, por factos que delas possam ser deduzidas. Mais uma vez estamos perante uma espécie de paralogismo: as conclusões podem estar certas, mas as premissas erradas.

Seja porém como for, as premissas iniciais só podem ser estabelecidas por qualquer dos processos indicados e têm, portanto, carácter contingente. Diz-se então que o método usado é *empírico,* por oposição ao método dedutivo, também denominado *racional* ([1]).

Uma *teoria dedutiva* consiste precisamente num sistema de proposições que se deduzem, por cadeias de silogismos, a partir de proposições de origem empírica. Estas são chamadas *axiomas* ou *postulados,* enquanto as proposições que delas se deduzem são chamadas *teoremas.*

Nos axiomas figuram termos cujo significado não é definido logicamente, mas apenas dado empiricamente (*termos primitivos*). A partir desses, outros vão sendo introduzidos por definições (*termos derivados*). Por exemplo, na geometria de Euclides, os termos 'ponto', recta', etc., são geralmente tomados como termos primitivos. Os termos 'circunferência', 'polígono', etc., são termos derivados.

Cada teorema é demonstrado (isto é, deduzido), a partir de axiomas, de definições ou de outros teoremas já demonstrados. Mas o *rigor matemático* diz respeito à maneira como se define ou se demonstra e não àquilo que se demonstra. O mais que se pode dizer é que os *teoremas são implicados pelos axiomas e que, portanto, são verdadeiros na medida em que o são os axiomas.*

Por exemplo, no caso da geometria, os axiomas só *aproximadamente* são verificados pelos entes a que, na prática, chamemos pontos, rectas, etc. Falando com mais propriedade: não existem na realidade *pontos, rectas, circunferências,* etc., do mesmo modo que não existem *gases perfeitos, água pura, pessoas normais, cor verde,* etc. — mas unicamente certos entes que se aproximam mais ou menos dessas idealizações do nosso espírito.

Consideremos ainda como exemplo o TEOREMA DE PITÁGORAS. Desenhando com o máximo rigor possível muitos triângulos rectân-

---

([1]) 'Racional' vem de 'razão' e dá-se o nome de 'razão' à nossa faculdade de raciocinar.

gulos e medindo os respectivos lados, poderia concluir-se por indução (como talvez tenha acontecido no tempo dos antigos Egípcios), que *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.* O mesmo facto pode ser demonstrado, com rigor absoluto, a partir dos axiomas. Porém, estes, embora mais simples, têm o carácter contingente e aproximado das leis da física e, portanto. o mesmo carácter se vai reflectir no teorema de Pitágoras.

18. **Expressões com variáveis.** Não se pense de modo nenhum que a lista dos silogismos ficou esgotada com os tipos atrás indicados. Na verdade, os mais importantes raciocínios dedutivos que intervêm nas demonstrações matemáticas fazem intervir o uso de expressões com variáveis.

Já na linguagem corrente se apresentam, por vezes, variáveis de maneira mais ou menos disfarçada. Consideremos, por exemplo, a expressão *'Pedro é advogado'*. Se é dita em circunstâncias especiais, em que se saiba qual é a pessoa designada por 'Pedro', aquela expressão é uma proposição, portanto verdadeira ou falsa. De contrário, a palavra 'Pedro' não chega a ser uma designação, mas sim uma *variável* cujo *domínio de variação* é o conjunto de todos os indivíduos com esse nome. Então não podemos dizer que a expressão 'Pedro é advogado' é verdadeira ou falsa: não é, pois, propriamente uma proposição.

Se considerarmos agora, por exemplo, a expressão 'Fulano é daltónico', torna-se ainda mais evidente que o sujeito da oração é indeterminado, como se diz em gramática, ou uma variável, como diremos em lógica; variável essa que tem agora por domínio o conjunto de todos os seres humanos [1]. Seria até mais cómodo usar,

(1) Um dos inconvenientes da linguagem comum em lógica é a distinção das palavras em géneros. Neste exemplo, como em muitos outros, supõe-se que não é feita distinção de sexos embora as palavras estejam no masculino.

neste caso, a expressão 'X é daltónico', que permite formular factos gerais, como por exemplo o seguinte:

'Se X *é daltónico,* X *não pode conduzir automóvel'.*

Agora a variável já é uma letra, tal como na linguagem simbólica da matemática, e escusado será dizer que, para o efeito, tanto se pode usar a letra X como qualquer outra.

Outro exemplo ainda. Seja a definição matemática:

'Diz-se que um número inteiro é divisível por outro, quando existe um terceiro que multiplicado pelo segundo dá o primeiro'.

É visível que, neste enunciado, as expressões, 'um número inteiro', 'outro', 'um terceiro', 'o segundo', 'o primeiro' funcionam, de maneira irregular e imprecisa, como variáveis que têm, por domínio, o conjunto dos números inteiros. Veja-se agora como o uso das letras, no papel de variáveis, aumenta consideravelmente a clareza e a precisão da linguagem:

'Sendo a *e* b *números inteiros, diz-se que* a *é divisível por* b *se (e só se) existe um número inteiro* c *tal que* a = bc'.

E o progresso será bem maior ainda, se substituirmos totalmente a linguagem comum pelos símbolos da lógica matemática, como faremos mais adiante.

De um modo geral, em matemática e em lógica simbólica, chamam-se variáveis certos símbolos, geralmente letras (ou ainda letras munidas de índices, plicas, asteriscos, barras, etc.), que desempenham o papel de designações, sem serem propriamente designações: cada variável pode ter como valor qualquer elemento de um conjunto denominado o *domínio dessa variável.* Por oposição, dá-se o nome de *constantes* às designações propriamente ditas, isto é, aos símbolos ou expressões que têm um único valor (o designado). Por exemplo, na fórmula

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

que dá o volume (V) de um cone de revolução conhecidos o raio (r) da base e a altura (h) do cone, as letras V, h, r são variáveis, que têm por campo de variação o conjunto dos números reais positivos, enquanto os símbolos π, $\frac{1}{3}$ e 2 são constantes.

As variáveis assemelham-se, de certo modo, a espaços em branco de um impresso a preencher, mas com a diferença de que o seu uso é estritamente regulado pelas duas seguintes normas, relativas à substituição de variáveis por constantes:

I. *Se uma variável figura em mais de um lugar na mesma expressão, só podemos atribuir-lhe de cada vez um mesmo valor, em todos os lugares em que a variável figura na expressão.*

II. *A variáveis diferentes é lícito atribuir um mesmo valor, desde que as variáveis tenham o mesmo domínio.*

Aqui, a expressão 'atribuir um valor a uma variável' significa concretamente: 'substituir a variável por uma constante que tenha esse valor'.

Por exemplo, na expressão '$x^2 + x \cdot y - y^2$' podemos substituir 'x' por '3' (nos dois lugares onde figura) e 'y' por 7 (nos dois lugares onde figura), o que dá a expressão '$3^2 + 3 \cdot 7 - 7^2$'; mas também podemos substituir ambas as variáveis por uma mesma constante, etc.

NOTA SOBRE O USO DAS ASPAS. Como já se esclareceu atrás, as aspas são usadas para designar expressões. Todavia, na prática, para não sobrecarregar as notações, pode-se dispensar o uso das aspas, desde que não haja perigo de confusão. Assim, podemos escrever 'substituir x por 3', em vez de 'substituir 'x' por '3', depois de explicado o que isso quer dizer.

19. **Tipos de expressões com variáveis.** Às duas espécies principais de expressões consideradas no n.º 2 (designações e proposições) correspondem, naturalmente, duas espécies de expressões com variáveis:

I) *expressões designatórias* — que se transformam em designações, quando as variáveis são substituídas por constantes;

II) *expressões proposicionais* — também chamadas *funções proposicionais* — que se transformam em proposições, ao substituir as variáveis por constantes.

Considere-se, por exemplo, a expressão 'triplo de x', sendo x uma variável numérica. Visto que x é uma variável e não uma designação, também 'triplo de x' não é uma designação mas sim uma variável — *variável dependente* de x. Esta, porém, converte-se numa designação, todas as vezes que substituirmos x por constantes; assim, substituindo x por 5, obtém-se a designação 'triplo de 5' equivalente a '15', etc. Portanto, a expressão 'triplo de x' (em símbolos '3 x') é uma expressão designatória com a variável x. Analogamente, a expressão 'soma de a com b' (em símbolos 'a + b') é uma expressão designatória com as variáveis a e b; 'pai de X' é uma expressão designatória com a variável X, etc. São ainda expressões designatórias com variáveis as seguintes:

$$3x^2 - y \quad , \quad \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \text{m. d. c. } (m, n), \text{ etc.}$$

Consideremos, agora, a expressão 'x é menor que y' (em símbolos '$x < y$'), sendo x e y variáveis numéricas reais. Esta expressão converte-se numa proposição, verdadeira ou falsa, todas as vezes que substituímos as variáveis por constantes; assim, substituindo x por 3 e y por 7 obtém-se a proposição verdadeira $3 < 7$, etc. Trata-se, pois, de uma expressão proposicional ou função proposicional. São, ainda, funções proposicionais as seguintes expressões:

A é filho de B, p é divisor de q, $x^2 - 4y^2 \leqslant 0$, etc.

Em matemática, as equações e as inequações fornecem inúmeros exemplos de expressões proposicionais. Mas, note-se que o conceito de expressão proposicional é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, as expressões '*a* divide *b*', '*a* é primo com *b*', '*x* é filho de *y*', etc., etc., são funções proposicionais, sem serem equações nem inequações.

Como se vê, as expressões proposicionais com variáveis não são afirmações, mas apenas fórmulas convertíveis em proposições. Exprimem geralmente perguntas, problemas ou condições; assim, a fórmula '$x^2 = 5$' traduz o problema 'Qual é o número cujo quadrado é 5?', a fórmula '$x^2 = 4y^2 \leqslant 0$' traduz uma condição imposta aos valores de x e y, etc. Em matemática, é habitual chamar fórmulas às expressões proposicionais, e expressões (simplesmente) às expressões designatórias.

Também podemos dizer que as expressões proposicionais exprimem *propriedades.* Por exemplo, a expressão 'x divide 15' exprime a propriedade de *dividir* 15, etc.

20. **Condições universais e condições impossiveis.** Quando nada se diz sobre o domínio duma variável, subentende-se que esse domínio é o universo lógico. Em muitos dos exemplos que vamos dar o universo é umas vezes *o conjunto dos números naturais* (1, 2, 3, ...), outras vezes *o conjunto dos números reais* $(2, 3/5, \sqrt{5}, \pi, -5, -2/3, \ldots)$. Designa-se o primeiro por $\mathbb{N}$ e o segundo por $\mathbb{R}$. Designemos ainda por $\mathcal{H}$ o universo dos seres humanos.

Consideremos em $\mathcal{H}$ as expressões:

x é mortal , x é imortal

A primeira dá sempre origem a uma proposição *verdadeira*, qualquer que seja a pessoa x mencionada. A segunda dá *sempre* origem a uma proposição *falsa*, qualquer que seja a pessoa x mencionada. Diremos então que a primeira exprime uma *condição universal* (ou uma *propriedade universal*) e que a segunda exprime uma *condição impossível* (ou uma *propriedade impossível*).

Analogamente, no universo $\mathbb{R}$, as condições:

$$x + 1 > x \quad , \quad x + 1 = x$$

são universal a primeira (visto ser verificada por *todos* os valores de x) e impossível a segunda (visto não ser verificada por *nenhum* valor de x).

É claro que o contrário de 'impossível' é 'possível' e não 'universal'. Por exemplo, no universo $\mathbb{R}$ a condição $4x^2 - 1 = 0$ é *possível*, visto ser verificada pelos números $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$; mas não é universal. Pelo contrário, no universo $\mathbb{N}$ a mesma condição $4x^2 - 1 = 0$ é impossível: não existe nenhum número natural x que verifique tal condição. Por sua vez a condição $2x > 1$ é universal em $\mathbb{N}$ (o dobro dum número natural é *sempre* maior que 1), mas não é universal em $\mathbb{R}$ (não é verificada para $x = \frac{1}{2}$ ou para $x < \frac{1}{2}$).

Analogamente, a propriedade 'x respira por guelras' é universal no conjunto dos peixes, mas impossível no conjunto dos mamíferos.

Assim, como se vê, a aplicação dos adjectivos 'universal' e 'possível' depende geralmente do universo adoptado. *Note-se*, porém, que a condição $x = x$ é *universal, e portanto a condição* $x \neq x$ *é impossível, qualquer que seja o universo considerado* (em virtude do AXIOMA LÓGICO DA IDENTIDADE).

Estas considerações estendem-se obviamente a expressões com mais de uma variável. Assim, a condição $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ é universal em $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{N}$); a condição $2x + y = 1$ é possível em $\mathbb{R}$, mas impossível em $\mathbb{N}$, etc.

Portanto, dum modo geral, uma condição diz-se *universal* ou diz-se *impossível,* conforme dá sempre origem a uma proposição verdadeira ou dá sempre origem a uma proposição falsa, quando as variáveis são substituídas por constantes. Diz-se *possível,* quando não é impossível.

21. **Equivalência formal. Princípios lógicos de equivalência.** Consideremos em $\mathcal{H}$ as duas expressões designatórias:

pai da mãe de x , avô materno de x

Pela própria *definição* do termo 'avô materno', estas expressões fornecem designações equivalentes, todas as vezes que a *variável* x é substituída por uma *constante,* isto é, pelo nome duma pessoa qualquer. Exprime-se este facto, dizendo que as expressões são *formalmente equivalentes* e escrevendo entre ambas o sinal $\equiv$, que se pode ler 'é sempre igual a' ou 'é o mesmo que'.

Assim:

pai da mãe de x $\equiv$ avô materno de x

Analogamente, é sabido que as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$ no universo $\mathbb{R}$, tomam sempre o mesmo valor, quaisquer que sejam os valores atribuídos a x e y. Por outras palavras, a expressão:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

é uma condição universal. Diremos, por isso, que as expressões

$(x + y)^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$ são formalmente equivalentes e, para o indicar, escreveremos:

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$

Mas, note-se que esta fórmula é uma *proposição,* isto é, uma afirmação (verdadeira), ao contrário da anterior que é uma *condição,* embora universal.

Consideremos agora em $\mathcal{H}$ as expressões proposicionais:

x é filho ou filha de y , y é pai ou mãe de x

É óbvio que, quaisquer que sejam as pessoas *x* e *y*, estas expressões dão sempre lugar a proposições equivalentes, isto é, ambas verdadeiras ou ambas falsas. Exprime-se este facto, dizendo que as duas condições são *formalmente equivalentes* e escrevendo entre ambas o sinal $\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}$ que se lê 'equivale formalmente a'. Assim:

x é filho ou filha de y $\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}$ y é pai ou mãe de x

Portanto, duas condições dizem-se *formalmente equivalentes,* num dado universo, quando tomam o mesmo valor lógico, em toda a concretização das variáveis.

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{N}$:

x é múltiplo de 15 $\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}$ x é múltiplo de 3 e de 5

II. No universo $\mathbb{R}$:

$$2x < y \underset{\cdot}{\Leftrightarrow} 2x - y < 0$$

III. No universo dos triângulos:

X é isósceles $\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}$ X tem dois ângulos iguais

IV. No universo $\mathcal{H}$:

$$\text{A é daltónico} \underset{\cdot}{\Leftrightarrow} \text{A não distingue as cores}$$

Muitas vezes, quando não houver perigo de confusão, diremos apenas 'equivalente' em vez de 'formalmente equivalente' quer se trate de expressões designatórias, quer se trate de expressões proposicionais. Nas mesmas circunstâncias, podemos usar os sinais $=$ e $\Leftrightarrow$, em vez dos sinais $\equiv$ e $\underset{\cdot}{\Leftrightarrow}$. Aliás, a equivalência material pode considerar-se como caso particular da equivalência formal.

Observemos ainda que a equivalência de equações e inequações é também um caso particular da equivalência formal.

São do uso corrente os seguintes princípios lógicos de equivalência (*regras de substituição*):

1.° PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA. *Quando numa expressão, composta de várias expressões, substituímos uma destas por outra equivalente, obtemos ainda uma expressão equivalente à primeira.*

Este princípio, aliás evidente, aplica-se tanto a expressões designatórias como a expressões proposicionais, com ou sem variáveis. Por exemplo, se na proposição:

'O Sena atravessa Paris'

substituirmos 'Paris' pela expressão equivalente 'a capital de França', obtemos uma proposição equivalente; se na inequação $x^2 - 1 < 0$ substituirmos a expressão $x^2 - 1$ pela expressão equivalente $(x - 1)(x + 1)$ obtemos uma inequação equivalente, etc., etc.

2.° PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA. *Quando, em duas expressões equivalentes entre si, substituirmos uma variável por qualquer outra expressão designatória, obtemos ainda duas expressões equivalentes entre si.*

Entende-se, é claro, que a substituição é lícita no universo considerado e que a expressão designatória pode em particular ser uma constante. Por exemplo, tem-se:

$$a = b + c \Leftrightarrow a - c = b$$

Substituindo sucessivamente as variáveis *a, b* e *c* pelas expressões 5x, 2 e 3x, vem:

$$5x = 2 + 3x \Leftrightarrow 5x - 3x = 2$$

22. **Cálculo proposicional com variáveis.** As operações lógicas que definimos para proposições (ou para valores lógicos) estendem-se naturalmente a expressões proposicionais com variáveis.

a) *Conjunção.* Por exemplo, se ligarmos as duas expressões 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal $\wedge$ (que se lê 'e'), obtemos uma nova expressão proposicional:

$$X \text{ é médico } \wedge X \text{ é professor}$$

que é verificada por todos os indivíduos que verificam ao mesmo tempo as *duas* condições dadas, e só por esses indivíduos. É natural chamar à condição assim obtida *conjunção* das duas primeiras.

Analogamente, a condição $x > 3 \wedge x < 7$ é a conjunção das condições $x > 3$ e $x < 7$. Assim, fazendo $x = 5$, $x = \pi$, $x = 3$, $x = -1$, $x = 7{,}35$, etc., virá sucessivamente:

x	$x > 3$	$x < 7$	$x > 3 \wedge x < 7$
5	V	V	V
π	V	V	V
3	F	V	F
-1	F	V	F
7,35	V	F	F
...	...	...	...

Note-se que a conjunção $x > 3 \wedge x < 7$ costuma escrever-se $3 < x < 7$. Mais geralmente, sendo *a, b* números reais quaisquer, tem-se por definição:

$$a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$$

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$$3 \text{ divide } x \wedge 5 \text{ divide } x \Leftrightarrow 15 \text{ divide } x$$
$$x \text{ divide } y \wedge y \text{ divide } x \Leftrightarrow x = y$$

II. Em $\mathbb{R}$:

$$x + 2y = 5 \wedge 2x - 5y = 1 \Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 1$$

o que também se pode escrever:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

III. No universo das figuras geométricas:

X é um rectângulo $\wedge$ X é um losango $\Leftrightarrow$ X é um quadrado

b) *Disjunção.* Se ligarmos agora as condições 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal $\vee$ (que se lê 'ou'), obtemos a nova condição:

X é médico $\vee$ X é professor,

que é verificada por todo o indivíduo X que verifique *uma pelo menos* das condições dadas e só por esses indivíduos. É natural chamar à nova condição assim obtida *disjunção* das duas primeiras.

Analogamente, a condição $x < 3 \lor x > 7$, é a disjunção das condições $x < 3$ e $x > 7$. Assim, para $x = 0; -1; 3; 5; \pi; 7{,}35, \ldots$ virá sucessivamente:

x	$x < 3$	$x > 7$	$x < 3 \lor x < 7$
0	V	F	V
-1	V	F	V
2	V	F	V
5	F	F	F
π	F	F	F
7,35	F	V	V

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$$x \text{ divide } 6 \lor x \text{ divide } 10 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$$

II. Em $\mathbb{R}$:

$$x = 3 \lor x = -5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = 3 \lor x < 3 \Leftrightarrow x \leqslant 3$$

Dum modo geral, dados dois números reais x, y, escreve-se, *por definição:*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \lor x = y$$

Também se escreve, por definição:

$$x \leqslant y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \land y \leqslant z$$

ou seja $x \leqslant y \leqslant z \Leftrightarrow (x < y \lor x = y) \land (y < z \lor y = z)$

Análogos significados para $x \leqslant y < z$, $x < y \leqslant z$, $x > y \leqslant z$, etc.

c) *Negação.* Se antepusermos à condição 'X tem menos de 18 anos' o sinal $\sim$ (que se lê 'não é verdade que') obtém-se a nova condição:

$$\sim \text{X tem menos de 18 anos}$$

que é natural chamar *negação* da primeira, pois é verificada precisamente pelos indivíduos que *não* verificam aquela. É claro que a negação de 'X tem menos de 18 anos' é equivalente à condição:

'X tem 18 anos $\vee$ X tem mais de 18 anos'

ou, abreviadamente: 'X tem idade igual ou superior a 18 anos'.

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$: $\sim$ X é par $\Leftrightarrow$ X é ímpar

II. Em $\mathbb{R}$: $\sim (x < y) \Leftrightarrow x \geqslant y$, ou seja

$$\sim x < y \Leftrightarrow x = y \vee x \geqslant y$$

Por sua vez: $\sim x = y \Leftrightarrow x < y \vee x > y$

III. Em qualquer universo: $\sim (x = y) \Leftrightarrow x \neq y$

A negação de uma condição (ou propriedade) também se diz *contrária* ou *complementar* dessa propriedade.

Duas condições dizem-se *incompatíveis* se a sua conjunção é impossível; dizem-se *compatíveis*, no caso contrário. É claro que duas condições contrárias são incompatíveis, mas duas condições podem ser incompatíveis sem serem contrárias. Por exemplo, as condições 'casado' e 'solteiro' são incompatíveis mas não contrárias, visto que o contrário de 'casado' é 'solteiro, viúvo ou divorciado'. Duas condições serão contrárias (ou complementares) se são incompatíveis e se, além disso, a sua disjunção é condição universal.

Note-se ainda que:

A negação de uma condição universal é uma condição impossível e a negação de uma condição impossível é uma condição universal.

Por exemplo, a negação da condição $x = x$ (universal) é a condição $x \neq x$ (impossível). No entanto, como já observámos, o contrário de 'impossível' é 'possível' e não 'universal'; com efeito, *negar que uma condição é impossível* não é o mesmo que *negar essa condição:* equivale a *afirmar que a condição é possível.*

23. **Propriedades das operações lógicas sobre condições.** É fácil ver que as propriedades das operações sobre valores lógicos se transmitem automaticamente às operações sobre condições. Assim, a conjunção e disjunção continuam a ser *comutativas* e *associativas,* e cada uma delas *distributiva* em relação à outra. Mantém-se a *propriedade da dupla negação,* assim como *as primeiras leis de De Morgan.*

Quanto às propriedades:

$$a \wedge V = a, \quad a \wedge F = F, \quad a \vee V = V, \quad a \vee F = a,$$

válidas quando $a = V$ ou $a = F$, assumem agora novo aspecto. Assim:

I. *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é equivalente à primeira.*

II. *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição impossível é ainda impossível.*

Destas deduzem-se mais duas propriedades por DUALIDADE LÓGICA, substituindo 'conjunção' por 'disjunção', 'universal' por 'impossível' e 'impossível' por 'universal'.

Consideremos, por exemplo, em $\mathbb{R}$ os sistemas:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 > x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 = x \end{cases}$$

que se podem escrever, respectivamente:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x \quad , \quad 2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x$$

Como a condição $x + 1 > x$ é universal e a condição $x + 1 = x$ é impossível, virá:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x \Leftrightarrow 2x - 1 > 3$$
$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x \Leftrightarrow x + 1 = x \text{ (impossível)}$$

Analogamente:

$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 > x \Leftrightarrow x + 1 > x \text{ (universal)}$$
$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 = x \Leftrightarrow 2x - 1 > 3$$

CONVENÇÃO. Dadas várias condições $c_1, c_2, c_3, \ldots$, escreveremos $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3$, em vez de $(c_1 \wedge c_2) \wedge c_3$, $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge c_4$ em vez de $(c_1 \wedge c_2 \wedge c_3) \wedge c_4$, etc. e analogamente para a disjunção.

24. **Quantificadores.** Além das operações lógicas atrás consideradas, apresentam-se ainda duas operações de importância capital, que se aplicam unicamente a expressões proposicionais com variáveis. Estas duas operações desempenham um papel correspondente ao dos pronomes 'todo' e 'algum' da linguagem corrente.

a) *Quantificador universal.* Consideremos a condição 'x é mortal', que já sabemos ser *universal* em $\mathcal{H}$. Em linguagem comum exprime-se este facto dizendo 'Todo o homem é mortal'. Pois bem, no simbolismo da lógica matemática indica-se que uma condição em x é universal, escrevendo antes da condição o símbolo $\forall$ x, seguido duma vírgula, ou de dois pontos; este símbolo lê-se '*qualquer que seja* x'. Por exemplo, a expressão

$$\forall x, \quad x \text{ é mortal}$$

lê-se '*Qualquer que seja* x, *x é mortal*', o que é uma proposição verdadeira no universo $\mathcal{H}$ ou, mais geralmente, no universo dos seres vivos.

Se a variável da expressão for uma outra, em vez da letra x, escreve-se o mesmo símbolo $\forall$ seguido dessa variável. Assim, a expressão:

$$\forall \text{ Fulano, Fulano é mortal}$$

lê-se 'Qualquer que seja Fulano, Fulano é mortal', o que significa *exactamente o mesmo* que a proposição anterior. Analogamente, as expressões:

$\forall x, 2x > x$ (Qualquer que seja x, $2\,x > x$)

$\forall a, 2a > a$ (Qualquer que seja *a*, $2a > a$)

exprimem ambas o mesmo facto: '*O dobro dum número é sempre maior que esse número*', o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$, mas falso em $\mathbb{R}$ *(p. ex.* $2.0 = 0$, $2.(-3) < -3$, *etc.)*.

Deste modo, dada uma condição numa variável, o símbolo $\forall$ referido a essa variável representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, verdadeira ou falsa, conforme a condição é universal ou não. A esta operação dá-se o nome de *quantificação universal* e ao respectivo símbolo o de *quantificador universal.*

Muitas vezes (quando não há perigo de confusão), o quantificador é escrito depois e não antes da expressão quantificada. Por exemplo, tem-se em $\mathbb{R}$:

$$a^2 - 1 = (a + 1)\,(a - 1), \forall a$$

Aqui o símbolo $\forall a$ pode ler-se 'qualquer que seja a' ou 'para todo o valor de a' ou simplesmente 'para todo o a'.

Quando se apresenta uma condição com mais de uma variável e se quer afirmar que essa condição é universal, usa-se o mesmo símbolo $\forall$ seguido dessas variáveis (usando vírgulas a separar). Assim, a expressão:

$$(a+b)^2 > a^2 + b^2 \quad , \quad \forall a, b$$

lê-se: '$(a + b)^2 > a^2 + b^2$, *quaisquer que sejam* a, b', o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$ e falso em $\mathbb{R}$. Analogamente:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad , \quad \forall x, y$$

o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$. Algumas vezes, para evitar confusões, o domínio das variáveis é devidamente especificado. Assim:

$$(m + n)^2 > m^2 + n^2 \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$
$$(x + 1)^2 > x^2 + 1 \quad , \quad \forall x > 0$$

Aqui '$\forall m, n \in \mathbb{N}$' lê-se 'quaisquer que sejam m, n pertencentes a $\mathbb{N}$' e '$\forall x > 0$' lê-se 'qualquer que seja $x > 0$' ou ainda 'para todo o $x > 0$'.

Outras vezes ainda, para condensar a escrita, escrevem-se as variáveis em índice do símbolo $\forall$. Exemplo:

$$\forall_{x > 0}\ 0\ 2x > x \qquad \text{('Para todo o } x > 0\text{, tem-se } 2x > x\text{')}$$

b) *Quantificador de existência.* Para indicar que uma condição numa variável é possível, escreve-se antes da condição o símbolo $\exists$ seguido da variável e de uma vírgula ou dois pontos (ou com essa variável em índice). Suponhamos que a variável é a letra x; então o símbolo $\exists x$ lê-se 'existe pelo menos um x tal que' (e analogamente para outras variáveis). Por exemplo, a expressão:

$$\exists\, X,\ X \text{ vive na Lua}$$

lê-se 'Existe pelo menos um X tal que X vive na Lua' e é uma proposição falsa em $\mathcal{H}$, que também se pode traduzir por 'Algum ser vive na Lua'. Analogamente a expressão:

$$\exists a,\ a > a^2$$

lê-se 'Existe pelo menos um *a* tal que $a > a^2$, e é uma proposição verdadeira em $\mathbb{R}$ ('Algum número é superior ao seu quadrado'), mas falsa em $\mathbb{N}$ ('Nenhum número é superior ao seu quadrado').

Deste modo, dada uma condição sobre uma variável, o símbolo $\exists$ (referido a essa variável) representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, que é verdadeira ou falsa, conforme a condição é possível ou impossível. Essa operação é chamada *quantificação existencial* e o respectivo símbolo, *quantificador de existência*.

Para este símbolo, adoptam-se ainda convenções análogas às que indicámos para o quantificador universal, com esta única diferença. Nunca poderá ser escrito após a condição quantificada. Exemplos:

$$\exists\, A, B,\ A \text{ é mais novo que } B \wedge B \text{ é aluno de } A$$

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \ x \neq 3 \wedge x^2 = 9$$

25. **Propriedades dos quantificadores. Novos tipos de silogismo.** Vimos como os quantificadores transformam condições em *proposições*. Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se *aparente* ou *muda*; caso contrário, a variável diz-se *livre*.

Por exemplo, a letra x é variável livre nas condições:

$$2x = 3 \text{ (equação)}, \; x + 1 > x \text{ (inequação)}$$

mas é variável aparente nas proposições:

$$\exists_x, \; 2x = 3 \quad , \quad \forall_x, \; x + 1 > x$$

É muito frequente em matemática o uso da seguinte regra: PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO DAS VARIÁVEIS APARENTES. *Sempre que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figura na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.*

Por exemplo, as proposições:

'∀ Fulano, Fulano é mortal' , '∀x, x é mortal'

significam exactamente a mesma coisa. O mesmo para as proposições '$\exists_{x,y}\; x < y$' e '$\exists_{a,b}\; a < b$'.

Por outro lado, é evidente que uma condição universal dá sempre lugar a uma condição universal ou a uma proposição verdadeira, quando se substituem as suas variáveis, no todo *ou em parte,* por outras variáveis, ou por constantes (1). Daqui resultam vários tipos de silogismo, com uma só premissa, de que vamos dar alguns exemplos:

I. $\forall a, \; (\sqrt{a})^2 = a$. Logo $(\sqrt{2})^2 = 2$

II. $\forall_{x,y}\; x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y)$. Logo $\forall_t\; t^2 - 1 = (t+1)\,(t-1)$

III. $\forall a, b \in \mathbb{N}, \; a + b > a$. Logo $\forall a, b \in \mathbb{N}, \; b + a > b$

---

(1) O *2.º princípio de equivalência* (n.º 21) é apenas um caso particular deste facto.

Também a definição do quantificador $\exists$ dá lugar a silogismos, tais como:

IV. $0{,}85^2 < 0{,}85$. Logo $\exists\, x,\ x^2 < x$

V. $3^2 = 9 \wedge (-3)^2 = 9 \wedge 3 \neq -3$

$\therefore\ \exists_{x,y}\ x^2 = 9 \wedge y^2 = 9 \wedge x \neq y$

26. **Segundas leis de De Morgan.** É claro que os quantificadores podem ser precedidos do símbolo de negação. Por exemplo, no universo $\mathcal{H}$, as expressões:

$$\forall_x\ x \text{ fala inglês}, \quad \sim\forall_x \text{ fala inglês}$$

$$\exists_x\ x \text{ foi à Lua}, \quad \sim\exists_x \text{ foi à Lua}$$

são proposições que, em linguagem comum, se podem enunciar, respectivamente: 'Toda a pessoa fala inglês', 'Nem toda a pessoa fala inglês', 'Alguém foi à Lua', 'Ninguém foi à Lua'.

São ainda evidentes as equivalências:

$$\sim \forall_x\ x \text{ fala inglês} \Leftrightarrow \exists_x \sim x \text{ fala inglês}$$

$$\sim \exists_x \text{ foi à Lua} \Leftrightarrow \forall_x \sim x \text{ foi à Lua}$$

É claro que estas são *independentes* das condições consideradas, isto é:

A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de negação) e vice-versa; ou ainda em símbolos:

$$\sim \forall_x = \exists_x \sim, \qquad \sim \exists_x = \forall_x \sim$$

Estas duas propriedades são conhecidas por *segundas leis de De Morgan*. Outros exemplos:

A negação de 'Todo o aluno desta turma é bem comportado' equivale a 'Existe pelo menos um aluno desta turma que não é bem comportado'; a negação de 'Existe pelo menos um aluno desta turma que ficará reprovado' equivale a 'Qualquer que seja o aluno desta turma, ele não ficará reprovado'.

OBSERVAÇÃO. As segundas leis de De Morgan implicam um prolongamento do PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA, revelando uma importante analogia entre os quantificadores e as operações de conjunção e disjunção. Para compreender melhor esta analogia, basta notar que, num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas e o quantificador existencial a disjunções sucessivas. Por exemplo, no universo $\{3, 5, 7\}$, a proposição '$\forall_x$ x é primo' equivale a '3 é primo $\wedge$ 5 é primo $\wedge$ 7 é primo'. Por sua vez, no universo $\{$Marte, Venus, Sirius$\}$, a proposição $\exists_x$ x é uma estrela' equivale a 'Marte é uma estrela $\vee$ Venus é uma estrela $\vee$ Sirius é uma estrela'. Esta circunstância leva alguns autores a adoptarem os símbolos $\bigwedge_x$ e $\bigvee_x$, respectivamente, como quantificadores universal e existencial, o que têm ainda a vantagem de sugerir melhor a dualidade lógica:

$$\sim \bigwedge_x = \bigvee_x \sim \quad , \quad \sim \bigvee_x = \bigwedge_x \sim$$

27. **Quantificação parcial e quantificação múltipla.** Consideremos, por exemplo, a expressão:

$$\exists_x \text{ x é filho de y}$$

Esta expressão, que se pode ler 'Existe pelo menos um indivíduo x que é filho de y', não é uma proposição, visto que o seu valor lógico, embora não dependa de x (*variável aparente)*, depende ainda de y *(variável livre)*. É, pois, uma *condição* em y, que também se pode exprimir escrevendo: 'y tem pelo menos um filho', isto é:

$$\exists_x \text{ x é filho de y} \Leftrightarrow \text{y tem pelo menos um filho}$$

Analogamente, no universo $\mathbb{N}$, a expressão:

$$\exists_x \ ax = b$$

é uma condição em a e b, equivalente a dizer 'a divide b'. É esta, aliás, a definição usual do termo 'divide':

$$a \text{ divide } b \Leftrightarrow \exists_x \ ax = b$$

Assim, em geral, dada uma condição com mais de uma variável, a aplicação dum quantificador referido a uma dessas variáveis, transforma a *condição* dada numa outra *condição com menos uma variável livre.*

Consideremos agora a condição '$\exists_y$ y é pai de x'. Supondo que esta condição é universal (em $\mathcal{H}$), podemos escrever (¹):

$$\forall_x \exists_y \text{ y é pai de x},$$

o que também poderia escrever-se:

$\forall$ Fulano, $\exists$ Beltrano: Beltrano é pai de Fulano

Outro exemplo ainda:

$$\forall_x \exists_y \forall_z \text{ z é pai de x} \vee z \neq y$$

(¹) Aqui 'existe' é tomado em sentido intemporal, incluindo, portanto, as pessoas existentes no passado.

isto é:

$\forall$ Fulano, $\exists$ Beltrano, $\forall$ Sicrano:

Sicrano é pai de Fulano $\vee$ Sicrano não é Beltrano

Analogamente, no universo $\mathbb{N}$:

$$\forall_x \exists_y \; y > x, \qquad \exists_x \forall_y \; y \geqslant x, \text{ etc.}$$

Por sua vez, tem-se em $\mathbb{R}$,

$$\forall_x \forall_y \; (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

mas, em vez de $\forall_x \forall_y$, pode escrever-se simplesmente $\forall_{x,y}$, como se indicou atrás.

Assim, a aplicação sucessiva de quantificadores acaba por transformar uma *condição com mais de uma variável* numa *proposição*.

Note-se que, em matemática, se apresentam a cada passo proposições em que intervêm vários tipos de quantificadores. Por exemplo, em geometria:

Quaisquer que sejam a recta r *e o ponto* P, *existe pelo menos uma recta* s *que passa por* P *e é perpendicular a* r.

No universo $\mathbb{R}$: $\forall_x \exists_y \; y^3 = x$, etc.

Note-se, ainda, o polissilogismo em $\mathbb{R}$:

$$\forall_x \, x^2 \neq -1. \qquad \text{Logo} \sim \exists_x \, x^2 = -1.$$

$$\text{Logo } \exists_y \sim \exists_x \, x^2 = y. \qquad \text{Logo} \sim \forall_y \exists_x \, x^2 = y$$

Foram aplicadas aqui duas vezes as leis de De Morgan.

Outro exemplo: negar a proposição 'Para todo o aluno desta turma existe pelo menos uma disciplina em que terá nota inferior a 12' equivale a afirmar 'Existe pelo menos um aluno desta turma que em toda a disciplina terá nota igual ou superior a 12'.

28. **Implicação formal.** Consideremos, no universo das povoações portuguesas, as duas seguintes condições:

x é cidade , x tem câmara municipal

Ligando-as pelo sinal de *implicação material*, obtém-se a nova condição em x:

x é cidade $\Rightarrow$ x tem câmara municipal

Mas, desde logo se vê que esta condição é universal. Por exemplo, exprimindo as duas condições dadas, respectivamente, pelos símbolos p(x) e q(x), tem-se:

x	p(x)	q(x)	p(x) $\Rightarrow$ q(x)
Lisboa	V	V	V
Bragança	V	V	V
Moura	F	V	V
Sintra	F	V	V
Carcavelos	F	F	V
Luso	F	F	V

E assim por diante: *qualquer que seja a povoação* x, *a condição* p(x) $\Rightarrow$ q(x) *dá origem a uma proposição verdadeira.* Podemos, portanto, escrever:

$$\forall_x \; p(x) \Rightarrow q(x)$$

Para simplificar a escrita, em casos como este, indica-se o quantificador universal, escrevendo simplesmente a variável x sob o sinal de implicação:

$$p(x) \underset{x}{\Rightarrow} q(x)$$

O sinal composto $\underset{x}{\Rightarrow}$ lê-se '*implica, qualquer que seja* x'. É claro que estas convenções se aplicam independentemente das condições que estejam nos lugares de p(x) e q(x) e da variável utilizada. Assim, as expressões:

$$\forall A\text{: A nasceu em Portugal} \Rightarrow \text{A é português}$$

$$\text{X é daltónico} \underset{X}{\Rightarrow} \text{X não pode conduzir automóvel}$$

$$\text{y é peixe} \underset{y}{\Rightarrow} \text{y respira por guelras}$$

são proposições que se podem ler, respectivamente: 'Qualquer que seja A, se A nasceu em Portugal, A é português' (ou ainda: 'Todo o que nasceu em Portugal é português'), 'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel, qualquer que seja X', 'Se y é peixe, então, qualquer que seja y, y respira por guelras'.

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$$n \text{ é múltiplo de } 10 \underset{n}{\Rightarrow} n \text{ é múltiplo de } 5$$

II. Em $\mathbb{R}$: $x > 7 \underset{x}{\Rightarrow} x > 3$

$$x - 2 = 0 \underset{x}{\Rightarrow} x^2 - 3x + 2 = 0$$

III. No universo das figuras geométricas:

$$\text{F é um quadrado} \underset{F}{\Rightarrow} \text{F é um rectângulo.}$$

Consideremos, agora, a expressão (em $\mathbb{R}$):

$$x > a \underset{x}{\Rightarrow} x > b$$

É verdadeira ou falsa? É claro que isso depende dos valores de *a* e de b: é verdadeira, se $a \geqslant b$, falsa se $a < b$. Trata-se pois de uma *condição* em a e b, equivalente à condição $a \geqslant b$, isto é:

$$x > a \underset{x}{\Rightarrow} x > b \quad \text{se e só se} \quad a \geqslant b$$

Seja agora em $\mathcal{H}$ a condição:

$$x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \Rightarrow x \text{ é sobrinho de } z$$

Pela própria definição de 'sobrinho', esta é uma condição universal, o que se pode exprimir antepondo o símbolo $\forall_{x,y,z}$ a essa condição. Porém, tal como no caso duma só variável, podemos agora indicar a quantificação universal, escrevendo as variáveis sob o sinal de implicação:

$$x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \underset{x,y,z}{\Rightarrow} x \text{ é sobrinho de } z$$

Neste caso, como nos primeiros (excepto o anterior), todas as variáveis que intervêm nas expressões figuram sob o sinal de implicação. Para simplificar ainda mais a escrita, em casos tais, substituiremos as variáveis por um ponto, sob o sinal $\Rightarrow$, e diremos que a condição à esquerda do sinal *implica formalmente* a condição à direita. Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma condição implica formalmente outra, quando toda a substituição das variáveis que verifica a primeira verifica igualmente a segunda. A primeira condição diz-se antecedente e a segunda consequente.*

O sinal $\underset{\cdot}{\Rightarrow}$ (de implicação formal) pode ler-se 'implica formalmente', 'implica necessariamente' ou ainda 'Se ... então necessariamente'. Por exemplo, a implicação formal:

$$X \text{ é homem} \underset{\cdot}{\Rightarrow} X \text{ é mortal}$$

pode ler-se: 'Se X é homem, então necessariamente X é mortal'. Analogamente para a implicação:

$$x \text{ divide } y \wedge y \text{ divide } z \underset{\cdot}{\Rightarrow} x \text{ divide } z$$

Em geral, quando se diz que uma dada condição implica outra, subentende-se que a implicação é formal. Assim, omitiremos o ponto sob o sinal $\Rightarrow$*, quando estiver subentendido sue se trata duma afirmação e portanto duma implicação formal. Neste caso, o sinal* $\Rightarrow$ *poderá ler-se 'implica' ou 'se ... então' ou simplesmente 'se' antes da condição antecedente.*

Aliás, é de notar que a implicação formal corresponde sempre à ideia usual de implicação, o que está de acordo com o que já foi dito para a implicação material, *pois tudo se passa como se ignorássemos os valores lógicos das condições:* as variáveis também podem ser consideradas como *incógnitas,* isto é, como designação de algo que ainda não é conhecido.

Note-se porém que a implicação *não é formal,* quando alguma, mas não todas as variáveis que intervêm nas condições, aparece sob o sinal $\Rightarrow$. É o que se observa, por exemplo, na expressão, atrás considerada, $x > a \underset{x}{\Rightarrow} x > b$.

29. **Propriedades da implicação formal. Novos tipos de silogismo.** É fácil ver que várias propriedades de implicação material se transmitem automaticamente à implicação formal. Entre essas, indicaremos a *transitividade* e a *lei de conversão:*

$$\text{Se } A \Rightarrow B \text{ e } B \Rightarrow C, \text{ então } A \Rightarrow C$$

$$\text{Se } A \Rightarrow B, \text{ então } \sim B \Rightarrow \sim A$$

Por exemplo, a implicação formal:

$$x \text{ é uma criança} \Rightarrow x \text{ não conduz automóvel}$$

equivale à seguinte:

x conduz automóvel $\Rightarrow$ x não é uma criança

Analogamente, partindo da proposição em $\mathbb{R}$:

$$a\,b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0,$$

(que se pode enunciar 'Se o produto de dois números é zero, um pelo menos dos números é zero'), podemos concluir, pela lei de conversão e pelas primeiras leis de De Morgan:

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a\,b \neq 0$$

Por sua vez, a transitividade de implicação formal, tal como a da implicação material dá origem a um tipo muito frequente do silogismo. Exemplo:

'Se X confunde o azul com o verde, X é daltónico'.

'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel. Logo, se X confunde o azul com o verde, X não pode conduzir automóvel'.

Da própria definição de implicação formal, resulta um dos tipos mais frequentes de silogismo, a que podemos chamar *silogismo condicional com variáveis*. Exemplo: 'Se x é um planeta, x não emite luz. Ora Marte é um planeta. Logo Marte não emite luz'.

Por outro lado, recordando como a implicação material se exprime em termos de disjunção e negação, é fácil ver que:

$$p(x) \underset{x}{\Rightarrow} q(x) \text{ equivale a } \forall_x\, q(x) \vee \sim p(x)$$

Por exemplo, a proposição 'x é peixe $\underset{x}{\Rightarrow}$ x tem guelras' equivale a dizer '$\forall_x$, ou x tem guelras ou x não é peixe'.

O facto anterior e as leis de De Morgan mostram-nos ainda que negar a implicação formal $p(x) \underset{x}{\Rightarrow} q(x)$ equivale a afirmar:

$$\exists_x \; p(x) \wedge \sim q(x)$$

Por exemplo, negar 'x é português $\underset{x}{\Rightarrow}$ x nasceu em Portugal' equivale a afirmar:

$$\exists x, \text{ x é português} \wedge \text{x não nasceu em Portugal.}$$

É fácil ainda reconhecer que:

I. *Uma condição impossível implica qualquer condição.*

II. *Qualquer condição implica uma condição universal.*

III. *Se uma condição implica outra, a segunda é possível se a primeira o for e a primeira é impossível se a segunda o for.*

Por exemplo, no universo $\mathbb{R}$, a condição $x^2 = -1$ é impossível e portanto implica qualquer outra, por exemplo a condição $x^6 = -1$ (impossível), a condição $x + 1 = x$ (impossível), etc. Mas havemos de ver que, no universo dos números chamados *complexos*, a condição $x^2 = -1$ já é possível e implica ainda $x^6 = -1$, donde o silogismo:

$$\begin{array}{l} x^2 = -1 \Rightarrow x^6 = -1 \\ \exists x, \; x^2 = -1 \\ \hline \therefore \; \exists x, \; x^6 = -1 \end{array}$$

Mas, note-se que, no novo universo, a condição $x^2 = -1$ (possível) já não implica $x + 1 = x$ (impossível).

Outro exemplo, *na geometria de Euclides:*

'Todo o triângulo birrectângulo tem dois lados paralelos.
Mas não existem triângulos com dois lados paralelos.
Logo não existem triângulos birrectângulos'.

30. **Equivalência formal; 'condição necessária' e 'condição suficiente'. Definições lógicas.** Quando uma condição implica formalmente outra, também se diz que a primeira é *condição suficiente* para que se verifique a segunda ou ainda que a segunda é *condição necessária* para que se verifique a primeira. Por exemplo, a implicação formal:

'Se x é peixe , x tem guelras'

pode exprimir-se dizendo 'Ser peixe é condição suficiente para ter guelras' ou 'Ter guelras é condição necessária para ser peixe'. Mas não é verdade que:

'Se x tem guelras , x é peixe'

isto é: 'Ter guelras não é condição suficiente para ser peixe' ou 'Ser peixe não é condição necessária para ter guelras'.

Dadas duas condições A e B, pode acontecer que se tenha ao mesmo tempo $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$. É claro que então (e só então) A e B são formalmente equivalentes, isto é:

$$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A \quad \text{sse} \quad A \Leftrightarrow B$$

Neste caso, podemos dizer que A é uma *condição necessária e suficiente* para que se verifique B. Por exemplo, no universo dos triângulos:

X tem os lados iguais $\Leftrightarrow$ X tem os ângulos iguais

isto é: 'Ter os lados iguais é condição necessária e suficiente para ter os ângulos iguais'.

Note-se que muitas proposições da matemática (axiomas ou teoremas), assim como muitas leis das ciências físico-naturais, se apresentam sob a forma duma implicação formal, $H \Rightarrow T$. Neste caso, a condição antecedente, H, é chamada *hipótese*, enquanto a consequente, T, é chamada *tese*. Mas é claro que, segundo a regra de conversão, o *mesmo facto* pode ser expresso pela proposição equivalente $\sim T \Rightarrow \sim H$ (chamada *conversa* da primeira), em que a hipótese é $\sim T$ e a tese é $\sim H$.

Por exemplo, já vimos que o teorema em $\mathbb{R}$:

$$a\,b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

se pode traduzir no *converso*:

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a\,b \neq 0$$

Pode ainda acontecer que a proposição $T \Rightarrow B$ (chamada *recíproca* da proposição $H \Rightarrow T$) seja também verdadeira. Então é verdadeira a conjunção das duas $H \Leftrightarrow T$. É isto precisamente o que sucede no exemplo anterior:

'O produto de dois números é zero, sse um pelo menos dos números é zero'.

Ou ainda: 'O produto de dois números é diferente de zero, sse ambos os números são diferentes de zero'.

Numa teoria dedutiva as *definições de termos derivados a partir de termos primitivos* apresentam-se muitas vezes sob a forma de equivalência formal. Assim, as equivalências:

$$a \text{ divide } b \Leftrightarrow \exists_x \; ax = b$$
$$n \text{ é primo} \Leftrightarrow n \neq 1 \wedge (x \text{ divide } n \underset{x}{\Rightarrow} x = 1 \vee x = n)$$

definem os termos 'divide' e 'primo', respectivamente, a partir da noção de 'produto' e do termo 'divide' (no universo $\mathbb{N}$).

Analogamente, no universo $\mathcal{H}$, usando as expressões 'fil', 'irm' 'sobr', respectivamente como abreviaturas de 'é filho ou filha de', 'é irmão ou irmã de' e 'é sobrinho ou sobrinha de', as equivalências:

$$x \text{ irm } y \Leftrightarrow \exists_z \; x \text{ fil } z \wedge y \text{ fil } z \wedge x \neq y$$
$$x \text{ sobr } y \Leftrightarrow \exists_z \; x \text{ fil } z \wedge z \text{ irm } y$$

definem, respectivamente, o termo 'irm' a partir de 'fil' e o termo 'sobr' a partir de 'fil' e 'irm' (portanto, em última análise, a partir de 'fil').

31. Existência e unicidade. Consideremos em $\mathbb{R}$ a condição $x^2 = 9$. Visto que $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$ e $3 \neq -3$, podemos concluir:

$$\exists_{x,y}\ x^2 = 9 \wedge y^2 = 9 \wedge x \neq y$$

Pelo contrário, para a condição $x^3 = 8$ teremos em $\mathbb{R}$ as duas proposições:

$$\exists_x\ x^3 = 8, \quad x^3 = 8 \wedge y^3 = 8 \Rightarrow x = y$$

A primeira diz que *existe pelo menos um* x tal que $x^3 = 8$ $(x = 2)$: é uma afirmação de *existência.*

A segunda diz que não pode existir *mais de um* x tal que $x^3 = 8$: é uma afirmação de *unicidade.*

A conjunção das duas diz que *existe um* x *e um só tal que* $x^3 = 8$. Para indicar este facto, escreveremos:

$$\exists^1\ x,\ x^3 = 8$$

em que o símbolo $\exists^1\ x$ se lê 'Existe um e um só x tal que'.

Muitas proposições da matemática encerram afirmações de existência e unicidade. Assim, no universo $\mathbb{R}$:

$$a \neq 0 \Rightarrow \forall\, b\ ,\ \exists^1 x : ax = b.$$

CAPÍTULO II

A LÓGICA EM TERMOS DE CONJUNTOS

1. **Conjuntos definidos por condições.** Já atrás nos ocupámos da noção de conjunto e vimos que só em casos especiais (conjuntos finitos pouco numerosos) um conjunto pode ser definido pela indicação dos elementos que o constituem. Exceptuados esses casos, um conjunto é geralmente definido por meio de uma *condição* (ou *propriedade*), que é verificada por todos os elementos do conjunto *e só por esses*. Tal condição pode sempre ser expressa sob a forma duma expressão proposicional com uma variável livre. Consideremos, por exemplo, *no universo* $\mathbb{N}$, a expressão proposicional:

$$x \text{ é múltiplo de } 3 \wedge x \text{ é múltiplo de } 5$$

Ela exprime a propriedade de um número x *ser ao mesmo tempo múltiplo de* 3 *e de* 5. Verificam esta condição os números 15, 30, 45, ...; não a verificam os números 3, 6, 12, 17, 20, ... Porém, o conjunto de todos os números naturais que verificam tal condição é *infinito*. Designemos esse conjunto por 'A'. Para indicar que A é o conjunto definido pela referida condição, escreve-se simbolicamente:

$$A = \{x : x \text{ é múltiplo de } 3 \wedge x \text{ é múltiplo de } 5\}$$

o que se lê: 'A é o conjunto dos elementos x tais que: x é múltiplo de 3 $\wedge$ x é múltiplo de 5'. É claro que o mesmo conjunto pode ser definido por *qualquer condição equivalente à primeira,* por exemplo a seguinte:

x é múltiplo de 15,

visto que os números que verificam uma são exactamente os mesmos que verificam a outra. Será, portanto, também:

$$A = \{ x : x \text{ é múltiplo de } 15 \},$$

em que o símbolo $\{ x: \quad \}$ se lê ainda 'conjunto dos elementos x tais que'. É claro que neste caso a letra x é uma *variável aparente,* tal como no caso dos quantificadores.

Assim:

Duas condições equivalentes definem o mesmo conjunto. Duas condições não equivalentes definem conjuntos distintos.

Por outras palavras: *a equivalência de condições traduz-se na identidade de conjuntos.*

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{R}$, as inequações $2t - 1 > 0$ e $t > 1/2$ são *equivalentes,* isto é, *têm o mesmo conjunto de soluções.* Assim, a equivalência:

$$2t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$$

traduz-se na identidade de conjuntos:

$$\{ t : 2t - 1 > 0 \} = \{ t : t > \frac{1}{2} \}$$

II. Analogamente, tem-se:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$$

e, portanto:

$$\{ x : x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{ x : (x-1)^2 = 4 \} = \{ -1, 3 \}$$

III. As condições $x(x-2) = 0$ e $x(x+2) = 0$ não são equivalentes; definem, pois, conjuntos distintos:

$$\{ x : x(x-2) = 0 \} = \{ 0, 2 \}, \{ x : x(x+2) = 0 \} = \{ 0, -2 \}$$

IV. No universo das figuras geométricas a propriedade de ser *triângulo equilátero* equivale à propriedade de ser *triângulo equiângulo*. Quer isto dizer, portanto, que as duas propriedades definem o *mesmo conjunto de figuras*.

2. **Conjuntos com um só elemento e conjunto vazio.** Consideremos no universo $\mathbb{R}$ a condição $x + 1 > x$. Trata-se, é claro, duma *condição universal*, equivalente às condições $x = x$, $x^2 \geqslant 0$, etc. O conjunto que lhe corresponde é, portanto, o próprio universo $\mathbb{R}$, isto é:

$$\mathbb{R} = \{ x : x + 1 > x \} = \{ x : x = x \} = \ldots$$

Assim, o conjunto definido por uma condição universal é o universo.

Consideremos, agora, em $\mathbb{R}$ a equação $2x + 3 = x$. É fácil ver que *existe um número real* x *e um só* que verifica esta condição: o número -3. Somos, assim, levados a escrever:

$$\{ x : 2x + 3 = x \} = \{ -3 \}$$

e a dizer que o conjunto das soluções da equação $2x + 3 = x$ tem um único elemento ou que é um *conjunto singular*. Note-se que, na linguagem comum, a palavra 'conjunto' implica a ideia de pluralidade, isto é, um conjunto tem, por natureza, mais de um elemento.

Mas, como é sabido, a matemática necessita de uma linguagem própria, ao mesmo tempo cómoda e rigorosa, que se afasta muitas vezes da linguagem comum. É necessário, também, notar o seguinte:

Em matemática, uma coisa é um conjunto singular e outra coisa é o elemento que forma esse conjunto.

Por exemplo, uma coisa é o conjunto $\{-3\}$ e outra coisa é o número -3. Assim, poderemos escrever:

$$-3 \in \{-3\} \quad , \quad \text{mas não} \quad -3 = \{-3\}$$

Consideremos, agora, em $\mathbb{R}$ a condição $x + 1 = x$. Trata-se, como se vê, duma *condição impossível:* não existe nenhum número que a verifique, como não existe nenhum número que verifique a condição $x \neq x$, etc. Pois bem, por comodidade de linguagem, convenciona-se dizer que *o conjunto de elementos que verificam uma condição impossível é o conjunto vazio (ou o conjunto com nenhum elemento).* Trata-se, como se vê, de mais uma convenção matemática que alarga o significado usual da palavra 'conjunto'. Por exemplo, em vez de dizer que não há fósforos numa caixa, pode dizer-se que a caixa está vazia ou ainda que *o conjunto dos fósforos na caixa é vazio.*

O conjunto vazio num determinado universo costuma ser designado pelo símbolo $\varnothing$. Assim, no universo $\mathbb{R}$,

$$\{ x : x + 1 = x \} = \varnothing$$

o que significa o mesmo que: $\sim \exists_x \; x + 1 = x$

Analogamente: $\varnothing = \{ x : x \neq x \} = \{ x : x^2 < 0 \} = \ldots$

Assim, num dado universo, a toda a condição numa variável vem a corresponder um conjunto: o conjunto dos elementos que verifi-

cam essa condição. Em particular, às condições universais corresponde o universo e às condições impossíveis corresponde o conjunto vazio.

Note-se que, reciprocamente, a todo o conjunto A corresponde, pelo menos, uma condição: a condição $x \in A$.

Convém ainda notar que um conjunto definido pela indicação dos seus elementos é, na realidade, definido por uma condição disjuntiva. Por exemplo:

$$\{3, 5, 9\} = \{x : x = 3 \vee x = 5 \vee x = 9\}$$

OBSERVAÇÃO. Na linguagem comum, o universo e o conjunto vazio são designados, respectivamente, pelas palavras *tudo* (= *todas as coisas*) e *nada* (= *nenhuma coisa*). Mas, é claro, que estas palavras têm *significado relativo*, isto é, dependente do universo considerado. Assim também, na linguagem matemática, o significado de 'conjunto vazio' depende do universo de que se trata; por exemplo, uma coisa é o *conjunto vazio de números* ('nenhum número'), outra o *conjunto vazio de pessoas* ('nenhuma pessoa' ou 'ninguém'), etc.

3. **Relação de inclusão.** Consideremos a proposição:

$$x \textit{ é mamífero} \Rightarrow x \textit{ é vertebrado}$$

que se traduz em linguagem comum por:

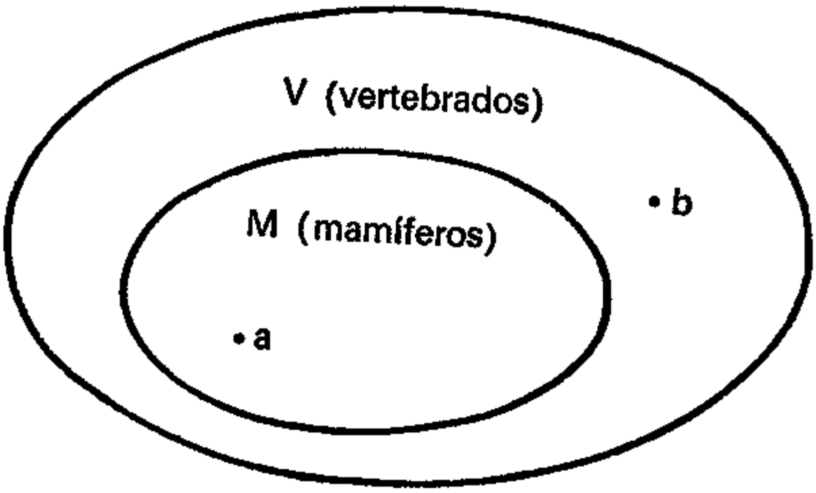
Todo o mamífero é vertebrado.

À condição 'x é mamífero' corresponde o *conjunto dos mamíferos* e à condição 'x é vertebrado' corresponde o *conjunto dos vertebrados*. Designemos, respectivamente, por M e V estes dois conjuntos (que supomos definidos). Deste modo, a anterior proposição pode escrever-se:

$$x \in M \underset{\cdot}{\Rightarrow} x \in V$$

isto é: *todo o indivíduo que pertence a M pertence também a* V. Exprime-se este facto dizendo que o conjunto M está *contido* no conjunto V e escrevendo M $\subset$ V.

Esta situação pode ser figurada por meio do diagrama junto, em que se representam o conjunto M e o conjunto V. O ponto *a* indica um elemento de M (portanto de V) e o ponto *b* indica um elemento de V que não pertence a M (na verdade existem vertebrados que não são mamíferos).



Dum modo geral, diz-se que um conjunto A está *contido* num conjunto B, quando todo o elemento de A também é elemento de B. Indica-se este facto escrevendo A $\subset$ B. Assim, tem-se por definição:

$$A \subset B \quad \text{se e só se} \quad x \in A \underset{\cdot}{\Rightarrow} x \in B$$

A relação assim definida entre conjuntos é chamada *inclusão*. Como se vê, *a inclusão entre conjuntos traduz a implicação (formal) entre condições*.

Em vez de dizer 'A está contido em B', também se pode dizer 'A é um *subconjunto* de B', ou 'A é uma *parte* de B'.

Dados dois conjuntos A e B, pode acontecer que se tenha ao mesmo tempo $A \subset B$ e $B \subset A$. Neste caso, todo o elemento de A é elemento de B e vice-versa; por outras palavras: A e B são *formados pelos mesmos elementos;* são, pois, o mesmo conjunto, o que se exprime escrevendo $A = B$. Assim, tem-se:

$$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$$

Por exemplo, todo o triângulo equilátero é um tirângulo equiângulo e vice-versa. Logo, se designarmos por T_{el} o conjunto dos triângulos equiláteros e por T_{ea} o conjunto dos triângulos equiângulos, teremos, em geometria euclidiana:

$$T_{el} \subset T_{ea} \quad \text{e} \quad T_{ea} \subset T_{el}, \quad \text{portanto} \quad T_{el} = T_{ea}$$

Aliás, já tínhamos visto atrás que a identidade entre conjuntos traduz a equivalência entre condições, isto é, tem-se:

$$A = B \text{ se e só se } x \in A \underset{x}{\Leftrightarrow} x \in B$$

Se A está contido em B, mas B *não* está contido em A, diz-se que A está *contido estritamente* em B, ou ainda que é um *subconjunto estrito* ou uma *parte estrita* de B. Neste caso, escreveremos: $A \subset B \wedge A \neq B$.

Por exemplo, o conjunto dos mamíferos está contido estritamente no conjunto dos vertebrados, visto que existem vertebrados que não são mamíferos. Podemos, pois, escrever:

$$M \subset V \wedge M \neq V$$

Outro exemplo: é sabido que todo o múltiplo de 6 (p. ex. 6, 12, 18, ...) é também múltiplo de 3, mas que há múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6 (p. ex. 3, 9, 15, ...). Portanto, se designarmos por M_6 o conjunto dos múltiplos de 6 e por M_3 o conjunto dos múltiplos de 3, teremos:

$$M_6 \subset M_3 \wedge M_6 \neq M_3$$

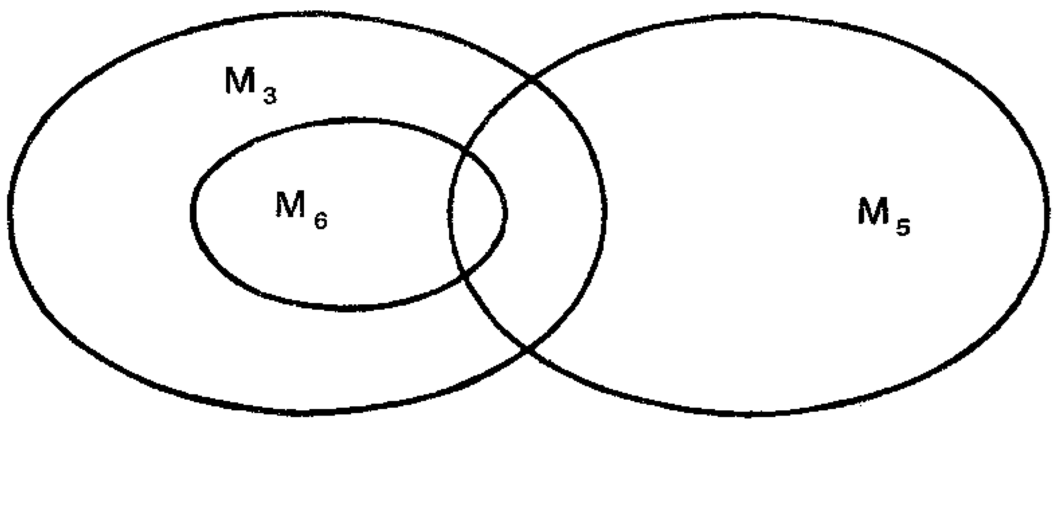
Diz-se que A contém B, quando B está contido em A. Para indicar que A contém B escreve-se $A \supset B$. Assim tem-se, por definição:

$$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$$

Por exemplo, $M_3 \supset M_6$, $T_{el} \supset T_{ea}$, etc.

Pode acontecer que, dados dois conjuntos A *e* B, *nenhum deles esteja contido no outro.* Por exemplo, se designarmos por M_5 o conjunto dos múltiplos de 5, não podemos escrever $M_5 \subset M_3$ nem $M_5 \supset M_3$, porque há múltiplos de 5 que não são múltiplos de 3 (p. ex. 5) e múltiplos de 3 que não são múltiplos de 5 (p. ex. 3).

Esta situação está figurada no diagrama junto.



4. **Subconjuntos dum conjunto finito.** Quando é dado um conjunto finito, não muito numeroso, é possível indicar todos os seus subconjuntos (ou partes). Para isso, podemos, p. ex., começar pelo

conjunto vazio, considerar depois os conjuntos com um só elemento, em seguida os conjuntos com dois elementos, e assim sucessivamente, até ao conjunto total (que podemos tomar como universo). Por exemplo, é fácil reconhecer que o conjunto de números $\{1, 2, 3, 4\}$ tem ao todo 16 subconjuntos, que são os seguintes:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$$
$$\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Tem-se, por exemplo: $\{1, 4\} \subset \{1, 3, 4\}$, mas não $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3\}$, nem $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$.

5. **Intervalos limitados em $\mathbb{R}$.** Consideremos dois números reais quaisquer, por exemplo 2 e 5. São usadas em matemática as seguintes convenções:

$[2, 5] = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

$]2, 5[= \{x : 2 < x < 5\}$ (sendo $\mathbb{R}$ o universo)

$[2, 5[= \{x : 2 \leqslant x < 5\}$

$]2, 5] = \{x : 2 < x \leqslant 5\}$

Portanto, segundo a convenção do n.º 2, $[2, 5]$ é o conjunto de todos os números reais x tais que $2 \leqslant x \leqslant 5$; e, analogamente, nos outros casos. Por exemplo, tem-se:

$$2 \in [2, 5] \quad , \quad 5 \in [2, 5] \quad , \quad 3 \in [2, 5],$$

$$3{,}27 \in [2, 5] \quad , \quad \pi \in [2, 5] \quad , \quad 4 \in]2, 5[\quad , \quad 3{,}27 \in [2, 5[\quad , \quad \text{etc.}$$

mas

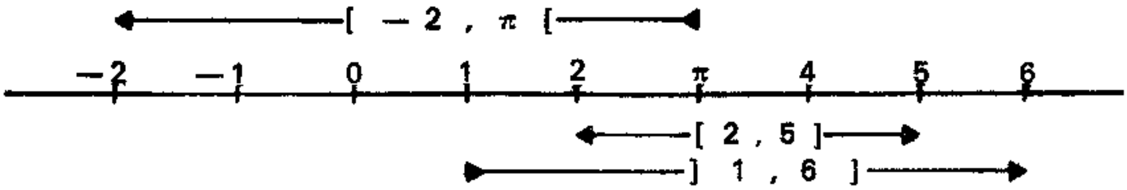
$$2 \notin]2, 5[\quad , \quad 5 \notin]2, 5[\quad , \quad 1 \notin [2, 5] \quad , \quad 1{,}99 \notin [2, 5],$$

$$0 \notin [2, 5] \quad , \quad -3 \notin [2, 5] \quad , \quad 5{,}001 \notin [2, 5] \quad , \quad \text{etc.}$$

Os conjuntos $[2, 5]$, $]2, 5[$, $[2, 5[$, $]2, 5]$ são chamados *intervalos de extremos* 2 e 5, sendo $[2, 5]$ *fechado* (porque lhe pertencem os extremos), $]2, 5[$ *aberto* (porque não lhe pertencem os extremos), $[2, 5[$ *aberto à direita* (porque não lhe pertence o extremo direito) e $]2, 5]$ *aberto à esquerda* (porque não lhe pertence o extremo esquerdo). *Todos estes conjuntos são, evidentemente, infinitos, isto é, têm uma infinidade de elementos.*

O que se acaba de dizer para os números 2 e 5, estende-se a qualquer par de números reais *a* e *b* tais que $a < b$. Por exemplo, $[-2, \pi[$ é o *intervalo de extremos* -2 e π *aberto à direita* ou seja o *conjunto de todos os números reais* x *tais que* $-2 \leqslant x < \pi$.

Já se sabe dos anos anteriores como os números reais podem ser representados por pontos duma recta (aliás, este assunto será revisto mais adiante em termos de maior rigor).



Nestas condições, é fácil ver que o intervalo $[2, 5]$ é representado pelo *segmento de recta* de extremos correspondentes a 2 e 5; por sua vez o intervalo $[-2, \pi[$ é representado pelo segmento de extremos correspondentes a -2 e π, *mas excluindo o segundo extremo;* etc.

Notem-se as seguintes inclusões (estritas):

$$[2, 5] \subset]1, 6] \quad , \quad]2, 5] \subset [2, 5]$$
$$]2, 5[\subset]2, 5] \quad , \quad]2, 5[\subset [2, 5[, \text{ etc.}$$

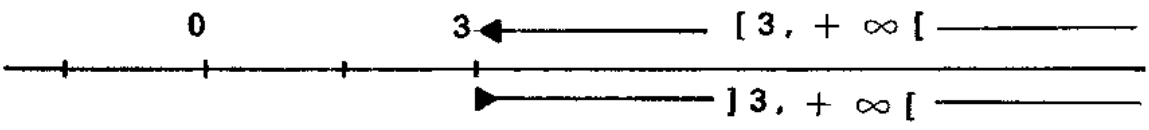
Mas, *não* é verdade que:

$$[-2, \pi[\subset [2, 5] \quad , \quad [2, 5] \subset [-2, \pi]$$
$$[2, 5] \subset]2, 5] \quad , \quad \text{etc.}$$

6. **Intervalos ilimitados em IR.** Consideremos um número real qualquer, por exemplo 3. São adoptadas, em matemática, as seguintes definições:

$$\left.\begin{array}{l} [3, +\infty[\; = \{x : x \geqslant 3\} \\ ]3, +\infty[\; = \{x : x > 3\} \end{array}\right. \text{(universo IR)}$$

Os conjuntos $[3, +\infty[$ e $]3, +\infty[$ são chamados *intervalos de extremos* 3 *e* $+\infty$ (ler 'mais infinito') sendo o primeiro *fechado à esquerda* e o segundo *aberto à esquerda*. Representando os números reais por pontos duma recta, como é costume:



O intervalo $[3, +\infty[$ é representado pela semi-recta de origem correspondente a 3, situada à direita deste ponto; por sua vez o intervalo $]3, +\infty[$ é representado pela mesma semi-recta *menos a origem.* Como se vê, estes intervalos são *ilimitados à direita,* isto é, não existe nenhum número real que seja maior do que *todos* os elementos do intervalo. *Deste modo, o símbolo* $+\infty$ *não designa nenhum número real e não é representado por nenhum ponto da recta: está apenas a indicar que os referidos intervalos são ilimitados à direita.*

Analogamente, põe-se:

$$]-\infty, 3] = \{x : x \leqslant 3\}, \quad]-\infty, 3[\; = \{x : x < 3\}$$

e diz-se que $]-\infty, 3]$ e $]-\infty, 3[$ são intervalos de extremos $-\infty$ (ler 'menos infinito') e 3, sendo o primeiro *fechado à direita* e o *segundo aberto à direita.* O símbolo $-\infty$ não designa nenhum número real; está apenas a indicar que os intervalos são *ilimitados à esquerda.* A representação geométrica é análoga à do caso anterior.

Naturalmente, o que se acaba de dizer para o número 3, estende-se a todo o número real.

Finalmente é costume também designar por $]-\infty, +\infty[$ o conjunto $\mathbb{R}$ (de *todos* os números reais) e chamar-lhe *intervalo de extremos* $-\infty$ e $+\infty$ (isto é, *ilimitado à direita e à esquerda)*. A sua representação geométrica é a recta inteira.

7. **Propriedades da relação de inclusão.** Quando dizemos apenas 'inclusão' referimo-nos sempre a *inclusão lata*. Pelo que vimos no número 3, tem-se:

1) $A \subset A$, qualquer que seja o conjunto A
2) $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

Exprime-se 1), dizendo que a inclusão é *reflexiva.*

Exprime-se 2), dizendo que a inclusão é *anti-simétrica* (em sentido lato).

Mas tem-se ainda a propriedade:

3) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Com efeito, as fórmulas $A \subset B$ e $B \subset C$ significam respectivamente:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{e} \quad x \in B \Rightarrow x \in C$$

Logo, pela propriedade transitiva da implicação, tem-se:

$$x \in A \Rightarrow x \in C \quad , \quad \text{o que significa que } A \subset C$$

Por exemplo, designemos por M, V e A, respectivamente, o conjunto dos mamíferos, o conjunto dos vertebrados e o conjunto dos animais. Então:

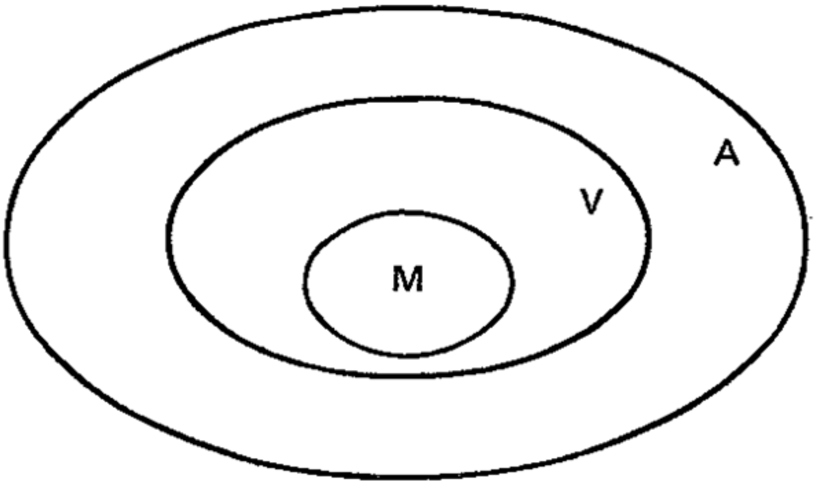
I. $M \subset V$ (todo o mamífero é um vertebrado)

II. $V \subset A$ (todo o vertebrado é um animal)

Logo

III. $M \subset A$ (todo o mamífero é um animal).

Esta situação está figurada no diagrama junto.



Assim, a transitividade da inclusão não é mais do que a tradução fiel da transitividade da implicação. Em particular, a dedução de III a partir de I e II é um *silogismo,* em que as *premissas* são I e II (respectivamente *premissa menor* e *premissa maior)* e a *conclusão* é III.

Quando, dados três conjuntos A, B, C, se tem $A \subset B$ e $B \subset C$, pode-se escrever, para indicar esse facto:

$$A \subset B \subset C$$

Analogamente para mais de três conjuntos.

É também de notar que a relação de pertença (representada por '$\in$') não tem nenhuma das referidas propriedades. Por exemplo, seja P um ponto, r uma recta que passe por P e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as rectas do espaço. Teremos, então:

$$P \in r \wedge r \in \mathcal{R}$$

(isto é: 'P é um ponto de r e r é uma recta'); mas é claro que não podemos concluir daqui que:

$$P \in \mathcal{R} \text{ (isto é que 'P é uma recta')}$$

Isto mostra como é necessário distinguir a relação de pertença da de inclusão; de contrário poderíamos incorrer em paralogismos do tipo dos seguintes:

'Esta bola é azul; o azul é uma cor; logo esta bola é uma cor'.

'Pedro e Paulo são Apóstolos; os Apóstolos são doze; logo Pedro e Paulo são doze.

Estes mesmos exemplos evidenciam a necessidade de distinguir os tipos lógicos. Assim, a bola é um *indivíduo,* o azul é uma propriedade definidora de um *conjunto* de objectos e, portanto, o conjunto das cores pode considerar-se um *conjunto de tipo* 2.

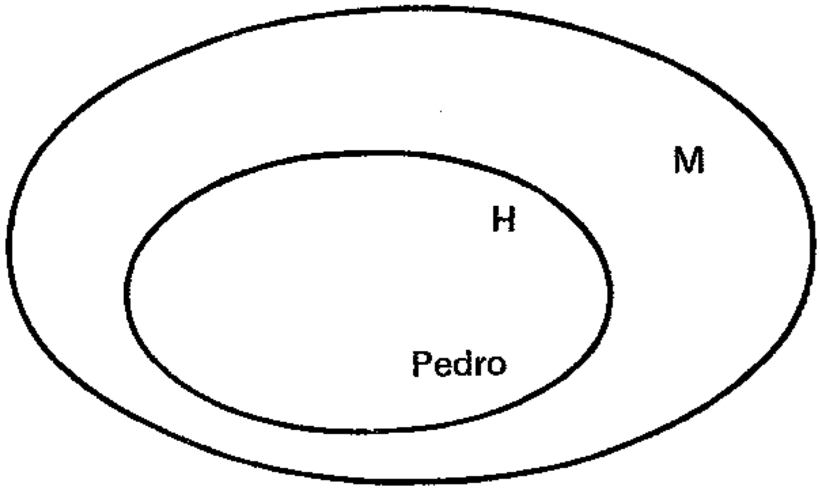
Todavia, dados dois conjuntos A e B quaisquer e um elemento *a,* tem-se pela própria definição da relação $\subset$:

$$a \in A \wedge A \subset B \Rightarrow a \in B$$

Este facto dá origem a um novo tipo de silogismo, diferente do anterior. Por exemplo, seja H o conjunto dos homens e M o conjunto dos seres mortais (conjunto que supomos definido). Podemos então formar o silogismo (Cap. 1, n.º 29):

$\text{Pedro} \in H,\ H \subset M \therefore \text{Pedro} \in M$ ou seja, em linguagem comum:

'Pedro é homem, todos os homens são mortais; logo Pedro é mortal.



É de registar ainda a propriedade (Cap. I, n.º 29, propr. I e II): *Qualquer que seja o conjunto A num universo U tem-se:*

$$\emptyset \subset A \subset U$$

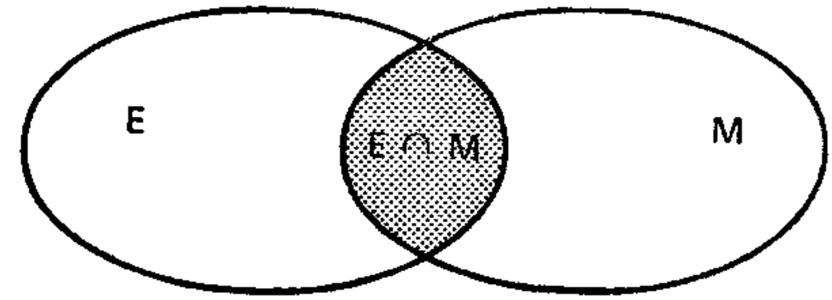
8. **Intersecção de dois conjuntos.** Consideremos as duas condições:

x *é estudante* x *é menor de* 18 *anos*

À primeira corresponde o *conjunto dos estudantes* que vamos designar por E e à segunda o *conjunto dos menores de* 18 *anos* que vamos designar por M. Consideremos, agora, a conjunção das condições dadas:

x *é estudante* $\wedge$ x *é menor de* 18 *anos*

É claro que lhe corresponde o *conjunto dos estudantes menores de* 18 *anos,* isto é, dos indivíduos que pertencem ao mesmo tempo a E e a M. Diremos que este conjunto é a *intersecção de* E *com* M e designá-lo-emos por $E \cap M$.



Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se intersecção de* A *com* B *(e representa-se por* $A \cap B$*) o conjunto de todos os entes que pertencem ao mesmo tempo a* A *e a* B; isto é, em escrita simbólica:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

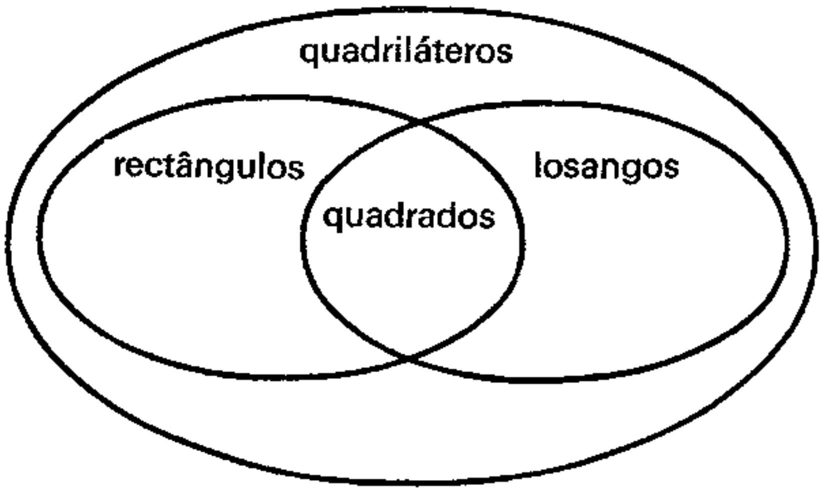
Também se chama *intersecção* à própria operação que, aplicada aos conjuntos A e B, dá como resultado $A \cap B$. Como se vê, esta operação traduz, em linguagem de conjuntos, a *operação lógica de conjunção*; assim, a intersecção é também uma *operação lógica*.

Outros exemplos:

I. Designemos respectivamente por $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos rectângulos, o conjunto dos losangos e o conjunto dos quadrados. É fácil ver então que [1]:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$$

o que significa que os *quadrados são os rectângulos que também são losangos.*

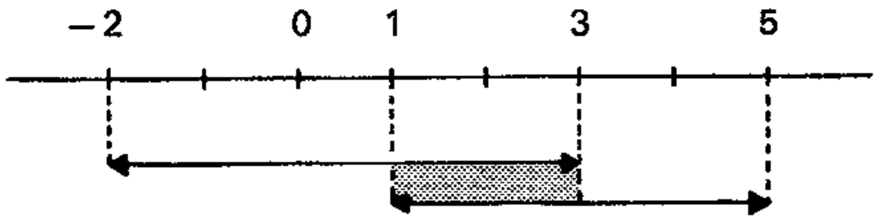


---

[1] Não esqueçamos que sendo cada uma destas figuras um conjunto de pontos, os conjuntos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Q}$ são conjuntos de tipo 2.

II. Consideremos os intervalos $[-2, 3]$ e $[1, 5]$.
É fácil ver então que:

$$[-2, 3] \cap [1, 5] = [1, 3]$$



Analogamente: $]-2, 3] \cap]1, 5] =]1, 3]$, etc.

III. Sejam, agora, os intervalos $[-2, 1]$ e $[3, 5]$. É claro que não há nenhum número que pertença ao mesmo tempo aos dois, isto é, nenhum número x tal que:

$$-2 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5$$

Por conseguinte a intersecção dos dois intervalos é o *conjunto vazio,* isto é $[-2, 1] \cap [3, 5] = \varnothing$. Analogamente, tem-se $[-2, 1] \cap]1, 3] = \varnothing$, etc.

IV. Vê-se imediatamente que:

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2, 3\},$$
$$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing, \text{ etc.}$$

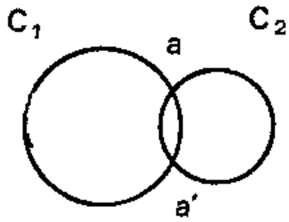
V. Designemos em geral por M_n o conjunto dos múltiplos dum número natural n. Tem-se, então:

$$M_3 \cap M_5 = M_{15}$$

isto é: *a intersecção do conjunto dos múltiplos de 3 com o conjunto dos múltiplos de 5 é o conjunto dos múltiplos de 15.*

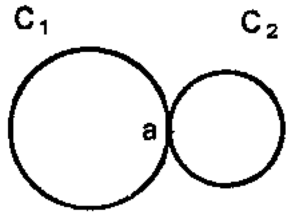
VI. A intersecção de duas circunferências contidas num mesmo plano é formada por dois pontos, por um só ponto ou por nenhum (conjunto vazio), conforme a distância entre os seus centros é inferior, igual ou superior à soma dos raios:

1.º caso



$C_1 \cap C_2 = \{a, a'\}$

2.º caso



$C_1 \cap C_2 = \{a\}$

3.º caso

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$

(Note-se que estas figuras não são simples diagramas: pretendem ser aproximadamente circunferências).

Em III, V e VI apresentam-se pares de conjuntos sem elementos comuns e cuja intersecção é, por isso, vazia. Pois bem:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que dois conjuntos A e B são disjuntos, quando não têm nenhum elemento comum, ou seja, quando* $A \cap B = \emptyset$.

Assim, o conceito de 'conjuntos disjuntos' traduz o conceito de 'condições incompatíveis'.

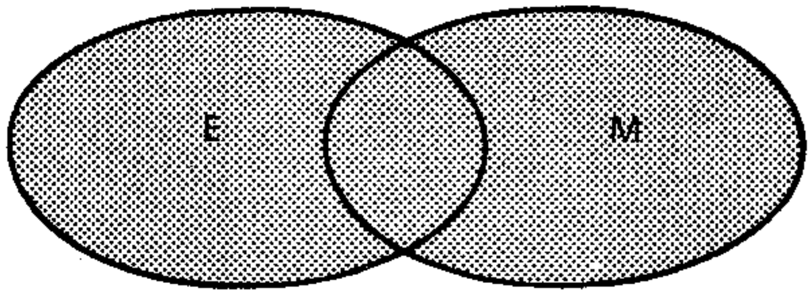
9. **Reunião de dois conjuntos.** Consideremos, novamente, as condições:

x *é estudante,* x *é menor de 18 anos*

a que correspondem os conjuntos E e M, e passemos, agora, a considerar a disjunção:

x *é estudante* $\vee$ x *é menor de 18 anos.*

É claro que a esta condição corresponde o conjunto dos indivíduos que *ou são estudantes ou são menores de 18 anos, ou são ambas* *as coisas,* isto é, que pertencem a um pelo menos dos conjuntos E e M. Este conjunto é chamado *reunião de* E *com* M e designado por $E \cup M$. Dum modo geral:



$E \cup M$

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se reunião de* A *com* B, *e representa-se por* $A \cup B$, *o conjunto de todos os entes que satisfazem à condição de pertencer a um, pelo menos, dos conjuntos* A, B. Simbolicamente:

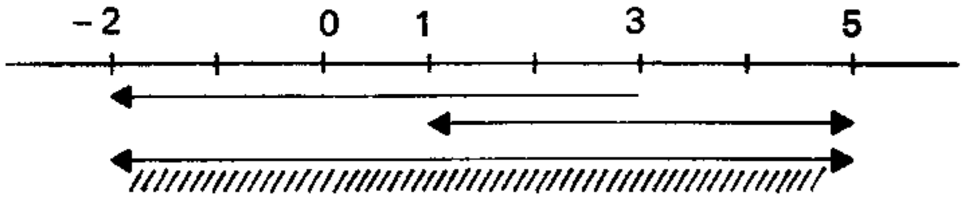
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Outros exemplos:

I. Sejam novamente $\mathcal{R}$ o conjunto dos rectângulos e $\mathcal{L}$ o conjunto dos losangos. Então é fácil ver que $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$ é o conjunto dos paralelogramas que têm os lados ou ângulos iguais (ou ambas as coisas).

II. É claro que:

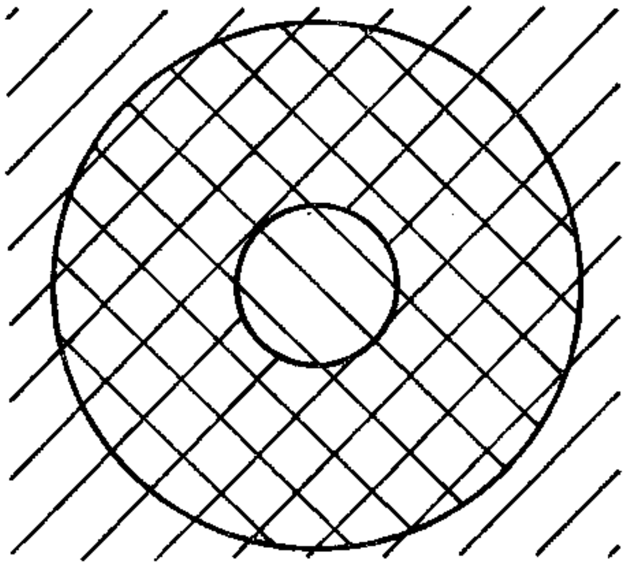
$$[-2, 3] \cup [1, 5] = [-2, 5]$$
$$[-2, 3] \cup \,]3, 5] = [-2, 5], \text{ etc.}$$



III. Vê-se, imediatamente, que:

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{5\} \cup \{2, 7\} = \{2, 5, 7\}$, etc.

IV. Seja C o conjunto dos pontos dum plano cuja distância a um ponto p é inferior ou igual a 3 cm e seja D o conjunto dos pontos do mesmo plano cuja distância a p é igual ou superior a 1 cm. Então $C \cup D$ é o plano, enquanto $C \cap D$ é uma coroa circular.

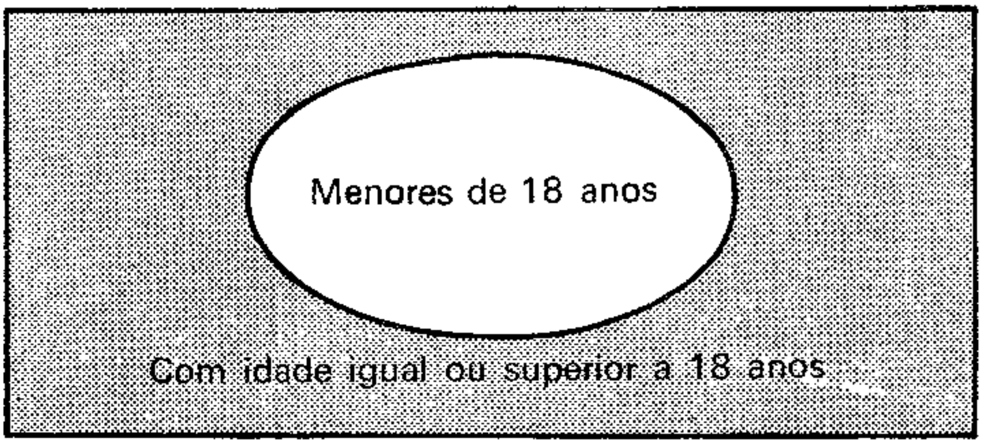


10. **Complementar dum conjunto.** Consideremos, no universo das pessoas, a propriedade 'x é menor de 18 anos', à qual corresponde o *conjunto dos indivíduos menores de 18 anos,* que designamos por M. À propriedade contrária ('x não é menor de 18 anos') corresponde o *conjunto dos indivíduos com idade igual ou superior a 18 anos.* Pois bem, este último conjunto é chamado o *complementar de* M e designado simbolicamente por $\complement M$.

Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Num dado universo* U, *chama-se complementar dum conjunto* A, *e representa-se por* $\complement A$, *o conjunto de todos os* *indivíduos (elemento de* U*), que não pertencem a* A. Simbolicamente:

$$\complement A = \{x : \sim x \in A\}$$



Assim, a passagem de um conjunto ao seu complementar é uma *operação lógica sobre conjuntos,* que traduz a operação lógica de negação. Mas é evidente que o resultado desta operação depende do universo fixado.

Exemplos:

I. No universo dos quadriláteros, o complementar do conjunto $\mathcal{Q}$ (dos quadrados) é o conjunto dos quadriláteros que ou não são rectângulos ou não são losangos (ou nem uma nem outra coisa). No universo das figuras geométricas, o complementar de $\mathcal{Q}$ é o conjunto de todas as figuras que não são quadrados.

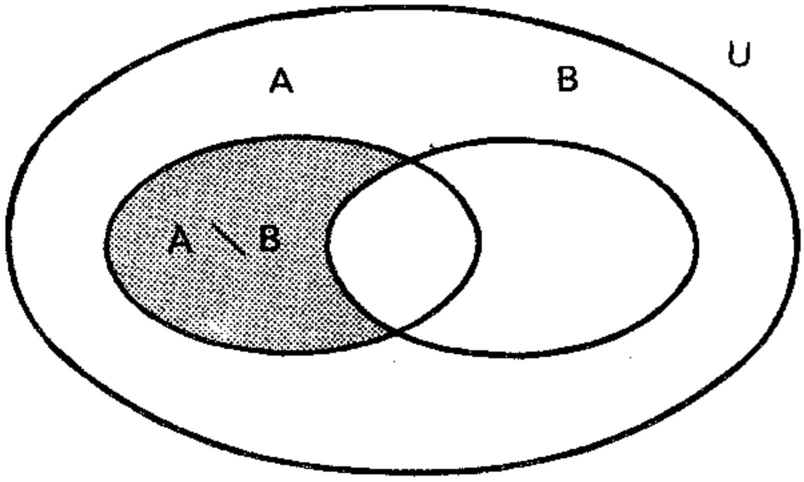
II. No universo dos números naturais ($\mathbb{N}$), o complementar do conjunto dos números pares é o conjunto dos números ímpares. No universo dos números reais ($\mathbb{R}$), o complementar do conjunto dos números pares é o conjunto de todos os números reais que ou não pertencem a $\mathbb{N}$ ou são ímpares.

III. Em $\mathbb{N}$ o complementar de $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto dos números maiores que 3. Em $\mathbb{R}$ o complementar de $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto:

$$]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

A noção do conjunto complementar pode ser generalizada do seguinte modo:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se complementar de* B *em* A *ao conjunto dos elementos de* A *que não pertencem a* B. *Designa-se este conjunto por* $A \setminus B$.



É claro que $A \setminus B = A \cap \sim B$ e $\complement A = U \setminus A$, sendo U o universo.

Por exemplo, se for A o conjunto dos portugueses e B o conjunto das pessoas que sabem ler, será $A \setminus B$ *o conjunto dos portugueses que não sabem ler.*

11. **Propriedades das operações lógicas sobre conjuntos.** As propriedades das operações lógicas sobre conjuntos são uma tradução imediata das propriedades das operações correspondentes sobre proposições ou sobre condições. Assim, representando por A, B, C, ... conjuntos quaisquer num universo U, teremos sempre:

1. $$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$$

isto é, a intersecção e a reunião são operações *comutativas.*

2. $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

isto é, a intersecção e a reunião são operações *associativas.*

3. $A \cap U = A \quad , \quad A \cap \varnothing = \varnothing \quad , \quad A \cup U = U \quad , \quad A \cup \varnothing = A,$

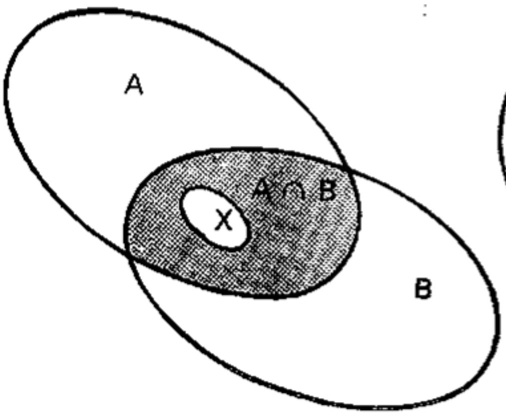
isto é, U é o *elemento neutro* da intersecção e *elemento absorvente* da reunião, enquanto $\varnothing$ é *elemento neutro* da reunião e *elemento absorvente* da intersecção.

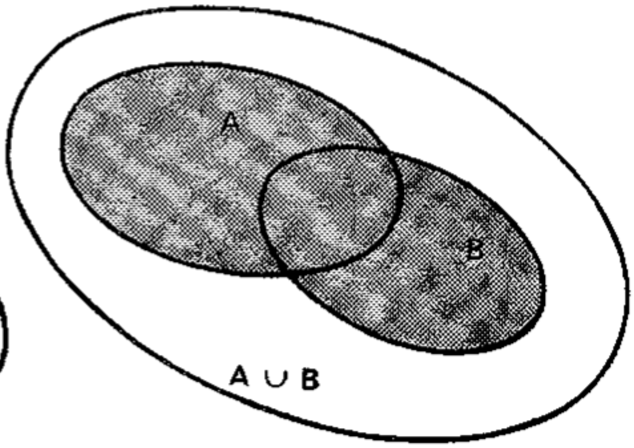
4. $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

isto é, a intersecção é *distributiva a respeito da reunião* e a reunião é *distributiva a respeito da intersecção.*

A reunião $A \cup B$ também é chamada *soma lógica* (ou apenas *soma*) de A com B e designada por $A + B$. A intersecção $A \cap B$ também é chamada *produto lógico* (ou apenas *produto*) de A por B, e designado por A B.

Há ainda propriedades que relacionam a relação de inclusão com a intersecção e a reunião, e que reflectem propriedades correspondentes da implicação com a conjunção e a disjunção. Essas propriedades equivalem a dizer que $A \cap B$ *é o máximo conjunto contido ao mesmo tempo em* A *e em* B *e que* $A \cup B$ *é o mínimo conjunto que contém ao mesmo tempo* A *e* B.





5. $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$

6. $X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \subset A \cap B$

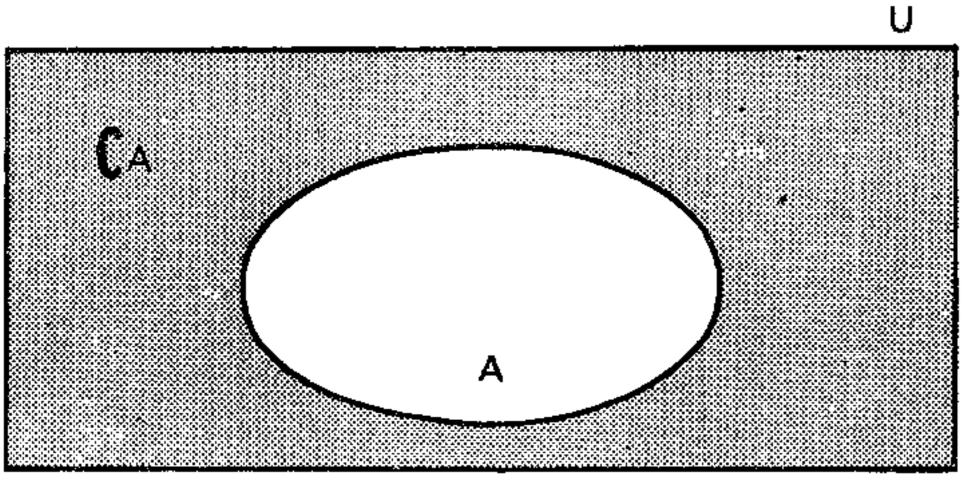
5'. $A \cup B \supset A \quad , \quad A \cup B \supset B$

6'. $X \supset A \wedge X \supset B \Rightarrow X \supset A \cup B$

Finalmente, apresentam-se as propriedades que relacionam a reunião, a intersecção e a inclusão com a passagem ao complementar. Assim, temos, qualquer que seja o conjunto A no universo U:

6. $A \cap \complement A = \emptyset \quad$ e $\quad A \cup \complement A = U$

Esta propriedade, que resulta imediatamente da definição de $\complement A$, podia, por sua vez, ser tomada como definição de $\complement A$: *é o conjunto disjunto de* A *cuja reunião com* A *é o universo.*



As primeiras leis de De Morgan assumem agora o aspecto:

7. $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B, \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

isto é: *a complementação transforma a intersecção na reunião dos complementares e a reunião na intersecção dos complementares.*

Por exemplo, o complementar do conjunto dos estudantes menores de 18 anos é a reunião do conjunto dos não estudantes com o conjunto dos não menores de 18 anos.

Por sua vez, tem-se:

8. $A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B$

isto é: *a complementação transforma a relação* $\subset$ *na relação* $\supset$.

Daqui resulta o PRINCIPIO DA DUALIDADE LÓGICA em termos de conjuntos:

Toda a proposição sobre conjuntos em que intervenham, no todo ou em parte, as operações $\cap$, $\cup$ *e as relações* $\subset$, $\supset$ *é equivalente à proposição que se obtém, mudando* $\cap$ *em* $\cup$, $\cup$ *em* $\cap$, $\subset$ *em* $\supset$ *e* $\supset$ *em* $\subset$.

12. **Compreensão e extensão.** As considerações anteriores mostram como a lógica das proposições se traduz na lógica dos conjuntos, em virtude da correspondência estabelecida entre condições (numa variável) e conjuntos. A própria linguagem corrente reflecte estes dois pontos de vista da lógica: *o ponto de vista da compreensão,* relativo a proposições e a propriedades (ou condições), e o *ponto de vista da extensão,* relativo a conjuntos (ou classes). Esta dualidade de pontos de vista dá origem a dois tipos de linguagem que por vezes se contradizem, pelo menos na aparência, podendo dar origem a equívocos.

Por exemplo, diz-se que a condição de ser homem *implica* a condição de ser mortal; por outras palavras: a propriedade de ser mortal *está contida* na de ser homem (ou ainda, é *uma* das propriedades que caracterizam a espécie humana). Por isso se usou, durante muito tempo, o sinal '$\supset$' em vez de '$\Rightarrow$' para exprimir a implicação. Assim, escrevia-se:

ser homem $\supset$ ser mortal

Porém, passando de ponto de vista da compreensão ao da extensão (isto é, passando da linguagem das propriedades à dos conjuntos), tem-se:

conjunto dos homens $\subset$ conjunto dos mortais

Esta dualidade de linguagem estende-se às operações lógicas. Por exemplo, *juntando* várias propriedades, obtém-se geralmente uma propriedade *mais complexa* que as primeiras e que, por isso mesmo, é verificada por um *menor* conjunto de indivíduos. Por exemplo, o conjunto dos corpos *azuis e redondos* é menor que o conjunto dos corpos azuis e que o conjunto dos corpos redondos (é a sua intersecção). Exprime-se este facto na filosofia tradicional, dizendo que a *extensão (isto é, o número dos indivíduos) diminui, quando a compreensão (isto é, o número das propriedades) aumenta, e vice-versa.*

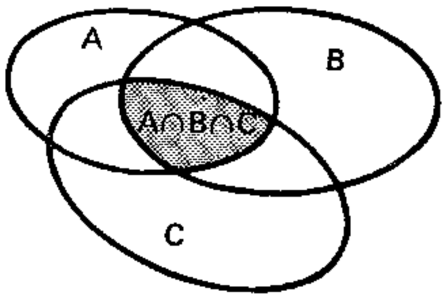
Por outro lado, observe-se que:

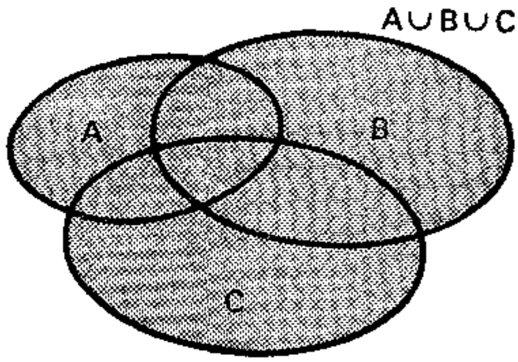
conjunto dos corpos *azuis ou redondos* = conjunto *dos corpos azuis e dos corpos redondos.*

Dum modo geral, na linguagem comum, os adjectivos exprimem propriedades, enquanto os substantivos comuns se referem a indivíduos dum conjunto. A palavra 'substantivo' vem de 'substância': a substância seria aquilo que *sub-está,* isto é, o suporte das propriedades — ou ainda o *indivíduo,* sem o qual não se manifestariam as propriedades que nele residem.

Considerações deste tipo conduzem a um ramo da filosofia, chamado *metafísica,* em que é preciso muito cuidado para não se cair em jogos estéreis de palavras e em becos sem saída. Para evitar estes riscos, a lógica matemática procura construir uma linguagem mais precisa e menos sujeita a equívocos, do que a linguagem comum. Neste sentido, para obter maior clareza e objectividade, adopta-se de preferência o ponto de vista da extensão.

13. Intersecção ou reunião dos conjuntos duma dada família. Os conceitos de intersecção e de reunião estendem-se, naturalmente, a mais de dois conjuntos. Assim, a intersecção de três conjuntos A, B e C, que se representa por $A \cap B \cap C$, será o conjunto de todos os elementos comuns aos três conjuntos, enquanto a reunião de A, B e C, que se representa por $A \cup B \cup C$, será o conjunto de todos os elementos que satisfazem à condição de pertencer a um, pelo menos, dos conjuntos A, B e C.





É claro que se tem:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B, \text{ etc.}$$

Os dois conceitos podem, analogamente, estender-se a um número finito qualquer de conjuntos ou mesmo a uma *infinidade* de conjuntos. Consideremos, por exemplo, os intervalos $[3, x]$, tais que $x > 5$.

É evidente que a intersecção de *todos* estes intervalos (isto é, o conjunto dos pontos comuns a todos eles) é o próprio intervalo $[3, 5]$. Indica-se este facto, escrevendo:

$$\bigcap_{x > 5} [3, x] = [3, 5]$$

Analogamente, a reunião de *todos* os intervalos $[3, x]$ tais que $3 < x < 5$

é o intervalo $[3, 5[$, o que se exprime escrevendo:

$$\bigcup_{3<x<5} [3, x] = [3, 5[$$

Outros exemplos:

I. As rectas são conjuntos de pontos. A reunião de todas as rectas r que passam por um ponto P e são paralelas a um plano α é o plano que passa por P e é paralelo a α. A intersecção das mesmas rectas é $\{ P \}$.

II. A reunião de todas as rectas que são perpendiculares a um plano e o cortam em pontos duma circunferência é uma superfície cilíndrica de revolução. A intersecção das mesmas rectas é o conjunto vazio.

III. A reunião de todos os quadrados dum plano é o próprio plano. A intersecção desses quadrados é o conjunto vazio.

Em cada um destes exemplos é considerado um conjunto infinito de conjuntos (conjunto de intervalos, conjunto de rectas, etc.). Muitas vezes, para evitar a repetição da palavra 'conjunto', diz-se 'classe de conjuntos' ou 'família de conjuntos'.

Mas, note-se bem:

Uma coisa é uma família de conjuntos, outra coisa é a reunião desses conjuntos.

Por exemplo, os conjuntos:

$$\{2, 3\} \quad , \quad \{5, 7, 10\} \quad e \quad \{3, 8, 9\}$$

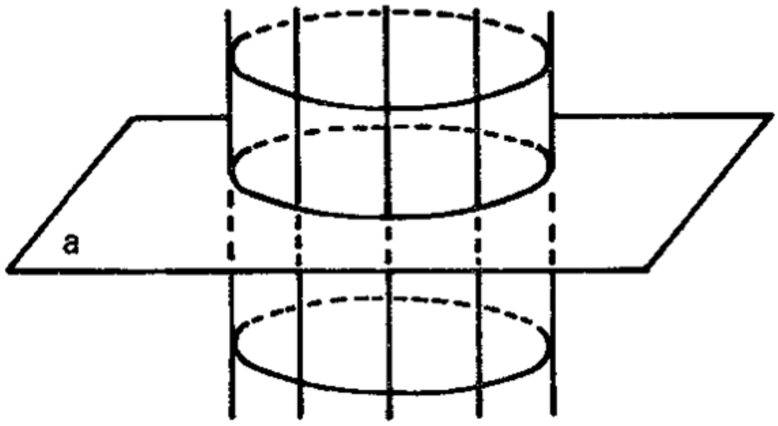
podem ser tomados como elementos dum novo conjunto (de tipo 2), que se designa por:

$$\Big\{\{2, 3\} \quad , \quad \{5, 7, 10\} \quad , \quad \{3, 8, 9\}\Big\}$$

Mas a reunião daqueles conjuntos é o conjunto de tipo 1:

$$\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

Analogamente, a família das rectas perpendiculares a um plano α e que cortam α em pontos duma circunferência, é um conjunto de tipo 2 (os seus elementos são rectas, portanto conjuntos de pontos). Mas, a reunião dessas rectas é uma superfície cilíndrica S (conjunto de pontos), que também é a reunião de todas as circunferências em que S é cortada por planos paralelos a α, etc.



14. **Pares ordenados.** Vimos como toda a condição com uma variável determina um conjunto. Consideremos agora condições com *duas* variáveis. Seja a condição:

x é múltiplo de y,

no universo $\mathbb{N}$. Esta condição é verificada, por exemplo, quando $x = 6$ e $y = 3$, mas não quando $x = 3$ e $y = 6$. Exprime-se este facto dizendo que a condição é verificada pelo *par ordenado* (6, 3), mas não pelo *par ordenado* (3, 6). A mesma condição é verificada quando $x = 3$ e $y = 3$; diremos ainda que é verificada pelo *par ordenado* (3, 3). Exemplos de outros pares ordenados que verificam a referida condição:

$$(1, 1), (2, 2), (6, 2), (15, 3), \text{etc.}$$

Exemplos de pares ordenados que não a verificam:

$$(2, 6), (3, 15), (2, 7), (7, 9), \text{etc.}$$

Seja agora, no universo $\mathbb{R}$, a condição:

$$x < 2y$$

Verificam esta condição os pares ordenados:

$$(1, 1), (1, 2/3), (-3, -1), \text{etc.}$$

Não a verificam os pares ordenados:

$$(1, 1/2), (-3, -3), (5, 1), \text{etc.}$$

Seja ainda em $\mathbb{R}$ a condição:

$$x + y = 4 \wedge x - y = 2$$

Facilmente se reconhece que esta condição é verificada por um único par ordenado de números: o par (3, 1), pois é esta a solução única do sistema de equações $x + y = 4$, $x - y = 2$.

Até aqui temos considerado apenas pares ordenados de números. Seja agora a condição:

x é a capital de y,

em que a variável x tem por domínio o *conjunto das cidades* e a variável y tem por domínio o *conjunto dos países* (conjuntos que supomos definidos). Verificam tal condição os pares ordenados:

(Lisboa, Portugal), (Paris, França), etc.

Não a verificam os pares ordenados:

(Beja, Portugal), (Lisboa, Itália), etc.

O que se entende então, dum modo geral, por um par ordenado?

Geralmente, quando se nos apresenta uma condição com duas variáveis, uma destas é considerada a *primeira variável* e a outra a *segunda variável* (por ordem alfabética, por ordem de índices ou por outro qualquer critério). Assim, cada vez que substituímos as variáveis por constantes, indicamos dois entes *a, b,* por uma ordem determinada, e é isto que se chama *dar um par ordenado,* o qual é designado pela notação (a, b). Diz-se que o par ordenado (a, b) verifica a condição, quando esta se transforma numa proposição verdadeira, ao fazer a referida substituição. Em particular, pode ser $a = b$ e então tem-se $(a, b) = (b, a) = (a, a)$. Mas, se $a \neq b$, será sempre $(a, b) \neq (b, a)$.

Portanto, um *par ordenado* (a, b) não é um conjunto $\{a, b\}$, visto que este, ao contrário do primeiro, é dado pelos seus elementos *independentemente da ordem e sem repetição,* isto é, tem-se então:

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad e \quad a \neq b$$

15. **Produto cartesiano de dois conjuntos. Conceito de relação binária.** Consideremos, num dado liceu, a condição:

$$x \text{ \textit{é um aluno}} \quad \wedge \quad y \text{ \textit{é uma turma}}$$

Se designarmos por A o conjunto dos alunos e por T o conjunto das turmas desse liceu, a referida condição será verificada por todos os pares ordenados (a, b), tais que a $\in$ A e b $\in$ T. Pois bem, o conjunto de *todos* esses pares é chamado o *produto cartesiano* de A por T e designado simbolicamente por A × T.

Consideremos, agora, a condição:

$$x \text{ \textit{é um aluno da turma} } y$$

Esta será verificada por *certos,* mas não por *todos* os pares ordenados pertencentes a A × T. Tal condição determina, por conseguinte, um *conjunto* contido em A × T. Esse conjunto de pares ordenados é chamado a relação definida pela condição 'x *é um aluno da turma* y'.

Vejamos um outro exemplo. Suponhamos que as letras P, E, I, L, M, R designem, respectivamente, *Portugal, Espanha, Itália, Lisboa, Madrid, Roma* e consideremos os conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{ P, E, I \}, \quad \mathcal{B} = \{ L, M, R \}$$

Neste caso, a condição:

$$X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{B}$$

é verificada por todos os pares ordenados (P, L), (P, M), (P, R), (E, L), (E, M), (E, R), (I, L), (I, M) e (I, R). O conjunto destes pares é chamado *produto cartesiano* de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ e designado opr $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Consideremos, agora, a condição:

A capital de X *é* Y

quando X varia em $\mathcal{A}$ e Y varia em $\mathcal{B}$. Esta condição define uma *relação*, que é precisamente o conjunto de pares ordenados (P, L), (E, M), (I, R) que a verificam (subconjunto de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$).

Assim, dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A, B *quaisquer, chama-se produto cartesiano de* A *por* B, *e representa-se por* $A \times B$, *o conjunto de todos os pares ordenados que se podem formar, indicando primeiro um elemento de* A *e depois um elemento de* B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A \wedge y \in B \}$$

Cada subconjunto de $A \times B$ é chamado *relação entre* A *e* B. Esta pode ser definida por uma condição com duas variáveis que tenham por domínio, respectivamente, A e B.

Em particular, pode ter-se $A = B$. Então $A \times B$ pode ser designado por A^2 e chamado *quadrado cartesiano* do conjunto A. Neste caso, cada subconjunto de A^2 é chamado *relação binária definida em* A.

Por exemplo, a condição:

m *e* n *são números naturais,*

que se pode escrever abreviadamente:

$$m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N},$$

é verificada *por todos os pares ordenados de números naturais,* isto é, determina o conjunto $\mathbb{N}^2$. Por sua vez, a condição:

$$m < n$$

define em $\mathbb{N}$ uma *relação binária,* constituída pelos pares de números naturais, tais como (1, 2), (1, 3), (5, 9), etc., que verificam tal condição. É claro que a mesma relação é definida por qualquer condição equivalente à primeira em $\mathbb{N}$, por exemplo: $n - m \geqslant 1$.

Analogamente, o *quadrado cartesiano do conjunto* $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Por sua vez, a condição $m < n$ no universo $\{1, 2, 3\}$ define a relação:

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

subconjunto de $\{1, 2, 3\}^2$.

16. **Produto cartesiano de três conjuntos; relações ternárias.** As considerações anteriores estendem-se obviamente ao caso de condições em mais de duas variáveis. Seja no universo $\mathbb{N}$ a condição:

$$x \textit{ é divisor comum de } y \textit{ e } z$$

Esta é verificada, por exemplo, quando $x = 3$, $y = 6$ e $z = 15$, mas não quando $x = 3$, $y = 6$ e $z = 8$. Exprimiremos estes factos dizendo que a condição é verificada pelo *terno ordenado* $(3, 6, 15)$, mas não pelo *terno ordenado* $(3, 6, 8)$. Exemplos de outros ternos ordenados que verificam a condição:

$$(5, 10, 15), (6, 12, 18), (3, 3, 6), (3, 3, 3), \text{etc.}$$

Exemplos de outros ternos ordenados que não a verificam:

$$(10, 5, 15), (6, 3, 6), \text{etc.}$$

Analogamente, em $\mathbb{R}$, a condição

$$x < y - z$$

é verificada pelos ternos ordenados

$$(2, 7, 3), \quad (-2, 3, 3), \quad (0, \pi, 3), \quad \text{etc.}$$

mas não pelos ternos ordenados

$$(2, 3, 7), \quad (3, -2, 3), \quad (\pi, 0, 3), \quad \text{etc.}$$

Dum modo geral, dados três conjuntos A, B, C quaisquer, chama-se *produto cartesiano de* A, B e C, e designa-se por $A \times B \times C$, o conjunto de todos os termos ordenados (x, y, z) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $z \in C$; isto é, simbolicamente:

$$A \times B \times C = \{ (x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C \}$$

Cada subconjunto de $A \times B \times C$ será chamado uma *relação ternária*. Em particular, pode ter-se $A = B = C$; neste caso, o produto $A \times B \times C$ chama-se *cubo cartesiano de* A e representa-se por A^3, e cada subconjunto de A^3 diz-se uma *relação ternária definida em* A.

Por exemplo, o cubo cartesiano de $\{ V, F \}$ é:

$$\{ V, F \}^3 = \{ (V, V, V), (F, F, F), (V, V, F), (V, F, V), (F, V, V), \\ (F, F, V), (F, V, F), (V, F, F)\}$$

Neste caso, a condição $x \wedge y \Rightarrow z$ (em que o sinal $\Rightarrow$ exprime a *relação* de implicação material) define uma relação ternária em $\{ V, F \}$, constituída pelos ternos ordenados (V, V, V), (F, F, F), (V, F, V), (F, V, V), (F, F, V), (F, V, F), (V, F, F). É claro que a *mesma* relação pode ser definida pela condição:

$$\sim z \Rightarrow \sim x \vee \sim y,$$

equivalente à primeira. Por sua vez, a *relação contrária*, definida pela condição $\sim(x \wedge y \Rightarrow z)$, reduz-se ao subconjunto singular $\{(V, V, F)\}$ do referido cubo cartesiano.

17. **Sequências. Conceitos gerais de produto cartesiano e de relação.** Seja *n* um número natural qualquer. Todas as vezes que, a cada um dos números 1, 2, ..., n, se faz corresponder um determinado elemento (de qualquer conjunto), diremos que é dada (ou definida) uma *sequência de* n *elementos.* Se for a_1 o elemento que corresponde a 1, a_2 o elemento que corresponde a 2, ..., a_n o elemento que corresponde a *n,* a sequência assim definida será designada pela notação:

$$(a_1, a_2, ..., a_n),$$

ou simplesmente pela notação:

$$a_1\, a_2 \ldots a_n$$

se não houver perigo de confusão. Neste caso a_1 é o *primeiro elemento* da sequência, a_2 o *segundo elemento* da sequência, ..., a_n *o último elemento* da sequência.

Em particular, quando n = 2, 3, 4, 5, ... a sequência chama-se, respectivamente, um *par ordenado,* um *terno ordenado,* um *quaterno ordenado,* etc. Mas também pode ser n = 1; então a sequência reduz-se ao seu *primeiro e último elemento,* a_1. Posto isto:

DEFINIÇÃO. *Dados* n *conjuntos* $A_1, ..., A_n$, *chama-se produto cartesiano destes conjuntos, pela ordem em que estão escritos o conjunto de todas as sequências* $(x_1, ..., x_n)$ *de* n *elementos, tais que* $x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n$.

O *produto cartesiano* (1) dos *n* conjuntos $A_1, ... A_n$ é designado pela notação $A_1 \times ... \times A_n$ ou, abreviadamente, pela notação:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

(1) Também chamado 'produto directo' ou simplesmente 'produto' por alguns autores.

Em particular pode ter-se $n = 1$ e, então, o produto cartesiano reduz-se ao próprio conjunto A_1.

Também pode acontecer que os símbolos $A_1, \ldots, A_n$ designem todos um mesmo conjunto A, isto é, que:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$$

Neste caso, o produto cartesiano:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

chama-se *potência cartesiana* n de A e designa-se por A^n.

Por exemplo, se $A = \{0,1\}$, tem-se:

$A^4 = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

Tal como os conceitos de elemento e de conjunto, o conceito de sequência faz parte da própria estrutura da linguagem e, portanto, do pensamento. Toda a palavra, toda a frase, todo o discurso são constituídos por uma sequência de sons elementares (no tempo) ou de letras (no espaço). Com as vinte e poucas letras do alfabeto têm sido compostas as mais belas obras de literatura e muitas das mais importantes obras da ciência. Com um limitado sistema de símbolos musicais, têm sido construídas as mais prodigiosas sequências de sons ou de conjuntos de sons, desde as polifonias da Idade Média às grandes sinfonias da música romântica ou moderna. E apenas com base nos dois valores lógicos os computadores electrónicos elaboram extensíssimas sequências, que traduzem os mais complicados cálculos e raciocínios da ciência contemporânea, de acordo com programas preestabelecidos.

18. **Generalidades sobre relações binárias.** Já dissemos que se chama *relação binária* qualquer conjunto R de pares ordenados (não confundir R com $\mathbb{R}$). Em vez de dizer que um dado par (x, y) pertence ao conjunto R, diz-se geralmente que o par (x, y) *verifica* a relação R e escreve-se

$$x\,R\,y$$

Para indicar que (x, y) *não verifica* R, escreve-se

$$x \not R\, y$$

Assim, o símbolo $\not R$ designa a relação *contrária* (ou *complementar*) de R:

$$x \not R\, y \iff \sim (x\ R\ y)$$

Já vimos exemplos desta convenção nos símbolos $\neq$, $\notin$, etc.

Geralmente uma relação binária R é definida por uma condição com duas variáveis; então, duas condições definem a *mesma relação,* sse são *equivalentes.* Os domínios das duas variáveis podem ser dois conjuntos U e V distintos ou um mesmo conjunto U; neste caso, a relação R é uma subconjunto de U^2 e diz-se que R é *definida* em U.

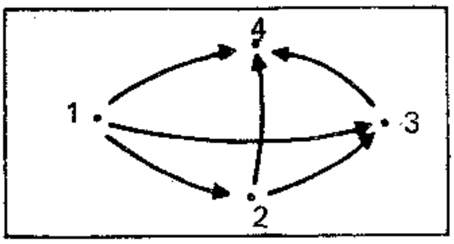
Se a relação R se reduz a um conjunto finito (e não muito numeroso) de pares ordenados, podemos definir R pela simples indicação dos pares que a verificam. Por exemplo, a relação definida pela condição $x < y$ no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto de pares ordenados:

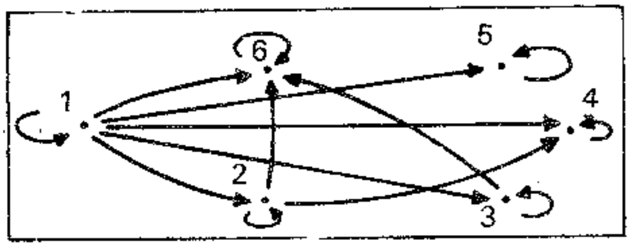
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Analogamente a relação definida pela condição 'x *divide* y' no conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o conjunto de pares ordenados:

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Um modo sugestivo de definir uma relação em tais casos é representar os elementos por pontos (dispostos de qualquer modo), e indicar os pares ordenados por meio de setas, que se dirigem do primeiro elemento para o segundo elemento de cada par. Assim, para as relações R e S dos dois exemplos anteriores, temos, respectivamente, os dois seguintes diagramas:





Um outro processo ainda a utilizar nestes casos é o das tabelas de duas entradas, usando por exemplo o valor lógico V para os pares ordenados que verificam a relação e o valor F para os pares ordenados que não a verificam. Assim, para as referidas relações R e S temos respectivamente as tabelas:

x R y

x \ y	1	2	3	4
1	F	V	V	V
2	F	F	V	V
3	F	F	F	V
4	F	F	F	F

x S y

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	V	V	V	V	V	V
2	F	V	F	V	F	V
3	F	F	V	F	F	V
4	F	F	F	V	F	F
5	F	F	F	F	V	F
6	F	F	F	F	F	V

No caso particular em que os elementos dados são os próprios valores lógicos a relação é ao mesmo tempo uma operação lógica, como já se viu no Cap. I (o conceito geral de operação será estudado num capítulo posterior). Aliás, estas tabelas tornam-se mais simples e sugestivas, se usarmos simplesmente um ponto para o valor V e um espaço em branco para o valor F.

Já vimos que, na linguagem comum, a distinção entre indivíduos (ou elementos) e classes (ou conjuntos) é acusada pela divisão dos substantivos em *próprios* e *comuns*. Há, porém, substantivos comuns que não se referem exactamente a classes mas sim a relações: poderíamos chamar-lhes por isso *substantivos relativos*. Tais são, por exemplo, os substantivos 'filho', 'irmão', 'colega', etc. Assim, a palavra 'filho' não se aplica propriamente a indivíduos *duma determinada classe*, mas sim aos pares ordenados de indivíduos que verificam a *relação* definida pela condição:

'x *é filho de* y'

e analogamente nos outros casos. Mas, na linguagem comum, as relações binárias não são expressas unicamente por meio de substantivos relativos: também por meio de *adjectivos*, nos graus positivo ou comparativo (p. ex. 'múltiplo', 'paralelo', 'perpendicular', 'maior', 'menor', 'mais alto', 'mais denso', etc.) ou por meio de proposições ('acima', 'abaixo', 'antes', 'depois', 'ao norte', etc.) ou ainda por meio de *verbos transitivos* ('divide', 'intersecta', etc.).

19. **Restrições duma relação.** Dados um conjunto U e uma relação binária R definida em U, chama-se *restrição de* R *a um subconjunto* V de U a relação R' assim definida em V:

$$x \, R' \, y \Leftrightarrow x \, R \, y, \ \forall \ x, y \in V$$

isto é:

$$R' = R \cap V^2$$

Também se diz neste caso que R é uma *extensão* (ou um *prolongamento)* de R′ a U.

Por exemplo, a relação R atrás definida no conjunto A = $\{1, 2, 3, 4\}$ é a *restrição da relação* $<$ (definida em $\mathbb{R}$) ao subconjunto A de $\mathbb{R}$; por sua vez, a restrição dessa relação R ao conjunto A′ = $\{1, 2, 3\}$ é a relação R′ = $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Muitas vezes, quando não há perigo de confusão, designam-se pelo mesmo símbolo a relação e a sua restrição. Por exemplo: o sinal $<$ designa indiferentemente a relação de grandeza definida em $\mathbb{R}$, a sua restrição a $\mathbb{N}$, etc.

20. **Relações reflexivas e relações anti-reflexivas.** Vimos que a relação *divide*, restringida ao conjunto B = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, é verificada pelos pares (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), visto que *todo o número* x *se divide a si próprio,* isto é:

$$x \text{ divide } x, \ \forall\, x \in B$$

Este facto é traduzido no diagrama anterior por *lacetes* em todos os elementos, isto é, por setas que se dirigem de *cada* elemento para o *próprio* elemento; e na tabela de duas entradas pela presença do valor V em todos os lugares da 1.ª diagonal. Exprime-se este facto, dizendo que a relação é *reflexiva.* Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida num conjunto* U *é reflexiva, sse:*

$$x \, R \, x, \ \ \forall\, x \in U$$

Esta propriedade também se pode exprimir simbolicamente, escrevendo:

$$x = y \ \Rightarrow \ x \, R \, y \ \ (\forall\, x, y \in U)$$

Por outro lado:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida em* U *é anti-reflexiva, sse:*

$$x \mathrel{R} y \Rightarrow \quad x \neq y \quad (\forall\, x\,,\, y \in U)$$

Assim, a relação *divide* no universo $\mathbb{N}$ é reflexiva, ao passo que a relação $<$ em $\mathbb{N}$ (ou mesmo em $\mathbb{R}$) é anti-reflexiva, visto que $x < y \Rightarrow x \neq y$. A relação $\subset$ entre conjuntos, é reflexiva, mas a relação *contido estritamente* é anti-reflexiva ([1]).

Outros exemplos: Sendo r, s duas rectas, escreve-se $r \parallel s$, para indicar que r *é paralela a* s, e $r \perp s$, para indicar que r *é perpendicular a* s; é claro que se tem, nestes casos:

$$r \parallel r,\ \forall\, r$$

$$r \perp s \Rightarrow r \neq s$$

Assim, a relação $\parallel$ (de paralelismo) é reflexiva: *toda a recta é paralela a si própria* (por definição). Pelo contrário a relação $\perp$ (de perpendicularidade) é anti-reflexiva: *nenhuma recta é perpendicular a si própria* (em geometria euclidiana).

A relação *semelhante* entre figuras geométricas é reflexiva: *toda a figura é semelhante a si própria.* Mas já as relações *filho* (entre pessoas), *mais denso* (entre substâncias), etc. são anti-reflexivas.

Note-se que uma relação pode não ser reflexiva nem anti-reflexiva. Por exemplo, a relação definida em $\mathbb{R}$ pela condição:

$$x < 2\,y$$

não é reflexiva (não se tem $x < 2\,x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$) nem

---

([1]) Não esquecer que, neste caso, a relação é definida no *conjunto* de todos os subconjuntos dum conjunto dado.

anti-reflexiva, como é fácil ver; no entanto, a restrição desta relação a $\mathbb{N}$ é reflexiva: *todo o número natural é menor que o seu dobro.*

21. Relação inversa. Relações simétricas e relações anti--simétricas. Dada uma relação binária R num conjunto U, chama-se *relação inversa,* de R e designa-se por R^{-1} a relação assim definida:

$$x\ R^{-1}\ y \Leftrightarrow y\ R\ x$$

Por exemplo, tem-se:

x *é múltiplo de* y $\Leftrightarrow$ y *divide* x

Assim, a relação *é múltiplo de* (ou, abreviadamente, a relação *múltiplo*) é inversa da relação *divide.* Analogamente, a relação $>$ é inversa da relação $<$, a relação $\supset$ inversa de $\subset$, a relação *pai ou mãe,* inversa da relação *filho ou filha,* etc.

Mas já a inversa da relação $=$ é a relação $=$, a inversa de $\parallel$ é $\parallel$, a inversa de $\perp$ é $\perp$, a inversa de *semelhante* é *semelhante,* a inversa de *irmão ou irmã* é *irmão ou irmã*, etc. Quando uma relação coincide com a sua inversa, diz-se que é *simétrica,* isto é:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida num conjunto* U *é simétrica, sse:*

$$x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x \quad (\forall\ x, y \in U)$$

Nesta hipótese tem-se, pelo princípio de substituição das variáveis aparentes, $y\ R\ x \Rightarrow x\ R\ y$, e portanto $x\ R\ y \Leftrightarrow y\ R\ x$, o que significa precisamente que $R = R^{-1}$.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R, *definida num conjunto* U, *é anti-simétrica, sse:*

$$x\ R\ y \Rightarrow y\ \not R\ x \quad (\forall\ x, y \in U)$$

Por exemplo, a relação $<$ no universo $\mathbb{R}$ é anti-simétrica, visto que $x < y \Rightarrow y \not< x$. Também as relações *contido estritamente, filho,* etc., são anti-simétricas. Mas já as relações $\subset$, $\leqslant$, *divide,* etc. não são simétricas, nem anti-simétricas, segundo as anteriores definições. Porém:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R, *definida num conjunto* U, *é anti-simétrica em sentido lato, sse:*

$$x \; R \; y \wedge y \; R \; x \;\Rightarrow\; x = y \quad (\forall\, x, y \in U)$$

Por exemplo, já vimos que a relação $\subset$ é anti-simétrica em sentido lato. Analogamente, é fácil ver que as relações $\leqslant$, *divide* (em $\mathbb{N}$), etc., são anti-simétricas em sentido lato.

Como exercício, interessa ver como se reconhece se uma relação é simétrica ou anti-simétrica ou anti-simétrica em sentido lato, quando definida por um diagrama ou por uma tabela.

Também interessa muito conhecer uma particularidade das designações de relações simétricas na linguagem comum. Por exemplo, diz-se indiferentemente:

'X é irmão de Y' ou 'X e Y são irmãos'

'X é colega de Y' ou 'X e Y são colegas'

'*r* é paralela a *s*' ou '*r* e *s* são paralelas'

'*r* é perpendicular a s' ou '*r* e *s* são perpendiculares'

'A é disjunto de B' ou 'A e B são disjuntos'.

Mas já a expressão 'X é filho de Y' não é de modo nenhum equivalente a 'X e Y são filhos'; a expressão 'x é menor que y' não é equivalente a 'x e y são menores', etc. É claro que no primeiro caso se trata de relações simétricas, e no segundo de relações não simétricas.

Como se vê, quando uma relação simétrica é indicada, na linguagem comum, por um substantivo ou adjectivo, este pode figurar, no singular, entre os dois termos do par ordenado (além do verbo e duma preposição) ou no plural, após os dois termos do par ordenado (mas já sem preposição). Esta segunda forma linguística implica sempre que a relação é simétrica.

Algumas vezes para evitar possível equívoco, acrescenta-se a expressão 'entre si' à segunda forma. Por exemplo, pode dizer-se indiferentemente, a respeito de dois números naturais m e n:

'm *é primo com* n' ou 'm e n *são primos entre si*'

mas não 'm *e* n *são primos*'. Com efeito, o adjectivo 'primo' tem duas acepções em aritmética, sendo umas vezes *absoluto* (isto é, aplicável a uma classe de números) e outras vezes *relativo* (isto é, aplicável a uma relação entre números). Assim, é verdade que 14 *e* 15 *são primos entre si* (isto é, 14 *é primo com* 15), mas é falso que 14 *e* 15 *são primos.*

22. **Relações transitivas. Relações de equivalência.** Já atrás se nos apresentaram exemplos de relações transitivas: tais são as relações $\Rightarrow$, $\subset$, etc. O conceito geral é assim definido:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação* R, *definida num conjunto* U, *é transitiva, sse:*

$$x \, R \, y \wedge y \, R \, z \;\Rightarrow\; x \, R \, z \quad (\forall\, x, y, z \in U)$$

Se a relação é dada por um diagrama, isto quer dizer que, sempre que haja duas setas seguidas, dum elemento *a* para um elemento *b* e de *b* para um elemento *c*, deve haver também uma seta, directamente de *a* para *c*. Estão neste caso os diagramas do n.º 18; na verdade as relações $<$ e *divide* são transitivas, mesmo no universo $\mathbb{N}$.

Mas não são transitivas as relações $\perp$, *filho, irmão,* etc., como é fácil ver. Por exemplo, pode haver três indivíduos x, y e z tais que x *é irmão de* y $\wedge$ y *é irmão de* z, sem que seja x *irmão de* z. A relação *sucessor*, no universo $\mathbb{N}$, também não é transitiva (diz-se que um número natural x é sucessor de outro número natural y, quando x = y + 1); esta relação, restringida por exemplo ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, conduz ao diagrama:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4,$$

que patenteia a não transitividade da relação.

DEFINIÇÃO. *Chamam-se relações de equivalência as relações binárias que são ao mesmo tempo reflexivas, simétricas e transitivas.*

A mais simples de todas as relações de equivalência é a *relação lógica de identidade,* num universo qualquer. Tem-se, com efeito:

1. $a = a, \ \forall a$
2. $a = b \Rightarrow b = a$
3. $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

A propriedade 1 é o PRINCÍPIO DA IDENTIDADE (pág. 15). As propriedades 2 e 3 resultam de 1, pelos princípios lógicos de substituição.

Note-se que o diagrama desta relação num universo finito se reduz a lacetes, para todos os elementos. Assim, no universo $\{1, 2, 3, 4\}$:

São ainda relações de equivalência as relações de paralelismo e de semelhança, a relação *compatriota* (aplicada a pessoas), etc. Não são relações de equivalência as relações *irmão ou irmã* e *perpendicular,* porque não são reflexivas nem transitivas (apenas simétricas).

Uma relação de equivalência muito importante em geometria é a *relação de igualdade geométrica*. Sabemos (ou julgamos saber) o que em geometria significa '*uma figura ser igual a outra*'. Esta noção obedece às seguintes propriedades:

1. *Uma figura* F *é sempre igual a si própria.*
2. *Se* F *é igual a* G, *então* G *é igual a* F.
3. *Se* F *é igual a* G *e* G *é igual a* H, *então* F *é igual a* H.

Trata-se, pois, duma relação reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja duma relação de equivalência. Mas não convém indicar esta relação com o sinal =, que, como já sabemos, está reservado para a relação lógica de identidade. Ora a igualdade geométrica não é identidade: *duas figuras podem ser iguais sem serem a mesma figura* (entendendo aqui por 'figura' um conjunto qualquer de pontos, p. ex. um segmento de recta).

Para indicar a igualdade geométrica, usaremos o sinal $\cong$ (que se lê '*é geometricamente igual a*') entre as designações das figuras.

Tornaremos, mais adiante, ao estudo geral das relações de equivalência.

CAPÍTULO III

NÚMEROS INTEIROS E CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. **Número de elementos dum conjunto.** A noção de número apresenta-se pela primeira vez ao espírito do homem como resultado da *operação de contagem*. O homem primitivo conta as ovelhas dum rebanho, fazendo corresponder a cada ovelha uma determinada pedra, de modo que a duas ovelhas distintas correspondam sempre duas pedras distintas; assim, o conjunto de pedras utilizadas na contagem representa o *número* de ovelhas do rebanho, de tal modo que, se, por exemplo, vier a faltar uma ovelha, há sempre possibilidade de dar pela ausência, ao tentar estabelecer de novo a correspondência entre as ovelhas e as pedras.

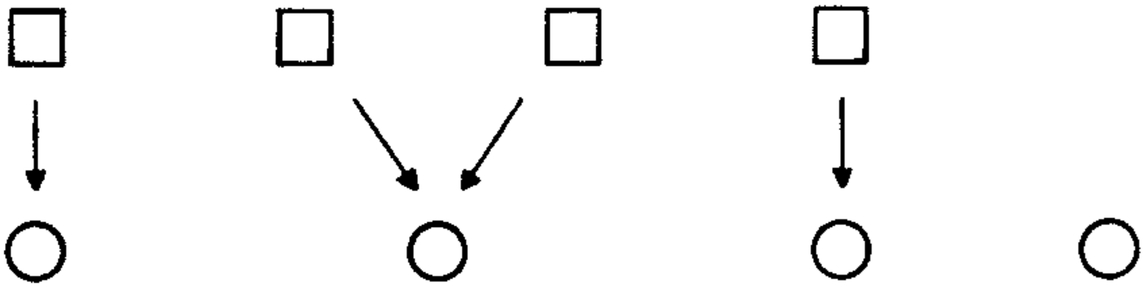
Aparece-nos aqui um novo conceito — o de *correspondência* — que, tal como os conceitos de elemento, conjunto e sequência, não definimos, mas apenas procuraremos esclarecer por meio de exemplos.

Sejam A e B dois conjuntos. Se, a cada elemento de A, fizermos corresponder um elemento, *e um só,* de B, diz-se que fica estabelecida uma *correspondência unívoca entre* A *e* B (¹). Por exemplo, a seguinte figura indica uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, sendo os elementos do primeiro representados por quadrados,

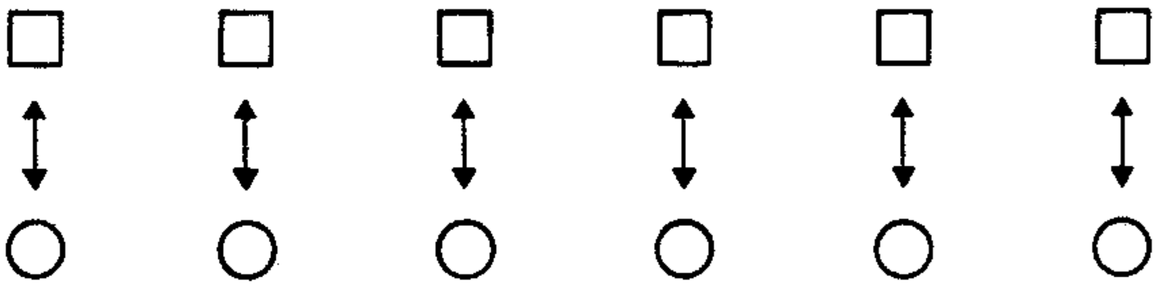
---

(¹) Trata-se aqui, a bem dizer, duma relação binária, subconjunto de A x B. Mas isso será discutido mais tarde.

os do segundo por círculos e a correspondência por meio de setas que vão de cada quadrado ao círculo correspondente:



Se, a cada elemento de um conjunto A, corresponder um determinado elemento de B, de modo que, reciprocamente, cada elemento de B corresponda deste modo a um elemento de A, *e um só*, a correspondência diz-se *biunívoca* ou correspondência *um-a-um entre* A *e* B. Exemplo figurado:



No exemplo anterior de contagem das ovelhas por meio de pedras, o que se faz é *estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto das ovelhas e um conjunto de pedras.* Deste modo, se vier a faltar alguma ovelha, já não será possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto das ovelhas presentes e o conjunto das pedras, pois sobrará, pelo menos, uma pedra.

Vejamos ainda outros exemplos de correspondência:

I. Consideremos uma estante que tenha vários livros em cada prateleira. Há, neste caso, uma correspondência unívoca entre o conjunto dos livros e o conjunto das prateleiras, pois a cada livro corresponde uma prateleira *e uma só*: aquela onde o livro está colocado.

Mas uma prateleira corresponde assim a mais de um livro: a correspondência não é, pois, biunívoca.

II. Numa dada turma dum liceu, a cada aluno corresponde uma (e só uma) carteira — aquela onde se senta. Se as carteiras são individuais e se todas são ocupadas, a correspondência é biunívoca entre os dois conjuntos e o *número de alunos é, portanto, igual ao número das carteiras.* Caso contrário, isto é, se as carteiras não são individuais ou se há carteiras não ocupadas a correspondência será unívoca, mas não será em geral biunívoca entre os dois conjuntos.

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *diz-se que* A *é equipotente a* B, *sse é possível definir uma correspondência biunívoca entre* A *e* B.

Vê-se logo, intuitivamente, que a relação *equipotente* assim definida é reflexiva, simétrica e transitiva, portanto uma *relação de equivalência.* Posto isto:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que dois conjuntos* A *e* B *têm o mesmo número de elementos (ou a mesma potência), sse* A *e* B *são sequipotentes.*

Deste modo, o *número de elementos* dum conjunto A (também chamado *número cardinal* ou simplesmente *cardinal de* A) é, por assim dizer, a propriedade que esse conjunto tem de comum com todos os conjuntos que se possam pôr em correspondência biunívoca com A ([1]). Por conseguinte, o número de elementos de A poderá ser representado indistintamente por qualquer desses conjuntos (equipotentes a A) incluindo o próprio A.

Por exemplo, no caso das ovelhas, o seu número pode ser representado pelo próprio conjunto das ovelhas ou pelo referido conjunto

---

([1]) Modernamente, o número de elementos dum conjunto é em geral concebido *extensivamente,* isto é, como *classe* de conjuntos e não como *propriedade* característica dessa classe.

de pedras ou por qualquer outro conjunto que se possa pôr em correspondência biunívoca com o primeiro. É frequente as crianças indicarem com os dedos o número de anos que têm. Alguns pastores contam as cabeças dum rebanho por meio de entalhes feitos num cajado. E ainda hoje, em certas ocasiões, contamos os elementos dum conjunto, fazendo corresponder a cada elemento um risco num papel; assim se geram símbolos tais como:

I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII, IIIIIII, etc.

que podem ser tomados como designações de *números*. Encontramos vestígios deste processo elementar nos símbolos I, II, III, IIII da numeração romana. Mas note-se como já os símbolos IIII, IIIII, ... são substituídos pelas suas *abreviaturas* IV, V, ..., a fim de evitar uma escrita demasiado longa. É assim, por meio de *convenções simbólicas*, que os sistemas de numeração começam a simplificar-se e a aperfeiçoar-se no decorrer dos séculos. O mais perfeito dos sistemas hoje usados habitualmente — o da numeração decimal, que será estudado mais tarde em pormenor — nasceu de pôr os objectos contados em correspondência com dedos das duas mãos, uma ou mais vezes.

Chama-se *número natural* (ou *número inteiro positivo*) o número de elementos dum conjunto finito qualquer, não vazio. Os números naturais são, habitualmente, designados pelos símbolos da numeração decimal:

$$1, 2, 3, ..., 10, 11, ..., 100, 101, 102, ...$$

Por sua vez, o conjunto de *todos* os possíveis números naturais é designado pelo símbolo $\mathbb{N}$. A experiência que adquirimos diariamente no uso dos números naturais induz-nos a admitir que o *conjunto* $\mathbb{N}$ é *infinito*.

Por outro lado, somos levados a atribuir aos conjuntos vazios também um número, que se chama *zero* e se designa pelo símbolo 0. *Portanto, dizer que um conjunto é vazio equivale a dizer que o número dos seus elementos é zero.* Assim se nos apresenta, para comodidade de linguagem, uma primeira extensão da ideia de número. Os números naturais e o número zero recebem a designação comum de *números inteiros absolutos* (ou *números inteiros não negativos*); representaremos por $\mathbb{N}_0$ este conjunto. Assim, temos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e portanto} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$$

O número de elementos dum conjunto finito A *é designado pelo símbolo* $\#$ A. Se A é vazio, tem-se $\# A = 0$. Se A não é vazio, tem-se $\# A \in \mathbb{N}$.

Em particular: $\# A = 1 \Leftrightarrow \exists^1 x : x \in A$.

2. **Reunião de dois conjuntos disjuntos e soma de dois números.** A noção intuitiva que todos temos de 'conjunto finito' implica as duas seguintes propriedades:

1) *Todo o subconjunto dum conjunto finito é ainda finito.*

2) *A reunião de dois conjuntos finitos é ainda um conjunto finito.*

Ora, o conceito de *reunião de conjuntos* dá lugar ao conceito de *soma de números,* do seguinte modo:

DEFINIÇÃO. *O número de elementos de* $A \cup B$ *é chamado soma do número de elementos de* A *com o número de elementos de* B, *sse* A *e* B *são disjuntos (isto é, se* $A \cap B = \varnothing$*).*

Sejam *a* e *b* dois números naturais quaisquer. Então existem, pelo menos, dois conjuntos finitos A e B, não vazios, tais que:

$$\# A = a, \quad \# B = b$$

Estes conjuntos A e B podem ser ou são disjuntos. Porém, a experiência quotidiana leva-nos a admitir, por *indução* (ver Cap. I, n.º 17), o seguinte facto:

3) *Quaisquer que sejam os números naturais* a, b, *é sempre possível determinar dois conjuntos finitos* A *e* B *disjuntos, tais que* $\# A = a, \# B = b$.

Ora, nesta hipótese, segundo 2), a reunião de A com B é um conjunto finito e, por definição, $\# (A \cup B)$ é soma de *a* com *b*. Por conseguinte:

I. PROPOSIÇÃO DE EXISTÊNCIA. *Para todo o par ordenado de números naturais* a *e* b, *existe (pelo menos) um número natural* c, *tal que* c *é soma de* a *com b*.

Por outro lado, é fácil ver que:

II. PROPOSIÇÃO DE UNICIDADE. *Para todo o par ordenado de números naturais* a *e* b, *não pode existir mais de um número natural* c *que seja soma de* a *com* b.

Com efeito, suponhamos que *c* e *c'* são soma de *a* com *b*. Quer isto dizer que existem dois conjuntos A e B disjuntos tais que:

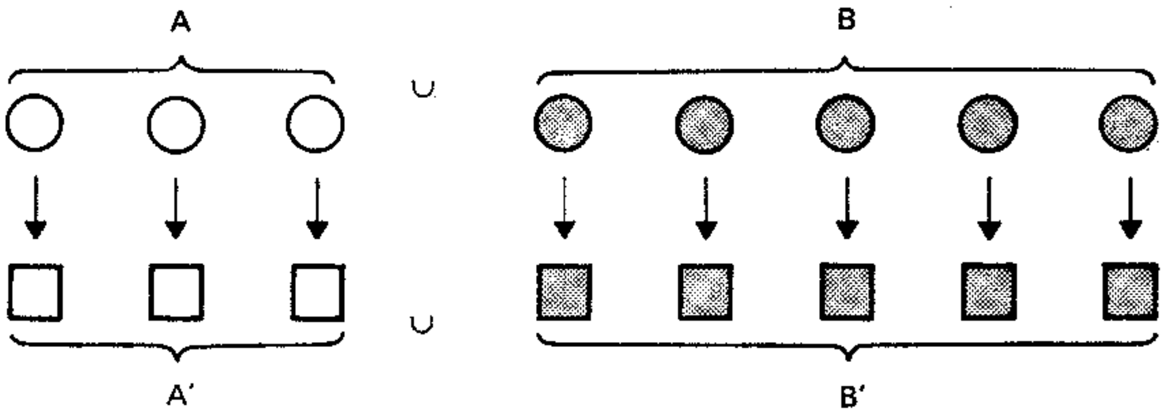
$$\# A = a, \quad \# B = b, \quad \# (A \cup B) = c$$

e dois conjuntos A' e B' disjuntos tais que:

$$\# A' = a, \quad \# B' = b, \# (A' \cup B') = c'$$

Mas, como $\# A = \# A'$ e $\# B = \# B'$, existem correspondências biunívocas entre A e A', e entre B e B'. E, como $A \cap B = \varnothing$, $A' \cap B' = \varnothing$, essas correspondências permitem definir uma correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $A' \cup B'$. Logo $\# (A \cup B) = \# (A' \cup B')$ ou seja $c = c'$.

EXEMPLO FIGURADO:



Assim, a cada par ordenado de números naturais a *e* b, *fica a corresponder um, e um só, número natural, que se chama a soma de* a *com* b. A soma de *a* com *b* é representada pela notação a + b.

Chama-se *adição* a operação que faz corresponder a cada par (a, b) de números naturais o número a + b.

A proposição I exprime-se dizendo que a adição em $\mathbb{N}$ é *sempre possível* e a proposição II, dizendo que a adição em $\mathbb{N}$ é *unívoca* (ou *uniforme*). De tudo isto resulta, aplicando o PRINCIPIO LÓGICO DE SUBSTITUIÇÃO, a seguinte propriedade válida no universo $\mathbb{N}$:

$$a = a' \wedge b = b' \Rightarrow a + b = a' + b'$$

Notemos, agora que, todas estas considerações relativas a *números naturais* (conjunto $\mathbb{N}$) se estendem a *números inteiros absolutos* (conjunto $\mathbb{N}_0$). Como, por definição, 0 é o número de elementos do conjunto vazio e

$$A \cup \varnothing = A \quad \textit{qualquer que seja o conjunto } A,$$

segue-se que:

$$a + 0 = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{N}_0$$

Exprime-se este facto, dizendo que 0 *é elemento neutro* da adição em $\mathbb{N}_0$ (em $\mathbb{N}$ não existe elemento neutro da adição).

3. **Comutatividade e associatividade da adição. Adição iterada.** É evidente que a comutatividade e a associatividade da reunião de conjuntos tem como consequência a comutatividade e associatividade da adição de números. Assim, quaisquer que sejam a, b, c $\in \mathbb{N}_0$, tem-se:

$$a + b = b + a \quad \text{(PROPRIEDADE COMUTATIVA)}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(PROPRIEDADE ASSOCIATIVA)}$$

Por exemplo, se $a = \# A$, $b = \# B$, com $A \cap B = \varnothing$, tem-se:

$$a + b = \# (A \cup B) = \# (B \cup A) = b + a$$

e analogamente para a associatividade.

Mas note-se que há propriedades da reunião que não se transmitem à adição de números. Por exemplo, vimos que, entre os subconjuntos dum universo U, há um *elemento absorvente*, para a reunião, que é precisamente U. Ora, não há nenhum elemento absorvente para a adição em $\mathbb{N}_0$, isto é, nenhum elemento n tal que

$$a + n = n \quad , \quad \forall\, a \in \mathbb{N}_0.$$

Por outro lado, tem-se:

$$A \cup A = A, \ \forall\, A \subset U \ \textit{(propriedade de idempotência)}$$

ao passo que, em $\mathbb{N}_0$, só poderá $a + a = a$ quando $a = 0$; exceptuado este caso, é sempre $a + a \neq a$.

Seja agora *n* um número natural diferente de 1. Chama-se *soma de* n *números* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o número que se obtém adicionando o primeiro com o segundo, adicionando depois o resultado com o terceiro, e assim sucessivamente, até chegar ao último. A soma dos *n* números dados (chamados *parcelas*) representa-se pela notação:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ou ainda pela notação mais condensada e mais correcta:

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ (ler: *somatório de* a_k *de* 1 *a* n)

Em particular, para n = 2, 3, 4, ..., temos:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2\,, \quad \sum_{k=1}^{3} a_k = (a_1 + a_2) + a_3$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = ((a_1 + a_2) + a_3) + a_4, \ldots$$

Deste modo, partindo do conceito de *soma de dois números,* é definido o conceito de *soma de três ou mais números.* A operação assim definida para mais de dois dados é chamada *adição iterada*(1). Define-se, inclusivamente, *soma de um único número* como sendo esse mesmo número, isto é, pondo simbolicamente:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

Seja por exemplo $a_k = k$, para k = 1, 2, ... Então:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Temos estado a usar exclusivamente a letra k como *índice de adição,* mas trata-se, neste caso, de uma *variável aparente* (também

(1) Também chamada *adição sucessiva.* O adjectivo 'iterado' é sinónimo de 'repetido'.

aqui chamada *índice mudo*), sujeita à mesma regra de substituição das variáveis aparentes em quantificadores (pág. 71). Assim, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{y=1}^{n} a_y = \ldots$$

É claro que poderíamos definir directamente *soma de* n *números* $a_1, \ldots a_n$ (com *n* natural qualquer), a partir da reunião de n conjuntos, $A_1, \ldots, A_n$, tais que $\# A_1 = a_1, \ldots, \# A_n = a_n$, sendo estes conjuntos disjuntos dois a dois, isto é, sendo $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$. Com efeito, tem-se neste caso:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \# (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

ou, abreviadamente:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \# \bigcup_{k=1}^{n} A^k$$

Mas, note-se que estamos a considerar apenas um número finito de parcelas, ao passo que a reunião de conjuntos se pode definir para uma infinidade de parcelas (ver Cap. II, n.º 13).

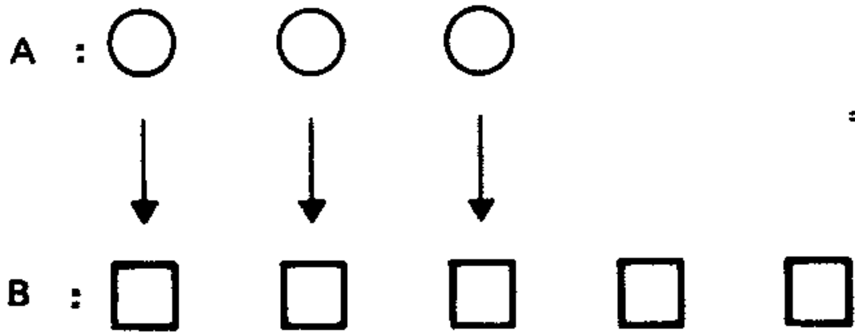
Entretanto, é fácil ver que a comutatividade e a associatividade se estendem à adição iterada sob as seguintes formas:

COMUTATIVIDADE GENERALIZADA. *A soma de vários números não se altera quando se muda a ordem das parcelas.*

ASSOCIATIVIDADE GENERALIZADA. *A soma de vários números não se altera quando se substituem duas ou mais parcelas pela sua soma.*

4. **Relação de grandeza entre números.** Diz-se que o número de elementos dum conjunto A *é menor que* o número de elementos

dum conjunto B, quando A é equipotente a uma parte de B, mas não é equipotente a B. Para indicar que um número *a* é menor que um número *b* escreve-se $a < b$; neste caso também se escreve $b > a$ e se diz que b *é maior que* a. Exemplo figurado:



$$\# A < \# B$$

Pela experiência que temos com os conjuntos finitos sabemos que:

Um conjunto finito nunca é equipotente a uma sua parte estrita(1).

Daqui e da definição anterior resulta que *a inclusão estrita entre conjuntos finitos* A *e* B *(não vazios) dá lugar à relação de grandeza, expressa pelo sinal* $<$*, entre números naturais;* isto é:

(1) $$A \subset B \wedge A \neq B \Rightarrow \# A < \# B$$

A relação $<$ é estendida a $\mathbb{N}_0$ mediante a seguinte definição:

$$0 < a \Leftrightarrow 0 \neq a \quad (\forall a \in \mathbb{N}_0)$$

que mantém a propriedade (1).

É fácil ver agora que:

I. *A relação* $<$ *é anti-reflexiva,* isto é:

$$x < y \Rightarrow x \neq y \quad (\text{em } \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{N}_0)$$

---

(1) Como veremos adiante, esta propriedade não é válida para conjuntos infinitos e pode, por isso, ser tomada para definição de 'conjunto finito'.

Além disso prova-se, como indicaremos mais adiante, que:

II. *A relação $<$ é anti-simétrica,* isto é:

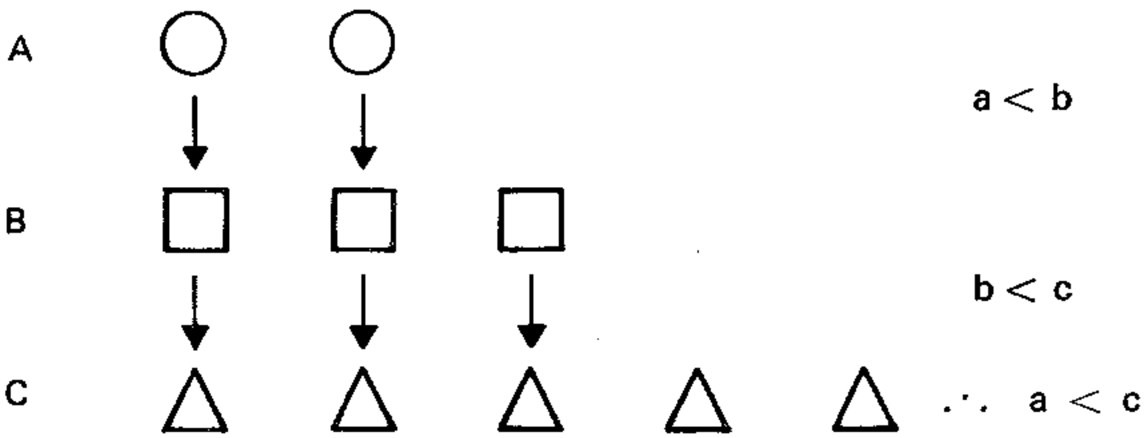
$$x < y \Rightarrow y \nless x$$

Por sua vez, a transitividade da relação de inclusão dá lugar à transitividade da relação de grandeza $<$ (em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$):

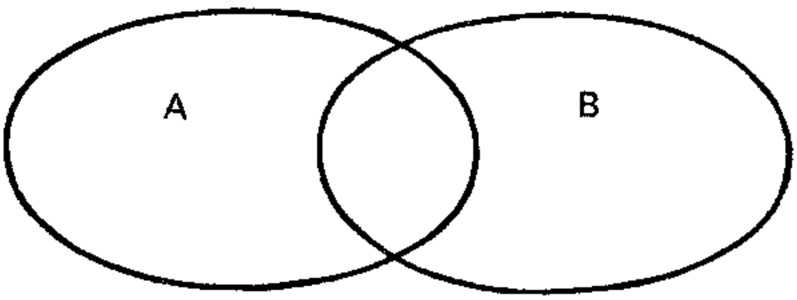
III. $$a < b \ \wedge \ b < c \Rightarrow a < c$$

Esquema demonstrativo:

$$a = \# A, \ b = \# B, \ c = \# C$$



Mas, surge agora uma propriedade nova. Já tínhamos visto (pág. 92) que, dados dois conjuntos A e B, pode acontecer que nenhum deles esteja contido no outro. Porém, a experiência quotidiana conduz-nos, *por indução,* à seguinte lei:



Dados dois conjuntos finitos A *e* B *não vazios, é sempre possível estabelecer uma correspodência biunívoca entre um deles e um subconjunto do outro.*

Passando a números. esta lei traduz-se pela seguinte propriedade:

IV. *Dados dois números naturais* a, b, *tem-se sempre: ou* $a < b$ *ou* $b < a$ *ou* $a = b$. Simbolicamente:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N}: \quad a < b \vee b < a \vee a = b$$

Exprime-se este facto, dizendo que a relação $<$ é *tricotómica*. A conjunção das propriedades I, II e IV é chamada PROPRIEDADE DA TRICOTOMIA FORTE e pode enunciar-se do seguinte modo:

IV'. *Dados dois números naturais* a, b, *verifica-se sempre uma, e uma só, das seguintes hipóteses:*

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

5. **Relação de grandeza lata.** A partir da relação $<$ define-se a relação $\leqslant$, chamada *relação de grandeza lata,* tal como se segue:

DEFINIÇÃO. $\quad a \leqslant b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

E não oferece dificuldade verificar que as propriedades I, II, III e IV são, agora, substituídas pelas seguintes:

I'. $a = b \Rightarrow a \leqslant b$ (REFLEXIVA)

II'. $a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (ANTI-SIMÉTRICA LATA)

III'. $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (TRANSITIVA)

IV'. $\forall\, a, b \in \mathbb{N}: \ a \leqslant b \vee b \leqslant a$ (DICOTÓMICA)

É manifesto que a relação $\leqslant$ entre números traduz a relação $\subset$ entre conjuntos:

$$A \subset B \Rightarrow \# A \leqslant \# B$$

Todavia, a relação $\subset$, que é reflexiva, anti-simétrica lata e transitiva (como a relação $\leqslant$), *não é dicotómica,* como já observámos.

6. **Adição e relação de grandeza.** Das propriedades anteriores deduzem-se algumas outras que vamos demonstrar:

PROPOSIÇÃO 1. *A soma de dois números naturais é sempre maior que qualquer desses números; isto é, simbolicamente:*

$$a < a + x, \quad \forall a, x \in \mathbb{N}$$

Demonstração:

Seja $a = \# A$, $x = \# X$, sendo A e X conjuntos finitos disjuntos e não vazios. Então:

$$a + x = \# (A \cup X), \quad A \subset A \cup X \ \text{ e } \ A \neq A \cup X$$

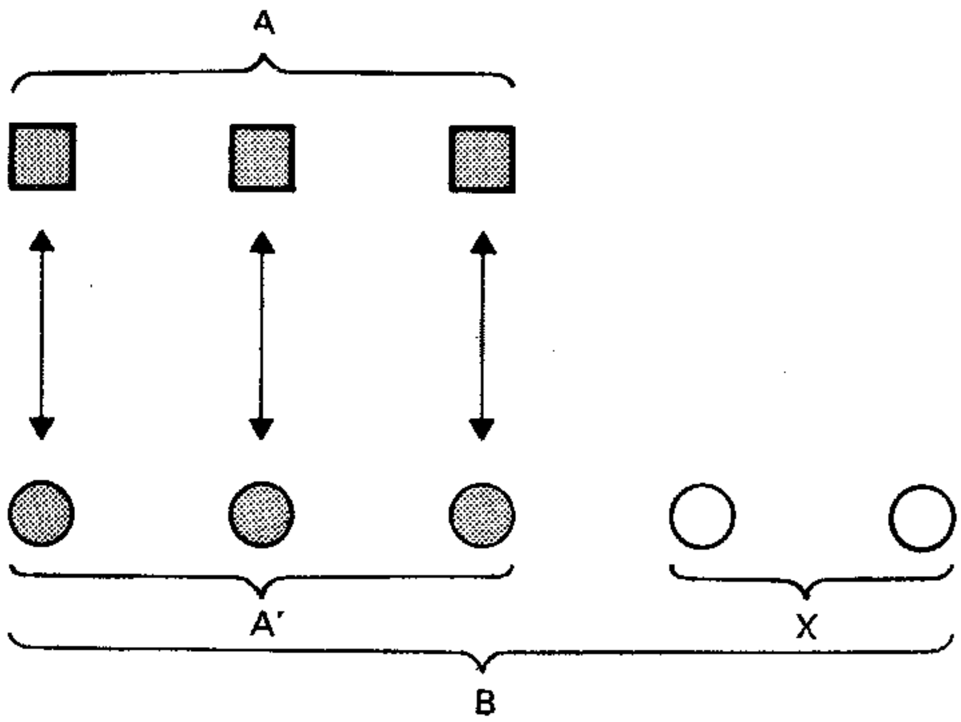
E, como a inclusão estrita entre conjuntos finitos implica a relação $<$ entre números (n.º 4), vem $a < a + x$.

PROPOSIÇÃO 2. *Dados dois números naturais* a *e* b *tais que* $a < b$, *existe sempre (pelo menos) um número natural* x *tal que* $a + x = b$; *isto é, simbolicamente:*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: \ a < b \Rightarrow \exists x, a + x = b$$

Demonstração:

Seja $a = \# A$, $b = \# B$ e $a < b$. Então podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre A e um conjunto A′ contido estritamente em B. Ponhamos $B \setminus A' = X$; então $A' \cup X = B$ e $A' \cap X = \emptyset$, de modo que, se pusermos $\# X = x$, virá $a + x = b$.



A conjunção das proposições 1 e 2 pode enunciar-se como segue (no universo $\mathbb{N}$):

(1) $$\boxed{a < b \Leftrightarrow \exists x, \quad a + x = b}$$

Esta proposição poderia mesmo ser tomada como definição do conceito de 'menor que' ($<$) a partir do conceito de 'soma' (+), no universo $\mathbb{N}$*: Diz-se que* $a < b$*, sse existe pelo menos um* x *tal que* $a + x = b$.

De (1) e das propriedades da adição deduzem-se novas proposições. Assim:

PROPOSIÇÃO 3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Suponhamos $a < b$. Então existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Ora, pelas propriedades associativa e comutativa da adição, tem-se:

$$(a + c) + x = a + (c + x) = a + (x + c) = (a + x) + c = b + c$$

Assim: $(a + c) + x = b + c$ e portanto $a + c < b + c$.

A proposição 3 pode ser enunciada em linguagem comum dizendo *'Quando uma das parcelas aumenta, a soma aumenta'* ou ainda *'Adicionando o mesmo número a ambos os membros duma relação de grandeza, a relação mantém-se'*. Exprime-se esta facto dizendo que a adição é uma operação *monótona.*

OBSERVAÇÃO. As propriedades anti-simétrica e transitiva da relação $<$ em $\mathbb{N}$ poderiam igualmente ser deduzidas de (1), aplicando a propriedade anti-reflexiva e as propriedades da adição. Essas deduções podem ser feitas como exercício.

Por sua vez, da proposição 3 deduz-se:

PROPOSIÇÃO 4. $a + c = b + c \Rightarrow a = b, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$

Demonstração:

Suponhamos $a + c = b + c$. Segundo a propriedade da tricotomia, só pode ser $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$. Mas se fosse $a < b$ viria, pela monotonia de adição, $a + c < b + c$, e então não poderia ser $a + c = b + c$ (propriedade anti-reflexiva).

Analogamente, se fosse $b < a$, viria $b + c < a + c$, e não poderia ser $a + c = b + c$. Por conseguinte só pode ser $a = b$. (COMPARE ESTA DEMONSTRAÇÃO COM O EXEMPLO DE POLISSILOGISMO DADO NO CAPÍTULO I, N.º 17).

A propriedade da adição que acabámos de demonstrar é chamada PROPRIEDADE DA REDUÇÃO ou PROPRIEDADE DO CORTE, pois que se passa de $a + c = b + c$ para $a = b$, *cortando* o termo *c* em ambos os membros da primeira igualdade.

Daqui, por sua vez, deduz-se o seguinte:

COROLÁRIO. *Dados dois números* $a, b \in \mathbb{N}$, *não pode existir mais de um* $x \in \mathbb{N}$ *tal que* $a + x = b$.

Com efeito, se x e y são números naturais tais que $a + x = b$ e $a + y = b$, então $a + x = a + y$, donde, pela propriedade do corte, $x = y$. Portanto, simbolicamente:

$$a + x = b \ \wedge \ a + y = b \Rightarrow x = y$$

7. **Subtracção.** A análise anterior permite-nos estudar, em toda a generalidade, o seguinte problema:

Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, *achar um número* $x \in \mathbb{N}$ *tal que* $a + x = b$.

Pelo que vimos, este problema só é *possível* (isto é, só *tem solução*), quando $a < b$. Mas neste caso, além de possível, é *determinado* (isto é, tem uma *única solução*). Simbolicamente:

$$\begin{cases} b \leqslant a \Rightarrow \sim \exists x, \quad a + x = b & \textit{(nenhuma solução)} \\ a < b \Rightarrow \exists^1 x, \quad a + x = b & \textit{(uma e uma só solução)} \end{cases}$$

Neste último caso, o número x procurado é chamado *diferença entre* b *e* a e representado por $b - a$. Fica, pois, assim definida uma operação (subtracção) que faz corresponder ao par ordenado (b, a) o número $b - a$ (*b* é então chamado o *aditivo* e *a* o *subtractivo)*. Porém, ao contrário da adição, esta operação em $\mathbb{N}$:

— *Não é sempre possível.*

— *Não é comutativa.*

— *Não é associativa.* P. ex. $(8 - 5) - 2 \neq 8 - (5 - 2)$.

Todavia, como vimos, a subtracção em $\mathbb{N}$ é *unívoca* (isto é, a diferença, quando existe, é única). Além disso, facilmente se demonstram, como exercício, as duas seguintes proposições:

$$a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad (\text{se } c < a)$$

$$a < b \Rightarrow c - a > c - b \quad (\text{se } b < c)$$

que se podem enunciar dizendo: *A diferença aumenta quando o aditivo aumenta e diminui quando o subtractivo aumenta.* Também podemos exprimir este facto dizendo que a subtracção é *crescente à esquerda e decrescente à direita* (PROPRIEDADES DE MONOTONIA DA SUBTRACÇÃO).

8. **Multiplicação.** Já vimos como se define a adição iterada ou adição de várias parcelas $a_1, \ldots, a_n$, cujo resultado se representa por $a_1 + \ldots + a_n$ ou por $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (com $n \in \mathbb{N}$). Pode acontecer, em particular, que as *n* parcelas sejam um mesmo número $a \in \mathbb{N}$:

$$a_k = a, \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n$$

Neste caso, a soma $\sum_{1}^{n} a_k$ é chamada *produto de* n *por* a e representa-se por $n \times a$, $n.a$ ou simplesmente $n\,a$. Chama-se multiplicação a operação que faz corresponder ao par ordenado de números naturais *n* e *a (factores)* o número natural *n a (produto)*.

Como a adição é *sempre possível* e *unívoca* em $\mathbb{N}$, o mesmo acontece com a multiplicação. Além disso sabe-se (e havemos de demonstrá-lo) que a multiplicação em $\mathbb{N}$ é:

I. *Comutativa:* $ab = ba, \ \forall a, b \in \mathbb{N}$

II. *Associativa:* $(ab)\,c = a\,(bc), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$

III. *Distributiva* a respeito da adição:

$$(a + b)\ c = ac + bc, \quad \forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$$

IV. *Monótona:* $a < b \Rightarrow ac < bc, \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$

Da definição resulta ainda que:

V. $$1.a = a \quad , \quad \forall\ a \in \mathbb{N}$$

Exprime-se este facto dizendo que 1 é *elemento neutro* da multiplicação.

A *multiplicação iterada* é definida como fizemos para a adição. Chama-se *produto de* n *números* $a_1, \ldots a_n$ (com *n* natural $\neq 1$) o número que se obtém, multiplicando a_1 por a_2, multiplicando depois $a_1\ a_2$ por a_3 e assim sucessivamente até a_n. O resultado final é representado por $a_1 \ldots a_n$, mais correctamente, por:

$$\prod_{j=i}^{n} a_j \quad \text{(ler } \textit{produto dos } a_j \textit{ de } 1 \text{ a } n\text{)}$$

Note-se que o índice j é aqui uma variável aparente (*índice mudo),* tal como nos somatórios.

Põe-se ainda, *por definição:*

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

Tal como a adição, a multiplicação iterada possui as PROPRIEDADES ASSOCIATIVA E COMUTATIVA GENERALIZADAS.

EXEMPLOS IMPORTANTES:

I. Se os *n* factores $a_1, \ldots, a_n$ são todos iguais a um mesmo número *a,* o seu produto é, por definição, a *potência* n *de* a, que se representa por a^n. Chama-se *potenciação* a operação que faz corresponder, ao par ordenado (a, n) de números naturais *a (base)* e *n (expoente)*, o número natural a^n *(potência)*. A potenciação é, como se vê, *sempre possível e unívoca* (em $\mathbb{N}$), mas não é comutativa (p. ex. $2^3 \neq 3^2$) nem associativa [p. ex. $[(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}]$. Possui, no entanto, propriedades bem conhecidas (relativas ao produto de potências com a mesma base ou com o mesmo expoente), que serão demonstradas posteriormente.

II. Suponhamos $a_k = k$, para $k = 1, 2, \ldots$ Então:

$$\prod_{k=1}^{1} k = 1, \quad \prod_{k=1}^{2} k = 1 \times 2 = 2, \quad \prod_{k=1}^{3} k = 1 \times 2 \times 3 = 6, \ldots$$

Assim, dum modo geral, $\prod_{k=1}^{n} k$ é o produto $1 \times 2 \times \ldots \times n$ dos *n* primeiros números naturais. Este produto é chamado *factorial de* n e representa-se por $n!$. Será, pois, *por definição:*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

9. **Divisão exacta.** Da monotonia da multiplicação deduz-se, tal como para a adição, a PROPRIEDADE DO CORTE:

$$ac = bc \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

A demonstração é perfeitamente análoga à que se fez para a adição. Daqui, por sua vez, deduz-se:

COROLÁRIO. *Dados dois números naturais,* a, n, *não pode existir mais de um número natural* x *tal que* $nx = a$. *Simbolicamente:*

$$nx = a \wedge ny = a \Rightarrow x = y \quad (\text{em } \mathbb{N})$$

Por outro lado, demonstra-se que o *produto de dois números naturais é sempre superior ou igual a qualquer dos factores* (igual, só quando um, pelo menos, dos factores é 1). Simbolicamente:

(1) $$n\,x \geqslant n, \quad \forall\, n, x \in \mathbb{N}$$

Estas propriedades ajudam-nos a estudar o seguinte problema:

Dados dois números $a, n \in \mathbb{N}$, *determinar um número* $x \in \mathbb{N}$, *tal que* $n\,x = a$.

A propriedade (1) diz-nos que a condição $a \geqslant n$ é *necessária* para que o problema seja possível (ou resolúvel). Porém, tal condição não é suficiente: p. ex. temos $5 > 3$ e não existe nenhum número natural x tal que $3\,x = 5$.

Por outro lado, o anterior corolário da propriedade do corte diz-nos que, *quando o problema é resolúvel, tem uma única solução.* Neste caso, diz-se que *a é divisível por* n (ou múltiplo de n), e o número x tal que $n\,x = a$ é chamado o *quociente exacto de* a *por* n e representado por qualquer das notações:

$$\frac{a}{n}, \quad a/n \quad \text{ou} \quad a:n \text{ (}^1\text{)}$$

Por exemplo, $\frac{6}{3} = 2$, visto que $3 \times 2 = 6$.

Na referida hipótese, chama-se *divisão exacta* a operação que faz corresponder ao par ordenado (a, n) o número a/n (*a* é então chamado o *dividendo* e n o *divisor)*. Como se viu, *a divisão exacta não é sempre possível, mas, quando possível, é unívoca em* $\mathbb{N}$. Além disso, a divisão não é comutativa nem associativa: p. ex. $(24:6):2 \neq 24:(6:2)$. Mas é *crescente à direita* e *decrescente à esquerda* (isto é, *o quociente aumenta quando o dividendo aumenta e diminui quando o divisor aumenta)*.

---

(1) A última destas notações, para designar o quociente, tende a cair em desuso.

10. **Multiplicação em $\mathbb{N}_0$.** Por definição:

$$(1) \qquad 0 \times a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{N}_0$$

Com esta definição suplementar a multiplicação definida em $\mathbb{N}$ é estendida a $\mathbb{N}_0$, continuando a ser *sempre possível, unívoca, associativa, comutativa e distributiva a respeito da adição.* Porém, a propriedade da monotonia é alterada; é claro que temos agora, em $\mathbb{N}_0$:

$$a < h \Rightarrow ac < bc, \quad \text{sse} \quad c \neq 0$$

A proposição (1) (definição) exprime-se dizendo que 0 é *elemento absorvente* da multiplicação.

Consideremos, agora, o problema da divisão exacta em $\mathbb{N}_0$: *Dados* a, $n \in \mathbb{N}_0$, *achar* $x \in \mathbb{N}^0$ *tal que* $nx = a$. Há, agora, a distinguir 4 casos:

Se $a \neq 0$ e $n \neq 0$, estamos no caso anterior (em $\mathbb{N}$).

Se $a = 0$ e $n \neq 0$, o problema é possível e determinado: $x = 0$.

Se $a \neq 0$ e $n = 0$, o problema é impossível, visto que então $nx = 0$, $\forall x \in N_0$.

Se $a = 0$ e $n = 0$, o problema é possível mas *indeterminado:* qualquer $x \in \mathbb{N}_0$ verifica a condição $nx = a$.

11. **Números infinitos.** O conceito de *número de elementos* dum conjunto A, tal como foi definido no n.º 1 deste Capítulo, não se limita ao caso em que A é finito.

Em qualquer hipótese, o número de elementos dum conjunto A (também chamado *potência de* A, *número cardinal de* A ou simplesmente *cardinal de* A) é designado pela notação $\# A$. Assim, por definição:

$$\# A = \# B \Leftrightarrow A \text{ é equipotente a } B$$

Diz-se que o número de elementos de A é *infinito,* sse A é infinito. Por exemplo, $\#\ \mathbb{N}$ é infinito.

Por outro lado, escreve-se $\#\ A < \#\ B$, sse A é equipotente a uma parte B, *mas não a* B. Esta definição desde logo implica a propriedade anti-reflexiva da relação $<$:

$$a < b \Rightarrow a \neq b.$$

Vimos atrás que a inclusão estrita entre conjuntos A e B *finitos* se traduz na relação $<$ entre números, isto é:

$$A \subset B \wedge A \neq B \Rightarrow \#\ A < \#\ B$$

Quer isto dizer que o *número de elementos dum conjunto finito é sempre maior que o número de elementos de uma sua parte estrita.* É este um facto que *induzimos* da nossa experiência quotidiana sobre conjuntos finitos, e que se exprime em linguagem comum dizendo: 'O todo é sempre maior que qualquer parte (estrita)'.

Porém, logo no primeiro contacto com os conjuntos infinitos surge--nos um facto surpreendente:

Se A *é um conjunto infinito, existe pelo menos uma sua parte estrita, cujo número de elementos é igual ao de* A.

Consideremos por exemplo o conjunto $\mathbb{N}$ e designemos por P o conjunto dos números pares positivos (2, 4, 6, ...). Temos então evidentemente $P \subset N$ e $P \neq N$. Porém, se fizermos corresponder a cada número natural n o número par 2n (o dobro de n), conforme o seguinte esquema:

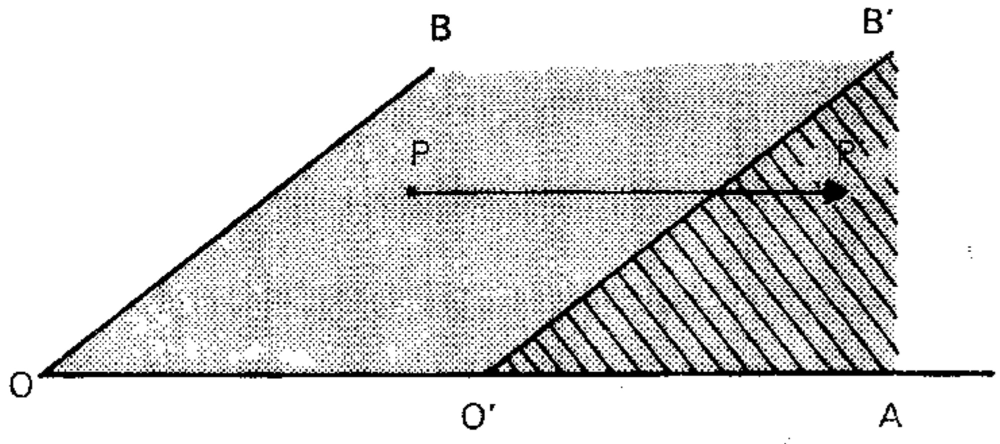
$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
P: & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots
\end{array}$$

é fácil ver que fica assim definida uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e P. Com efeito, a *todo o* $n \in \mathbb{N}$ corresponde *um e um só* $m \in P$, que é $m = 2n$. Reciprocamente, para *todo o* $m \in P$, existe *um e um só* $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n = m$ e que é $n = m/2$. Por conseguinte, temos:

$$\# P_2 = \# \mathbb{N}$$

apesar de P *ser uma parte estrita de* $\mathbb{N}$. Analogamente se prova que $\mathbb{N}$ é equipotente ao *conjunto dos números naturais ímpares, ao conjunto dos números naturais múltiplos de* 3, etc., etc..

Outro exemplo. Consideremos um ângulo convexo $A\hat{O}B$; este é uma das partes em que fica dividido um plano por duas semi-rectas com origem comum, portanto um conjunto *infinito* de pontos.



Sabe-se que é possível, de muitas maneiras, passar ao ângulo $A\hat{O}'B'$ *contido estritamente no primeiro, por meio duma translação;* este facto é-nos sugerido intuitivamente pelo exemplo dum esquadro que desliza ao longo duma régua. Ora, é fácil ver que essa translação faz corresponder a cada ponto P do primeiro ângulo um determinado ponto P' do segundo e que fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de pontos. *Logo o número de pontos do conjunto* $A\hat{O}B$ *é igual ao número de pontos da sua parte estrita* $A\hat{O}'B'$.

Recordemos que, no Cap. I, n.º 8, tínhamos renunciado a dar uma definição de 'conjunto finito'. Pois bem: uma definição de 'conjunto finito', adoptada por muitos matemáticos, é precisamente a seguinte:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que um conjunto A é finito, sse não existe nenhuma parte estrita de A equipotente a A.*

(Subentende-se nesta definição que o conjunto vazio não é equipotente a nenhum conjunto não vazio).

Convém, desde já, notar que existem *diferentes* números infinitos. Assim, provaremos mais adiante que o número de elementos de $\mathbb{N}$ é *menor* que o número de elementos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais), isto é:

$$\# \mathbb{N} < \# \mathbb{R}$$

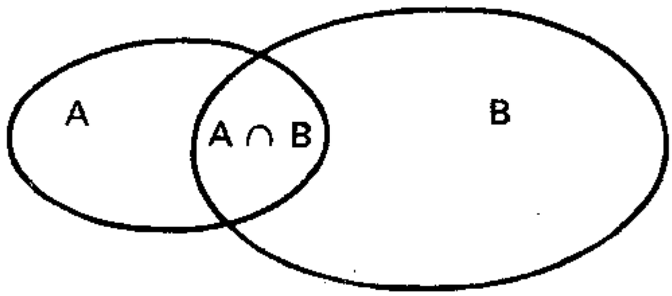
Existem números maiores que $\# \mathbb{R}$, mas presume-se (embora ninguém o tenha demonstrado) que não existe nenhum número *a* compreendido estritamente entre $\# \mathbb{N}$ e $\# \mathbb{R}$. Por outro lado, demonstra-se que $\# \mathbb{N}$ *é o menor de todos os números cardinais infinitos que se possam apresentar.* Este número é designado pelo símbolo $\aleph_0$, em que o sinal $\aleph$ é a primeira letra maiúscula do alfabeto hebraico (lê-se 'alefa').

12. **Objecto do cálculo combinatório. Número de elementos da reunião de dois ou mais conjuntos.** O cálculo combinatório tem por objecto o estudo de problemas relativos ao número de elementos de diferentes conjuntos que podem ser obtidos a partir de conjuntos dados, por meio de operações lógicas, tais como a reunião, a intersecção, a multiplicação cartesiana, etc. No estudo do cálculo combinatório limitar-nos-emos a conjuntos finitos, embora esse estudo

se possa estender a conjuntos infinitos. Começaremos pelo caso da reunião e da intersecção.

Já vimos que dados dois conjuntos A e B (finitos), se tem, por definição:

$$\# (A \cup B) = \# A + \# B, \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$



Porém, se a intersecção de A com B não é vazia, esta fórmula deixa de ser válida. Suponhamos, por exemplo, que A representa o conjunto dos habitantes duma dada cidade que são *empregados do Estado* e B o conjunto dos habitantes da mesma cidade que são *empregados de entidades particulares*. Então será $A \cup B$ o conjunto dos habitantes dessa cidade que estão empregados. Mas não podemos, sem mais, escrever, neste caso:

$$\# (A \cup B) = \# A + \# B,$$

pois pode haver elementos comuns a A e a B, que são contados duas vezes. A fórmula correcta será, então, como é fácil ver:

$$\# (A \cup B) = \# A + \# B - \# (A \cap B)$$

Representando a reunião $A \cup B$ por $A + B$ e a intersecção $A \cap B$ por $A\,B$, como se faz muitas vezes, a fórmula anterior escreve-se:

$$\# (A + B) = \# A + \# B - \# (A\,B)$$

Consideremos, agora, três conjuntos finitos A, B e C quaisquer. Como exercício, pode verificar-se que:

$$\# (A + B + C) = \# A + \# B + \# C - \# (AB) - \# (AC) - \\ - \# (BC) + \# (ABC)$$

No caso geral de *n* conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ quaisquer, chega-se à fórmula:

$$\# \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \# A_i - \sum_{1 \leqslant i < j}^{n} \# (A_i A_j) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k}^{n} \# (A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \# (A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Esta, que apresentamos aqui apenas a título de curiosidade, pode ser chamada FÓRMULA DE DANIEL DA SILVA, pois foi o matemático português Daniel da Silva, do século passado, quem a introduziu, embora sob forma diversa, no seu trabalho *Propriedades gerais e resolução directa das congruências binómias; introdução à teoria dos números.*

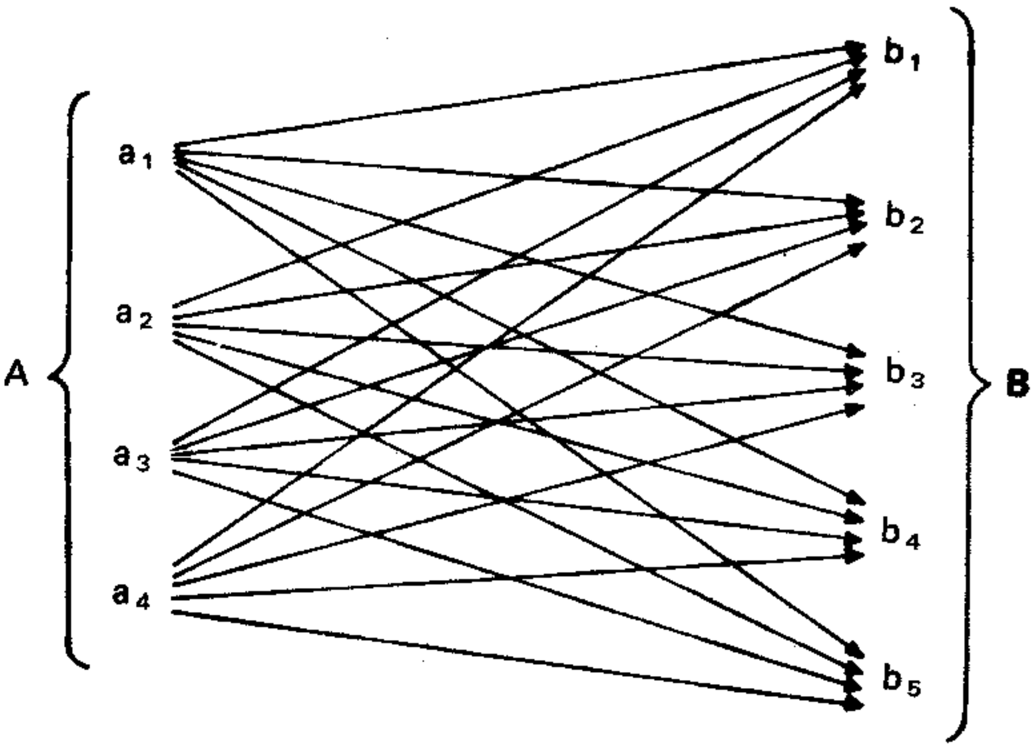
13. **Número de elementos do produto cartesiano de dois ou mais conjuntos.** Comecemos por um exemplo simples. Suponhamos que numa sala de baile se encontram 4 rapazes, que designaremos por a_1, a_2, a_3, a_4, e 5 raparigas, que designaremos por b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Ponhamos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

Quantos pares diferentes se podem formar, ao todo, sendo cada par constituído por um rapaz e uma rapariga?

É claro que se pede aqui o número de elementos do conjunto A × B. Este produto cartesiano pode ser obtido como se descreve no seguinte diagrama, em que cada seta indica um par ordenado (em primeiro lugar um rapaz e em segundo uma rapariga):



De maneira mais sistemática, os pares ordenados podem ser obtidos como se indica na seguinte tabela de duas entradas:

A × B

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	a_1b_5
a_2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4	a_2b_5
a_3	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	a_3b_5
a_4	a_4b_1	a_4b_2	e $_4b_3$	a_4b_4	a_4b_5

Como se vê, para maior simplicidade, usámos aqui a notação '$a_j\, a_k$' para designar cada par ordenado (a_j, a_k).

Quanto aos números de elementos de A × B, o cálculo é bem simples. Cada rapaz pode figurar em 5 pares diferentes, visto haver 5 raparigas; portanto, como há 4 rapazes, podem formar-se ao todo 4 × 5 pares diferentes. O número pedido é, pois, 20.

Sejam agora A e B dois conjuntos finitos quaisquer, não vazios, e seja $m = \# A$, $n = \# B$. Como B tem *n* elementos, cada elemento de A dá origem exactamente a *n* pares diferentes de A × B. Portanto, como A tem *m* elementos, será $m \times n$ o número de elementos de A × B.

Se um, pelo menos, dos conjuntos A e B é vazio, é claro que nenhum par pode ser formado e assim A × B também é vazio. Por conseguinte, quaisquer que sejam os conjuntos finitos A e B, temos sempre:

$$\# (A \times B) = \# A \times \# B$$

Esta fórmula é mesmo adoptada, por muitos autores, para definição de produto de números. Tal definição permite dar demonstrações intuitivas das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. Assim, para a *propriedade comutativa,* basta observar que, fazendo corresponder a cada elemento (a, b) de A × B o elemento (b, a) de B × A, se estabelece uma correspondência biunívoca entre A × B e B × A, e portanto:

$$\# (A \times B) = \# (B \times A) = \# B \times \# A$$

Quanto à *propriedade distributiva,* é fácil ver que, sendo A, B e C conjuntos finitos quaisquer, se tem:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

e que, se A e B são disjuntos, também $A \times C$ e $B \times C$ são disjuntos (exemplifique com $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ e $C = \{c_1, c\ , c_3, c_4\}$). Portanto, se pusermos $\# A = m$, $\# B = n$, $\# C = p$, virá:

$$(m + n)p = mp + np$$

Para a *propriedade associativa,* temos de recorrer ao conceito de produto cartesiano de três conjuntos. Sejam A, B e C três conjuntos finitos quaisquer; já sabemos que:

$$A \times B \times C = \{ (x, y, z) : x \in A, y \in B, z \in C \}$$

Mas, é claro que os ternos ordenados (x, y, z) podem ser obtidos associando a cada par (x, y) de $A \times B$ um elemento z de C. Fica, assim, manifestamente definida uma *correspondência biunívoca:*

$$((x, y), z) \to (x, y, z)$$

entre $(A \times B) \times C$ e $A \times B \times C$, visto que, a cada elemento ((x, y), z) de $(A \times B) \times C$ corresponde um e um só elemento (x, y, z) de $A \times B \times C$ e, reciprocamente, cada elemento (x, y, z) de $A \times B \times C$ corresponde, deste modo, a um único elemento ((x, y), z) de $(A \times B) \times C$. Analogamente se estabelece uma correspondência biunívoca entre $A \times (B \times C)$ e $A \times B \times C$. Portanto, se pusermos $\# A = m$, $\# B = n$, $\# C = p$, será:

$$\# (A \times B \times C) = \# (A \times B) \times \# C = (m\, n)\, p$$

$$\# (A \times B \times C) = \# A \times \# (B \times C) = m\, (n\, p)$$

donde $(m\, n)\, p = m\, (n\, p)$. Ao mesmo tempo se vê que:

$$\boxed{\# (A \times B \times C) = \# A \times \# B \times \# C}$$

É claro que este resultado pode ser estendido a um número natural n qualquer de conjuntos finitos, $A_1, \ldots, A_n$. Será, então:

$$\# (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \# A_1 \times \# A_2 \times \ldots \times \# An$$

ou seja, em notação mais correcta:

$$\# \prod_{j=1}^{n} A_j = \prod_{j=1}^{n} \# A_j$$

Em particular, os n conjuntos A_j podem ser todos um mesmo conjunto A. Neste caso, o seu produto cartesiano é A^n e tem-se:

$$\# A^n = (\# A)^n$$

EXEMPLOS:

I. Um cofre tem três discos, cada um com as mesmas 24 letras, e só pode ser aberto quando se coloca uma determinada letra de cada um dos discos numa determinada posição. Supondo que se ignora o segredo do cofre, de quantas maneiras diferentes se podem colocar as letras dos discos nas referidas posições?

É evidente que as *maneiras diferentes de colocar as letras* são dadas por todas as sequências de 3 letras escolhidas no conjunto das 24 letras consideradas. Designemos por $\mathcal{A}$ este conjunto; será então $\mathcal{A}^3$ o conjunto de todas as referidas sequências e assim o número pedido será:

$$\# \mathcal{A}^3 = (\# \mathcal{A})^3 = 24^3 = 138247$$

II. Quantos números diferentes de 5 algarismos se podem representar com os algarismos 1, 3, 9, no sistema decimal?

É claro que os referidos números, tais como 1 9 3 9 1, 9 1 3 1 9, 1 1 1 1 1, etc., estão em correspondência biunívoca com as sequências de 5 algarismos, escolhidos entre os três algarismos 1, 3, 9.

Designando por A o conjunto destes algarismos, será A^5 o conjunto das referidas sequências e, portanto, será:

$$\# A^5 = (\# A)^5 = 3^5 = 243$$

III. Quantos números diferentes de 4 algarismos se podem representar com os algarismos 0, 2, 4, 6, 8, no sistema decimal?

O problema, agora, é ligeiramente mais difícil, porque não há expressões decimais de números que comecem por 0. Assim, designando por A o conjunto dos algarismos 2, 4, 6, 8 e por B o conjunto dos algarismos 0, 2, 4, 6, 8, o número pedido será:

$$\# (A \times B^3) = (\# A) \times (\# B)^3 = 4 \times 5^3 = 500$$

Um problema análogo será o seguinte:

Quantos números inferiores a 10 000 se podem representar, no sistema decimal, com os algarismos 0, 2, 4, 6, 8?

Muitos outros problemas, relativos aos mais diversos domínios, se podem resolver aplicando os resultados anteriores sobre produtos cartesianos.

14. Número de subconjuntos dum conjunto finito. Sendo A um conjunto qualquer, designa-se por $\mathcal{P}$ (A) o conjunto de todos os subconjuntos de A, isto é, simbolicamente:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$$

Entre os conjuntos pertencentes a $\mathcal{P}$ (A) figuram o conjunto vazio e o próprio conjunto A (recordemos que $\mathcal{P}$ (A) é um conjunto de tipo 2 em relação a A).

Quando A é finito, a contagem dos elementos de $\mathcal{P}$ (A) pode fazer-se de maneira simples, aplicando a teoria do produto cartesiano.

Com efeito, se for $\# A = n$, podemos dispor os elementos de A numa sequência de *n* elementos distintos:

$$a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n$$

Nestas condições, todo o subconjunto C de A pode ser definido, fazendo corresponder a cada elemento a_i de A o número 1 ou o número 0, conforme $a_i \in C$ ou $a_i \notin C$. Assim, cada subconjunto C de A fica representado por uma sequência de n elementos do conjunto $\{0, 1\}$. Por exemplo, se $n = 4$, as sequências

$$0110, \quad 1001, \quad 1111, \quad 0000,$$

representam, respectivamente, os conjuntos:

$$\{a_2, a_3\}, \; \{a_1, a_4\}, \; \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = A, \; \varnothing$$

Tornando ao caso geral, é evidente que, por este processo, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos de A e as sequências de *n* elementos de $\{0, 1\}$, isto é, entre $\mathcal{P}(A)$ e $\{0, 1\}^n$. O número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ será igual ao de $\{0, 1\}^n$ ou seja 2^n. Assim, para todo o conjunto finito A, será

$$\boxed{\# \mathcal{P}(A) = 2^{\# A}}$$

Este facto leva alguns autores a designarem pelo símbolo 2^A o conjunto $\mathcal{P}(A)$.

EXERCÍCIO. Calcular o número total de relações binárias que se podem definir num conjunto finito A com *n* elementos. Deduzir daí o número de relações binárias (e portanto de operações binárias) que se podem definir no conjunto $\{V, F\}$ dos valores lógicos. Respostas: 2^{n^2}, 16.

15. **Arranjos e permutações.** Consideremos o seguinte problema:

Dispondo de peças de pano de 4 cores diferentes e desejando fazer bandeiras tricolores com faixas de pano verticais, quantas bandeiras diferentes se podem obter?

Subentende-se, neste enunciado, que duas bandeiras são diferentes, se e só se é verificada uma das duas seguintes condições: *a*) as bandeiras não têm as mesmas cores; *b*) as bandeiras são formadas pelas mesmas cores em ordem diferente, relativamente à haste. Torna-se então evidente que o problema consiste em contar as *sequências de* 3 *cores diferentes,* escolhidas entre as 4 que são dadas. Assim, se designarmos estas cores por a, b, c, d, as sequências:

a b c, a b d, d a b, b c a, etc.

representam bandeiras tricolores diferentes, como se pretende; ao passo que as sequências

a b a, a c c, b b b, etc.

não interessam ao problema. Ora bem:

DEFINIÇÃO. *Dá-se o nome de arranjos às sequências constituídas por elementos todos distintos (isto é, às sequências em que não figurem elementos repetidos).*

Note-se que as sequências também são chamadas *arranjos com possível repetição* ou *arranjos completos.*

Assim, o problema anterior consiste em determinar o número total dos arranjos formados por 3 cores entre as 4 cores dadas. Para isso, comecemos por considerar os arranjos com *uma só* cor, evidentemente em número de 4:

a, b, c, d

Notemos, agora, que se pode passar dos arranjos com uma cor para *todos* os arranjos com 2 cores, colocando sucessivamente, à direita de cada um dos primeiros, *uma das cores restantes,* cujo número é $4 - 1 = 3$. Assim, os 4 primeiros dão origem a 4×3 arranjos com 2 cores:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & ab \\ a \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & ac \\ & ad \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & ba \\ b \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & bc \\ & bd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & ca \\ c \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & cb \\ & cd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & da \\ d \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & db \\ & dc \end{tikzcd}$$

Analogamente, podemos passar dos arranjos com 2 cores para *todos* os arranjos com 3 cores, colocando sucessivamete, à direita de cada um dos primeiros, uma das cores que *nele não figuram,* e cujo número é $4 - 2 = 2$. Assim, os 4×3 arranjos com 2 cores dão origem a $4 \times 3 \times 2$ arranjos com 3 cores:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & abc \\ ab \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & abd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & acb \\ ac \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & acd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & adc \\ ad \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & adb \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & bac \\ ba \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & bad \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & bca \\ bc \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & bcd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & bda \\ bd \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & bdc \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & cab \\ ca \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & cad \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & cba \\ cb \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & cbd \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & cda \\ cd \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & cdb \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & dab \\ da \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & dac \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & dba \\ db \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & dbc \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & dca \\ dc \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & dcb \end{tikzcd}$$

E como não pode haver, evidentemente, outros arranjos com 3 cores, o número pedido será $4 \times 3 \times 2 = 24$. (Recordemos que o número total de sequências de 3 cores é $4 \times 4 \times 4 = 64$).

Este raciocínio pode estender-se ao caso geral. Dados dois números naturais n, p, tais que $p \leqslant n$, *o número total de arranjos que se podem formar com* p *elementos escolhidos entre os* n *elementos dum dado conjunto* U é designado pelo símbolo

$$^nA_p$$

que se lê '*número de arranjos de* n *elementos tomados* p *a* p' ou simplesmente '*arranjos de* n, p *a* p'. Comecemos por considerar os arranjos com um só elemento, escolhido entre os *n* elementos do conjunto U; o número destes arranjos é, evidentemente:

$$^nA_1 = n$$

Seja agora k qualquer número natural tal que $1 \leqslant k \leqslant p$. Se já tivermos obtido *todos* os arranjos com k elementos e se $k < p$, é claro que obtemos *todos* os arranjos com $k + 1$ elementos, colocando à direita de cada um dos primeiros um dos *n* elementos que *nele ainda não figuram* e cujo número é $n-k$. Assim, cada arranjo com k elementos dá origem a $n-k$ arranjos com $k+1$ elementos, e, portanto:

$$^nA_{k+1} = {}^nA_k \times (n-k)$$

Fazendo sucessivamente $k = 1, 2, \ldots, p-1$, virá:

$$^nA_2 = {}^nA_1 \times (n-1),\ {}^nA_3 = {}^nA_2 \times (n-2), \ldots,$$
$$^nA_p = {}^nA_{p-1} \times [n-(p-1)]$$

Daqui, por substituições sucessivas, lembrando que $^nA_1 = n$ e que $n-(p-1) = n-p+1$, vem finalmente:

$$^nA_p = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)$$

ou, em notação mais correcta:

$$(1) \qquad \boxed{{}^nA_p = \prod_{k=o}^{p-1} (n\text{-}k)} \qquad (n, p \in \mathbb{N}, p \leqslant n)$$

Esta fórmula pode traduzir-se dizendo:

O número de arranjos de n *elementos* p *a* p *é igual ao produto de* p *números naturais consecutivos a partir de* n *em ordem decrescente.*

Por exemplo:

$${}^6A_4 = \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3}_{4 \text{ factores}} = 360$$

Recordemos que o número de sequências com 4 elementos é $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$. A diferença vem, como vimos, do facto de os arranjos serem sequências com elementos todos diferentes. Dum modo geral, dados dois números naturais, n, p quaisquer (podendo agora ser $p > n$ ou $p \leqslant n$) designaremos pelo símbolo:

${}^nA'p$ (ler *'arranjos completos de* n, p *a* p)

o número total de sequências que se podem formar com p elementos escolhidos entre *n* elementos dum conjunto dado. Será, pois:

$${}^nA'_p = n^p \qquad (\forall\ n, p \in \mathbb{N})$$

Na fórmula (1) pode acontecer em particular que se tenha $n = p$. Então, obtém-se:

$${}^nA_n = \prod_{k=o}^{r-1} (n - k) = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

$$= 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{j-1}^{n} j$$

Ora, já vimos (pág. 152) que o produto dos *n* primeiros números naturais, se chama *factorial de* n e se designa pelo símbolo n!. Assim:

$$^{n}A_{n} = n!$$

DEFINIÇÃO. *Chama-se permutação dum conjunto finito* U *qualquer arranjo que se possa formar com todos os elementos de* U.

O número total de permutações dum conjunto de *n* elementos é representado pelo símbolo P_n, que se lê 'permutações de *n*'. Assim:

$$\boxed{P_n = {}^{n}A_n = n!}$$

Para exemplo e exercícios, ver *Compêndio de Álgebra*(1), 7.º *ano*, última edição.

16. **Combinações.** Sobre este assunto, seguir o referido *Compêndio.*

(1) Refere-se o autor ao *Compêndio de Álgebra* aprovado ao tempo, podendo hoje serem consultados diversos livros que tratam do assunto (N. do E.).

CAPITULO IV

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

1. **Primeiros exemplos.** Já vimos que as expressões com variáveis se classificam em *designatórias* e *proposicionais* (pág. 56). Também vimos (Cap. II) que as expressões proposicionais definem conjuntos e, mais geralmente, relações (conjuntos de sequências). Vejamos, agora, o que se passa com as expressões designatórias.

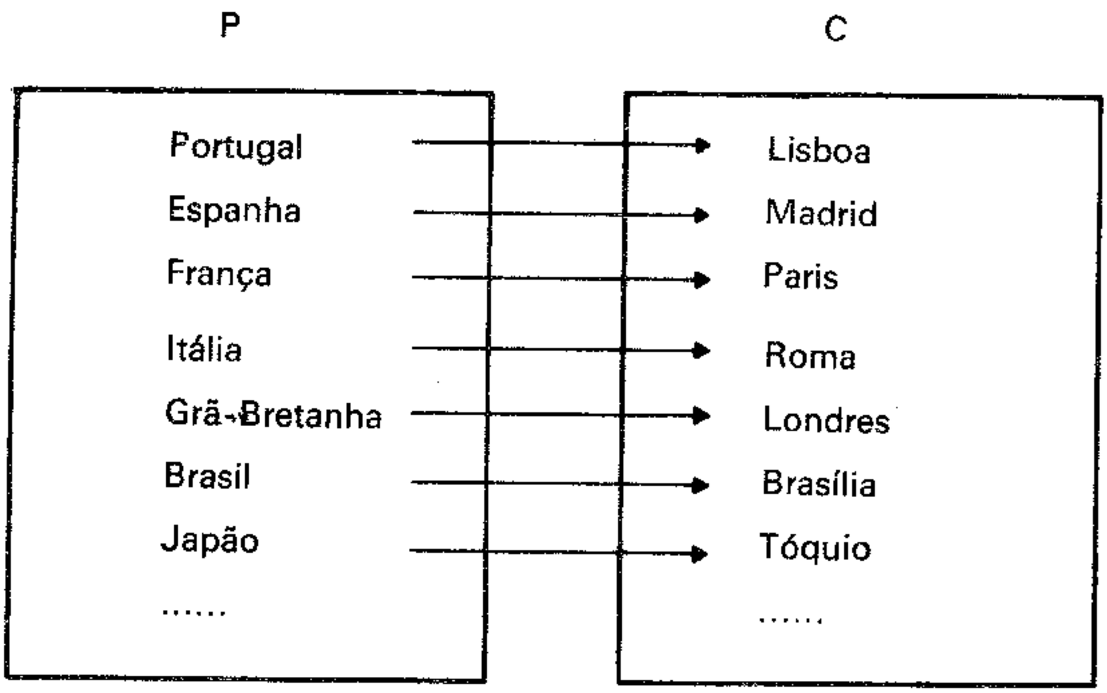
Consideremos, por exemplo, a expressão

capital de x,

sendo o domínio da variável x o *conjunto dos países do mundo.* Vamos supor este conjunto definido e designá-lo por P. Por outro lado, designemos por C o *conjunto das cidades do mundo,* que supomos igualmente definido. Nestas condições, a referida expressão é, manifestamente, uma expressão designatória, pois converte-se na designação duma cidade todas as vezes que a variável é substituída pela designação dum país. Assim, por exemplo:

x	capital de x
Portugal	capital de Portugal (= Lisboa)
Espanha	capital de Espanha (= Madrid)
França	capital de França (= Paris)
Itália	capital de Itália (= Roma)

Deste modo, a expressão 'capital de', anteposta à designação dum país, *transforma* esta na designação duma cidade. Podemos assim dizer que representa uma *transformação* (uma *operação* ou um *operador*) que, aplicada a qualquer país, dá como resultado uma certa cidade desse país. É claro que essa operação consiste afinal numa *correspondência unívoca* entre o conjunto P e o conjunto C, como se indica no seguinte diagrama:



Com efeito, por este processo, a cada elemento de P, fica a corresponder *um e um só elemento de* C (ver Cap. III, n.º 1)(¹).

Como sinónimo dos termos 'operação', 'transformação', etc., nestes e noutros casos análogos, usa-se ainda, com maior frequência, o termo 'função'. Mas este aparece quase sempre relacionado com variáveis e, por isso, o seu uso requer cuidados especiais, como vamos ver.

(¹) Nada impede que um dado país esteja contido num outro: p. ex. a Inglaterra e a Escócia fazem parte da Grã-Bretanha.

Tornemos à expressão 'capital de x'. Visto que contém uma variável, a própria expressão pode ser considerada como uma variável: isto é, *variável dependente de* x. Também se diz que representa uma *função de* x. Mas não quer isto dizer que *função* seja o mesmo que *variável dependente*. Por exemplo, as expressões $(x + 1)^2$ e $x^2 + 2x + 1$ são diferentes; são, pois, duas variáveis dependentes distintas; mas tem-se

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, as duas expressões fazem *corresponder* a cada número real (valor de x) um *mesmo* número real (valor das expressões), isto é, definem a mesma *correspondência* e, por isso, se diz que representam a *mesma função de* x. Deste modo, o termo 'função' aparece como sinónimo de 'correspondência' ou 'operação'.

Vejamos outros exemplos. A tabela da página seguinte define 10 funções no conjunto das províncias de Portugal continental. As letras x, c, c', a, δ, d, d', r, r', m, m' são abreviaturas das expressões 'província', 'capital de x', 'número de habitantes de c', 'área de x em km^2', 'densidade de população de x por km^2', 'distância de x a Lisboa em km, por estrada', 'idem por comboio', 'rio mais importante de x', 'comprimento de r em km', 'monte mais alto de x', 'altura de m em metros'. Diz-se que a letra x é aqui *variável independente* e que as letras c, c', a, δ, d, d', r, r', m, m' são *variáveis dependentes de* x ou ainda (por comodidade de linguagem) que são *funções de* x. Mas as *funções* a que essas letras se referem são, na realidade, as correspondências indicadas pela tabela. Diz-se ainda, por exemplo, que o consumo de gasolina dum automóvel por quilómetro é função da velocidade, que o perímetro e a área dum círculo são funções do raio, etc., etc., mas as funções em todos estes casos são determinadas correspondências.

Para evitar possíveis confusões, usa-se muitas vezes, em matemática moderna, o termo 'aplicação' em vez de 'função', com o mesmo significado.

x	c c'	a δ	d d'	r r'	m m'
Minho	Braga 41 023	4 839 180,7	387 403	Minho 236	Gerês 1 507
Trás-os-Montes e Alto Douro	Vila Real 10 498	11 848 54,8	437 372	Douro 640	Larouco 1 535
Douro Litoral	Porto 303 424	3 285 42,4	328 346	Douro 640	Marão 1 415
Beira Alta	Viseu 16 961	9 094 73,2	293 259	Douro 640	Caramulo 1 075
Beira Baixa	Castelo Branco 14 467	7 505 46,5	248 229	Tejo 810	Estrela 1 991
Beira Litoral	Coimbra 45 508	7 598 133,2	204 220	Mondego 220	Lousã 1 024
Estremadura	Lisboa 802 230	5 333 338,6	0 0	Tejo 810	Montejunto 666
Ribatejo	Santarém 16 445	7 236 65,7	72 81	Tejo 810	Aire 679
Alto Alentejo	Évora 24 144	15 072 76,2	154 117	Tejo 810	S. Mamede 1 025
Baixo Alentejo	Beja 15 702	12 621 28,7	178 154	Guadiana 700	Cercal 346
Algarve	Faro 19 393	5 076 62,0	298 288	Guadiana 700	Monchique 902

2. **Conceito geral de aplicação (ou função de uma variável).** Vamos precisar melhor o emprego destes termos.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se *aplicação de* A *em* B toda a correspondência unívoca entre A e B ([1]). Em vez de

---

([1]) O termo 'correspondência' é aqui usado com o significado que lhe foi atribuído no capítulo anterior. Veremos mais adiante que uma aplicação pode também ser interpretada como relação de tipo especial, isto é, como o *conjunto* de pares ordenados (x, y), em que y é o elemento de B correspondente a cada elemento de A.

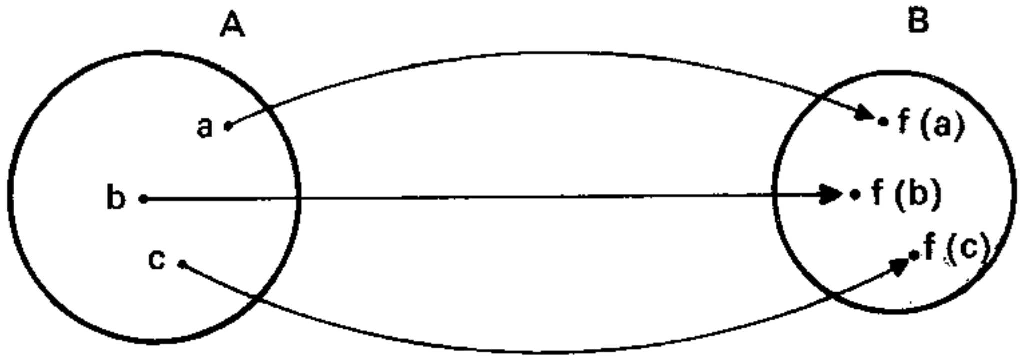
'aplicação de A *em* B' também se pode dizer *'função definida em* A *com valores em* B'.

Assim, *definir uma função* f *em* A *com valores em* B (ou *uma aplicação de* A *em* B) *é dar um processo qualquer pelo qual, a cada elemento x de A, fique a corresponder um e um só elemento y de B.* Este é chamado *valor da função* f *em* x ou ainda *imagem* (ou *transformado*) de x por f, e pode ser designado por qualquer dos símbolos fx ou f(x):

$$y = fx \quad \text{ou} \quad y = f(x)$$

Também se diz neste caso que f *aplica* (ou *transforma)* x *em* y. O conjunto A é chamado *domínio de* f.

Dum modo geral, designaremos por D_f o domínio duma função f.



Tornemos ao primeiro exemplo apresentado no número anterior. Nesse caso trata-se de uma aplicação do conjunto P (dos países) no conjunto C (das cidades), aplicação que é representada pela expressão 'capital de'. O conjunto P é, pois, o domínio da aplicação. Se designarmos esta aplicação por f será:

f (Portugal) = Lisboa, f (França) = Paris, etc.

isto é, a aplicação f aplica Portugal em Lisboa, etc.

Designemos, agora, por Π o conjunto das províncias de Portugal continental e por C, R e M, respectivamente, os conjuntos das cidades, dos rios e dos montes de Portugal (conjuntos que supomos definidos). A última tabela do número anterior dá-nos exemplos de várias aplicações de Π em C, em $\mathbb{N}$, em R e em M. Todas essas funções têm, portanto, o mesmo domínio (Π), mas são todas distintas. Por exemplo, as funções representadas pelas letras d, d' só seriam idênticas (isto é, a *mesma* função), se as distâncias por estrada fossem *todas* iguais às respectivas distâncias por comboio, o que não acontece. Designemos as 4 primeiras funções por f, φ, g, ψ, isto é, ponhamos:

$$c = f(x),\ c' = \varphi(x),\ a = g(x),\ \delta = \psi(x),\ \forall\, x \in \Pi$$

Então será: $D_f = D_\varphi = D_g = D_\psi = \Pi$ e, por exemplo:

$$f(\text{Minho}) = \text{Braga},\quad \varphi(\text{Algarve}) = 19\,393$$

$$g(\text{Estremadura}) = 5333,\quad \psi(\text{Ribatejo}) = 65{,}7.$$

Estas expressões são abreviaturas, respectivamente, das seguintes: 'a capital do Minho é Braga', 'o número de habitantes da capital do Algarve é 19 393', etc.

Seja agora A o conjunto dos alunos duma certa turma. Sendo x variável em A, as expressões:

idade de x, *pai de* x, *lugar de nascimento de* x, *província de* x, *altura de* x, *peso de* x, *carteira onde se senta* x, etc.

são expressões designatórias que definem aplicações de A em vários conjuntos. Quais conjuntos?

3. Domínio de existência de uma expressão. Chama-se *domínio de existência (domínio de definição* ou simplesmente *domínio)* duma dada expressão designatória com uma variável, ao conjunto dos valores da variável para os quais a expressão tem sentido no universo considerado. Assim, o domínio da existência duma expressão depende do universo lógico. Por exemplo, a expressão $\sqrt{x}$ no universo IN tem por domínio o conjunto dos quadrados perfeitos, no universo IR o conjunto dos números não negativos, etc.

Quando uma função (ou aplicação) é definida por meio de uma expressão designatória, sem mais indicações, subentende-se que o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo adoptado.

Por exemplo, no universo IN, as expressões:

dobro de x, *triplo de* x, *quadrado de* x,
triplo do quadrado de x, 1 *mais quadrado de* x, etc.

cujas abreviaturas simbólicas são, respectivamente,

$$2x, \ 3x, \ x^2, \ 3x^2, \ 1 + x^2, \text{ etc.}$$

são expressões designatórias que definem aplicações do conjunto IN no próprio conjunto IN (ou, como também se diz, *aplicações do conjunto* IN *em si mesmo*). Mas já, no mesmo universo, as expressões

metade de x, *raiz quadrada de* x, x *menos* 3, etc.

ou seja, simbolicamente: $x/2$, $\sqrt{x}$, x-3, etc. são expressões designatórias que têm por domínios de existência subconjuntos estritos de IN (respectivamente o conjunto dos *números pares*, o conjunto dos *quadrados perfeitos*, o conjunto dos *números maiores* que 3, etc.), representando, pois, aplicações desses conjuntos em IN.

Se tomarmos agora para universo o conjunto IR em vez de IN, é claro que os domínios das referidas expressões (e, portanto, os das aplicações que representam) são ampliados, passando a ser $\mathbb{R}$, excepto no caso da expressão $\sqrt{x}$.

OUTROS EXEMPLOS. Seja no universo $\mathbb{R}$:

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x-3}}, \quad g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

No primeiro caso, a expressão só é definida quando $x - 3 \geqslant 0$ e $\sqrt{x-3} \neq 0$ (Porquê?). Ora, estas condições são equivalentes às seguintes: $x \geqslant 3$ e $x \neq 3$. Logo:

$$D_f = \{x: x \geqslant 3 \wedge x \neq 3\} = \{x: x > 3\} =]3, +\infty[$$

No segundo caso a expressão só tem valor quando $x \geqslant 0$ e $\sqrt{x} - 1 \neq 0$. Daqui se conclui que

$$D_g = \{x: x \geqslant 0 \wedge x \neq 1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

EXERCICIOS. Determinar em $\mathbb{R}$ os domínios das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\sqrt{x^2-4}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x(x-2)}}$$

4. Maneiras de definir uma função. Identidade de funções. Pelo que ficou dito no número 2, *definir* (ou *dar*) uma aplicação f significa dar, por um lado, o domínio de f e, por outro lado, um *processo qualquer* que permita determinar, para *todo* o elemento x de D_f, o elemento f(x), que a aplicação f faz corresponder a x([1]).

([1]) O papel do conjunto B onde se situam os valores da função f(x) pode ser desempenhado por *qualquer* conjunto a que pertençam esses valores.

Se o domínio D_f é *finito,* e não excessivamente numeroso, a aplicação f pode ser definida por meio de uma tabela, como já se viu em exemplos no número 1. Em particular, quando o número de elementos o permite, costuma-se indicar numa linha todos os elementos do domínio e, noutra linha, por baixo de cada um desses, o elemento que lhe corresponde segundo f; a expressão formada pelas duas linhas escritas entre parênteses é então tomada como designação de f. Por exemplo, o símbolo:

$$\begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

designa a aplicação f cujo domínio é { Lisboa, Porto, Coimbra } e tal que

$$f(\text{Lisboa}) = \text{Tejo} \ , \quad f(\text{Porto}) = \text{Douro} \ , \quad f(\text{Coimbra}) = \text{Mondego}$$

Analogamente, se pusermos

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

φ e ψ serão duas aplicações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ em si mesmo:

$$D_\varphi = D_\psi = \{1, 2, 3, 4\}$$

Mas, tem-se:

$$\varphi \neq \psi, \text{ visto ser } \varphi(4) \neq \psi(4).$$

EXERCICIO. *Sendo* A *e* B *dois conjuntos finitos, respectivamente com* p *e* n *elementos, determine o número total de aplicações de* A *em* B *que é possível definir* (Sugestão: comece pelo caso particular em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, formando as respectivas aplicações).

Se o domínio da aplicação é *infinito* (p. ex. $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$), é claro que não podemos defini-la por meio de uma tabela. Nos casos mais simples, a aplicação é definida por uma expressão designatória, em que intervêm operações elementares da aritmética. Por exemplo, a expressão $3x^2$ define, efectivamente, uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$), pois que, dado um número x, *qualquer que ele seja,* nós sabemos sempre, com mais ou menos trabalho, calcular o quadrado de x e multiplicar o resultado por 3. Mas, como teremos ocasião de ver, há casos em que a função não se reduz a uma ou mais operações elementares indicadas por uma expressão; podem, então, apresentar-se os mais diversos e imprevistos processos de definição.

Também pode acontecer (e sucede geralmente) que uma mesma função possa ser definida por vários processos diferentes. Por exemplo, as expressões $x^2 - 1$ e $(x+1)(x-1)$ definem a mesma função em $\mathbb{R}$: indicam dois processos de cálculo diferentes para a mesma função. Para designar a função definida pela expressão $x^2 - 1$ num dado universo (p. ex. $\mathbb{R}$) usa-se a notação

$$x \curvearrowright x^2 - 1$$

e, analogamente, para qualquer outra expressão designatória. Assim, a letra x passa a ser uma *variável aparente,* pois que a função não depende de x. Tem-se, por exemplo:

$$(x \curvearrowright 3x) = (t \curvearrowright 3t) = \text{multiplicação por } 3$$

$$(x \curvearrowright x^2) = (s \curvearrowright s^2) = \text{elevação ao quadrado}$$

$$(x \curvearrowright x^2 - 1) = [a \curvearrowright (a+1)(a-1)], \text{ etc.}$$

Mas já a função $x \curvearrowright x^2 - 1$ é distinta da função $x \curvearrowright (x-1)^2$. (Porquê?)

Muitas vezes, para comodidade de linguagem, diz-se simplesmente 'a função $x^2 - 1$', 'a função $3x^2$', etc., em vez de 'a função $x \mapsto x^2 - 1$', 'a função $x \mapsto 3x^2$', etc., desde que não resulte daí confusão.

Repare-se, ainda, nas funções definidas em $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto 1 \quad , \quad x \mapsto 0{,}53 \quad , \quad x \mapsto -\frac{2}{3} \quad , \quad x \mapsto \pi \text{ , etc.}$$

Nestes casos, em que as expressões designatórias se reduzem a constantes (designações), também se diz que as funções são *constantes,* visto tomarem o mesmo valor para todo o valor de x.

De tudo o que fica dito, convém salientar o seguinte:

Para definir uma função não basta, em geral, indicar o processo pelo qual se estabelece a correspondência; é indispensável dar o domínio da função. Porém, quando a função é dada por uma expressão, sem mais indicações, subentende-se que o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo adoptado.

Por último, convém deixar bem claro o que se entende por 'funções idênticas' e por 'funções distintas':

Dadas duas aplicações f, g, *a aplicação* f *é a mesma que* g *(isto é, tem-se* $f = g$*), se e só se forem verificadas as duas seguintes condições:*

1) f, g *têm o mesmo domínio, isto é,* $D_f = D_g$

2) $f(x) = g(x), \quad \forall x \in D_f$

Simbolicamente:

$$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \wedge f(x) \equiv g(x)$$

Portanto, basta que uma destas condições se não verifique $[D_f \neq D_g \text{ ou } \exists x,\ f(x) \neq g(x)]$ *para que seja* $f \neq g$, *isto é,* f *distinta de* g.

5. **Extensão e restrição duma aplicação.** Consideremos os seguintes conjuntos:

A = { Lisboa, Porto, Coimbra }

A' = { Lisboa, Porto, Coimbra, Santarém }

B = conjunto dos rios de Portugal,

e as seguintes aplicações:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Santarém} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} \end{pmatrix}$$

É claro que f é uma aplicação de A em B e g uma aplicação de A' em B. Mas tem-se $A \subset A'$ e

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in A$$

Exprime-se este facto dizendo que g é *uma extensão* (ou *um prolongamento)* da aplicação f ao conjunto A' ou que f é *a restrição* de g ao conjunto A.

Dum modo geral, dados dois conjuntos A e A', respectivamente, diz-se que g é *uma extensão* de f a A', quando

$$A \subset A' \text{ e } f(x) = g(x), \forall x \in A;$$

Na mesma hipótese se diz que f é *a restrição de* g *a* A.

Note-se que, no primeiro caso, se usa o artigo indefinido 'uma' e, no segundo caso, o artigo definido 'a'. A razão está em que, se A é uma parte estrita de A' existe *mais de uma* extensão de f a A', ao passo que *existe uma única* restrição de g a A. Por outros termos: a operação de restrição é *unívoca*, a operação de extensão é *plurívoca*.

Sejam, por exemplo, as aplicações:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que T e U são *duas extensões distintas* da aplicação S ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas T e U têm uma restrição única no conjunto $\{1, 2, 3\}$, que é S; uma restrição única no conjunto $\{1, 3\}$, que é a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, etc.

6. **Contradomínio duma aplicação. Aplicações sobrejectivas.** Consideremos, de novo, os conjuntos:

$$A = \{\text{Lisboa, Porto, Coimbra}\}$$

$$B = \text{conjunto dos rios de Portugal}$$

e a aplicação:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

Desde logo se observa que só os elementos Tejo, Douro e Mondego do conjunto B intervêm na definição de f, pois são essas as imagens dos elementos de A por f. Exprime-se este facto dizendo que o conjunto $\{\text{Tejo, Douro, Mondego}\}$, contido em B, é o *contradomínio* da aplicação f, do mesmo modo que A é o domínio de f.

Analogamente, as aplicações

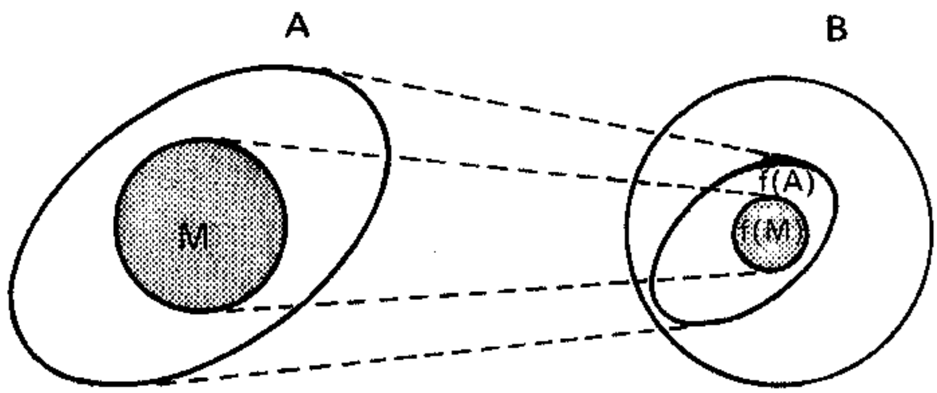
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

têm por contradomínios, respectivamente, os conjuntos

$$\{1, 4, 9\}, \quad \{1, -1\}, \quad \{0\} \quad \text{(função constante)}.$$

Dum modo geral, sejam A e B conjuntos *quaisquer*, e f uma aplicação de A em B. Dado um subconjunto M de A, chama-se *imagem* (ou *transformado*) *de* M *por* f, e representa-se por f(M), o conjunto de todos os elementos de B que são imagens de elementos de M por f. Simbolicamente, f(M) pode assim definir-se:

$$f(M) = \{y: \; y = f(x) \; \wedge \; x \in M\}$$



Em particular, pode ser M = A. Chama-se *contradomínio* da aplicação f, e representa-se por D'_f, precisamente o conjunto f(A), isto é, a imagem do domínio de f pela aplicação f.

Tornemos ao exemplo da aplicação f do conjunto P dos países no conjunto C das cidades, definida pela expressão 'capital de'. Então, se M = { Portugal, França, Inglaterra }, será:

f(M) = { Lisboa, Paris, Londres }.

Se M = { França, Espanha, Itália, Brasil, Japão }, será:

f(M) = { Madrid, Roma, Paris, Tóquio, Brasília }, etc.

O contradomínio desta aplicação f é, evidentemente, o *conjunto de todas as cidades que são capitais de algum país*. Designemos por C′ este conjunto. Então será verdadeira a proposição:

(1) $\forall y \in C', \quad \exists x \in P: \quad y = \text{capital de } x$

mas falsa a proposição:

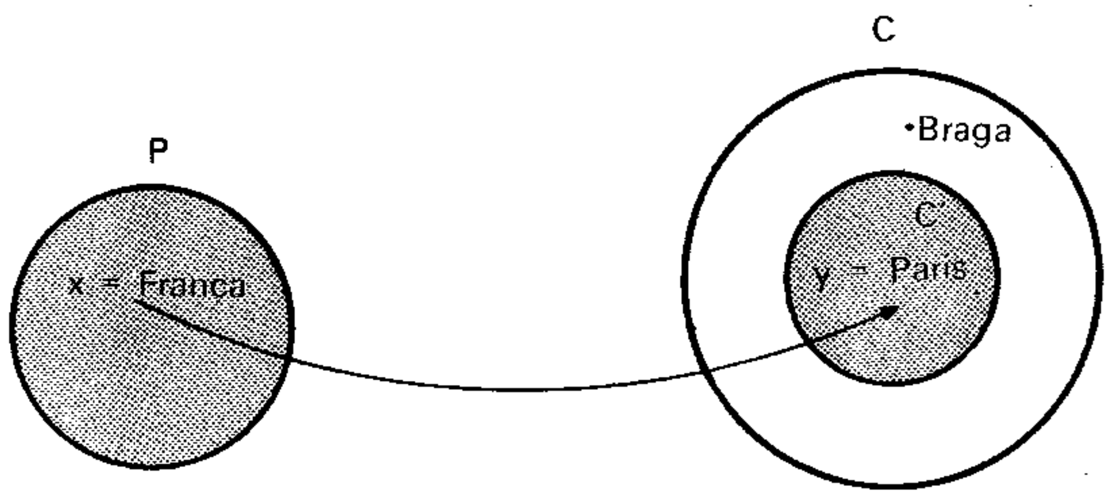
(2) $\forall y \in C, \quad \exists x \in P: \quad y = \text{capital de } x$

que se pode ler: '*Para toda a cidade* y *existe, pelo menos, um país* x *tal que* y *é a capital de* x'.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma aplicação f dum conjunto A num conjunto B é uma aplicação de A sobre B, sse B é o contradomínio de f, isto é, sse B = f(A); também se diz, neste caso, que a aplicação f é sobrejectiva em relação a B (ou simplesmente sobrejectiva, se o conjunto B estiver subentendido)*.

Simbolicamente, o facto de f ser uma aplicação de A *sobre* B pode ser expresso de seguinte modo:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A: \quad y = f(x)$$



Tornando ao exemplo anterior, vê-se logo que a aplicação *capital de* não é sobrejectiva em relação a C, visto ser falsa a proposição (2), isto é, existem cidades (elementos de C), que não são capitais de nenhum país. Mas a proposição (1) é verdadeira, quer dizer, a aplicação considerada é sobrejectiva em relação ao conjunto C'. Por outras palavras: C' é o contradomínio desta aplicação.

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{N}$ a expressão 'dobro de' designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$ *em si mesmo*), mas não uma aplicação de $\mathbb{N}$ *sobre* $\mathbb{N}$, porque há números naturais (os ímpares) que não são o dobro de nenhum número natural. Porém, a mesma expressão designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números pares. Por sua vez, no universo $\mathbb{R}$, a referida expressão designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{R}$ *sobre si mesmo.*

II. Como exercício, investigue o que se passa nos universos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ relativamente à expressão 'quadrado de'. Designando por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números positivos (números reais maiores que zero), estenda esse estudo ao conjunto $\mathbb{R}^+$, tomado como universo.

7. **Aplicações biunívocas.** Consideremos, novamente, os seguintes conjuntos:

$$A = \{\text{Lisboa, Porto, Coimbra}\}$$

$$A' = \{\text{Lisboa, Porto, Coimbra, Santarém}\}$$

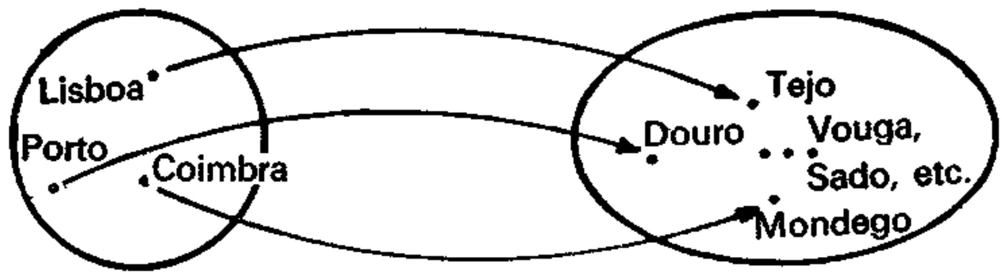
B = conjunto dos rios de Portugal,

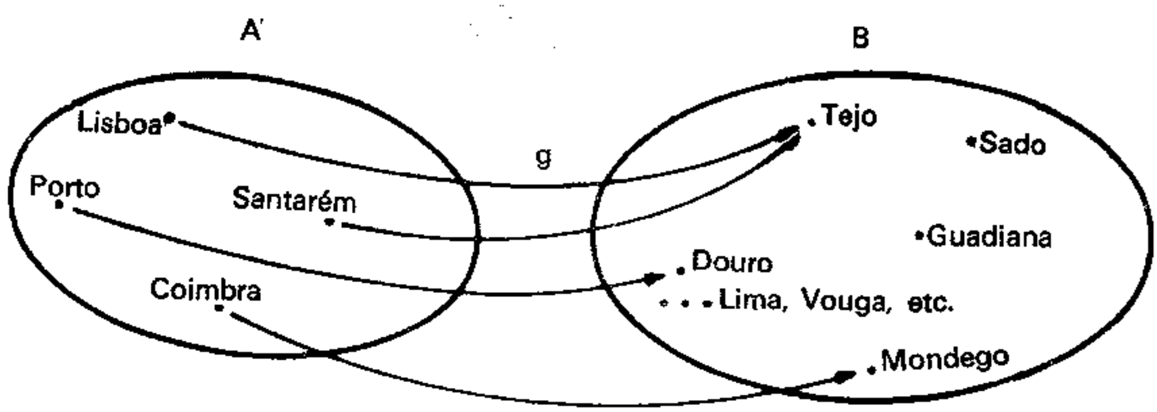
e as seguintes aplicações:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Santarém} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} \end{pmatrix}$$

que podemos representar, mais sugestivamente, pelos diagramas seguintes:





É claro que f $\neq$ g, porque o conjunto A (domínio de f) é distinto do conjunto A′ (domínio de g). Mas já vimos que g é uma extensão de f.

Que diferença importante se nota entre estas duas aplicações? A aplicação g aplica dois elementos *distintos* num *mesmo* elemento:

$$g\ (\text{Lisboa}) = g\ (\text{Santarém}) = \text{Tejo}$$

Este facto é traduzido no diagrama anterior pela existência de duas setas que partem de elementos *distintos* e terminam num *mesmo* elemento. Tal não sucede, porém, com a aplicação f:

A aplicação f aplica elementos *distintos* em elementos *distintos;* isto é, simbolicamente:

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x'), \quad \forall\ x, x' \in A$$

Exprime-se este facto dizendo que a aplicação f é *biunívoca.* Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma aplicação f dum conjunto A num conjunto B é biunívoca, sse aplica elementos distintos de A em elementos distintos de B, isto é, sse*

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x'), \quad \forall x, x' \in A$$

É claro que, pela REGRA DE CONVERSÃO, esta última propriedade também pode ser formulada simbolicamente, escrevendo:

$$(fx) = f(x') \Leftrightarrow x = x', \quad \forall x, x' \in A$$

ou ainda:

$$\forall y \in B: \ f(x) = y \wedge f(x') = y \Rightarrow x = x' \quad (\forall x, x' \in A)$$

Quer isto dizer, segundo o que observámos na pág. 84:

Para cada elemento y *de* B *não pode existir mais de um elemento* x *de* A *tal que* f(x) = y.

Em particular, f pode ser uma aplicação de A *sobre* B, isto é, simbolicamente (n.º 5):

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A: \ f(x) = y$$

Por conseguinte:

Dizer que f é uma aplicação *biunívoca de* A *sobre* B equivale a dizer que, para cada elemento y de B, existe *um e um só elemento* x de A tal que f(x) = y, isto é, simbolicamente:

$$\forall y \in B, \ \exists^1 x \in A: \ f(x) = y$$

Como se vê, a expressão *'aplicação biunívoca de* A *sobre* B' é equivalente à expressão *'correspondência biunívoca* A *e* B', no sentido em que esta foi usada no capítulo anterior.

OUTRAS MANEIRAS DE DIZER. Modernamente, em vez de dizer que uma aplicação f de A em B é *biunívoca*, também se diz que f é *injectiva*, e em vez de dizer que f é uma aplicação *biunívoca de* A *sobre* B também se diz que f é *bijectiva*. Assim, f será bijectiva, se for injectiva *e* sobrejectiva (em relação a B).

8. **Aplicação inversa duma aplicação biunívoca.** Seja f uma aplicação biunívoca dum conjunto A num conjunto B e seja B' o contradomínio de f, isto é, B' = f(A). Então, a cada elemento x de B' corresponde *um e um só* elemento y de A tal que f(y) = x. Pois bem, a correspondência unívoca $x \curvearrowright y$ assim estabelecida entre o conjunto B' e o conjunto A é chamada *aplicação inversa de* f.

A aplicação inversa de f é representada pela notação f^{-1}. Deste modo, segundo a definição anterior, f^{-1} *é a aplicação que tem por domínio o contradomínio de* f *e tal que*

$$(1) \qquad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad (\forall\ x \in B',\ y \in A)$$

Desta definição decorre imediatamente que, se f *é biunívoca,* f^{-1} *também é biunívoca e a inversa de* f^{-1} *é* f, isto é:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Por exemplo, se f é a aplicação atrás considerada:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

já vimos que f é uma aplicação biunívoca do conjunto A das referidas cidades no conjunto B dos rios de Portugal. Então a inversa de f é:

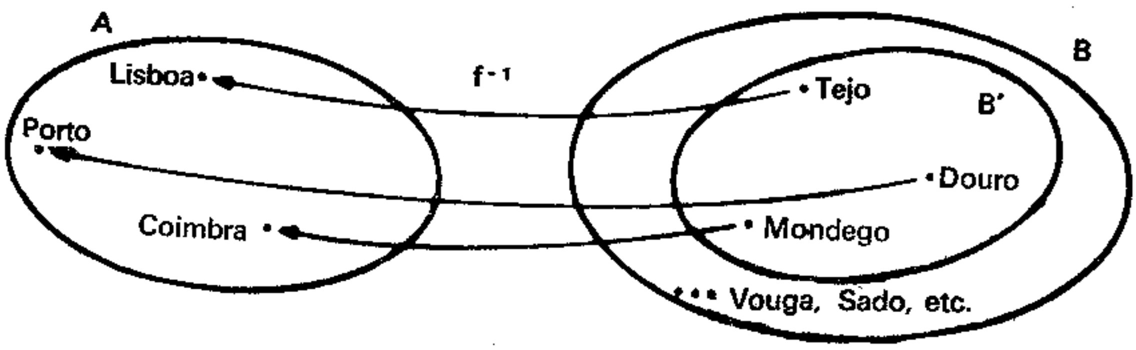
$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \\ \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \end{pmatrix}$$

cujo domínio é $B' = \{\text{Tejo, Douro, Mondego}\} = f(A)$.

A mesma aplicação pode ser definida pelo diagrama junto, que resulta do anterior, simplesmente, *invertendo o sentido das setas.*

Com respeito ao mesmo exemplo, vemos que:

$$(f^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$



NOTA. Neste exemplo, o símbolo f é uma abreviatura da expressão *'rio que banha'* (aplicada a elementos de A), enquanto o símbolo f^{-1} é uma abreviatura da expressão *'cidade banhada pelo rio'* (aplicada a elementos de B').

EXERCICIOS:

I. Verifique quais das seguintes aplicações são biunívocas e indique as inversas das que o são:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$$

Quais são as que coincidem com as respectivas inversas?

II. Considere a aplicação *dobro de* no universo $\mathbb{N}$. É esta uma aplicação biunívoca de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$? No caso afirmativo indique a sua inversa e o respectivo domínio. Idem para o universo $\mathbb{R}$.

III. Problemas análogos aos anteriores com as aplicações *quadrado de* e *cubo de.*

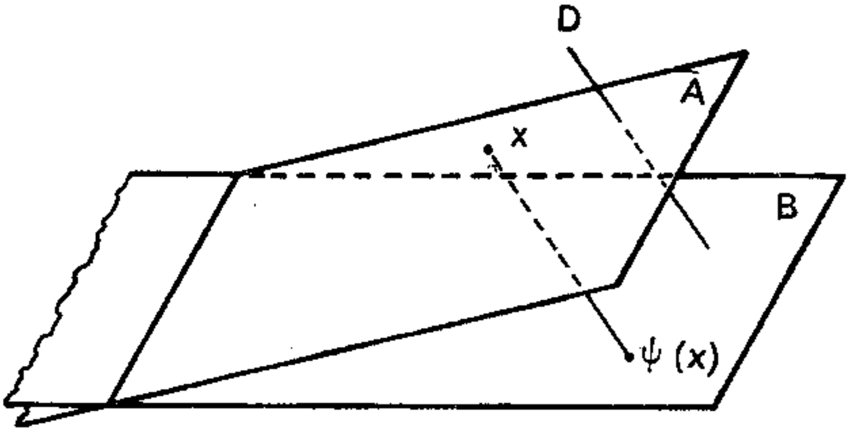
IV. Idem para funções definidas pelas seguintes expressões:

$$x^2 - 1, \quad 2x^3, \quad 2 - \frac{1}{5}x^3, \quad \frac{x}{3x+2}, \quad \frac{x}{x^2-1} \quad (\text{só em } \mathbb{R})$$

V. Seja P o conjunto dos países e C o conjunto das cidades. É biunívoca a aplicação de P em C definida pela expressão 'capital de'? No caso afirmativo, como se exprime a aplicação inversa?

VI. Seja E o espaço usual com 3 dimensões e seja A um plano qualquer. Designemos por φ a aplicação que faz corresponder, a cada ponto x de E, a projecção ortogonal de x sobre A. É φ biunívoca?

VII. Considere dois planos A, e uma recta D não paralela a qualquer destes planos. Seja ψ a aplicação que faz corresponder a cada ponto x de A a projecção de x sobre B paralelamente a D (isto é, o ponto de intersecção com B da recta que passa por x e é paralela a D). É ψ biunívoca? No caso afirmativo, qual é a sua inversa?



VIII. Sejam A e B dois conjuntos finitos e $\# A = m$, $\# B = n$. Determinar o número total de aplicações biunívocas de A em B que se podem definir. (Distinga os casos $m \leqslant n$, $m > n$).

9. **Aplicação identidade.** Seja A = { Lisboa, Porto, Coimbra }. Qual é a mais simples aplicação biunívoca de A sobre A? É evidentemente a que faz corresponder a cada elemento de A esse *mesmo* elemento de A. Dá-se-lhe o nome de *aplicação identidade em* A e representa-se por I_A. Será, pois:

$$I_A = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \end{pmatrix}$$

ou seja: $$I_A(x) = x, \ \forall x \in A$$

É claro que se trata aqui dum conceito geral: dado um conjunto A *qualquer,* chama-se *aplicação identidade em* A, e representa-se por I_A, a aplicação assim definida:

$$I_A(x) = x, \ \forall x \in A$$

Vê-se logo que I_A é uma aplicação biunívoca do conjunto A sobre si mesmo e que $\overset{-1}{I_A} = I_A$.

Quando o domínio A estiver subentendido, bastará dizer 'aplicação identidade' (ou apenas 'identidade') e usar o símbolo I, para designar esta aplicação.

10. **Produto de duas aplicações.** Seja:

A = { Lisboa, Santarém, Coimbra, Setúbal }

B = { Tejo, Douro, Mondego, Sado, Guadiana }

C = conjunto dos países da Europa.

A expressão *'rio que banha'* dá-nos a seguinte aplicação de A em B:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Santarém} & \text{Coimbra} & \text{Setúbal} \\ \text{Tejo} & \text{Tejo} & \text{Mondego} & \text{Sado} \end{pmatrix}$$

Por sua vez, a expressão *'país onde nasce'* dá-nos a seguinte aplicação de B em C:

$$g = \begin{pmatrix} \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} & \text{Guadiana} \\ \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} \end{pmatrix}$$

Ora, destas duas resulta a aplicação de A em C definida pela expressão '*país onde nasce o rio que banha*'. É natural designar esta aplicação pelo símbolo gf e chamar-lhe *produto de* g *por* f. Será, pois:

$$gf = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Coimbra} & \text{Setúbal} & \text{Santarém} \\ \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Portugal} & \text{Espanha} \end{pmatrix}$$

Como se vê, gf é a aplicação de A em C que resulta de efectuar f sobre cada elemento x de A e, em seguida, g sobre o elemento f(x) de B, o que dá g(f(x)). Isto é, simbolicamente:

$$(gf)\ (x) = g(f(x)), \quad \forall\ x\ \in A$$

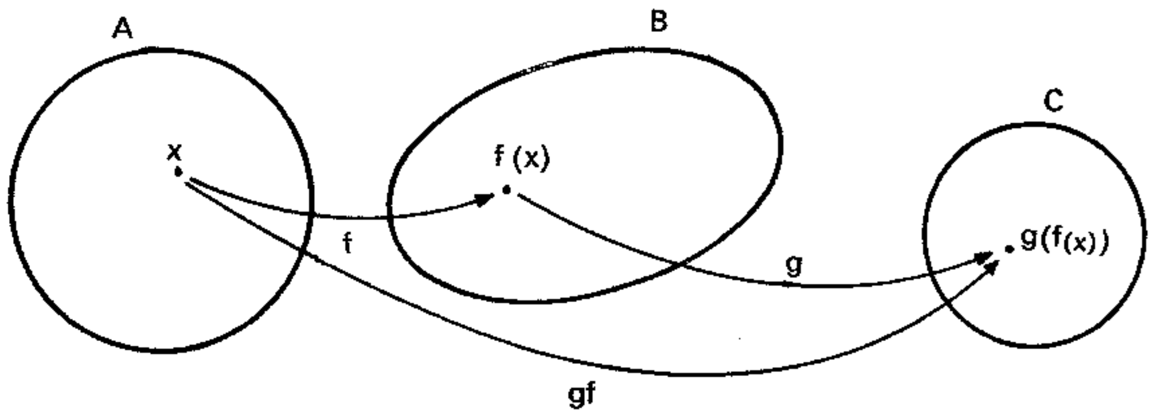
Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, f uma aplicação de A em B e g uma aplicação de B em C. Chama-se produto de g por f e representa-se por gf a aplicação de A em C que faz corresponder a cada elemento x de A o elemento g(f(x)) de C.*

Será, pois, por definição:

$$(gf)\ (x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

Este conceito é traduzido pelo diagrama que se segue:



Muitas vezes, em vez de *'produto de* f *por* g' diz-se *'aplicação composta de* f *com* g' e designa-se esta notação fog. No primeiro caso, a operação que definimos chama-se *multiplicação* (de aplicações) e, no segundo caso, *composição.*

Vejamos um outro exemplo. Já vimos que a expressão *'capital de'* representa uma aplicação do conjunto P (dos países) no conjunto C (das cidades). Por sua vez, a expressão *'número de habitantes de'* define uma aplicação de C em $\mathbb{N}$. Logo, a expressão *'número de habitantes da capital de'* define uma aplicação de P em $\mathbb{N}$, produto da segunda pela primeira. Aliás, na última tabela do n.º 1 podem reconhecer-se vários exemplos análogos.

Consideremos, agora:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Neste caso f, g são aplicações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ sobre si mesmo. Para calcular gf ou fg basta utilizar a definição anterior. Temos, por exemplo:

$$(gf)\ (1) = g(f(1)) = g\ (2) = 4$$

$$(gf)\ (2) = g(f(2)) = g\ (3) = 1, \text{ etc.}$$

Assim, virá:

$$g\,f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f\,g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tem-se neste caso $f\,g = g\,f$, *mas nem sempre assim acontece,* como veremos mais adiante. Duas aplicações f, g dizem-se *permutáveis* (ou *comutáveis*) quando $f\,g = g\,f$.

Sejam, agora, os operadores (¹)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Neste caso, o contradomínio de T, que é $\{2, 4, 6, 8\}$, não está contido no domínio de S, que é $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas ainda podemos definir ST mediante a seguinte fórmula:

$$(ST)\ (x) = S(T(x)),$$

para todo x tal que $x \in D_T$ e $T(x) \in D_S$. Assim, virá:

$$(ST)\ (1) = S(T(1)) = S(2) = 4$$
$$(ST)\ (2) = S(T(2)) = S(4) = 16$$

Quanto a (S T) (3) e (S T) (4) *não existem,* porque T(3) e T(4) são os elementos 6 e 8 que não pertencem a D_S. Será, portanto:

$$S\ T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Analogamente se vê que $\quad T\,S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Dum modo geral, dadas duas aplicações f, g de domínios quaisquer, chama-se *produto de* f *por* g, e designa-se por fg a aplicação definida pela fórmula

$$((fg)\ (x) = f(g(x))$$

(¹) Já atrás se disse que 'operador' é sinónimo de 'aplicação'.

para todos os valores de x, para os quais o segundo membro tem valor, isto é, tais que

$$x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in D_f$$

O domínio de fg será, pois, constituído por esses valores de x, isto é: $D_{fg} = \{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$.

Pode acontecer, em particular, que o conjunto D_{fg} obtido segundo esta fórmula seja vazio. Diremos, neste caso, que fg é a *aplicação vazia*. Por exemplo, o produto das aplicações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

é a aplicação vazia.

EXERCICIOS:

I. Sejam p, m, i, as aplicações definidas respectivamente pelas expressões 'pai de', 'mãe de', 'idade de', num conjunto de pessoas. Qual é então o significado dos símbolos pm, mp, ip, im, pi, mi? As aplicações m, p são permutáveis?

II. Dadas as aplicações

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

indique os respectivos domínios e contradomínios, e calcule PQ, QP, PR, RP, QR e RQ. Em que casos há permutabilidade?

III. Idem para as aplicações

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

IV. As expressões 'dobro', 'triplo', 'metade', 'terço', 'quadrado', 'cubo', 'raiz quadrada', 'raiz cúbica' ([1]), representam operadores correspondentes às expressões designatórias $2x$, $3x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, e cujos domínios dependem do universo considerado. Indique, em linguagem comum, os produtos desses operadores dois a dois, bem como as respectivas expressões designatórias simbólicas e os domínios de existência em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$. Em que casos há permutabilidade?

V. Sendo f, g, h, i, k, as funções definidas respectivamente por $x+3$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, x, x^2, sendo $\mathbb{R}$ o universo, determine **f i**, **i g**, h i, f g, g f, f h, h f, g h, h g, g k, k g, h(gf), (hg)f, bem como os respectivos domínios ([2]). Quais são, nestes casos, os pares de aplicações permutáveis?

VI. O produto do operador *dois terços* pelo operador *quatro quintos* é o operador *dois terços de quatro quintos*. Escreva, por extenso, uma designação mais simples equivalente a '*dois terços de quatro quintos*', e indique a equivalência dessas duas expressões, traduzida por símbolos numéricos.

11. **Produto duma aplicação pela identidade.** Seja, por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e f o operador *dobro* restringida a A. Então, será:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad I_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad I_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

([1]) Para simplificar, escrevemos 'dobro' em vez de 'dobro de', 'metade' em vez de 'metade de', etc.

([2]) No caso de funções em $\mathbb{R}$ prefere-se, como veremos adiante, a notação 'f o g' à notação 'f g'. Só por curiosidade usamos a segunda.

e facilmente se reconhece que

$$f\, I_A = f, \quad I_B f = f$$

Ora, trata-se aqui dum facto geral, isto é:

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B *e a aplicação* f *de* A *em* B *tem-se* $f\, I_A = I_B f = f$.

(Demonstre este facto).

Porém, tornando ao exemplo inicial, vê-se que

$$f I_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad I_A f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e portanto $f\, I_B \neq f, \quad I_A f \neq f$

12. **Produto de duas aplicações inversas uma da outra.** Pense, um pouco, nas seguintes perguntas:

1) Qual é a capital do país cuja capital é Paris?
2) Qual é o país cuja capital é a capital da Itália?
3) Qual é a metade do dobro dum número?
4) Qual é o dobro da metade dum número?
5) Qual é a raiz quadrada do quadrado dum número?
6) Qual é o quadrado da raiz quadrada dum número?
7) Qual é a raiz cúbica do cubo dum número?
8) Qual é a cidade banhada pelo rio que banha Lisboa?

Note-se que a última questão é imprecisa. Porquê? O mesmo acontece com a questão 6) no universo $\mathbb{R}$, mas não em $\mathbb{N}$. Porquê? Será correcto dizer, por exemplo, 'a raiz quadrada de 25' no universo (Q?

Considere, agora, as aplicações

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, no conjunto $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Imediatamente se reconhece que $g = f^{-1}$. Por outro lado

$$f^{-1}f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I_A$$

$$f\,f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = I_B$$

Este exemplo e os anteriores fazem pensar que seja verdadeira a seguinte proposição:

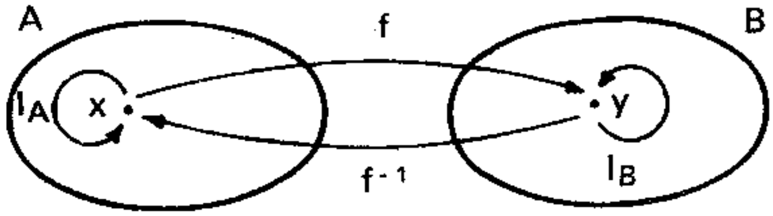
Quaisquer que sejam os conjuntos A *e* B, *se* f *é uma aplicação biunívoca de* A *em* B, *tem-se:*

$$f^{-1}\,f = I_A, \quad f\,f^{-1} = I_B$$

Veja se é capaz de demonstrar este facto: basta, para isso, aplicar as definições de produto de duas aplicações, de aplicação inversa e de aplicação identidade. Recorde que se tem, por definição, neste caso:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad \forall x \in A, \quad y \in B$$

O diagrama junto, só por si, torna o facto intuitivo.



EXERCICIOS:

I. Seja $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$ e f a restrição da aplicação $x \mapsto x^2$ a A. Defina directamente esta aplicação e determine uma aplicação g tal que f g = I_B (inverso à direita de f). Quantos inversos à direita tem f? Questões análogas para a aplicação $x \mapsto x^2$ em $\mathbb{N}$, e em $\mathbb{R}$.

II. Seja $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e f a restrição de $x \mapsto x^2$ a A. Determine uma aplicação g de B em A tal que g f = I_A. Quantas aplicações g existem nestas condições?

III. Prove o seguinte: Toda a aplicação injectiva dum conjunto finito em si mesmo é sobrejectiva, e vice-versa.

13. **Aplicação inversa dum produto.** Considere os operadores *dobro* e *cubo* no universo $\mathbb{R}$; ambos são aplicações biunívocas do conjunto $\mathbb{R}$ sobre si mesmo, cujas aplicações inversas são, respectivamente, os operadores *metade* e *raiz cúbica*. O produto do primeiro pelo segundo é o operador *dobro do cubo*, correspondente à expressão $2x^3$. O produto do segundo pelo primeiro é o operador *cubo do dobro*, que corresponde à expressão $(2x^3)$ equivalente a

$8x^3$. Ora, é fácil ver que ambos os produtos são ainda aplicações biunívocas de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Qual é o inverso do operador *dobro do cubo*? Para achar o dobro do cubo dum número x, eleva-se x ao cubo e multiplica-se o resultado por 2; o número y assim obtido será, pois:

$$y = 2x^3$$

Se quisermos, inversamente, calcular x a partir de y, devemos *primeiro* dividir y por 2 e *depois* extrair a raiz cúbica a $\frac{y}{2}$, isto é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$$

Vemos, assim, que o inverso do operador *dobro do cubo* é o operador *raiz cúbica de metade*. Analogamente se reconhece que o inverso de *cubo do dobro* é *metade da raiz cúbica*, o inverso de *dobro do terço* é *triplo da metade* (isto é, o inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$), etc., etc.

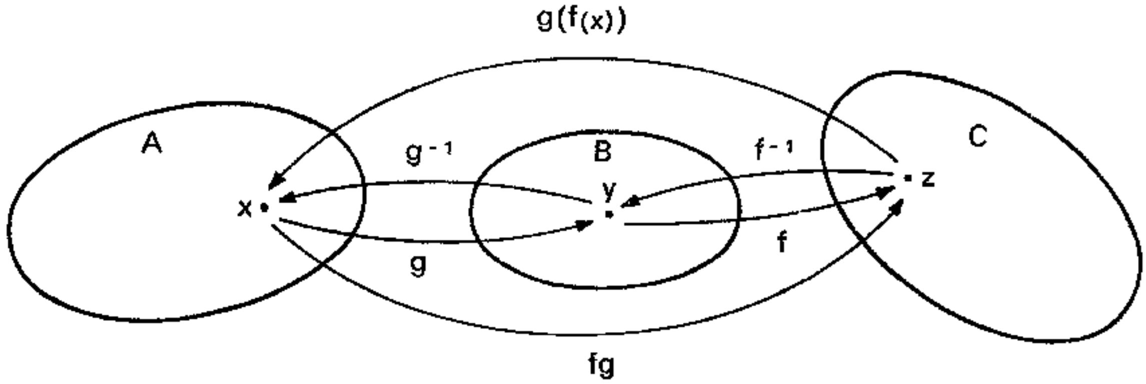
Estes exemplos levam-nos a admitir o seguinte facto geral:

O produto f g *de duas aplicações biunívocas é ainda uma aplicação biunívoca e o inverso do produto é o produto das aplicações inversas em ordem inversa; isto é:*

$$(f\ g)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$$

Será isto verdade? Consideremos três conjuntos A, B, C quaisquer, uma aplicação biunívoca g de A sobre B e uma aplicação biunívoca f de B sobre C. Queremos provar que f g é uma aplicação biunívoca de A em C e que $(f\ g)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

O seguinte diagrama dá-nos intuitivamente a ideia da demonstração:



Demonstração.

Seja z um elemento qualquer de C e ponhamos

(1) $$y = f^{-1}(z), \quad x = g^{-1}(y)$$

Então, será $z = f(y)$, $y = g(x)$ e, portanto:

(2) $$z = (fg)\,(x)$$

Por outro lado, de (1) vem:

(3) $$x = (g^{-1}f^{-1})\,(z)$$

Seja agora x′ um elemento qualquer de A distinto de x. Então, como f, g são biunívocas, será $g(x) \neq g(x')$, donde:

$$f(g(x)) \neq f(g(x')) \quad \text{ou seja} \quad (fg)\,(x) \neq (fg)\,(x')$$

Assim, para todo o elemento z de C existe um e um só elemento x de A que verifica (2), o que significa que fg é biunívoca de A sobre B. Finalmente as fórmulas (2) e (3) mostram que $(fg)^{-1} = g^{-1}\,f^{-1}$.

14. **Equipotência de dois conjuntos.** Segundo o que vimos no Cap. III, n.º 2, dados dois conjuntos A, B não vazios, diz-se que A é *equipotente* a B, quando pode ser definida uma aplicação biunívoca de A sobre B. Admitimos então, intuitivamente, que a relação *equipotente,* assim definida entre conjuntos, é uma relação de equivalência, isto é, uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Podemos, agora, demonstrar este facto:

1.º A relação é *reflexiva*, isto é: *todo o conjunto* A *não vazio é equipotente a si mesmo.* Com efeito, qualquer que seja o conjunto A não vazio, existe uma aplicação biunívoca de A sobre A: a identidade I_A.

2.º A relação é *simétrica,* isto é, *se* A *é equipotente a* B, B *é equipotente a* A. Com efeito, se existe uma aplicação biunívoca f de A sobre B, a aplicação inversa f^{-1} é uma aplicação biunívoca de B sobre A.

3.º A relação é *transitiva,* isto é, *se* A *é equipotente a* B *e* B *é equipotente a* C, *então* A *é equipotente a* C. Com efeito, se existe uma aplicação biunívoca f de A sobre B e uma aplicação biunívoca g de B sobre C, o produto g f é, como vimos no número anterior, uma aplicação biunívoca de A sobre C.

Outros factos que admitimos intuitivamente no Cap. III podem agora ser demonstrados, como exercícios, por exemplo, a transitividade da relação $<$ (pág. 144).

15. **Produto de três ou mais aplicações. Potências de aplicações.** Consideremos três aplicações f, g, h, de domínios quaisquer. Chama-se *produto* das aplicações f, g, h, por esta ordem, e designa-se por f g h, a aplicação definida pela fórmula:

$$(f\ g\ h)\ (x) = f(g(h(x)))$$

para todos os valores de x tais que

$$x \in D_h \quad \wedge \quad h(x) \in D_g \quad \wedge \quad g(h(x)) \in D_f$$

Portanto, D_{fgh} será o conjunto de todos os valores de x que verificam esta condição.

EXEMPLOS:

I. Seja:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{França} \\ \text{Lisboa} & \text{Madrid} & \text{Paris} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lima} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} \\ \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Lisboa} & \text{Setúbal} \\ \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} \end{pmatrix}$$

Estas aplicações também podem ser definidas nos respectivos domínios pelas expressões 'capital de', 'país onde nasce' e 'rio que banha'. Então é fácil ver que se tem:

$$fgh = \begin{pmatrix} \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Lisboa} & \text{Setúbal} \\ \text{Madrid} & \text{Lisboa} & \text{Madrid} & \text{Lisboa} \end{pmatrix}$$

aplicação esta definida pela expressão *'capital do país onde nasce o rio que banha'* no conjunto $D_{fgh} = D_f$.

II. Seja:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se, neste caso:

$$f\,g\,h = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D_{fgh} = \{1, 3\}$$

III. Seja $f(x) \equiv 1/x$, $g(x) \equiv 2 - x$, $h(x) \equiv \sqrt{x}$ no universo $\mathbb{R}$. Então, será:

$$(f\,g\,h)\,(x) \equiv \frac{1}{2 - \sqrt{x}}, \quad D_{fgh} = \{x\colon x \geqslant 0 \ \wedge \ x \neq 4\}$$

Analogamente se define o produto de 4 aplicações, de 5 aplicações, etc. Por sua vez, do conceito de produto de duas ou mais aplicações deriva o conceito de *potência de expoente natural duma aplicação*. Assim:

$$f^1 = f,\ f^2 = f\,f,\ f^3 = f\,f\,f,\ f^4 = f\,f\,f\,f,\ \text{etc.}$$

Por exemplo:

Se $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, vem $f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I$

Se $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, vem $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\varphi^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e

φ^4 é a aplicação vazia.

Sejam agora m, p. i, respectivamente, os operadores definidos pelas expressões 'mãe', 'pai', 'idade', num conjunto A de seres humanos. Neste caso, os símbolos $i\,m\,p$, $i\,p^2$, etc. designam os operadores definidos pelas expressões 'idade da avó paterna', 'idade do avô paterno', etc., em certos subconjuntos de A (exemplifique com um dado conjunto A). Por sua vez os símbolos $p\,m\,p$, $m\,p\,m$, p^3, etc. designam operadores facilmente reconhecíveis, definidos em subconjuntos de A. Observem-se os seguintes factos interessantes:

$$p\,m\,p = p(m\,p) = (p\,m)\,p,$$

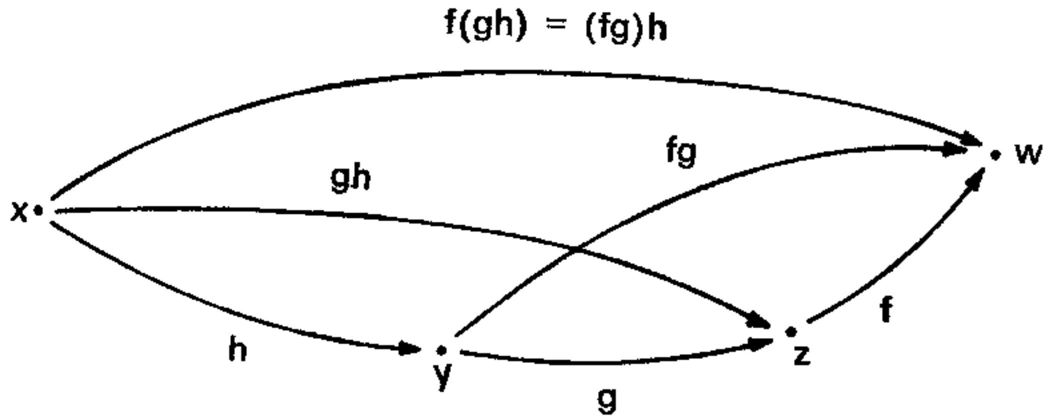
$$m\,p\,m = m\,(p\,m) = (m\,p)\,m,$$

$$p^3 = pp^2 = p^2p, \text{ etc.}$$

A primeira fórmula lê-se, em linguagem corrente:

pai da mãe do pai = *pai da avó paterna* =
= *avô materno do pai,* etc.

Isto dá a ideia de que a multiplicação de operadores, embora não seja comutativa como já temos observado, é no entanto *associativa.* Será sempre assim, na verdade? O facto torna-se intuitivo com o seguinte diagrama:



A demonstração rigorosa é dada no número seguinte.

17. **Associatividade da multiplicação de operadores.** Consideremos três aplicações quaisquer, f, g, h. Trata-se de provar que

f(gh) = (fg)h. Ora temos, pela definição de produto de *duas* aplicações:

$$\begin{cases} (gh)\,(x) = g(h(x)), & \forall\, x \in D_{hg} \\ x \in D_{gh} \Leftrightarrow x \in D_h \ \wedge \ h(x) \in D_g \end{cases}$$

e ainda, *pela mesma definição* (¹):

$$\begin{cases} [f(gh)]\,(x) = f\,[(gh)\,(x)], & \forall x \in D_{f(gh)} \\ x \in D_{f(gh)} \Leftrightarrow x \in D_{gh} \wedge (gh)\,(x) \in D_f \end{cases}$$

Logo, substituindo aqui as expressões (gh) (x) e $x \in D_{gh}$ pelas anteriores expressões equivalentes, virá:

$$\begin{cases} [f(gh)]\,(x) = f\,[g(h(x))], & \forall x \in D_{f(gh)} \\ x \in D_{f(gh)} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f \end{cases}$$

Mas isto mostra que $D_{f(gh)} = D_{fgh}$ e que

$$f(g\,h) = f\,g\,h$$

Analogamente, temos:

$$\begin{cases} (fg)\,(u) = f(g(u)), & \forall\, u \in D_{fg} \\ u \in D_{fg} \Leftrightarrow u \in D_g \wedge g(u) \in D_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(fg)h]\,(x) = (fg)\,[h(x)], & \forall x \in D_{(fg)h} \\ x \in D_{(fg)h} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_{fg} \end{cases}$$

donde, aplicando os dois PRINCIPIOS LÓGICOS DE EQUIVALÊNCIA:

$$[(fg)h]\,(x) = f(g(h(x))), \quad \forall\, x \in D_{(fg)h}$$

$$x \in D_{(fg)h} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f$$

(¹) Usamos, em seguida, parêntesis rectos a fim de tornar a escrita menos confusa.

Mas isto mostra que $D_{(fg)h} = D_{fgh}$ e que

$$(fg)h = fgh$$

$$\boxed{(fg)\,h = f(gh) = fgh}$$

o que se exprime dizendo que *a multiplicação de aplicações é associativa.* É claro que esta fórmula permite definir o conceito de produto de 3 aplicações, a partir do conceito do produto de 2 aplicações. Mais geralmente, o produto de *n* aplicações $f_1, \ldots, f_n$, que se representa por $f_1 f_2 \ldots f_n$ ou por $\prod_{k=1}^{n} f_k$ (com n inteiro > 1) pode ser definido a partir do conceito do produto de duas aplicações, como no caso dos números, e vale para esse produto a *propriedade associativa generalizada.*

18. **Funções reais de variável real.** Como já foi dito no número 4, quando uma função é definida por uma expressão designatória, sem mais indicações, o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo considerado. Se o universo é $\mathbb{R}$, tanto o domínio como o contradomínio da função estão contidos em $\mathbb{R}$: exprime-se este facto dizendo que a função é *real de variável real.* Se o universo fosse $\mathbb{N}$, diríamos, *'função natural de variável natural'.* Mais geralmente, podemos considerar *funções reais de variável natural, funções naturais de variável real,* etc.

Sobre este ponto, convém ler o § 1.º do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra* (1), 6.º ano, e resolver os respectivos exercícios.

Convém ainda ler o § 3.º do mesmo capítulo e resolver os respectivos exercícios. Quanto à classificação de funções (§ 4.º), bastará tratar da classificação em racionais e irracionais, racionais inteiras e racionais fraccionárias.

---

(1) Ver nota da pág. 170.

19. **Operações sobre funções de variável real.** Sejam f, g duas funções reais de variável real. É costume chamar *soma, diferença, produto* e *quociente* das funções f, g (por esta ordem), as funções f+g, f − g, fg, f/g definidas pelas seguintes fórmulas:

$$(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) \equiv f(x) - g(x)$$

$$(f\,g)(x) \equiv f(x).\,g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)}$$

Subentende-se que os domínios de f + g, f - g e fg são a intersecção de D_f com D. Por exemplo, o domínio da função $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$ é o intervalo $[-1, 1]$, intersecção do intervalo $[-1, +\infty[$, (domínio da função $\sqrt{x+1}$) com o intervalo $]-\infty, 1]$ (domínio da função $\sqrt{1-x}$). Por sua vez, o domínio de f/g é o conjunto dos valores de x que pertencem a $D_f \cap D_g$ e *tais que* $g(x) \neq 0$.

Analogamente, sendo *n* um número natural, a expressão designatória $\sqrt[n]{f(x)}$ define uma função chamada *raiz de índice* n *de* f.

Visto que o produto fg de duas funções reais de variável real é definido pela fórmula anterior, o produto de f por g segundo a definição do n.º 10 deve agora ser chamado '*composta de* f *com* g' representado pelo símbolo fog, para evitar confusões. Seja, por exemplo:

$$f(x) \equiv x + 1, \quad g(x) \equiv x^2$$

Neste caso, f é a operação que consiste em *somar* 1 e g a operação que consiste em *elevar ao quadrado.* É claro que se tem:

$$(f \circ g)(x) \equiv x^2 + 1, \quad (g \circ f)(x) \equiv (x + 1)^2$$

Deste modo se vê que f, g (isto é, as operações de somar 1 e de elevar ao quadrado) não são permutáveis. Mas tem-se:

$$(f\,g)(x) \equiv (g\,f)(x) \equiv x^2\,(x + 1)$$

20. **Operador lógico de explicitação.** Consideremos, por exemplo, a condição $3 < x < 5$. No universo $\mathbb{N}$ esta condição é verificada por um único elemento, isto é:

$$\exists^1 x \in \mathbb{N}: \quad 3 < x < 5$$

Para designar esse elemento pode usar-se a expressão

$$\iota_x \quad (3 < x < 5)$$

que se lê 'o elemento x tal que $3 < x < 5$'. É claro que nesta expressão a letra x é uma variável *muda*, que pode ser substituída por qualquer outra variável, sendo a expressão obtida equivalente à primeira (ao contrário do que acontece com a condição $3 < x < 5$, em que a variável x é *livre*). Assim, em $\mathbb{N}$

$$\iota_x\,(3 < x < 5) \;=\; \iota_n\,(3 < n < 5) \;=\; 4$$

Porém, no universo $\mathbb{R}$ há uma infinidade de elementos que verificam a condição $3 < x < 5$ e, por isso, a expressão $\iota_x\,(3 < x < 5)$ deixa de ter aí sentido; o que podemos escrever neste caso é:

$$\{x : 3 < x < 5\} \;=\;]3,\ 5[$$

ou então

$$\iota_x\,(3 < x < 5 \;\wedge\; x \in \mathbb{N}) \;=\; 4$$

Analogamente, em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}^+$, a equação $x^2 = 9$ tem uma única solução (que é 3) e assim podemos escrever:

$$\iota_x\,(x^2 \;=\; 9) \;=\; 3$$

em que o símbolo ι_x se lêa 'o aind elemento x tal que'. Mas em $\mathbb{R}$

esta expressão deixa de ter sentido, visto haver mais de um elemento que verifica a condição $x^2 = 9$. Podemos só escrever:

$$\{x: x^2 = 9\} = \{3, -3\}$$

ou então

$$\iota_x \,(x^2 = 9 \wedge x > 0) = 3$$

Analogamente, em $\mathbb{R}$:

$$\iota_x \,(x^2 = 3 \wedge x > 0) = \sqrt{3}$$

$$\iota_t \,(t^2 = 3 \wedge t < 0) = -\sqrt{3}, \text{ etc.}$$

O símbolo ι é uma letra grega chamada 'iota'. Dum modo geral, se uma dada condição com uma variável, é verificada por um único elemento, este pode ser designado pela expressão que se obtém, antepondo à condição dada o símbolo ι tendo como índice a variável da condição. O operador lógico representado pelo símbolo ι munido dum índice é chamado *operador de explicitação.*

21. **Funções definidas implicitamente; relações funcionais e funções.** Consideremos, por exemplo, a condição $x = y + 2$ em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}$. Antepondo a esta condição o símbolo ι_y, obtemos uma expressão designatória, em que y passou a ser variável muda, ficando apenas x como variável livre. É fácil ver que se tem nesse caso

$$\iota_y \,(x = y + 2) \equiv x - 2$$

isto é: *o elemento* y *tal que* $y + 2 = x$ *é* $x - 2$. O domínio dessa expressão designatória em x é o conjunto dos números > 2 ou o conjunto $\mathbb{R}$, conforme o universo é $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Analogamente, ter-se-á em $\mathbb{R}$:

$$\iota_y\ (x = 2y) \equiv \frac{x}{2} \quad \text{(domínio: } \mathbb{R}\text{)}$$

$$\iota_y\ (x = y^2 \wedge y > 0) \equiv \sqrt{x} \quad \text{(domínio: } [0, +\infty[\text{)}$$

$$\iota_y\ (x^2 + y^2 = 9 \wedge y > 0) \equiv \sqrt{9 - x^2} \quad \text{(domínio: } [-3, 3]\text{)}$$

Diz-se então, por exemplo, que a condição

$$x^2 + y^2 = 9 \wedge y > 0$$

define *implicitamente* a variável y como função de x no conjunto $[-3, 3]$, visto que, para cada $x \in [-3, 3]$, *existe um e um só* y que verifica essa condição.

Dum modo geral, dada uma relação binária R, a expressão $\iota_y\ (x\ R\ y)$ é uma expressão designatória que tem por domínio de existência o conjunto A dos valores de x tais que existe um e um só y que verifica $x\ R\ y$, isto é, o conjunto

$$A = \{x: \exists^1 y,\ x\ R\ y\}$$

Diz-se então que a condição $x\ R\ y$ define *implicitamente* y como função de x no conjunto A; e que a expressão designatória $\iota_y\ (x\ R\ y)$ define essa função *explicitamente*. Também se diz neste caso que a condição $x\ R\ y$ (ou a condição R) é *funcional* relativamente à segunda variável, no conjunto A. Note-se que, por exemplo, a condição

$$x + y^2 = 3 \wedge y > 0$$

é funcional em relação a y no conjunto $]-\infty, 3]$ (corresponde-lhe a função $\sqrt{3 - x}$) e funcional em relação a x no conjunto $\mathbb{R}$ (corresponde-lhe a função *inversa* $3 - y^2$).

Quando se diz que uma relação é funcional, subentende-se geralmente que é funcional relativamente à segunda variável. No diagrama duma relação, reconhecemos que esta é funcional, *quando de cada elemento parta uma única seta*. É isto, aliás, o que temos visto nos diagramas de funções.

Assim, a cada relação funcional R, *corresponde uma e uma só função, que é definida explicitamente pela expressão* $\iota_y\,(x\ R\ y)$. *Reciprocamente, a cada função* f *corresponde uma e uma só relação* R *assim definida*:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow f(x) = y$$

NOTA. Esta correspondência biunívoca que se estabelece entre relações funcionais e funções leva muitos autores modernos a identificar as relações funcionais com as funções correspondentes. Todavia esta identificação conduz muitas vezes na prática a situações confusas. Por exemplo, a relação *é pai de* não é funcional, segundo este critério (quer dizer, a condição 'x *é pai de* y' não é funcional com respeito a y), mas já a relação *tem por pai*, inversa da primeira, é funcional; corresponde-lhe a função (ou aplicação) *pai de*, que não convém confundir com essa relação. Analogamente, a relação de identidade em qualquer universo U, é uma relação funcional, à qual corresponde a aplicação I; mas não convém confundir esta aplicação com a relação =; pois que então deveríamos escrever I = =, o que não parece razoável.

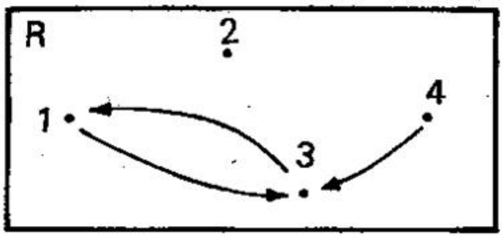
OUTROS EXEMPLOS:

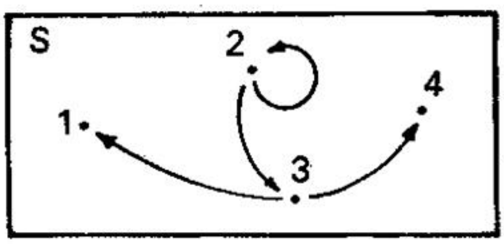
I. Sejam as relações R e S assim definidas

$y \backslash x$	1	2	3	4
1			•	
2				
3	•			•
4				

$y \backslash x$	1	2	3	4
1			•	
2		•		
3		•		
4			•	

que também podem ser definidas pelos seguintes diagramas:





A primeira é funcional no conjunto $\{1, 3, 4\}$. Corresponde-lhe a função $f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A segunda não é funcional no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas já a sua inversa, S^{-1}, é funcional neste conjunto, correspondendo-lhe a função $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

II. Seja F a relação *é filho ou filha de* e seja M o conjunto dos indivíduos de sexo masculino (no universo H dos seres humanos). A relação F não é funcional, mas se pusermos

$$xRy \Leftrightarrow xFy \wedge y \in M$$

a relação R assim definida já é funcional: corresponde-lhe a função *pai de,* que podemos designar abreviadamente por p. Assim:

$$p(x) \equiv \iota_y \ (xFy \wedge y \in M)$$

III. Façamos corresponder a cada número real x o número real y tal que

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2x-1 & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Fica, assim, definida uma função real de domínio $\mathbb{R}$, que também pode ser definida pela expressão designatória

$$\iota_y \left[(y = x^2 \Leftarrow x < 1) \wedge (y = 2x-1 \Leftarrow x \geqslant 1)\right]$$

IV. Costuma designar-se por Z o conjunto dos números inteiros relativos $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$. Posto isto, consideremos a expressão designatória:

$$\iota_n \ (n \in Z \ \wedge \ n \leqslant x < n+1)$$

que se pode ler *'o maior número inteiro igual ou inferior a* x'.

Fica, assim, definida em $\mathbb{R}$ uma função de x também chamada *'característica de* x' ou *'parte inteira de* x' e que se representa pelo símbolo C(x). Teremos, por exemplo:

$$C(2,65) = 2, \quad C(2) = 2, \quad C(4,001) = 4$$

$$C(\pi) = 3, \quad C(-0,35) = -1, \quad C(-2) = -2, \quad \text{etc.}$$

22. **Funções plurívocas.** Consideremos a equação

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

Resolvendo-a relativamente a y, é costume apresentar a solução (dependente de x) sob a seguinte forma:

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{para } x \in [-2, 2]. \tag{2}$$

Aqui, a bem dizer, há um abuso de escrita. A expressão $\pm \sqrt{4 - x^2}$ não é propriamente uma expressão designatória no intervalo $[-2, 2]$, pois que, para cada valor de x tal que $-2 < x < 2$, a expressão toma dois valores diferentes. Por exemplo, para $x = 1$, obtém-se a expressão ambígua $\pm \sqrt{3}$. A condição (1) não é, portanto, funcional no intervalo $[-2, 2]$. No entanto, é cómodo dizer, neste caso, que a fórmula (2) define explicitamente y como *função plurívoca de* x nesse intervalo — função *com dois valores* para cada $x \in]-2, 2[$.

Dum modo geral, chamaremos *função plurívoca* toda a correspondência não necessariamente unívoca, isto é, toda a correspondência que associa a cada elemento dum conjunto A (domínio da função) *um ou mais* elementos de outro conjunto B. Por oposição, podíamos chamar *função unívoca* toda a correspondência unívoca. Mas, segundo as convenções anteriores, a palavra 'função' (assim como as palavras 'aplicação', 'operador', etc.) significam 'correspondência unívoca'. Assim, a expressão 'função plurívoca' deve considerar-se indecomponível, nos casos em que se aplica.

Razões semelhantes às que aduzimos para as funções, levam-nos a não confundir uma função plurívoca com a relação correspondente ([1]).

([1]) Note-se que, de uma função plurívoca f, podemos sempre passar para uma função (unívoca), associando, a cada elemento x do domínio de f, não os *valores individuais*, mas *o conjunto desses valores*, correspondentes a x.

Estas convenções permitem-nos falar de *inversa de uma função* f, mesmo no caso em que f não é biunívoca (ou injectiva); neste caso a inversa de f é uma função plurívoca. Por exemplo, a inversa da função $x \curvearrowright y = x^2$ é a função plurívoca $y \curvearrowright x = \pm\sqrt{y}$; isto é: a operação de *elevação ao quadrado* tem como inversa, no universo $\mathbb{R}$, a operação plurívoca de *extracção de raiz quadrada*; o contradomínio da primeira função é o domínio da segunda e vice-versa.

Um dicionário bilíngue — por ex. português-inglês — dá-nos bem a ideia de uma operação plurívoca (a tradução de português para inglês), visto que, a cada vocábulo português, correspondem vários vocábulos ingleses. É claro que, neste caso, a operação inversa é também plurívoca.

A partir deste momento convém resolver os exercícios sobre explicitação e inversão que figuram no Compêndio de Álgebra[1], *e fazer por aí o estudo da representação geométrica das funções, acompanhado dos respectivos exercícios.*

---

(1) Ver nota da pág. 170.

Índice

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Dezembro de 1974

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA