PUBLICAÇÕES DO CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA
DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
N.º 37

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(APLICAÇÕES E COMPLEMENTOS, II)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

1 9 5 4

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(APLICAÇÕES E COMPLEMENTOS, II)

ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO

Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA

Extracto do tomo XXXVIII

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(APLICAÇÕES E COMPLEMENTOS, II)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116
—
1955

Extracto do fasc. I do tomo XXXVIII
dos
«Anais da Faculdade de Ciências do Porto»

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(Aplicações e complementos, II)

Módulos e anéis com operadores. Anéis simples e álgebras simples

1) **Introdução** — Embora nos tenhamos referido largamente, em Capítulos anteriores, aos assuntos de que vamos tratar, julgamos que poderão ter interesse as considerações aqui expostas, essencialmente baseadas nos trabalhos seguintes: [29] — E. ARTIN e G. WHAPLES, *The theory of simple rings,* «American Journal of Mathematics», vol. 65, 1943, págs. 87 a 107; [30] — A. ALMEIDA COSTA, *Über die unterdirekten Modulnsummen,* «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», vol. II, 1952, págs. 115 a 160; [31] — A. ALMEIDA COSTA, *On modules and rings with operators,* na mesma Revista, vol. IV, 1954, págs. 5 a 58. Quaisquer outras citações estarão de acordo com as referências feitas nas lições anteriores.

2) **Módulos com operadores** — Seja $\mathfrak{M} = \{x, y, z, \ldots\}$ um módulo com o domínio operatório $\Omega = \{\lambda, \mu, \nu, \omega, \rho, \sigma, \tau, \ldots\}$. Significa isto que, para cada x e cada λ, existe um produto $x\lambda$ satisfazendo às duas regras seguintes: 1) $x\lambda \in \mathfrak{M}$; 2) $(x+y)\lambda = x\lambda + y\lambda$.

Os operadores induzem endomorfismos no módulo. A imagem de λ, no absoluto $\mathfrak{A}$ dos endomorfismos de $\mathfrak{M}$, será representada por E_λ. O conjunto das imagens dos elementos de Ω será designado por Ω_o, e o subanel de $\mathfrak{A}$ gerado por Ω_o representá-lo-emos por $\mathfrak{E}(\Omega_o)$ ou Ω_d.

Tanto importa falar de sub-módulos — Ω como de sub-módulos — Ω_o. Os sub-módulos — Ω_o são também sub-

-módulos — Ω_d. De facto, se $\mathfrak{m}$ é sub-módulo — Ω, para cada $x \in \mathfrak{m}$, tem-se

$$(((x\lambda)\mu)\ldots)\omega = (((xE_\lambda)E_\mu)\ldots)E_\omega = xE_\lambda E_\mu \ldots \\ \ldots E_\omega \in \mathfrak{m},$$

$$x(\Sigma \pm E_\rho E_\sigma \ldots E_\tau) = \Sigma \pm x(E_\rho E_\sigma \ldots E_\tau) \in \mathfrak{m}.$$

Os somatórios indicados, que têm um número finito de parcelas, são de interpretação imediata. Assim, $\Sigma \pm E_\rho E_\sigma \ldots \ldots E_\tau$ representa o termo geral do subanel Ω_d; e o último somatório é uma soma de elementos de $\mathfrak{m}$, consequentemente um elemento pertencente a $\mathfrak{m}$.

Os endomorfismos — Ω, de $\mathfrak{M}$, são endomorfismos — Ω_o, ou endomorfismos — Ω_d, e reciprocamente. Significa isto que Ω_o e Ω_d têm o mesmo comutador no absoluto $\mathfrak{A}$. Se o comutador dum conjunto $\mathfrak{C}$ de endomorfismos for representado por $\overline{\mathfrak{C}}$, podemos enunciar este

TEOREMA 1: — *Se $\mathfrak{M}$ é um módulo — Ω, é módulo (no mesmo sentido) relativo ao subanel Ω_d do absoluto dos seus endomorfismos* [1]. *Os endomorfismos — Ω, de $\mathfrak{M}$, são os seus endomorfismos — Ω_d, pelo que o comutador $\overline{\Omega}_d = \overline{\Omega}_o$ representa a totalidade dos referidos endomorfismos — Ω.*

No que vai seguir-se, representaremos, geralmente, por $A, B, C, \ldots, S, \ldots, X, \ldots$ os elementos do absoluto $\mathfrak{A}$. Qualquer mudança de notação será expressamente indicada.

Consideremos um isomorfismo $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$ de dois módulos. Por meio dele, ter-se-á $x \longleftrightarrow x'$, $(x' \in \mathfrak{M}')$. Dado um endomorfismo A, de $\mathfrak{M}$, segundo o qual $x \to xA$, façamos corresponder a A o endomorfismo A', de $\mathfrak{M}'$, segundo o qual $x' \to (xA)'$. Será $(xA)' = x'A'$, $x' \to x'A'$. Neste sentido, os dois absolutos de $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ são anéis isomorfos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$. Se admitirmos, em seguida, que os módulos são isomorfos — Ω, tendo, portanto, um domínio operatório comum Ω, de imagens Ω_o, Ω'_o, em $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$, respectivamente, vê-se que o isomorfismo — Ω implica $x \to x\omega =$

(1) Significa que os sub-módulos são os mesmos.

$= xE_\omega$, $x' \to (x\omega)' = x'\omega = x'E'_\omega$, pelo que o correspondente de E_ω, no isomorfismo $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$, é o endomorfismo E'_ω. Isso acarreta que se tenha

$$x \to x', \qquad xE_\omega \to x'E'_\omega.$$

Diremos que o isomorfismo — Ω, simbolizado por $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$, é operatório relativamente às duas imagens Ω_o e Ω'_o. Ele é também operatório relativamente a Ω_d e Ω'_d, e, duma maneira geral, relativamente a dois sistemas de endomorfismos que se correspondem em $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$. Este isomorfismo prolonga qualquer dos isomorfismos anulares seguintes: $\Omega_d \simeq \Omega'_d$, $\overline{\Omega}_d \simeq \overline{\Omega}'_d$, $\overline{\overline{\Omega}}_d \simeq \overline{\overline{\Omega}}'_d$. Por sua vez, este último isomorfismo é já um prolongamento de $\Omega_d \simeq \Omega'_d$. Tem lugar o seguinte

TEOREMA 2: — *Se $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ são dois módulos isomorfos, o isomorfismo é sempre operatório, relativamente a dois sistemas quaisquer de endomorfismos que se correspondem no isomorfismo $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$ dos respectivos absolutos. Neste sentido, um isomorfismo — Ω dos módulos deve entender-se como isomorfismo operatório relativamente aos subanéis Ω_d, Ω'_d, gerados pelas imagens Ω_o, Ω'_o nos respectivos absolutos.*

Como caso especial, partamos de $\mathfrak{M}$ e suponhamos S um automorfismo de $\mathfrak{M}: \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$. Pelo que vimos atrás, ele determina as seguintes correspondências: $x \to x'$, $xA \to x'A'$. Mas agora é $x' = xS$, de sorte que $xA \to (xA)S = x'A' = (xS)A'$, o que implica $AS = A'S'$, ou $A' = S^{-1}AS$. O automorfismo é operatório relativamente aos elementos A e $A' = S^{-1}AS$, que se correspondem no automorfismo interno $\mathfrak{A} \simeq S^{-1}\mathfrak{A}S = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, do absoluto $\mathfrak{A}$. Se supusermos S um automorfismo — Ω, de $\mathfrak{M}$, também os raciocínios relativos ao teorema 2 nos dizem que, nas correspondências

$$x \to x', \qquad xA \to x'A', \qquad \text{se inclui} \qquad xE_\omega \to x'E'_\omega,$$

onde $E'_\omega = S^{-1}E_\omega S$ entra na relação geral $A' = S^{-1}AS$, acabada de deduzir. Todavia, aqui é, por hipótese, $xE_\omega =$

$= x\omega \to x'\omega = x' E_\omega = x' E'_\omega$, o que nos leva a $E'_\omega = E_\omega$. O automorfismo interno de $\mathfrak{A}$, definido por S, deixa invariantes os elementos de Ω_o, assim como os de Ω_d. Quanto ao comutador $\overline{\Omega}_d$, passa, por via de S, a $S^{-1}\overline{\Omega}_d S = \overline{\Omega}'_d = \overline{\Omega}_d$, ficando globalmente invariante, sem que o fique cada um dos seus elementos. Precisemos esta afirmação. Do facto de se ter $E_\lambda = S^{-1} E_\lambda S = S E_\lambda S^{-1}$, resulta que, sendo $T \in \overline{\Omega}_d$, também pertencem a este último subanel os elementos $S^{-1}TS$ e STS^{-1}. Assim, dado $T \in \overline{\Omega}_d$, existe sempre $X \in \overline{\Omega}_d$ tal que $S^{-1}XS = T$. Basta fazer $X = STS^{-1}$. Anàlogamente, existe $Y \in \overline{\Omega}_d$ tal que $SYS^{-1} = T$. Basta fazer $Y = S^{-1}TS$. Este resultado permite-nos afirmar que $\overline{\overline{\Omega}}_d \supseteq \Omega_d$ também fica globalmente invariante no automorfismo em questão. Supondo $Z \in \overline{\overline{\Omega}}_d$, para cada $T \in \overline{\Omega}_d$ é $ZT = TZ$. Se for $T = S^{-1}XS$, $(X \in \overline{\Omega}_d)$, vem $S^{-1}ZS \,.\, T = S^{-1}ZS \,.\, S^{-1}XS = S^{-1}ZXS = S^{-1}XZS = S^{-1}XS \,.\, S^{-1}ZS = T \,.\, S^{-1}ZS$, o que mostra ser também $S^{-1}ZS \in \overline{\overline{\Omega}}_d$. Anàlogamente, é $SZS^{-1} \in \overline{\overline{\Omega}}_d$. E, por fim, qualquer que seja $V \in \overline{\overline{\Omega}}_d$, existe $W \in \overline{\overline{\Omega}}_d$ por forma que $S^{-1}WS = V$. Basta fazer $W = SVS^{-1}$. Vale o

TEOREMA 3: — *Dado o módulo $\mathfrak{M}$, se* S *é um automorfismo de $\mathfrak{M}$, a aplicação* S, *de $\mathfrak{M}$ sobre si, é sempre operatória relativamente aos elementos* A *e* $S^{-1}AS$, *que se correspondem no automorfismo interno de $\mathfrak{A}$ definido por* S. *Em particular, se* S *é automorfismo —* Ω, *os elementos da imagem* Ω_o, *assim como os do subanel* Ω_d, *ficam invariantes nesse automorfismo interno. O automorfismo* S *é sempre automorfismo —* $\mathfrak{S}$, *se* $\mathfrak{S}$ *designa o subanel de $\mathfrak{A}$ que é o comutador de* S.

Para significar a 1.ª parte deste enunciado, também se usa a terminologia seguinte: *todo o automorfismo* S *dum módulo é uma transformação semi-linear, relativamente ao absoluto* $\mathfrak{A}$. A referida transformação semi-linear é uma transformação linear habitual relativamente ao comutador de S. Podemos dar, mesmo, esta proposição geral:

TEOREMA 4: — *Se* S *é um automorfismo dum módulo $\mathfrak{M}$,* S *é uma transformação semi-linear de $\mathfrak{M}$, relativamente a todo o subconjunto do seu absoluto $\mathfrak{A}$, que fique globalmente invariante em face do automorfismo interno definido por* S, *ou, pelo menos, que contenha todos os transformados dos seus elementos por via do automorfismo; e é uma transformação linear relativamente a todo o subconjunto cujos elementos fiquem individualmente invariantes em face de* S *(subconjunto contido no comutador de* S*).*

COROLÁRIO 1: — *Suposto* S *um automorfismo —* Ω *do módulo $\mathfrak{M}$,* S *é uma transformação semi-linear relativamente a* $\overline{\Omega}_d$ *e* $\overline{\overline{\Omega}}_d$ *e é uma transformação linear relativamente a* Ω_d.

3) **Aplicação aos anéis de ideal irredutível** — Em [26, ou Cap. XVII, § 2] foram aplicados os raciocínios do § anterior, sob uma forma particular. Dado, efectivamente, um anel $\mathfrak{R}$ de ideal irredutível, sejam $\mathfrak{R}_d$ e $\mathfrak{R}'_d$ duas concretizações de $\mathfrak{R}$, nos absolutos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$, de dois módulos $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$. Como $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$ são isomorfos — $\mathfrak{R}$, sabemos, pelo teorema 2, que o isomorfismo $\mathbf{M} \simeq \mathbf{M}'$ pode ser interpretado no sentido seguinte, [5]: $x \longleftrightarrow x'$, $xR \longleftrightarrow x'R'$, $xD \longleftrightarrow x'D'$, desde que $R \in \mathfrak{R}_d$ e $R' \in \mathfrak{R}'_d$ sejam imagens do mesmo elemento $\rho \in \mathfrak{R}$, e $D \in \overline{\mathfrak{R}}_d = \mathfrak{D}$ e $D' \in \overline{\mathfrak{R}}'_d = \mathfrak{D}'$ sejam elementos dos anéis de divisão $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$, igualmente em correspondência no isomorfismo $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$.

Os teoremas 3 e 4 podem também aplicar-se. Em correlação com esse facto, demonstraremos aqui a seguinte proposição:

TEOREMA 5: — *Se $\mathfrak{R}$ é um anel de ideal irredutível, com duas concretizações* $\mathfrak{R}_d$ *e* $\mathfrak{R}'_d$, *no absoluto $\mathfrak{A}$ dum módulo, há elementos* $\rho_o \in \mathfrak{r}$ *(= ideal direito mínimo de $\mathfrak{R}$) tais que os correspondentes* $r \in \mathfrak{r}_d$, $r' \in \mathfrak{r}'_d$, *onde* $\mathfrak{r}_d$ *e* $\mathfrak{r}'_d$ *são os ideais mínimos em correspondência com* $\mathfrak{r}$, *são distintos.* Dado $\rho \in \mathfrak{R}$, poremos $x\rho = xR$ na primeira concretização e $x\rho = xR'$ na segunda. Suponhamos, em seguida, que é sempre $r = r'$ e que $o \neq x_o \in \mathbf{M}$ é tal que $x_o \mathfrak{r} = x_o \mathfrak{r}_d = x_o \mathfrak{r}'_d = \mathbf{M}$. Tomado $x \in \mathbf{M}$ arbitrário, é sempre $x = x_o \rho_o = x_o r = x_o r'$, $(r' = r)$. Em seguida, tem-se $x\rho = (x_o \rho_o)\rho = x_o(\rho_o \rho)$. Como $\rho_o \rho \in \mathfrak{r}$, ter-se-á igualmente $x\rho = x_o(\rho_o \rho) = x_o(rR) = x_o(r'R')$, ou seja $xR = xR'$, para todo o x e todo o ρ, o que é contra a hipótese feita sobre $\mathfrak{R}$.

Posto isto, suponhamos $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{r}_d \simeq x_o \mathfrak{r}_d = \mathbf{M}$, $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{r}'_d \simeq x'_o \mathfrak{r}'_d = \mathbf{M}$, e consideremos o automorfismo S, de $\mathbf{M}$, segundo o qual $x_o r \to x'_o r'$, $x_o r R \to x'_o r' R'$, como se vê através do esquema

$$\begin{tikzcd} & r \arrow[r] & x_o r \arrow[dd, leftrightarrow] \\ \rho_o \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & r' \arrow[r] & x'_o r' \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} & r R \arrow[r] & x_o r R \arrow[dd, leftrightarrow] \\ \rho_o \rho \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & r' R' \arrow[r] & x'_o r' R' \end{tikzcd} .$$

Tendo-se $(x_o r) S = x'_o r'$, $(x_o r R) S = x'_o r' R' = (x_o r . S) R'$, conclui-se que $RS = SR'$, ou $R' = S^{-1} R S$. Assim, por via de S, estão em correspondência as duas imagens de $\mathfrak{R}$, em $\mathfrak{A}$. Tem lugar esta afirmação [Cfr. Cap. XVII, § 2, teor. 4]: Seja $\mathbf{M}$ um módulo em cujo absoluto $\mathfrak{A}$ existem duas concretizações $\mathfrak{R}_d$, $\mathfrak{R}'_d$, dum anel $\mathfrak{R}$ de ideal irredutível. Se o isomorfismo $\mathfrak{R}_d \simeq \mathfrak{R}'_d$ determina a correspondência $R \longleftrightarrow R'$, existe um automorfismo S, de $\mathbf{M}$, segundo o qual $x \to xS = x'$, $R' = S^{-1} R S$, ou seja, segundo o qual $x \to x'$, $xR \to (xR) S = (xS) R' = x' R'$. Nos termos do teorema 3, podemos fixar ainda este aditamento: O automorfismo S é operatório relativamente aos dois comutadores $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$, que se correspondem no absoluto, de sorte que, sendo $D \to D' = S^{-1} D S$, é também $xD \to xDS = xSD' = x'D'$.

Jacobson, como sabemos, [5], [26], dá um último enunciado, correspondente à hipótese de se ter $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$. O teorema 4 entra em jogo, sendo válida a afirmação de que S é, então, uma transformação semi-linear relativamente a $\mathfrak{D}$.

4) **Anéis com operadores** — Seja $\mathfrak{S} = \{a, b, c, d, \ldots, r, s, t, v, \ldots\}$ um anel que admite o domínio operatório $\Omega = \{\lambda, \mu, \nu, \omega, \rho, \sigma, \tau, \ldots\}$. Além das propriedades 1) e 2), referidas no § 2, segundo as quais, para o grupo aditivo de $\mathfrak{S}$, se tem 1) $a\omega \in \mathfrak{S}$; 2) $(a+b)\omega = a\omega + b a$; são válidas ainda as igualdades: 3) $(ab)\omega = (a\omega) b = a(b\omega)$.

$\mathfrak{A}$ designará ainda o absoluto de $\mathfrak{S}$ e $\overline{\mathfrak{C}}$ o comutador dum conjunto $\mathfrak{C}$ de endomorfismos contidos em $\mathfrak{A}$. Também Ω_o e Ω_d terão o mesmo significado do § 2. Duma maneira geral, se $\mathfrak{D}$ (que pode ou não ser um anel) se considera domínio operatório dum módulo, os significados de $\mathfrak{D}_o$ e $\mathfrak{D}_d$ são análogos aos de Ω_o e Ω_d.

Feito isto, chamaremos $E^{(d)}_r, E^{(d)}_s, \ldots$ as imagens, em $\mathfrak{A}$, dos endomorfismos definidos pelos elementos $r, s, \ldots \in \mathfrak{S}$, quando se utilizam como multiplicadores à direita de $\mathfrak{S}$, e chamaremos $E^{(e)}_r, E^{(e)}_s, \ldots$ as imagens, em $\mathfrak{A}$, dos endomorfismos definidos pelos elementos $r, s, \ldots$, quando se utilizam como multiplicadores à esquerda de $\mathfrak{S}$. As primeiras imagens formam um anel $\mathfrak{S}_d$, homomorfo de $\mathfrak{S}$, as segundas imagens formam um anel $\mathfrak{S}_e$, anti-homorfo de $\mathfrak{S}$.

Das igualdades $(ab)\lambda = (a E^{(d)}_b) E_\lambda = (a\lambda) b = (a E_\lambda) E^{(d)}_b$, $(ab)\lambda = (b E^{(e)}_a) E_\lambda = a(b\lambda) = (b E_\lambda) E^{(e)}_a$, concluímos imediatamente que Ω_d está contido nos comutadores $\overline{\mathfrak{S}}_d$ e $\overline{\mathfrak{S}}_e$, tendo-se $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d \cap \overline{\mathfrak{S}}_e$. Quanto às relações $sa.t = (a E^{(e)}_s) E^{(d)}_t = s.at = (a E^{(d)}_t) E^{(e)}_s$, elas mostram, por seu lado, que se tem $\mathfrak{S}_d \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_e$, $\mathfrak{S}_e \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d$. Em geral, $\mathfrak{S}_d \mathfrak{S}_e = \mathfrak{S}_e \mathfrak{S}_d$ não contém qualquer dos factores. Se designarmos por $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}(\mathfrak{S}_d, \mathfrak{S}_e)$ o subanel de $\mathfrak{A}$ gerado por $\mathfrak{S}_d$ e $\mathfrak{S}_e$, tem-se $\overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{S}}_d \cap \overline{\mathfrak{S}}_e$, pelo que é sempre $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$. A este respeito é conveniente fazer a observação de que é a propriedade 3) que vem garantir a inclusão $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$. O anel $\overline{\mathfrak{T}}$ funciona de domínio operatório máximo do anel. Os elementos $s \in \mathfrak{S}$, que são operadores, ficam caracterizados pela propriedade $E^{(d)}_s \in \overline{\mathfrak{T}}$. Tais elementos formam um subanel $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{S}$. Podemos formular este enunciado:

Teorema 6: — *Dado o anel $\mathfrak{S}$, com domínio operatório Ω, realizam-se as condições seguintes, no absoluto $\mathfrak{A}$ do seu grupo aditivo:* $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d \cap \overline{\mathfrak{S}}_e = \overline{\mathfrak{T}}$, $\mathfrak{S}_d \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_e$, $\mathfrak{S}_e \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d$. $\overline{\mathfrak{T}}$ *é o domínio operatório máximo de $\mathfrak{S}$; e, assim, é condição necessária e suficiente, para que* $\mathrm{s} \in \mathfrak{S}$ *goze da propriedade* $\mathrm{E}^{(\mathrm{d})}_{\mathrm{s}} \in \overline{\mathfrak{T}}$, *que* s *pertença ao subanel $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{S}$, caracterizado pelas relações* $(\mathrm{x}\mathrm{y})\mathrm{s} = (\mathrm{x}\mathrm{s})\mathrm{y} = \mathrm{x}(\mathrm{y}\mathrm{s})$, *nas quais* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathfrak{S}$ *são arbitrários.*

COROLÁRIO 2: — *Se* $\mathfrak{S}$ *é um anel com a propriedade* $\mathfrak{S}^2 = (o)$ *[anel zero], o seu domínio operatório máximo é o absoluto.* Basta ter em conta as igualdades $\mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}_e = (o)$, para se concluir a afirmação.

Claramente que o centro $\mathfrak{Z}$, de $\mathfrak{S}$, está contido no anel $\mathfrak{B}$ do teorema 6. E, por isso, $\mathfrak{Z}_d \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$. Também se pode ter em conta que é sempre $\mathfrak{T}\overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{T}}\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}$, assim como $\mathfrak{S}_d \Omega_d \subseteq \mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{S}_e \Omega_d \subseteq \mathfrak{S}_e$, de sorte que $\mathfrak{S}_d \overline{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{S}_e \overline{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{S}_e$.

Dados dois elementos $s, s' \in \mathfrak{B}$, consideremos o seu comutador $[s s'] = s s' - s' s$. Para cada $a \in \mathfrak{S}$, tem-se $a [s s'] = o$, de sorte que, quando $\mathfrak{S}$ não tem divisores de zero à esquerda, é $[s s'] = o$ e $\mathfrak{B}$ é comutativo. Em geral, porém, do facto de ser $a[s s'] = o$, quando $a \in \mathfrak{S}$ e $s, s' \in \mathfrak{B}$, apenas podemos concluir a comutatividade de $\mathfrak{B}_d$.

Suponhamos $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}$. Para cada $x \in \mathfrak{S}$ é, por hipótese, $x = \Sigma a a'$, onde $a, a' \in \mathfrak{S}$ e o somatório é finito. Se forem $T, T' \in \overline{\mathfrak{T}}$, vê-se que $(a a')(T T') = (a T)(a' T') = (a . a' T) T' = (a T')(a' T) = (a a')(T' T)$, e, portanto, conclui-se $x(T T') = x(T' T)$. Será $\overline{\mathfrak{T}}$ um anel comutativo. O mesmo terá lugar para qualquer domínio operatório Ω_d. Tem lugar este

TEOREMA 7: — *Dado o anel* $\mathfrak{S}$, *para o qual* $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}$, *todo o seu domínio operatório funciona de modo comutativo. A única hipótese de* $\mathfrak{S}$ *não ter divisores de zero à esquerda implica a comutatividade do subanel operatório* $\mathfrak{B}$, *de* $\mathfrak{S}$.

Passemos ao caso em que existe elemento um $= u \in \mathfrak{S}$. A imagem de u, em $\mathfrak{A}$, é o endomorfismo identidade. É fácil de reconhecer que, então, $\mathfrak{S}_d$ e $\mathfrak{S}_e$ são comutadores recíprocos no absoluto $\mathfrak{A}$. Sabemos, com efeito, que é $\mathfrak{S}_e \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d$. Se, agora, for $\sigma \in \mathfrak{A}$ tal que $(b a)\sigma = (b \sigma) a$, pondo $b = u$ encontra-se $a \sigma = (u \sigma) a = c a = a E_c^{(e)}$, se $u \sigma = c \in \mathfrak{S}$. Vem $\sigma \in \overline{\mathfrak{S}}_e$, de sorte que $\overline{\mathfrak{S}}_d \subseteq \mathfrak{S}_e$, $\mathfrak{S}_e = \overline{\mathfrak{S}}_d$, e também $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}_d = \overline{\mathfrak{S}}_e = \mathfrak{S}_d$. Logo é $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{S}_e \cap \mathfrak{S}_d$. A aplicação de qualquer operador equivale à aplicação dum mesmo elemento

do anel, tanto à direita como à esquerda. De facto, pondo $a T = b a = a c$, basta fazer $a = u$, para se reconhecer que é $b = c$. Então, qualquer que seja $a \in \mathfrak{S}$, tem-se $b a = a b$, pelo que $b \in \mathfrak{Z}$. Vale o

TEOREMA 8: — *Num anel com elemento um, o centro* $\mathfrak{Z}$, *seu domínio operatório máximo, tem, no absoluto, a imagem* $\mathfrak{S}_d \cap \mathfrak{S}_e$. *Um tal anel é sempre fechado.* O sentido da última afirmação do teorema foi dado em [24, ou Cap. XV, § 12].

Uma última situação, quanto a Ω, é a que vamos analisar. Consideremos um anel qualquer $\mathfrak{S}$, o domínio operatório Ω_d e o domínio operatório máximo $\overline{\mathfrak{T}}$. Suponhamos $\varepsilon \in \overline{\mathfrak{T}}$ elemento um de $\overline{\mathfrak{T}}$. Para cada $s \in \mathfrak{S}$ se pode escrever $s = s\varepsilon + s(1 - \varepsilon)$, onde $1 \in \mathfrak{A}$ é o endomorfismo identidade. O conjunto dos elementos $s\varepsilon$ forma um ideal bilateral admissível — Ω_d, como se reconhece pelas relações $a . s\varepsilon = (a s)\varepsilon$, $s\varepsilon . a = (s a)\varepsilon$, $s\varepsilon . E_\lambda = s . \varepsilon E_\lambda = (s\lambda)\varepsilon$. O mesmo se diz do conjunto dos elementos $s - s\varepsilon$. Obtém-se $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\varepsilon + \mathfrak{S}(1 - \varepsilon)$, sob a forma de soma directa de dois ideais bilaterais. Pode dizer-se:

TEOREMA 9: — *É condição necessária e suficiente, para que* ε *seja o endomorfismo identidade, que, para cada* $o \neq \mathrm{A} \in \overline{\mathfrak{T}}$, *seja* $\mathfrak{T}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathfrak{T} \neq (o)$. Se $\varepsilon = 1$, então $A \in \mathfrak{T} A$ e $\mathfrak{T} A \neq (o)$. Inversamente, supondo $\mathfrak{T} A \neq (o)$ para cada $A \neq o$, o facto de ser $\mathfrak{T}(1 - \varepsilon) = \mathfrak{T}\varepsilon(1 - \varepsilon) = (o)$, e de se ter $1 - \varepsilon \in \overline{\mathfrak{T}}$, mostra que tem lugar a igualdade $1 - \varepsilon = o$, $\varepsilon = 1$. O teorema pode revestir-se de outro aspecto:

TEOREMA 10: — *É condição necessária e suficiente, para que* ε *seja o endomorfismo identidade, que* $\mathfrak{S}$ *não possua elemento* $\mathrm{a} \neq \mathrm{o}$ *gozando da propriedade* $\mathrm{a x} = \mathrm{x a} = \mathrm{o}$ *para todo o* $\mathrm{x} \in \mathfrak{S}$. A condição é *necessária:* se $\varepsilon = 1$, $a \neq o$ não goza da propriedade indicada, visto que, de contrário, ter-se-ia $a \mathfrak{T} = (o)$, $a\varepsilon = a = o$. A condição é *suficiente:* seja $o \neq A \in \overline{\mathfrak{T}}$. Existe $x \in \mathfrak{S}$ tal que $x A \neq o$. Como $x A$ não goza da propriedade em questão, tem-se $(x A)\mathfrak{T} = (x \mathfrak{T}) A \neq (o)$. Logo, é $\mathfrak{T} A \neq (o)$ e $\varepsilon = 1$, como consequência da proposição anterior.

Os raciocínios anteriores permitem interpretar fàcilmente o significado de ideal direito (admissível) gerado por um conjunto de elementos de $\mathfrak{S}$, qualquer que seja o domínio operatório Ω. Tem-se:

TEOREMA 11: — *O ideal direito* $(\mathrm{a})_\mathrm{d}$, *gerado por* a, *é o conjunto de elementos de* $\mathfrak{S}$ *da forma* $\mathrm{a}(\Sigma \pm 1 \mathrm{E}_\lambda \ldots \mathrm{E}_\mu \mathrm{E}_\mathrm{r}^{(\mathrm{d})} \ldots \ldots \mathrm{E}_\mathrm{s}^{(\mathrm{d})}) = \mathrm{a}(\Sigma \pm 1 \mathrm{E}_\mathrm{r}^{(\mathrm{d})} \ldots \mathrm{E}_\mathrm{s}^{(\mathrm{d})} \mathrm{E}_\lambda \ldots \mathrm{E}_\mu) = \mathrm{a}\,\mathfrak{E}(1, \Omega_\mathrm{d}, \mathfrak{S}_\mathrm{d})$. Na notação utilizada, 1 significa o endomorfismo identidade de $\mathfrak{S}$ e o somatório tem um número finito de parcelas. Como casos particulares de elementos do ideal em questão, temos $a(1) = a$, $a(-1) = -a$, $a(1 + \ldots + 1) = ma$, $aE_s^{(d)} = as$, $aE_\lambda = a\lambda$, $a(E_\lambda E_s^{(d)}) = (a\lambda)s = (as)\lambda$, assim como $(((a\lambda)\mu)\ldots)\omega$. Mais geralmente, podemos dizer:

TEOREMA 12: — *O ideal direito de* $\mathfrak{S}$ *gerado pelo conjunto* $\mathfrak{C} = \}\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}', \ldots\{$, *de elementos de* $\mathfrak{S}$, *é o conjunto de elementos de* $\mathfrak{S}$ *da forma* $\mathrm{a}(\Sigma \pm 1 \mathrm{E}_\lambda \ldots \ldots \mathrm{E}_\omega \mathrm{E}_\mathrm{r}^{(\mathrm{d})} \ldots \mathrm{E}_\mathrm{s}^{(\mathrm{d})}) + \ldots + \mathrm{a}'(\Sigma \pm 1 \mathrm{E}_\mu \ldots \mathrm{E}_\tau \mathrm{E}_\mathrm{t}^{(\mathrm{d})} \ldots \ldots \mathrm{E}_\mathrm{v}^{(\mathrm{d})})$, *onde o número de somatórios é finito e o número de parcelas de cada somatório é também finito.*

Relativamente a ideais bilaterais, daremos o seguinte enunciado:

TEOREMA 13: — *O ideal bilateral* (a) *gerado por* a, *é o conjunto de elementos da forma* $\mathrm{a}\,\mathfrak{E}(1, \Omega_\mathrm{d}, \mathfrak{S}_\mathrm{d}, \mathfrak{S}_\mathrm{e}) = \mathrm{a}\,\mathfrak{E}(1, \Omega_\mathrm{d}, \mathfrak{T})$.

É conveniente fazer algumas observações. Das relações $s.a\lambda = sE_{a\lambda}^{(d)} = (sa)\lambda = sE_a^{(d)}E_\lambda$ conclui-se $E_{a\lambda}^{(d)} = E_a^{(d)}E_\lambda$, pelo que são válidas as igualdades $\pm 1 E_r^{(d)} \ldots E_s^{(d)} E_t^{(d)} E_\lambda E_\mu \ldots \ldots E_\tau = \pm 1 E_r^{(d)} \ldots E_s^{(d)} E_{t\lambda}^{(d)} E_\mu \ldots E_\tau = \pm 1 E_r^{(d)} E_s^{(d)} E_{(t\lambda)\mu}^{(d)} \ldots \ldots E_\tau$, etc.. Parece preferível, porém, manter a notação efectivamente utilizada nos teoremas 11 e 12.

Uma segunda observação é a que se segue. Se $\mathfrak{r}$ for um ideal direito, o ideal $\mathfrak{r}^2$, por ex., obtém-se, como ordinàriamente, sem ter em conta os operadores. Mais ainda: um ideal direito do tipo $a\mathfrak{S}$ é sempre admissível, tal como um ideal esquerdo $\mathfrak{S}a$, pois que, por ex., $\mathfrak{S}a = a\mathfrak{S}_e$, $(\mathfrak{S}a)\Omega_d = (a\mathfrak{S}_e)\Omega_d \subseteq a\mathfrak{S}_e$.

Aproveitamos esta ocasião para corrigir uma afirmação contida em [(I), págs. 157], relativa aos elementos de uma álgebra associativa que podem considerar-se como raízes. Dum modo geral, se $\mathfrak{S}$ é um anel com operadores, $a \in \mathfrak{S}$ será uma *raiz*, se $(a)_d$ for nilpotente.

A última observação é a seguinte: se existe elemento um, vê-se que $(a)_d = a\,\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_d) \doteq a\mathfrak{S}_d$, $(a) = a\,\mathfrak{E}(\mathfrak{T}) = a\mathfrak{T} = a\mathfrak{S}_d\mathfrak{S}_e = a\mathfrak{S}_e\mathfrak{S}_d$.

Postas as considerações anteriores, torna-se claro como deve proceder-se nas demonstrações dos teoremas da teoria geral dos anéis, quando se pretende estendê-los ao caso em que existem operadores.

Se $\mathfrak{S}$ é um anel associativo qualquer, com domínio operatório Ω, tomado o idempotente $e \in \mathfrak{S}$, o ideal esquerdo gerado por e é simplesmente $\mathfrak{S}e = e\mathfrak{S}_e$. O anel dos endomorfismos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}e$, é isomorfo de $e\mathfrak{S}e$. Os endomorfismos — $\mathfrak{S}$ são também endomorfismos — Ω. Admitindo que $e\mathfrak{S}e$ é um anel de divisão, resulta, duma propriedade geral dos endomorfismos com inverso, que todo o endomorfismo — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}e$, é automorfismo. Em ligação com este facto, demonstraremos a seguinte proposição:

TEOREMA 14: — *Supondo que* $\mathfrak{S}\mathrm{e}$ *não tem ideal esquerdo nilpotente admissível de* $\mathfrak{S}$, *e que, para cada* $\mathrm{o} \neq \mathrm{a} \in \mathfrak{S}\mathrm{e}$, *é* $\mathfrak{S}\mathrm{a} \neq (\mathrm{o})$, *então, é condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{S}\mathrm{e}$ *seja mínimo, que* $\mathrm{e}\mathfrak{S}\mathrm{e}$ *seja anel de divisão.* Se $\mathfrak{S}e$ é mínimo — $(\mathfrak{S}, \Omega)$, o anel de endomorfismos — $(\mathfrak{S}, \Omega)$, ou anel de endomorfismos — $\mathfrak{S}$, é anel de divisão. Inversamente, sendo $e\mathfrak{S}e$ um anel de divisão, se tomarmos $o \neq a \in \mathfrak{S}e$, do facto de ser $e\mathfrak{S}e \,.\, e\mathfrak{S}a \subseteq e\mathfrak{S}a$, conclui-se que o ideal esquerdo $e\mathfrak{S}a$, de $e\mathfrak{S}e$, satisfaz a uma das igualdades seguintes: $e\mathfrak{S}a = (o)$, $e\mathfrak{S}a = e\mathfrak{S}e$. Se fosse $e\mathfrak{S}a = (o)$, seria $\mathfrak{S}e\mathfrak{S}a = (o)$, e, consequentemente, ter-se-ia $(\mathfrak{S}a)^2 = (o)$, $\mathfrak{S}a = (o)$. Esta última igualdade não pode ter lugar, por hipótese. É, assim, $e\mathfrak{S}a = e\mathfrak{S}e$, $\mathfrak{S}e\mathfrak{S}a = \mathfrak{S}e\mathfrak{S}e = \mathfrak{S}e \subseteq \mathfrak{S}a$, o que prova ser $\mathfrak{S}e$ um ideal mínimo, $[\mathfrak{S}e = \mathfrak{S}a]$.

Como consequência interessante podemos afirmar: num anel sem ideal nilpotente, é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}e$ seja mínimo, que $e\mathfrak{S}e$ seja anel de divisão. Não esqueçamos, com efeito, que, sendo $a \neq o$, é $\mathfrak{S}a \neq (o)$, pelo facto de a hipótese contrária levar à existência de ideal bilateral admissível $\mathfrak{a} \neq (o)$ tal que $\mathfrak{S}\mathfrak{a} = (o)$.

É evidente que o teorema 14 tem análogo relativo a um ideal mínimo $e\mathfrak{S}$. O mesmo se diz da afirmação anterior. Assim: num anel sem ideal nilpotente, se $\mathfrak{S}e$ é ideal esquerdo mínimo, $e\mathfrak{S}$ é ideal direito mínimo, [8, pág. 13].

Aos anéis simples que não são anéis zero, aos anéis irredutíveis, assim como aos anéis semi-simples nos sentidos de ARTIN-NOETHER, de N. JACOBSON e de BROWN-McCOY são aplicáveis o teorema 14 e as suas consequências. Se $\mathfrak{N}$ for o radical superior de BAER, também $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ não tem ideal nilpotente.

Ligada às teorias dos módulos e anéis com operadores, está a teoria das representações dos anéis, como se encontra exposta em [(I), Cap. VIII]. Por isso, dentro das considerações gerais anteriores, vamos tratar uma questão sobre representações, no sentido de precisar um ponto relativo ao caso em que elas se supõem operatórias.

Dado um módulo $\mathbf{M}$, suponhamos $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}$ dois anéis que operam à direita de $\mathbf{M}$, de tal sorte que $\mathbf{M}$ é módulo — $\mathfrak{S}$ e módulo — $\mathfrak{R}$. As imagens de $\mathfrak{S}$ e de $\mathfrak{R}$, no absoluto $\mathfrak{A}$, de $\mathbf{M}$, serão designadas, respectivamente, por $\mathfrak{S}_d$ e $\mathfrak{R}_d$. $\mathbf{M}$ dir-se-á um *módulo duplo direito* — $(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$, se se tiver $\mathfrak{S}_d \subseteq \overline{\mathfrak{R}}_d$, e, consequentemente, $\mathfrak{R}_d \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_d$. Se $\mathfrak{R}$ está concretizado em $\mathfrak{A}$, ou seja, se tiver lugar o isomorfismo $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{R}_d$, a imagem $\mathfrak{S}_d$ diz-se uma *representação directa de* $\mathfrak{S}$ *em* $\mathfrak{R}$ e $\mathbf{M}$ chama-se *módulo de representação*. Em geral, porém, $\mathfrak{S}_d$ é uma representação directa de $\mathfrak{S}$ por meio de $\mathfrak{R}_d$. Supondo $v \in \mathbf{M}$, $a \in \mathfrak{S}$, $\lambda \in \mathfrak{R}$, é válida a lei de troca $va.\lambda = v\lambda.a$, ou $vE_aE_\lambda = vE_\lambda E_a$, onde E_a e E_λ têm significado imediato. Quando $\mathfrak{S}$ tem um domínio operatório $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$, a representação directa diz-se *operatória*, se, além de representação no sentido anterior, for ainda, suposto $\rho \in \Omega$, $E_{a\rho} = E_a E_\rho$. É claro que este último produto tem sentido, mas, enquanto que $E_{a\rho}$ e E_a pertencem ao comutador $\overline{\mathfrak{R}}_d$, não podemos dizer o mesmo

de E_ρ. Relativamente ao módulo de representação, além das relações $va.\lambda = v\lambda.a$, terão lugar estas outras: $v.a\rho = va.\rho = v\rho.a$. O conjunto das duas espécies de relações é suficiente, de resto, para que $\mathfrak{S}$, com o domínio operatório $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$, tenha uma representação operatória por meio de $\mathfrak{R}_d$, estendendo ligeiramente a ideia de representação operatória. Admitamos que é ainda $\mathbf{M}\mathfrak{S} = \mathbf{M}\mathfrak{S}_d = \mathbf{M}$. Vamos ver que se terá necessàriamente $E_\rho \in \overline{\mathfrak{R}}_d$. Tomemos $v \in \mathbf{M}$ e ponhamos $v = \Sigma m_i E_{a_i}$, onde o somatório é finito e $m_i \in \mathbf{M}$, $E_{a_i} \in \mathfrak{S}_d$. Será $vE_\rho\lambda = \Sigma(m_iE_{a_i})E_\rho\lambda = \Sigma m_i\lambda E_{a_i\rho} = \Sigma m_i \lambda E_{a_i}E_\rho = \Sigma m_i E_{a_i}\lambda E_\rho = v\lambda E_\rho$. Por consequência, valerá $vE_\rho E_\lambda = vE_\lambda E_\rho$, ou seja $E_\rho \in \overline{\mathfrak{R}}_d$. No caso de $\mathfrak{R}$ estar concretizado em $\mathfrak{A}$, podemos concluir que $\rho\lambda = \lambda\rho$, portanto que Ω está contido no centro de $\mathfrak{R}$. Tem lugar este

TEOREMA 15: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel com um domínio operatório Ω, a existência duma representação operatória de $\mathfrak{S}$ por meio de $\mathfrak{R}_d$, sob a condição $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$, implica $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{R}}_d \cap \mathfrak{R}_d$, ou seja Ω_d contido no centro de $\mathfrak{R}_d$, se tiver lugar a igualdade $\mathbf{M}\mathfrak{S} = \mathbf{M}$, para o módulo de representação correspondente. Em particular, se $\mathfrak{R}$ está concretizado ao absoluto de $\mathbf{M}$, Ω pertence ao centro de $\mathfrak{R}$.*

Coloquemo-nos na hipótese das representações finitas. Significa isso que o módulo de representação é finito sobre $\mathfrak{R}$, da forma $\mathbf{M} = u_1\mathfrak{R} + \ldots + u_n\mathfrak{R}$, onde $\mathfrak{R}$ se supõe ter elemento um, que é operador unitário do módulo, e os u_i constituem uma base independente — $\mathfrak{R}$ do módulo $\mathbf{M}$. Como $\overline{\mathfrak{R}}$ é um anel anti-isomorfo do anel $\mathfrak{R}_n$, de todas as matrizes de grau n com elementos de $\mathbf{K}$, a representação directa de $\mathfrak{S}$, de que atrás nos ocupamos dum modo geral, pode substituir-se por uma *representação recíproca de $\mathfrak{S}$ por meio de matrizes contidas em $\mathbf{K}_n$*. Ao elemento $a \in \mathfrak{S}$ corresponderá a matriz $A \in \mathbf{K}_n$, definida por via das igualdades

$$u_i a = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}, \qquad A = (a_{ji}), \qquad a_{ji} \in \mathbf{K}.$$

Existindo domínio operatório $\Omega \subseteq \mathrm{K}$, se a representação for operatória, terão lugar as correspondências $a \to A$, $a\rho \to A\rho$, como se deduz das relações

$$u_i \,.\, a\rho = u_i E_{a\rho} = u_i E_a E_\rho = \Big(\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}\Big) E_\rho =$$
$$= \sum_{=1}^{n} u_j (a_{ji}\,\rho).$$

Imaginemos, em seguida, a hipótese inversa. Sabe-se que $\mathfrak{S}$, com um domínio operatório $\Omega \subseteq \mathfrak{K}$, tem uma representação recíproca por meio de matrizes de K_u, segundo a qual $a \to A$, $a\rho \to A\rho$. Recorrendo ao módulo $\mathrm{M} = u_1\mathrm{K} + \ldots + u_n\mathrm{K}$, pomos em correspondência as matrizes A e $A\rho$ com endomorfismos — K, respectivamente representados por E_a e $E_{a\rho}$. Não é, necessàriamente, $E_{a\rho} = E_a E_\rho$, como se conclui do modo seguinte: pondo $v = \sum u_i \lambda_i$, tem-se $v.a\rho = \sum_i (u_i\lambda_i)\,a\rho = \sum_i (u_i \,.\, a\rho)\lambda_i = \sum_{i,j} u_j a_{ji}\,\rho\lambda_i$, e $va.\rho = \sum_i (u_i\lambda_i \,.\, a)\rho = \sum_{i,j} u_j a_{ji}\lambda_i\rho$, o que mostra ser, em geral, $v.a\rho \neq va.\rho$. Em correspondência com este resultado, consideremos, se tal for possível, uma mudança de base em M, da forma $(u'_1, \ldots, u'_n) = (u_1, \ldots, u_n).P$, onde P é uma matriz invertível. As matrizes $P^{-1}AP$ e $P^{-1}(A_\rho)P$ induzem na nova base os mesmos endomorfismos E_a e $E_{a\rho}$. Geralmente, contudo, é $P^{-1}(A\rho)P \neq (P^{-1}AP)\rho$, diferentemente do que acontece na primeira base. Tem, todavia, lugar o seguinte

TEOREMA 16: — *A todo o módulo finito sobre* K, *de uma representação operatória em* K, *dum anel* $\mathfrak{S}$ *com o domínio operatório* $\Omega \subseteq \mathrm{K}$, *corresponde uma representação operatória por meio de matrizes finitas; inversamente, se* K_d *é comutativo (ou, pelo menos, se* Ω_d *está contido no centro de* K_d*), a existência da última representação arrasta a existência da primeira, e, portanto, a existência do correspondente módulo de representação.*

5) **Sobre os anéis simples** — Comecemos o estudo dos anéis simples pelo caso dum anel zero sem operadores. $\mathfrak{S}$ é comutativo, pois que $ab = ba = o$, quaisquer que

sejam a e b. Um ideal gerado por $a \neq o$ será da forma $\{ma\}$, onde m é um inteiro qualquer. Em particular, tomado $ha \neq o$, pode sempre escrever-se $a = r.ha$, com um certo inteiro r. Da relação $(rh-1)a = o$, conclui-se ser $\mathfrak{S} = \{o, a, 2a, \ldots, (q-1)a\}$ um grupo finito. Há uma característica finita q, que é aqui um número primo. O absoluto $\mathfrak{A}$ dos endomorfismos de $\mathfrak{S}$, todos endomorfismos — $\mathfrak{S}$, é o comutador da imagem de $\mathfrak{S}$, em $\mathfrak{A}$, imagem que é zero. Duma maneira precisa, $\mathfrak{A}$ reduz-se ao corpo $I/(q)$, onde I é o anel dos inteiros.

Suponhamos em seguida que $\mathfrak{S}$, suposto ainda anel zero, é simples relativamente a um domínio operatório Ω, cujos elementos não induzem todos o endomorfismo nulo. Qualquer submódulo — Ω é ideal, pelo que $\mathfrak{S}$ se reduz a um módulo simples — Ω. Todos os elementos do absoluto podem tomar-se como operadores, de harmonia com o que se viu no § 4. Aqui, porém, $\mathfrak{S}$ é já módulo simples — Ω_d. O comutador de Ω_d, ou de qualquer subanel do absoluto que contenha Ω_d, é um anel de divisão. Em particular, o comutador de $\mathfrak{A}$, ou centro de $\mathfrak{A}$, é um corpo. A estrutura de $\mathfrak{S}$ é dada simplesmente pela igualdade $\mathfrak{S} = a\Omega_d$, suposto $a\Omega_d \neq (o)$. Quando o domínio operatório Ω é comutativo, Ω_d será comutativo e estará contido em $\overline{\Omega}_d$. Quaisquer que sejam $o \neq a \in \mathfrak{S}$ e $o \neq A \in \Omega_d$, será, por consequência, $aA \neq o$. Tomando $B \in \overline{\Omega}_d$ e $aB = aB_o$, com $B_o \in \Omega_d$, será $B = B_o$, pelo que $\Omega_d = \overline{\Omega}_d$. Deste modo, tem-se:

TEOREMA 17: — *Suposto* $\mathfrak{S}$ *um anel zero, simples relativamente a um domínio operatório* Ω, *que funciona de modo comutativo, o anel* Ω_d, *gerado pela imagem* Ω_0 *no absoluto de* $\mathfrak{S}$, *é igual ao seu comutador.*

Daqui e do resultado estabelecido no caso em que Ω é vazio, conclui-se:

COROLÁRIO 3: — *Todo o anel zero, simples relativamente a* Ω, *sob a condição de* Ω *ser comutativo, é uma álgebra zero, simples, de corpo fundamental* $\overline{\Omega}_\mathrm{d} = \Omega_\mathrm{d}$. *Se* Ω *é vazio, o anel é álgebra zero, simples, sobre o absoluto. Inversamente: se* $\mathfrak{H}$ *é uma álgebra zero, simples, sobre o corpo* K, *é um anel zero, simples relativamente a* K, *de estrutura* $\mathfrak{H} = \mathrm{a}\mathrm{K}$, $(\mathrm{o} \neq \mathrm{a} \in \mathfrak{H})$, *tendo-se* $\overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$.

Passemos aos anéis $\mathfrak{S}$ que, não sendo anéis zero, são simples relativamente a Ω. $\mathfrak{S}^2$ é sempre ideal — Ω, pelo que $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}$. O domínio operatório Ω funcionará de modo comutativo. Ω_d é um anel comutativo, tendo-se $\Omega_d \subseteqq \overline{\mathfrak{T}} \cap \overline{\Omega}_d$. Qualquer que seja $o \neq a \in \mathfrak{S}$, tem-se $a\mathfrak{T} \neq (o)$, pois, de contrário, já seria $a\mathfrak{S}_d = (o) = a\mathfrak{S}$ e haveria ideal bilateral admissível $\mathfrak{a} \neq (o)$, para o qual $\mathfrak{a}\mathfrak{S} = (o)$, o que implicaria $\mathfrak{S}^2 = (o)$. Podemos escrever $a\mathfrak{T} = \mathfrak{S}$, o que significa ser $\mathfrak{S}$ anel simples, mesmo que se considere sem operadores. Além disso, $\mathfrak{T}$ é irredutível, enquanto que o seu comutador $\overline{\mathfrak{T}}$, que é um anel comutativo, se reduz a um corpo. Para nenhum $a \neq o$ valerá $aE_\lambda = o$, se $E_\lambda \neq o$. Tem lugar o seguinte:

TEOREMA 18: — *Seja $\mathfrak{S}$ um anel, que não é anel zero. É condição necessária e suficiente para que $\mathfrak{S}$, suposto admitir um domínio operatório Ω, seja simples, que seja simples, considerado sem operadores. Um anel simples relativamente a Ω, não anel zero, é álgebra simples, não álgebra zero, sobre o seu domínio operatório máximo, e, é claro, sobre todo o corpo que possa considerar-se domínio operatório do anel, desde que o elemento um do corpo seja operador unitário de $\mathfrak{S}$.* Assim:

COROLÁRIO 4: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{H}$, suposta uma álgebra sobre $\mathfrak{K}$, não álgebra zero, seja simples, que seja um anel simples, não anel zero, considerado sem operadores.*

Continuemos com as mesmas hipóteses sobre $\mathfrak{S}$. O centro $\mathfrak{Z}$ é domínio operatório. Suposto $o \neq c \in \mathfrak{Z}$, não pode c ser um divisor de zero, visto que a hipótese $ca = o$ com $a \neq o$, levaria à existência de um ideal bilateral não nulo aniquilador de c, consequentemente a $c\mathfrak{S} = (o)$, o que não pode ter lugar. $\mathfrak{Z}$ aparece concretizado em $\overline{\mathfrak{T}}$, sendo, na verdade, um subcorpo de $\overline{\mathfrak{T}}$, como vamos ver directamente. Para cada $o \neq c \in \mathfrak{Z}$, é $c\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Para $c' \in \mathfrak{Z}$, qualquer, a equação $cx = c'$ é solúvel em $\mathfrak{S}$. A solução x pertence, porém, a $\mathfrak{Z}$, como provaremos, mostrando ser $ax = xa$. Admitindo que é $cy = a$, tem-se, de facto, $xa = xcy = = cxy = c'y = yc' = ycx = cyx = ax$. O elemento um de $\mathfrak{Z}$, concretizado no endomorfismo identidade pertencente a $\overline{\mathfrak{T}}$, é elemento um de $\mathfrak{S}$. O raciocínio feito permite este enunciado:

TEOREMA 19: — *Todo o anel $\mathfrak{S}$, não anel zero, simples relativamente a Ω, com um centro $\mathfrak{Z} \neq (o)$, é álgebra simples sobre o seu centro. O elemento um de $\mathfrak{Z}$ é elemento um de $\mathfrak{S}$.* Também é válido o

COROLÁRIO 5: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$, não anel zero, simples relativamente a Ω, tenha elemento um, que o seu centro seja $\neq (o)$.*

Passa-se agora, naturalmente, àqueles anéis que são somas directas finitas de anéis simples, supostos nulos os produtos das parcelas, duas a duas. Tais anéis $\mathfrak{S}$ podem definir-se como sendo gerados por um número finito de ideais bilaterais simples $\mathfrak{a}_i$. Ponhamos, então, $\mathfrak{S} = \mathfrak{a}_1 + + \ldots + \mathfrak{a}_t$, com $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = (o)$, se $i \neq j$. Em [(I), págs. 26-27], deram-se algumas proposições sobre este caso, depois completadas em [(I), págs. 30-31], na hipótese de existir elemento $u \in \mathfrak{S}$.

Independentemente da existência de elemento um, têm lugar as considerações a seguir. Imaginando $\mathfrak{S}$ como módulo sobre o domínio operatório $\mathfrak{T}$, será $\mathfrak{S}$ completamente redutível. Dado um ideal bilateral $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{S}$, pode sempre escrever-se $\mathfrak{S} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}$ é soma de certos $\mathfrak{a}_i$, digamos $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{i_r}$. Claramente que se tem $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{a}_{i_j} = (o)$, se $j = 1, \ldots, r$. Posto isto, tomemos $b \in \mathfrak{B}$ e escrevamos a sua decomposição $b = b_1 + \ldots + b_t$, $(b_k \in \mathfrak{a}_k)$. Se $s \in \mathfrak{S}$ for da forma $s = s_1 + \ldots + s_t$, vê-se que $bs = b_1 s_1 + \ldots + + b_t s_t$, $sb = s_1 b_1 + \ldots + s_t b_t$. Sendo bs e sb pertencentes a $\mathfrak{B}$, conclui-se que, figurando na decomposição dum certo $b \in \mathfrak{B}$ um certo $b_k \in \mathfrak{a}_k$, figuram na decomposição de elementos de $\mathfrak{B}$ todos os elementos da forma $b_k s_k$, $s_k b_k$, $(s_k \in \mathfrak{a}_k)$. Sob a hipótese de haver um $b_k \neq o$, a totalidade dos b_k, como ideal bilateral de $\mathfrak{a}_k$, será igual a este último. Vamos mostrar agora que, para cada $(o) \neq \{b_k\} = \mathfrak{a}_k$, se tem $\mathfrak{a}_k \subseteqq \mathfrak{B}$. De facto, é $\mathfrak{a}_k \mathfrak{B} = \mathfrak{a}_k^2 = \mathfrak{a}_k \subseteqq \mathfrak{B}$. Deste modo, dada a decomposição indicada para $\mathfrak{S}$, assim como o ideal bilateral $\mathfrak{B}$, teremos de considerar, a um lado, as parcelas $\mathfrak{a}_i \subseteqq \mathfrak{B}$, para as quais a soma directa é igual $a\mathfrak{B}$; a outro lado, as parcelas não contidas em $\mathfrak{B}$, para as quais é $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{B} = (o)$, e que terão de ser as restantes. Chega-se a concluir $\mathfrak{S} = \mathfrak{B} +$

$+\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{a}_{i_{r+1}}+\ldots+\mathfrak{a}_{i_t}$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{a}_{i_1}+\ldots+\mathfrak{a}_{i_r}$. Em resumo:

TEOREMA 20: — *Se o anel $\mathfrak{S}$ é uma soma directa dum número finito de ideais bilaterais simples, da forma $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1+ +\ldots+\mathfrak{a}_t$, dado um ideal bilateral $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{S}$, tem-se sempre $\mathfrak{S}=\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{B}$ é a soma dos $\mathfrak{a}_i$ para os quais $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{a}_i= =\mathfrak{a}_i$, e $\mathfrak{C}$ é soma dos $\mathfrak{a}_j$ para os quais $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{a}_j=(o)$.*

COROLÁRIO 6: — *A decomposição de $\mathfrak{S}$, nas condições do teorema, é univocamente determinada.* Ou ainda: *os únicos ideais bilaterais simples de $\mathfrak{S}$ são os ideais $\mathfrak{a}_i$.* Sob esta forma, a afirmação parece menos geral que outra dada em ([I], págs. 30], mas deve ter-se em conta haver-se exigido naquele lugar, repita-se, a existência de elemento um, em $\mathfrak{S}$.

6) **Sobre os anéis não associativos** — Um *anel não associativo* é um anel no qual falta ùnicamente a associatividade do produto. Trata-se, portanto, dum módulo que admite os seus elementos como operadores, tanto à direita como à esquerda. Representando por $\mathfrak{X}=\}a,b,\ldots,r,s,\ldots,x,y,\ldots\{$ um anel não associativo, se existir um domínio operatório Ω, suporemos que os elementos de Ω operam sobre $\mathfrak{X}$, de harmonia com as propriedades 1), 2) e 3), indicadas no começo do § 4.

No absoluto $\mathfrak{E}(\mathfrak{X})=\mathfrak{A}$, há que considerar também os subanéis associativos $\Omega_d, \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_e$, etc.. O subanel $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_d,\mathfrak{X}_e)$ representá-lo-emos por $\mathfrak{Q}$. Como no caso associativo, têm lugar as relações $\overline{\mathfrak{Q}}=\overline{\mathfrak{X}}_d\cap\overline{\mathfrak{X}}_e, \Omega_d\subseteq\overline{\mathfrak{Q}}$. E a observação de que $\alpha\in\overline{\mathfrak{Q}}$ leva a $(xy)\alpha=(xE_y^{(d)})\alpha=(x\alpha)E_y^{(d)}= =(x\alpha)y=(yE_x^{(e)})\alpha=(y\alpha)E_x^{(e)}=x(y\alpha)$ mostra poder considerar-se $\overline{\mathfrak{Q}}$ como domínio operatório máximo de $\mathfrak{X}$, ainda como para os anéis associativos. Em JACOBSON, [4], designa-se $\mathfrak{Q}$ por *anel de multiplicação de $\mathfrak{X}$* e $\overline{\mathfrak{Q}}$ por *centralizador de multiplicação de $\mathfrak{X}$*. Claramente que aqui é $\mathfrak{X}_d$ não pertencente a $\overline{\mathfrak{X}}_e$, $\mathfrak{X}_e$ não pertencente a $\overline{\mathfrak{X}}_d$, $\mathfrak{X}_d\mathfrak{X}_e\neq \neq\mathfrak{X}_e\mathfrak{X}_d$. Mas são válidas as relações $\overline{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{Q}$, em particular, portanto, estas outras: $\Omega_d\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}\Omega_d\subseteq\mathfrak{Q}$. Na verdade, tem-se $x.E_a^{(d)}\alpha=(xa)\alpha=x.a\alpha=x\overline{E}_{a\alpha}^{(d)}$,

$xE_a^{(e)}\alpha=(ax)\alpha=(a\alpha)x=xE_{a\alpha}^{(e)}$, resultados que nos permitem precisar ser $\overline{\mathfrak{Q}}\mathfrak{X}_d\subseteq\mathfrak{X}_d$, $\overline{\mathfrak{Q}}\mathfrak{X}_e\subseteq\mathfrak{X}_e$.

Os elementos $s\in X$, que são operadores, caracterizados pela propriedade $E_s^{(d)}\in\overline{\mathfrak{Q}}$, formam um subanel de $\mathfrak{X}$. Com efeito, suponhamos $s,s'\in\mathfrak{X}$ tais que $E_s^{(d)}, E_{s'}^{(d)}\in\overline{\mathfrak{Q}}$. Então, se for $E_{ss'}^{(d)}=E_s^{(d)}E_{s'}^{(d)}$, ter-se-á $E_{ss'}^{(d)}\in\overline{\mathfrak{Q}}$. Ora isso é imediato, pois $x.ss'=(xs')s=(xs)s'$, o que, de resto, nos permite acrescentar ser $E_s^{(d)}E_{s'}^{(d)}=E_{s'}^{(d)}E_s^{(d)}$. Quanto à diferença $s-s'$ a conclusão é análoga. Do exposto resulta finalmente que $\mathfrak{B}$ é um anel associativo e que a sua imagem $\mathfrak{B}_d\subseteq\overline{\mathfrak{Q}}$ é um anel associativo comutativo. É válido o

TEOREMA 21: — *Dado o anel não associativo $\mathfrak{X}$, com domínio operatório Ω, realizam-se as condições seguintes, no absoluto $\mathfrak{A}$ do seu grupo aditivo: $\Omega_d\subseteq\overline{\mathfrak{X}}_d\cap\overline{\mathfrak{X}}_e=\overline{\mathfrak{Q}}$. $\overline{\mathfrak{Q}}$ é o domínio operatório máximo de $\mathfrak{X}$; é condição necessária e suficiente, para que $\mathrm{s}\in\mathfrak{X}$ goze da propriedade $\mathrm{E}_\mathrm{s}^{(\mathrm{d})}\in\overline{\mathfrak{Q}}$, que s pertença ao subanel associativo $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{X}$, caracterizado pelas relações $(\mathrm{x}\,\mathrm{y})\mathrm{s}=(\mathrm{x}\,\mathrm{s})\mathrm{y}=\mathrm{x}(\mathrm{y}\,\mathrm{s})$, nas quais $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathfrak{X}$ são arbitrários; e, finalmente, a imagem $\mathfrak{B}_\mathrm{d}=\mathfrak{X}_\mathrm{d}\cap\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{B}$, é um anel associativo comutativo.*

Diz-se *centro* $\mathfrak{Z}$, de $\mathfrak{X}$, o conjunto dos elementos de $\mathfrak{B}$ que comutam com todos os elementos de $\mathfrak{X}$. Trata-se dum subanel associativo comutativo de $\mathfrak{B}$, valendo $\mathfrak{Z}_d\subseteq\mathfrak{B}_d\subseteq \subseteq\overline{\mathfrak{Q}}$. Vamos ver que $\mathfrak{Z}_d$ e $\mathfrak{B}_d$ são ideais direitos de $\overline{\mathfrak{Q}}$. Em primeiro lugar, tem-se $\mathfrak{B}_d\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{X}_d\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{X}_d$, $\mathfrak{B}_d\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\overline{\mathfrak{Q}}$, de sorte que $\mathfrak{B}_d\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{X}_d\cap\overline{\mathfrak{Q}}=\mathfrak{B}_d$. Quanto a $\mathfrak{Z}_d$, sendo $\mathfrak{Z}_d\overline{\mathfrak{Q}}\subseteq\mathfrak{B}_d$, só resta provar que, sendo $c\in\mathfrak{Z}$, $\alpha\in\overline{\mathfrak{Q}}$, o elemento $c\alpha$ comuta com todos os elementos de $\mathfrak{X}$. Ora isso é simples: $x.c\alpha=xc.\alpha=cx.\alpha=c\alpha.x$. Convém observar ainda que a correspondência homomorfa $s\rightarrow E_s^{(d)}$, que faz passar de $\mathfrak{B}$ a B_d, é operatória relativamente a $\overline{\mathfrak{Q}}$. É parte dela a correspondência $\mathfrak{Z}\sim\mathfrak{Z}_d$. Podemos dar este enunciado:

TEOREMA 22: — *O centro $\mathfrak{Z}$ dum anel não associativo $\mathfrak{X}$ é subanel associativo comutativo do anel associativo B referido no teorema anterior. As imagens $\mathfrak{Z}_\mathrm{d}$ e B_d são ideais direitos* *de* $\overline{\mathfrak{Q}}$, *e as correspondências homomorfas* $\mathfrak{Z} \sim \mathfrak{Z}_d$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_d$, *são operatórias* — $\overline{\mathfrak{Q}}$.

Quando um anel não associativo verifica a condição $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$, o centralizador $\overline{\mathfrak{Q}}$ é um anel associativo comutativo, tal como o anel $\overline{\mathfrak{T}}$ correspondente do § 4. Tem lugar este

TEOREMA 23: — *Se* $\mathfrak{X}$ *é um anel não associativo com a propriedade* $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$, *todo o seu domínio operatório funciona de modo comutativo. Em particular, o centralizador de multiplicação é comutativo.*

Se $u \in \mathfrak{X}$ é elemento um, claramente que $u \in \mathfrak{Z}$. Qualquer que seja o domínio operatório Ω, a aplicação de λ ou de $u\lambda$ leva ao mesmo resultado. Por isso, será $u\lambda \in \mathfrak{B}$. Já se viu também que $u\lambda$ comuta com todos os elementos de $\mathfrak{X}$. Consequentemente, será $u\lambda \in \mathfrak{Z}$, o que significa que a imagem $\mathfrak{Z}_d$ inclui já todos os domínios operatórios possíveis. A existência de u acarreta ainda as relações $\overline{\mathfrak{X}}_d \subseteq \mathfrak{X}_e$, $\overline{\mathfrak{X}}_e \subseteq \mathfrak{X}_d$, pois, por ex., se for $B \in \overline{\mathfrak{X}}_e$, tem-se $u \to uB = b$, $x = xu \to xB = (xu)B = uE_x^{(e)}B = (uB)E_x^{(e)} = bE_x^{(e)} = xb = xE_b^{(d)}$; o que implica $B = E_b^{(d)}$. A igualdade $\mathfrak{X}_d = \overline{\mathfrak{X}}_e$ não pode provar-se porque, diferentemente do que sucede no caso associativo, não é aqui $\mathfrak{X}_d \subseteq \overline{\mathfrak{X}}_e$. É válido o

TEOREMA 24: — *Num anel não associativo* $\mathfrak{X}$, *com elemento um, o centro* Z, *seu domínio operatório máximo, tem, no absoluto, a imagem* $Z_d = \mathfrak{B}_d = \overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{X}}_d \cap \overline{\mathfrak{X}}_e \subseteq \mathfrak{X}_d \cap \mathfrak{X}_e$.

Uma última situação, quanto a Ω, é análoga à que foi analisada no § 4 e levou aos teoremas 9 e 10. Podemos fazer aqui as mesmas afirmações. É também conveniente fixar que a decomposição $\mathrm{X} = \mathrm{X}\varepsilon + \mathrm{X}(1-\varepsilon)$ é ainda uma decomposição em ideais bilaterais.

A noção de *ideal direito* admissível de X, gerado pelo elemento a, é a mesma que no caso associativo. É o conjunto de elementos $a\mathfrak{E}(1, \Omega_d, \mathrm{X}_d)$. O ideal bilateral gerado por a é o conjunto $a\mathfrak{E}(1, \Omega_d, \mathfrak{Q})$. A expressão $a\mathrm{X}$ não constitui um ideal direito admissível. O ideal direito gerado por

$a\mathrm{X}$ é $a\mathrm{X}_d$. Trata-se de ideal admissível. Um ideal direito $\mathfrak{r}$, de X, será um subgrupo — Ω que, com cada $a \in \mathfrak{r}$, contém $a\mathfrak{E}(\Omega_d, \mathrm{X}_d)$. O ideal $\mathfrak{r}^2$ poderá definir-se como o conjunto de elementos da forma $\Sigma[aa'(\Sigma \pm 1 E_r^{(d)} \ldots E_t^{(d)})]$, onde $a, a' \in \mathfrak{r}$ e os dois somatórios são finitos. Tratar-se-á do ideal direito gerado pelos elementos aa'. Neste sentido, também se poderá definir um produto $\mathfrak{r}\mathfrak{r}'$ de dois ideais direitos como o ideal direito gerado pelos elementos rr', com $r \in \mathfrak{r}, r' \in \mathfrak{r}'$. Será $\mathfrak{r}^2 \subseteq \mathfrak{r}, \mathfrak{r}\mathfrak{r}' \subseteq \mathfrak{r}$, mas haverá uma dissimetria grande em confronto com o caso associativo, resultante do facto de os elementos de $\mathfrak{r}\mathfrak{r}'$ não poderem tomar a forma $\Sigma rr'$. Já tivemos ocasião de interpretar um ideal bilateral $\mathfrak{a}$ como um subgrupo — Ω que, com cada $a \in \mathfrak{a}$, contém $a\mathfrak{E}(\Omega_d, \mathfrak{Q})$. Se Ω é vazio, $\mathfrak{a}$ é caracterizado por ser um submódulo com a propriedade $\mathfrak{a}\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{a}$. X^2 é sempre ideal bilateral. Pode conceber-se como o conjunto dos elementos da forma $\Sigma tt'$, $(t, t' \in \mathrm{X})$, não importando que Ω seja ou não vazio.

Existindo $u \in \mathrm{X}$, a $\mathfrak{E}(1, \Omega_d, \mathrm{X}_d) = a\mathrm{X}_d$ é o ideal direito gerado por a. Um ideal direito $\mathfrak{r}$ é caracterizado pela propriedade de ser submódulo que, com cada a, contém $a\mathrm{X}_d$.

Acerca de idempotentes, limitamos as nossas considerações a uma simples observação. Seja $f \in \mathrm{X}$ um idempotente. O ideal esquerdo $f\mathrm{X}_e$, gerado por f, é um submódulo — (X_e, Ω_d). Os seus endomorfismos — X_e, são endomorfismos — (X_e, Ω_d), pois que, dado o endomorfismo — X_e, definido pela correspondência $f \to fA^{(e)}$, $(A^{(e)} \in \mathrm{X}_e)$, vê-se que tem: $f = ff = fE_f^{(e)} \to fA^{(e)}E_f^{(e)} = fA^{(e)}$, $fE_\lambda = (ff)E_\lambda = fE_f^{(e)}E_\lambda = fE_{f\lambda}^{(e)} \to fA^{(e)}E_{f\lambda}^{(e)} = (fA^{(e)})E_f^{(e)}E_\lambda = fA^{(e)}E_\lambda$.

Passemos a alguns detalhes relativos aos anéis simples não associativos. Como não podem ser anéis zero, ter-se-á $\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}$. O centralizador de multiplicação $\overline{\mathfrak{Q}}$ é comutativo. Como, por outro lado, X é simples — $(\mathfrak{Q}, \Omega_d)$, se pusermos $\mathfrak{P} = \mathfrak{E}(\mathfrak{Q}, \Omega_d)$, será X simples — $\mathfrak{P}$. Então, $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{Q}} \cap \overline{\Omega}_d$ é um anel de divisão, consequentemente um corpo, ao mesmo tempo que, por ser $\overline{\mathfrak{Q}}$ comutativo, será ainda Ω_d comutativo, e $\Omega_d \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$. Também aqui, se for $o \neq a \in \mathrm{X}$, é $a\mathfrak{Q} \neq (o)$, visto que a hipótese $a\mathfrak{Q} = (o)$ acarretaria, se $b\mathfrak{Q} = (o)$, a relação $(a-b)\mathfrak{Q} = (o)$, sendo também $(a\mathfrak{Q})\mathfrak{Q} = (o)$; $(a\Omega_d)\mathfrak{Q} = (a\mathfrak{Q})\Omega_d = (o)$. Ter-se-ia

$\mathbf{X}\mathfrak{Q}=(o)$, e, em particular, $\mathbf{X}^2=(o)$. E podemos concluir a igualdade $a\overline{\mathfrak{Q}}=\mathbf{X}$, visto ser $a\mathfrak{Q}$ um ideal bilateral admissível não nulo. A simplicidade — $(\mathfrak{Q}, \Omega_d)$ arrasta a simplicidade — $\mathfrak{Q}$ e reciprocamente. Logo:

TEOREMA 25: — *Se $\mathbf{X}$ é um anel não associativo, simples relativamente a Ω, é também anel simples sem operadores. Um anel não associativo, simples relativamente a Ω, é álgebra não associativa sobre o seu domínio operatório máximo, e, é claro, sobre todo o corpo que possa considerar-se domínio operatório do anel, desde que o elemento um do corpo seja operador unitário de* $\mathbf{X}$. Assim:

COROLÁRIO 7: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{H}$, suposta uma álgebra não associativa sobre $\mathfrak{K}$, seja simples, que seja um anel simples, considerado sem operadores.*

Já dissemos que o centro Z é domínio operatório. Se for $o \neq c \in Z$, sabemos que é também $c\overline{\mathfrak{Q}}=\mathbf{X}$. Como, porém, $c\overline{\mathfrak{Q}}=c\mathbf{X}_d=c\mathbf{X}_e=c\mathbf{X}$, tem-se $c\mathbf{X}=\mathbf{X}$. Admitindo, pois, que o centro é $\neq (o)$, o teorema 22 garante-nos ser $Z_d=\overline{\mathfrak{Q}}$. Neste caso, Z_d é uma concretização de Z, de sorte que o centro é um corpo. De resto, poderá chegar-se à mesma conclusão por uma via directa, tal como para os anéis associativos. Seriam aplicáveis os mesmos raciocínios que levaram à relação $ax=xa$, para cada solução de $cx=c'$, com $c, c' \in Z$. Suposto isto feito, a verificação de que x satisfaz às igualdades $(ab)x=(ax)b=a(bx)$, com $a, b \in \mathbf{X}$, pode efectuar-se como segue. Escrevendo $a=sc$, além de $xc=c'$, vê-se que $(ab)x=(sc.b)x=(sb.c)x=sb.xc=sb.c'=sc'.b=(s.xc)b=(sc.x)b=ax.b$; e, se supusermos $b=tc$, além de $cx=c'$, vê-se que $(ab)x=(a.tc)x=(at.c)x=at.xc=at.c'=a.tc'=a.(t.xc)=a(tc.x)=a.bx$. A circunstância de o elemento um de Z estar concretizado pelo endomorfismo identidade garante-nos ser aquele elemento um o elemento um de $\mathbf{X}$. Tem lugar o

TEOREMA 26: — *Todo o anel $\mathbf{X}$, não associativo, simples relativamente a Ω, com um centro $Z \neq (o)$, é álgebra simples sobre o seu centro. O elemento um de Z é o elemento um de $\mathbf{X}$. A imagem Z_d é, então, o centralizador de multiplicação.*

COROLÁRIO 8: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel não associativo $\mathbf{X}$, simples relativamente a Ω, tenha elemento um, que o seu centro Z seja $\neq (o)$.*

Uma demonstração directa de que $1 \in Z$ é elemento um de $\mathbf{X}$ pode ser a seguinte: tendo-se $c\mathbf{X}=\mathbf{X}$, para cada $c \in Z$, com $c \neq o$, é também $x=ct$, $1x=1.ct=1.t c=ct=x=x1$, $(x \in \mathbf{X})$.

Como observação final sobre os anéis simples, diremos o que vai seguir-se. Se $\mathfrak{H}$ é uma álgebra simples, não associativa, sobre $\mathfrak{K}$, a hipótese $Z \neq (o)$ implica, nos termos do corolário 8, que exista $1 \in \mathfrak{H}$. Então, o domínio operatório máximo de $\mathfrak{H}$ é o seu centro, pelo que, do facto de o elemento um de $\mathfrak{K}$ ser operador unitário resulta poder supor-se $\mathfrak{K} \subseteq Z$ um subcorpo do corpo Z. Assim:

TEOREMA 27: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{H}$, suposta uma álgebra simples, não associativa, sobre $\mathfrak{K}$, tenha elemento um, que o seu centro Z, contenha o corpo $\mathfrak{K}$.*

O § vai terminar pela consideração de um anel não associativo $\mathbf{X}$, susceptível de escrever-se sob a forma $\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+\ldots+\mathbf{X}_t$, onde os $\mathbf{X}_i$ são anéis simples para os quais se tem $x_i x_j=o$, se $i \neq j$ e $x_i \in \mathbf{X}_i$, $x_j \in \mathbf{X}_j$. $\mathbf{X}$ aparece decomposto numa soma de ideais bilaterais simples, sendo aplicáveis todos os raciocínios que levaram ao teorema 20 e seu corolário 6, pelo que têm lugar os mesmos enunciados.

Neste caso, por se ter $\mathbf{X}^2 \supseteq \mathbf{X}_i^2=\mathbf{X}_i$, é ainda $\mathbf{X}^2=\mathbf{X}$. Para o domínio operatório máximo de $\mathbf{X}$, que é o centralizador de multiplicação $\overline{\mathfrak{Q}}$, valem as relações $\mathbf{X}_i\overline{\mathfrak{Q}} \subseteq \mathbf{X}_i$, como se conclui do modo a seguir. É $\mathbf{X}_i\mathfrak{Q} \supseteq \mathbf{X}_i^2=\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_i\mathfrak{Q} \subseteq \mathbf{X}_i$, ou seja $\mathbf{X}_i\mathfrak{Q}=\mathbf{X}_i$; por outro lado, sendo $\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}} \subseteq \mathfrak{Q}$, tem-se $\mathbf{X}_i\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}}=\mathbf{X}_i\overline{\mathfrak{Q}} \subseteq \mathbf{X}_i\mathfrak{Q}=\mathbf{X}_i$. Fixemos este

TEOREMA 28: — *Dado o anel não associativo $\mathbf{X}$, soma directa dum número finito de ideais bilaterais simples, da forma $\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+\ldots+\mathbf{X}_t$, podemos afirmar:* 1) *o anel $\mathbf{X}$ não contém outros ideais bilaterais simples além dos $\mathbf{X}_i$;* 2) *para cada ideal bilateral $\mathbf{B}$, de $\mathbf{X}$, tem-se sempre $\mathbf{X}=\mathbf{B}+\mathfrak{C}$, onde $\mathbf{B}$ é a soma dos $\mathbf{X}_i$ para os quais $\mathbf{B} \cap \mathbf{X}_i=$*

$= \mathbf{X}_i$ *e* $\mathfrak{C}$ *a soma dos* $\mathbf{X}_j$ *para os quais* $\mathrm{B} \cap \mathbf{X}_j = (o)$; 3) *qualquer domínio operatório de* $\mathbf{X}$ *funciona de modo comutativo e é domínio operatório de cada* $\mathbf{X}_i$.

7) **Sobre a teoria das somas directas discretas** — Em [24, ou Cap. XV] e [34, ou Cap. XIX], estudámos largamente as somas directas discretas de módulos. No teorema 7, do § 3, de [34], fala-se duma soma directa completa, em ligação com a teoria das somas directas em causa. Trata-se dum pequeno lapso, pois não está em jogo uma soma completa, mas uma soma subdirecta especial [Cfr. 34, § 2, assim como o Cap. XVIII, § 2]. No § 8, de [31], encontra-se, de novo, a exposição de [24], com certas alterações, que julgamos útil recomendar.

Aqui limitamo-nos ao que vai ver-se. O teorema 50, do § 12, de [24, ou Cap. XV], leva a estes corolários:

COROLÁRIO 9: — *Se* Θ *é um endomorfismo* — $\overline{\mathfrak{R}}$, *de* $\mathfrak{M}$, *que aplica um submódulo* $\mathfrak{m}_\mu$ *em* (o), *então* $\Theta = o$.

COROLÁRIO 10: — *Se* $\mathfrak{m}$ *é um módulo* — $\mathfrak{R}$, *fechado* — $\mathfrak{R}$, *toda a soma directa discreta de módulos isomorfos* — $\mathfrak{R}$, *de* $\mathfrak{m}$, *é um módulo* — $\mathfrak{R}$, *fechado* — $\mathfrak{R}$.

O teorema 53, do mesmo § 12, de [24], pode demonstrar-se de modo mais simples do que o que foi utilizado. Daremos essa demonstração.

TEOREMA 29: — *Na soma directa* $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$, *de módulos* $\mathfrak{m}_\mu$, *isomorfos* — $\mathfrak{R}$ *dum módulo* $\mathfrak{m}$, *há uma correspondência biunívoca completa entre os submódulos* — $\overline{\mathfrak{R}}$, *de* $\mathfrak{M}$, *e os submódulos* — $\overline{\mathfrak{K}}$, *de* $\mathfrak{m}$. [$\overline{\mathfrak{K}}$ é o comutador da imagem $\mathfrak{K}$, de $\mathfrak{R}$, no absoluto de $\mathfrak{m}$].

Seja $\mathfrak{N}$ um submódulo — $\overline{\mathfrak{R}}$, de $\mathfrak{M}$. Por meio dos homomorfismos $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$, definem-se homomorfismos $\mathbf{N} \sim \mathfrak{n}_\mu = \mathbf{N}\, E_\mu$. Vê-se que $\mathfrak{n}_\mu \subseteq \mathbf{N}$. Deste modo é $\mathbf{N} = \Sigma\, \mathfrak{n}_\mu$. Por meio de $\mathfrak{n}_\mu$, define-se $\mathfrak{n}_\mu \varphi_\mu^{-1} = \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m}$. Vamos reconhecer as duas propriedades seguintes de $\mathfrak{n}$: 1) $\mathfrak{n}$ é submódulo — $\overline{\mathfrak{K}}$; 2) $\mathfrak{n}$ é independente do índice μ. Façamos $\mu = \alpha$. A propriedade 1) prova-se verificando que $\mathfrak{n}_\alpha E_\alpha \overline{\mathfrak{R}} E_\alpha \subseteq \mathfrak{n}_\alpha$. Ora isso é imediato, pois $\mathfrak{n}_\alpha E_\alpha \overline{\mathfrak{R}} E_\alpha = \mathbf{N}\, E_\alpha$.

$. E_\alpha \overline{\mathfrak{R}} E_\alpha = \mathbf{N}\, E_\alpha \overline{\mathfrak{R}} E_\alpha \subseteq \mathbf{N}\, E_\alpha = \mathfrak{n}_\alpha$. Quanto a 2), tem de verificar-se a igualdade $\mathbf{N}\, E_\mu \varphi_\mu^{-1} = \mathbf{N}\, E_\nu \varphi_\nu^{-1}$, ou seja a relação $\mathbf{N}\, E_\mu \varphi_\mu^{-1} \varphi_\nu = \mathbf{N}\, E_\nu$. O 1.º membro representa $\mathbf{N}\, E_\mu \Delta_{\mu\nu} = \mathbf{N}\, E_{\mu\nu} = \mathbf{N}\, E_{\mu\nu} E_{\nu\nu} \subseteq \mathbf{N}\, E_\nu$. Como é anàlogamente $\mathbf{N}\, E_{\nu\mu} \subseteq \mathbf{N}\, E_\mu$, vê-se que $\mathbf{N}\, E_{\nu\mu} E_{\mu\nu} \subseteq \mathbf{N}\, E_{\mu\mu} E_{\mu\nu}$, ou seja $\mathbf{N}\, E_\nu \subseteq \mathbf{N}\, E_{\mu\nu}$. É, portanto, $\mathbf{N}\, E_{\mu\nu} = \mathbf{N}\, E_\nu$, como se deseja. Recìprocamente, partamos de $\mathfrak{n}$, suposto submódulo — $\overline{\mathfrak{K}}$. Passa-se a $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}_\mu = \mathfrak{n}\, \varphi_\mu$, $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}_\nu = \mathfrak{n}\, \varphi_\nu = \mathfrak{n}_\mu \varphi_\mu^{-1} \varphi_\nu = \mathfrak{n}_\mu \Delta_{\mu\nu} = \mathfrak{n}_\mu E_\mu \Delta_{\mu\nu} = \mathfrak{n}_\mu E_{\mu\nu}$. Depois, construamos $\mathbf{N} = \Sigma\, \mathfrak{n}_\mu$. Trata-se de ver que $\mathbf{N}$ é submódulo — $\overline{\mathfrak{R}}$. Tomemos $S = \Sigma\, E_\mu S E_\nu \in \overline{\mathfrak{R}}$. Para aplicarmos S a $\mathbf{N}$, temos de aplicar S a cada $\mathfrak{n}_\mu$. Mas, então, basta aplicar a $\mathfrak{n}_\mu$ os diferentes $E_\mu S E_\nu$, (μ fixo, ν qualquer). Tem-se $\mathfrak{n}_\mu E_\mu S E_\nu = \mathfrak{n}_\mu E_\mu S E_\mu . E_{\mu\nu} \subseteq \mathfrak{n}_\mu E_{\mu\nu} = \mathfrak{n}_\nu$. Vê-se que não saímos de $\mathbf{N}$, quando lhe aplicamos qualquer $S \in \overline{\mathfrak{R}}$. O teorema é agora imediato.

8) **Sobre os módulos semi-simples** — Às considerações desenvolvidas em [34, § 5], vamos juntar outras, igualmente susceptíveis de aplicações interessantes. Começaremos pelo

TEOREMA 30: — *Seja* $\mathfrak{M}$ *um módulo semi-simples e suponhamos* $\mathfrak{M}_1$ *um submódulo* — $\mathfrak{S}$ *para o qual* $\mathfrak{M}_1 A_i \subseteq \mathfrak{M}_1$, *quando se tornam os* n *endomorfismos* — $\mathfrak{S}$ *designados por* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$; *então, é possível escrever* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{N}_1$, *onde* $\mathfrak{Q}_1$ *é anulado por todos os* A_i, $(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$, *e* $\mathbf{N}_1 \mathrm{A}_i \subseteq \mathbf{N}_1$. Escrevamos $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1' + \mathbf{N}_1''$, onde $\mathbf{N}_1'$ é o núcleo do endomorfismo $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_1 A_1$ e $\mathfrak{N}_1''$ é um certo submódulo — $\mathfrak{S}$. Pondo $\mathfrak{P}_1 = (\mathbf{N}_1'', \mathbf{N}_1'' A_1)$, verifica-se que se tem $\mathfrak{P}_1 A_1 \subseteq \mathfrak{P}_1$ pelo facto de ser $\mathfrak{M}_1 A_1 = \mathbf{N}_1'' A_1$, $\mathfrak{M}_1 A_1 . A_1 \subseteq \mathfrak{M}_1 A_1$, $\mathfrak{N}_1'' A_1 . A_1 \subseteq \mathfrak{M}_1 A_1 = \mathfrak{N}_1'' A_1$. Como, por outro lado, de $\mathfrak{P}_1 \supseteq \mathbf{N}_1''$, se tira $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1 \cap \mathbf{N}_1' + \mathbf{N}_1''$, e como é $\mathbf{N}_1' = \mathfrak{P} \cap \mathbf{N}_1' + \mathfrak{B}_1$, também se vê serem válidas as igualdades $\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{P}_1 \cap \mathbf{N}_1') + \mathfrak{B}_1 + \mathbf{N}_1'' = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{B}_1$, sem esquecer que se tem $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathbf{N}_1'$, $\mathfrak{B}_1 A_1 = (o)$. Responde-se, por consequência, ao caso em que $n = 1$, pondo $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{B}_1$, $\mathbf{N}_1 = \mathfrak{P}_1$. Imaginemos agora o teorema demonstrado para $n - 1$. Vamos prová-lo para n. Partiremos de $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{Q}_{n-1} + \mathbf{N}_{n-1}$, onde $\mathfrak{Q}_{n-1}$ é anulado pelos A_j, $(j =$

mento um é operador unitário do módulo, é um anel completo de matrizes transfinitas de linhas somáveis, com elementos dum anel de divisão isomorfo do anel de endomorfismos — $\mathfrak{R}$ *dum ideal direito simples de* $\mathfrak{R}$*.*

Baseados neste teorema, podemos estruturar o anel de endomorfismos — $\overline{\mathfrak{R}}$ dum módulo $\mathbf{M}$ sobre um anel semi-simples noetheriano $\mathfrak{R}$. Supondo $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_t$ a decomposição de $\mathfrak{R}$ em anéis simples, sempre com a hipótese de 1 e $\mathfrak{R}$ ser operador unitário de $\mathbf{M}$, pode escrever-se $\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathfrak{R} = \mathbf{M}\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathbf{M}\mathfrak{A}_t$. Representando por F_i, $(i = 1, 2, \ldots, t)$, as projecções de $\mathbf{M}$ sobre os $\mathbf{M}\mathfrak{A}_i = \mathbf{M}_i$, sabemos que $\overline{\mathfrak{R}} = \Sigma\, \mathfrak{R}_{ij}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, t)$, com $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} = F_i \overline{\mathfrak{R}} F_j$. Visto que cada $\mathbf{M}_i$ é semi-simples — $\mathfrak{R}$ e se exprime como soma directa discreta de módulos isomorfos, não isomorfos das parcelas de $\mathbf{M}_j$, se $j \neq i$, vamos verificar que se tem $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} = (o)$. Uma homomorfia $\mathbf{M}_i \sim \mathbf{M}'_j \subseteq \mathbf{M}_j$ aplica cada submódulo simples de $\mathbf{M}_i$ em (o); assim, aplica $\mathbf{M}_i$ em (o), e $\overline{\mathfrak{R}}_{ij}$ só tem o elemento zero. Concluímos daqui $\overline{\mathfrak{R}} = \Sigma\, \mathfrak{R}_{ii}$, $(i = 1, 2, \ldots t)$. A estrutura de $\overline{\mathfrak{R}}_{ii}$ é definida pelo teorema anterior, valendo, assim, a proposição que vamos enunciar, e que pode considerar-se uma extensão dum teorema muito conhecido, relativo à estrutura dos anéis semi-simples noetherianos (1.º teorema de WEDDERBURN-ARTIN):

TEOREMA 33: — *O anel de endomorfismos —* $\overline{\mathfrak{R}}$ *dum módulo* $\mathbf{M}$*, sobre um anel semi-simples noetheriano* $\mathfrak{R}$*, cujo elemento um é operador unitário do módulo, é isomorfo duma soma directa dum número finito de anéis completos de matrizes como os do teorema anterior. Há tantas parcelas em* $\overline{\mathfrak{R}}$ *quantos os anéis simples em que se decompõe* $\mathfrak{R}$ *ou quantos os sistemas de ideais direitos simples não isomorfos.*

É útil a proposição que vamos demonstrar em seguida, sobretudo quando aplicada em certos casos particulares. $\mathbf{M}$ é um módulo e $\mathfrak{S}$ um anel semi-simples noetheriano de endomorfismos contendo o endomorfismo idêntico. Suponhamos $\overline{\mathfrak{T}}$ um subconjunto de $\overline{\mathfrak{S}}$ gerando no absoluto de $\mathbf{M}$ um subanel nilpotente $\overline{\mathfrak{T}}_d$, de expoente σ. É $\overline{\mathfrak{T}}_d^{\sigma} = (o)$, $\mathfrak{T}_d^{\sigma-1} \neq (o)$, e, portanto, $\mathbf{M}_o = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{T}}_d^{\sigma-1} \neq (o)$, $\mathbf{M}_o \overline{\mathfrak{T}}_d = (o)$.

Claramente que $\mathbf{M}_o$ é submódulo — $\mathfrak{S}$, podendo escrever-se $\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \mathbf{M}'_o$, visto que $\mathbf{M}$ é semi-simples — $\mathfrak{S}$. Para cada $x \in \mathbf{M}$, tem-se $x = x_o + x'_o = x\alpha + x\varepsilon$, $(x_o \in \mathbf{M}_o, x'_o \in \mathbf{M}'_o, \alpha, \varepsilon \in \overline{\mathfrak{S}})$. Para cada $\beta \in \overline{\mathfrak{T}}_d$, é $x\beta = x\varepsilon\beta$, pelo que $\beta = \varepsilon\beta$. Também é $\mathbf{M}_o \varepsilon = (o)$. Portanto:

TEOREMA 34: — *Se* $\mathfrak{S}$ *é um anel semi-simples noetheriano de endomorfismos dum módulo* $\mathbf{M}$*, contendo o endomorfismo idêntico, e se* $\overline{\mathfrak{T}} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ *tem a propriedade de gerar um subanel nilpotente* $\overline{\mathfrak{T}}_d$ *no absoluto de* $\mathbf{M}$*, existe* $\varepsilon \in \overline{\mathfrak{S}}$ *idempotente tal que* $\varepsilon\beta = \beta$*, para cada* $\beta \in \overline{\mathfrak{T}}$ *(ou* $\overline{\mathfrak{T}}_d$*). O endomorfismo* ε *não é automorfismo.*

9) **Regresso aos anéis irredutíveis** — Nas considerações que vão ser feitas sobre anéis irredutíveis, teremos ocasião de utilizar a doutrina dos §§ anteriores.

Quando $\mathbf{M}$ é um módulo sobre um anel de divisão $\mathfrak{D}$, cujo elemento um é operador unitário de $\mathbf{M}$, o facto de $\mathfrak{D}$ ser simples noetheriano permite se possa escrever $\mathbf{M} = \Sigma\, u_\mu \mathfrak{D}$, $(\mu \in M)$, onde os $u_\mu \in \mathbf{M}$ e os submódulos $u_\mu \mathfrak{D}$ são simples — $\mathfrak{D}$, portanto isomorfos de $\mathfrak{D}$.

Imaginemos, em seguida, que o módulo $\mathbf{M}$, que tem $\mathfrak{A}$ como absoluto de endomorfismos, é irredutível — $\mathfrak{A}$. É claro que o anel $\mathfrak{A}$ é irredutível. A este respeito, é válido o seguinte

TEOREMA 35: — *É condição necessária e suficiente, para que* $\mathbf{M}$ *seja irredutível relativamente ao seu absoluto* $\mathfrak{A}$*, que exista em* $\mathfrak{A}$ *um corpo primo contendo a identidade,* [9]. A condição é *necessária:* Partindo de $\mathbf{M}$, irredutível — $\mathfrak{A}$, o comutador $\overline{\mathfrak{A}}$ (centro de $\mathfrak{A}$) é um corpo que contém um corpo primo. A condição é *suficiente.* Como existe o corpo primo $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{A}$, consideremos $\mathbf{M}$ um módulo — $\mathfrak{P}$ e escrevamos $\mathbf{M} = \Sigma\, u_\mu \mathfrak{P}$, $(\mu \in M)$, sob forma de soma directa discreta de submódulos — $\mathfrak{P}$, simples e isomorfos, (Cfr. [30], §§ 8 e 9). Visto que o comutador de $\mathfrak{P}$, no anel dos endomorfismos de $u_\mu \mathfrak{P}$, é o próprio $\mathfrak{P}$, e visto que não há em $u_\mu \mathfrak{P}$ submódulos — $\mathfrak{P}$ próprios, salvo (o), o teorema 29 mostra que $\mathbf{M}$ é já irredutível — $\overline{\mathfrak{P}}$. Demonstrada, assim, a proposição, podemos observar que a suficiência do enunciado é susceptível da expressão mais geral seguinte: Dados $\mathbf{M}$ e o seu absoluto $\mathfrak{A}$, considerado $\mathrm{B}= \overline{\mathfrak{K}} \supseteqq \mathfrak{A}$, comutador, em $\mathfrak{A}$, dum corpo $\mathfrak{K} \subseteqq \overline{\mathfrak{K}} \subseteqq \mathfrak{A}$, que contém a identidade, o módulo $\mathbf{M}$ é irredutível $-\mathrm{B}$. O anel B é irredutível.

Supondo que um anel de divisão $\mathfrak{D}$, de endomorfismos de $\mathbf{M}$, contém a identidade, e escrevendo $\mathbf{M}=\Sigma u_\mu \mathfrak{D}$, $(\mu \in M)$, se $\mathfrak{Q}$ for o centro de $\mathfrak{D}$, então $\mathbf{M}$ é irredutível $-\mathfrak{A}$ e irredutível $-\overline{\mathfrak{Q}}$. Demonstra-se, como anteriormente, que $\mathbf{M}$ é também irredutível $-\overline{\mathfrak{D}}$. De facto, os endomorfismos $-\mathfrak{D}$, não nulos, de $u_\mu \mathfrak{D}$, são todos automorfismos e formam um anel de divisão $\mathfrak{D}'$, anti-isomorfo de $\mathfrak{D}$. Define-se um $\sigma \in \mathfrak{D}'$, dando a correspondência $u_\mu \rightarrow u_\mu \sigma = u_\mu d$. Pode escrever-se $u_\mu \mathfrak{D} = u_\mu \mathfrak{D}'$, onde $d \in \mathfrak{D}$ e $\sigma \in \mathfrak{D}'$ se correspondem como acaba de ver-se. Então, $u_\mu \mathfrak{D}$ não tem submódulos $-\mathfrak{D}'$, salvo os banais, e $\mathbf{M}$ não tem submódulos $-\overline{\mathfrak{D}}$, salvo os banais. Por uma via mais directa, tomemos $\mathfrak{m} \neq (o)$ como submódulo $-\overline{\mathfrak{D}}$, de $\mathbf{M}$, e suponhamos $x = u_\alpha d_\alpha + u_\rho d_\rho$ um elemento não nulo de $\mathfrak{m}$. O endomorfismo $-\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, que aplica $u_\alpha d_\alpha$ em $u_\lambda d_\lambda$ e u_μ em zero, $(\mu \neq \alpha)$, aplica x em $u_\lambda d_\lambda$, o que nos leva a concluir ter-se $u_\lambda \mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{m}$, qualquer que seja o índice fixo λ, (se $d_\alpha = o$, há, entre os $d_\beta, \ldots, d_\rho$, um $\neq o$). Portanto, $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$, como se deseja.

Ainda na mesma ordem de ideias, imaginemos que o absoluto $\mathfrak{A}$, de $\mathbf{M}$, contém um anel $\mathfrak{S}$ de endomorfismos, simples noetheriano, diferente dum anel de divisão e com $1 \in \mathfrak{S}$ representando o endomorfismo idêntico. Pelo teorema 36, $\mathbf{M}$ é irredutível $-\mathfrak{A}$; e, pelas considerações do § anterior, pode escrever-se $\mathbf{M} = \Sigma \mathfrak{m}_\mu$, $(\mu \in M)$, onde cada $\mathfrak{m}_\mu$ é isomorfo $-\mathfrak{S}$ de qualquer ideal direito mínimo de $\mathfrak{S}$. Claramente que $\mathbf{M}$ não é irredutível $-\overline{\mathfrak{S}}$ (o comutador de $\overline{\mathfrak{S}}$ nunca pode ser um anel de divisão), e, por consequência, havendo submódulos $-\overline{\mathfrak{S}}$, de $\mathbf{M}$, há também submódulos $-\Lambda$, dum ideal direito mínimo $e\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}$, suposto Λ o anel de divisão dos endomorfismos $-\mathfrak{S}$, de $e\mathfrak{S}$. Dum modo preciso, tem-se:

Teorema 36: — *Dados $\mathfrak{M}$ e o seu absoluto $\mathfrak{A}$, considerado o subanel $\overline{\mathfrak{S}} \subseteqq \mathfrak{A}$, comutador, em $\mathfrak{A}$, dum anel simples noetheriano $\mathfrak{S}$ com a identidade de $\mathfrak{A}$, há correspondência biunívoca completa entre os submódulos $-\overline{\mathfrak{S}}$, de $\mathfrak{M}$ e os submódulos $-e\mathfrak{S}e$, dum ideal direito mínimo $e\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}$.* Os elementos de $e\mathfrak{S}e$ consideram-se operadores esquerdos de $e\mathfrak{S}$. Veremos adiante que $\mathfrak{S}$ e $\overline{\mathfrak{S}}$ são comutadores recíprocos.

Podia supor-se diferente do caso anterior aquele caso em que existisse em $\mathfrak{A}$ anel simples $\mathfrak{S}$, com ideais direitos mínimos e com elemento um, este último também elemento um de $\mathfrak{A}$. Das considerações feitas em [26, § 4], resulta, porém, que $\mathfrak{S}$ é simples noetheriano, [4], [29].

Frisámos já, neste §, que é semi-simples todo o módulo $\mathfrak{M}$ sobre um anel de divisão $\mathbf{D}$. Se $\mathfrak{N}$ for um submódulo $-\mathbf{D}$, tem sempre lugar a igualdade $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$, onde $\mathfrak{N}'$ é outro submódulo $-\mathbf{D}$. Há sempre um idempotente $E \in \overline{\mathbf{D}}$ tal que $\mathfrak{M} E = \mathfrak{N}$. Para qualquer elemento $x' \in \mathfrak{N}'$ é $x' E = o$. Imaginemos que $\mathfrak{N}$ é finito sobre $\mathbf{D}$. Ao escrever-se $\mathfrak{M} = \Sigma u_\mu \mathbf{D}$, $(\mu \in M)$, podemos supor $(u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\lambda)$ uma base independente para $\mathfrak{N}$. Então, $E = E_\alpha + E_\beta + \ldots + E_\lambda$ é um idempotente de $\overline{\mathbf{D}}$ tal que $\mathfrak{M} E = \mathfrak{N} = \mathfrak{M} E_\alpha + \mathfrak{M} E_\beta + \ldots + \mathfrak{M} E_\lambda$, com $\mathfrak{M} E_\alpha = u_\alpha \mathbf{D}$, etc., pois que os idempotentes $E_\alpha, \ldots, E_\lambda$ são ortogonais. No caso de $\mathfrak{M}$ ser infinito sobre $\mathbf{D}$, as transformações lineares finitas pertencentes a $\overline{\mathbf{D}}$ formam um conjunto $\mathfrak{F}$, que é um ideal bilateral de $\mathfrak{A}$. Este ideal é irredutível em $\mathfrak{M}$, sobre $\mathbf{D}$. Há lugar, portanto, a considerar anéis irredutíveis $\overline{\mathfrak{B}}$, subanéis de $\overline{\mathbf{D}}$, distintos de $\overline{\mathbf{D}}$, visto que $1 \notin \overline{\mathfrak{F}}$.

Para prosseguirmos no estudo dos módulos sobre anéis de divisão, convém agora fazer a demonstração desta propriedade muito simples: pondo $\mathfrak{m} = v\mathbf{D}$, o anel de divisão $\mathbf{D}$ é fechado no absoluto $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{m}$. De facto, visto que $\mathbf{D}$ e $v\mathbf{D}$ são isomorfos $-\mathbf{D}$, os respectivos absolutos são isomorfos, podendo supor-se que neste último isomorfismo se correspondem os elementos de $\mathbf{D}$. Pelo facto de $\mathbf{D}$ ser anel com elemento um, sabe-se que as multiplicações, à direita de $\mathbf{D}$, por elementos de $\mathbf{D}$, constituem o anel $\mathbf{D}$

de endomorfismos que é o comutador recíproco do anel $\mathbf{D}'$ das multiplicações, à esquerda de $\mathbf{D}$, por elementos de $\mathbf{D}$. Tem-se $\mathbf{D}' = \bar{\mathbf{D}}$ e $\bar{\mathbf{D}}' = \mathbf{D} = \bar{\bar{\mathbf{D}}}$. O mesmo se diz de $\mathbf{D}$, como anel de endomorfismos de $v\mathbf{D}$.

Posto isto, regressemos ao caso geral dum módulo $\mathfrak{M} = \Sigma\, u_\mu \mathbf{D}$, sobre o anel de divisão $\mathbf{D}$. O corolário 10 do § 7 garante-nos que também aqui se tem $\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \mathbf{D}$, isto é, que $\mathbf{D}$ é fechado no absoluto $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{M}$. Não é difícil de fazer uma verificação directa deste facto. Dado $\Theta \in \bar{\bar{\mathbf{D}}}$, sabemos, do teorema 50, § 12, de [24], que Θ induz um endomorfismo $-\bar{\mathfrak{K}}_\mu$ (1), em $u_\mu \mathbf{D}$, o qual representaremos por Θ_μ. Acabámos de mostrar que se pode supor $\Theta_\mu = d \in \mathbf{D}$. Provando-se mais que d é independente de μ, fica justificada a afirmação. Utilizando as notações indicadas a propósito das somas directas discretas de módulos isomorfos, [24, § 12, teorema 49], se supusermos $u_\mu \Delta_{\mu\nu} = u_\nu$, vê-se que $u_\nu \Theta = (u_\mu E_\mu \Delta_{\mu\nu}) \Theta = (u_\mu E_{\mu\nu}) \Theta = (u_\mu \Theta) E_{\mu\nu} = (u_\mu d) E_{\mu\nu} = (u_\mu E_{\mu\nu}) d = u_\nu d$. Não pode deixar de ter-se $\Theta_\nu = d$, como se deseja.

Há um método mais imediato de chegar ao resultado, o qual é devido a Artin-Whaples-Jacobson. Claramente que, dados $\mathbf{D}$ e $\bar{\mathbf{D}}$, quaisquer que sejam os elementos $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{M}$, independentes $-\mathbf{D}$, existe sempre $A \in \bar{\mathbf{D}}$ aplicando os x_i em elementos y_i, $(i = 1, 2, \ldots, t)$, independentes ou não, (cfr. a noção de anel denso dada em [24, § 15]). Tomemos, então, $\Theta \in \bar{\bar{\mathbf{D}}}$ e suponhamos $x \to x\Theta = y$. Qualquer que seja x, não podem x e y ser independentes $-\mathbf{D}$. Se o fossem, ter-se-ia, para um certo $A \in \bar{\mathbf{D}}$, $xA = x$, $yA = o$, $x \to x\Theta = y$, $x = xA \to (xA)\Theta = (x\Theta)A = yA = o$, o que é absurdo. Deste modo, vê-se que $x \to x\Theta = y = xd$, $(d \in \mathbf{D})$. Se $t \in \mathfrak{M}$ for qualquer, vamos concluir que é também $t \to t\Theta = td$, de sorte que $\Theta = d$. Consideremos $B \in \bar{\mathbf{D}}$ tal que $xB = t$. É $x \to x\Theta = xd$, $t = xB \to (xB)\Theta = (x\Theta)B = (xd)B = (xB)d = td$, como se deseja. Podemos fixar este

(1) $\bar{\mathfrak{K}}_\mu$ é o comutador da imagem $\mathfrak{K}_\mu$, de $\mathfrak{D}$, no absoluto de $u_\mu \mathfrak{D}$.

Teorema 37: — *Dados um módulo $\mathfrak{M}$ e o seu absoluto $\mathfrak{A}$, a anéis de divisão distintos contidos em $\mathfrak{A}$, com o mesmo elemento um que $\mathfrak{A}$, correspondem comutadores distintos, que são anéis irredutíveis. Em particular, se $\mathfrak{M}$ é irredutível $-\mathfrak{A}$, o centro de $\mathfrak{A}$ é um corpo primo.*

Se $\mathfrak{R}$ é irredutível e $\mathbf{D}$ o seu comutador, é imediato que $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R} \cap \mathbf{D}$ representa o centro de $\mathfrak{R}$. Na hipótese de $\mathfrak{R}$ ser fechado, $\mathfrak{Z}$ é um corpo, centro comum de $\mathfrak{R}$ e de $\mathbf{D}$. Em geral, porém, é $\mathfrak{R} \cap \mathbf{D} \subseteq \bar{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}$. Relativamente ao absoluto $\mathfrak{A}$, trata-se sempre de anel fechado. Se $\mathfrak{A}$ é irredutível, realiza um caso particular deste

Teorema 38: — *Se $\mathfrak{R} = \bar{\mathbf{D}}$ é um anel irredutível fechado, de comutador $\mathbf{D}$, o seu centro é o corpo $\bar{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}$.*

Quando $\mathfrak{B}$ é um anel irredutível de endomorfismos dum módulo $\mathfrak{M}$, todo o ideal bilateral $\mathfrak{a} \neq (o)$, de $\mathfrak{B}$, é igualmente irredutível. De facto, conforme Artin-Whaples-Jacobson, se tomarmos $o \neq x \in \mathfrak{M}$, existe, como vamos ver, $H \in \mathfrak{a}$ tal que $xH = y$, qualquer que seja $y \in \mathfrak{M}$. Suponhamos $o \neq A \in \mathfrak{a}$. Existe $o \neq t \in \mathfrak{M}$ para o qual $tA \neq o$. Escrevendo $tA = z$, se $B \in \mathfrak{B}$ é tal que $xB = t$, tem-se $xBA = tA = z$; se $C \in \mathfrak{B}$ é tal que $zC = y$, vem $xBAC = zC = y$, com $BAC \in \mathfrak{a}$.

Para podermos dar um enunciado que é o análogo de [29, teor. 4, pág. 93] e se encontra também em [9, teor. 3, pág. 951], provaremos ainda que um anel $\mathfrak{R}$, irredutível e fechado, é um anel de ideal irredutível, [4]. Na verdade, suponhamos $\mathfrak{R}$ concretizado no absoluto $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{M}$, e façamos $\mathbf{D} = \bar{\mathfrak{R}}$. Por hipótese, $\mathfrak{R}$ representa a totalidade dos endomorfismos $-\mathbf{D}$, de $\mathfrak{M}$. Se for $o \neq x \in \mathfrak{M}$ e escrevermos $\mathfrak{M} = x\mathbf{D} + \mathfrak{N}'$, vamos mostrar que o ideal direito $\mathfrak{r}'$, de $\mathfrak{R}$, que aniquila $\mathfrak{N}'$ é mínimo. Supondo $o \neq B \in \mathfrak{r}'$ e $C \in \mathfrak{r}'$ um elemento qualquer, não pode ter-se $xB = o$, visto que, de contrário, B anularia $\mathfrak{M}$ e seria $B = o$; e, então, sendo $xB \neq o$, existe $D \in \mathfrak{R}$ tal que $xBD = xC$. Daqui tira-se $x(C - BD) = o$, $C - BD = o$, pois $C -$

— $BD\in\mathfrak{r}'$. A igualdade $C=BD$ demonstra que $\mathfrak{r}'$ é mínimo, como se deseja.

Eis agora o enunciado a que acima aludimos, o qual envolve, além das considerações deste §, as que foram desenvolvidas no § 3:

TEOREMA 39: — *Dado um anel irredutível fechado $\mathfrak{R}$, existem um anel de divisão $\mathbf{D}$ e um espaço $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{D}$, no qual $1\in\mathbf{D}$ opera como operador unitário, de tal modo que $\mathfrak{R}$ representa o conjunto das transformações lineares — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$; $\mathfrak{R}$ pode igualmente concretizar-se como anel das transformações lineares — $\mathbf{D}'$ dum seu ideal direito mínimo $\mathfrak{r}'$, supondo $\mathbf{D}'$ o anel de divisão de endomorfismos — $\mathfrak{R}$, de $\mathfrak{r}'$. Inversamente, o conjunto das transformações lineares — $\mathbf{D}$, dum espaço $\mathbf{M}$ sobre o anel de divisão $\mathbf{D}$, sob a hipótese de $1\in\mathbf{D}$ ser operador unitário de $\mathbf{M}$, é um anel irredutível fechado $\mathfrak{R}$; o espaço $\mathbf{M}$ é irredutível — $\mathfrak{R}$, e, portanto, é isomorfo — $\mathfrak{R}$ de qualquer ideal direito mínimo de $\mathfrak{R}$; e o anel de divisão $\mathbf{D}$ representa o conjunto dos endomorfismos — $\mathfrak{R}$ do espaço. Partindo de $\mathfrak{R}$, tanto $\mathbf{D}$ como $\mathbf{M}$, a menos de isomorfismos, ficam determinados.*

Verificámos já que existem anéis irredutíveis que não são fechados. Nas considerações a seguir, $\mathfrak{B}\neq(o)$ será um anel irredutível qualquer de endomorfismos dum módulo $\mathbf{M}$, tendo como comutador o anel de divisão $\mathbf{D}$. Provaremos a importante proposição, assim enunciada:

TEOREMA 40: — *Dado $o\neq \mathrm{x}_1\in\mathbf{M}$, se $\mathfrak{B}\neq(o)$ for um anel irredutível de endomorfismos de $\mathbf{M}$, tendo $\mathfrak{D}$ como comutador, o ideal direito $\overline{\mathfrak{J}}_1$, de $\mathfrak{B}$, que aniquila $[\mathrm{x}_1]=\mathrm{x}_1\mathfrak{D}$ é $\neq(o)$, pelo facto de, para cada $o\neq \mathrm{x}_o\notin[\mathrm{x}_1]$, ser $\mathrm{x}_o\overline{\mathfrak{J}}_1\neq(o)$*, (cfr. [3]). Claramente que se exclui o caso em que a ordem $(\mathbf{M}/\mathfrak{D})$ é igual a um, pois que, em tal hipótese, sendo $x\mathfrak{B}=\mathbf{M}=x\mathfrak{D}$, para cada $o\neq x\in\mathbf{M}$, só o ideal direito (o) aniquilará $[x_1]=\mathbf{M}$ e não existirá $x_o\notin[x_1]$. A demonstração pode fazer-se como segue. Sem dúvida que o ideal direito do absoluto que aniquila $[x_1]$ é $\neq(o)$. Trata-se, porém, do aniquilador dentro de $\mathfrak{B}$. Tomemos $o\neq x_o\notin[x_1]$ e admitamos $x_o\overline{\mathfrak{J}}_1=(o)$. Se $A_1\in\mathfrak{B}$ for tal que $x_1A_1=x_1$, a correspondência

$$x_1A\to x_oA_1A,\qquad (A\in\mathfrak{B}\ \text{qualquer}),\qquad (1)$$

é um endomorfismo — $\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{M}$, como vamos ver. Em primeiro lugar, $x_1\mathfrak{B}=\mathfrak{M}$; depois, se, para $C\in\mathfrak{B}$, se tiver $x_1A=x_1C$, pelo facto de ser $x_1(A-C)=o$, conclui-se $x_1A_1(A-C)=x_1(A-C)=o$, $A_1(A-C)\in\overline{\mathfrak{J}}_1$, e, portanto, $x_oA_1(A-C)=o$, ou seja $x_oA_1A=x_oA_1C$. Por via de (1), x_1A e x_1C têm, assim, o mesmo correspondente. Representando por $\alpha_1\in\mathbf{D}$ o endomorfismo (1), vem agora

$$x_1A\to x_oA_1A=x_1A\alpha_1,\qquad x_1=x_1A_1\to x_oA_1A_1=x_1\alpha_1.$$

Pelo facto de se ter $x_1(A-A_1A)=o$, também se tem $x_o(A-A_1A)=(x_o-x_oA_1)A=o$. A arbitrariedade de $A\in\mathfrak{B}$ implica $x_o-x_oA_1=o$, ou $x_o=x_oA_1$. Deduz-se daqui $x_o=x_oA_1=x_oA_1A_1=x_1\alpha_1\in[x]$, contra a hipótese. É absurdo supor $x_o\overline{\mathfrak{J}}_1=(o)$, e o sistema fica provado.

Resultam daqui as duas consequências seguintes: 1) tem-se $x_o\overline{\mathfrak{J}}_1=\mathbf{M}$; 2) se x_o, $x_1\in\mathbf{M}$ forem independentes — $\mathbf{D}$, existem $B_o, B_1\in\mathfrak{B}$ tais que $x_oB_o=x_o$, $x_1B_o=o$, $x_oB_1=o$, $x_1B_1=x_1$, [4], (Cfr. [24]). A 2.ª consequência pode tirar-se assim: existe $A_o\in\overline{\mathfrak{J}}_1$ tal que $x_oA_o=x_o$; também existe $A_1'\in\overline{\mathfrak{J}}_1$ tal que $x_oA_1'=x_oA_1$. Pondo, então, $B_o=A_o$, $B_1=A_1-A_1'$, vê-se que $x_oB_o=x_o$, $x_1B_o=o$, $x_1B_1=x_1(A_1-A_1')=x_1A_1=x_1$, $x_oB_1=x_o(A_1-A_1')=o$, como se deseja. E tem sentido, assim, este enunciado mais geral:

TEOREMA 41: — *Se $\mathrm{B}\neq(o)$ é um anel irredutível de endomorfismos de $\mathbf{M}$ e $\mathbf{D}$ é o seu comutador, supondo $\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\in\mathbf{M}$ independentes — $\mathbf{D}$ e $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n\in\mathrm{B}$ tais que $\mathrm{x}_i\mathrm{A}_i=\mathrm{x}_i$, $\mathrm{x}_i\mathrm{A}_j=o$, $(i\neq j)$, o ideal $\overline{\mathfrak{J}}$, de B, que aniquila o subespaço — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$, gerado por $\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n$ e representado por $[\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n]$, é $\neq(o)$, tendo-se, para cada $\mathrm{x}_o\notin[\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n]$, $\mathrm{x}_o\overline{\mathfrak{J}}\neq(o)$.*

A respectiva demonstração encontra-se em [24, § 16], pelo que nos dispensamos de a reproduzir. As relações entre este teorema e o teorema de CHEVALLEY-JACOBSON foram, então, convenientemente esclarecidas. Podem dar-se, de novo, em poucas palavras. Por via do teorema acabado de enunciar, fàcilmente se conclui que todo o anel irredutível de endomorfismos de $\mathbf{M}$, tendo $\mathbf{D}$ como comutador, é anel denso em $\mathbf{M}$ sobre $\mathbf{D}$. Inversamente, tendo em conta os raciocínios que precederam o teorema 37, vê-se que os mesmos são aplicáveis a um anel denso qualquer de endomorfismos — $\mathbf{D}$ dum módulo $\mathbf{M}$, de sorte que o referido anel denso é irredutível e tem $\mathbf{D}$ como comutador.

Da observação de que, dado $[x_1, \ldots, x_n]$, o seu ideal aniquilador $\overline{\mathfrak{J}}$, em $\mathfrak{B}$, não anula $x_{n+1} \notin [x_1, \ldots, x_n]$, resulta ser o *aniquilador modular* de $\overline{\mathfrak{J}}$, ou seja o submódulo — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$, cujos elementos são aniquilados por $\overline{\mathfrak{J}}$, precisamente o submódulo $[x_1, \ldots, x_n]$. Daqui este

TEOREMA 42: — *Se $\mathfrak{B}$ é um anel irredutível de endomorfismos de $\mathbf{M}$ e $\mathfrak{D}$ o seu comutador, os subespaços — $\mathfrak{D}$, finitos, de $\mathbf{M}$, são os precisos aniquiladores modulares dos ideais direitos de $\mathfrak{B}$ que os aniquilam.*

11) **Sobre a noção de anel fechado** — A noção de anel fechado poderia ser posta do modo seguinte: $\mathfrak{R}$ diz-se um anel fechado, se existir um módulo $\mathbf{M}$, concretizando $\mathfrak{R}$ como anel de endomorfismos, e tal que, no respectivo absoluto $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{R}$ e $\overline{\mathfrak{R}}$ sejam comutadores recíprocos. Neste sentido, é válida a afirmação geral seguinte: é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{R}$ seja fechado, que tenha elemento um.

O maior interesse da noção de anel fechado reside, porém, num aspecto mais restritivo, nos termos seguintes: sabe-se que $\mathfrak{R}$ está concretizado como anel de endomorfismos dum certo módulo; então, pretende-se verificar se, nessa concretização, $\mathfrak{R}$ e $\overline{\mathfrak{R}}$ são comutadores recíprocos.

Quando $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}$ é um anel de divisão de endomorfismos de $\mathbf{M}$, contendo o endomorfismo idêntico, demonstrámos que $\mathfrak{D}$ era efectivamente fechado. Neste §, provaremos uma afirmação, feita depois do teorema 36, relativa a um anel simples noetheriano de endomorfismos. Antes disso, porém, vamos regressar aos anéis simples com ideal mínimo, assim como a uma questão ainda ligada à teoria das representações dos citados anéis simples noetherianos.

Se $\mathfrak{S}$ é simples, não anel zero, comecemos por admitir que contém um ideal direito mínimo $\mathfrak{r} \neq (o)$. Então, $\mathfrak{S}$ induz em $\mathfrak{r}$ um anel de endomorfismos: $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}_1$, $x \in \mathfrak{r}$, $x \to x a = x A$, $(a \in \mathfrak{S}, A \in \mathfrak{S}_1)$. Sendo $\mathfrak{S}_1 \simeq \mathfrak{S}/\mathfrak{a}$, onde o ideal bilateral $\mathfrak{a}$ é caracterizado pela relação $\mathfrak{r}\mathfrak{a} = (o)$, ou se tem $\mathfrak{a} = (o)$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$. Neste último caso, concluir-se-ia $\mathfrak{r}\mathfrak{S} = (o)$, $\mathfrak{r}^2 = (o)$, $\mathfrak{S}^2 = (o)$, contra a hipótese. Assim, ter-se-á, necessàriamente, $\mathfrak{a} = (o)$, $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{S}_1$. O anel simples considerado é realizado como anel irredutível de endomorfismos de $\mathfrak{r}$. Trata-se dum anel de ideal irredutível, no qual todos os ideais direitos mínimos são isomorfos. $\mathfrak{S}$ confunde-se com o seu anti-radical, [Cfr. 25], tendo a forma $\mathfrak{S} = \Sigma\, e_\mu \mathfrak{S}$, $(\mu \in M)$, como soma directa discreta de submódulos simples isomorfos — $\mathfrak{S}$, cada um dos quais gerado por um idempotente primitivo. O anel dos endomorfismos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}$, é o anel de todas as matrizes de linhas somáveis com elementos do anel de divisão $\mathfrak{S}$ dos endomorfismos — $\mathfrak{S}$ dum seu ideal direito simples. $\mathfrak{D}$ é anti-isomorfo de $e_\alpha \mathfrak{S} e_\alpha$, $(\alpha \in M)$. Há, também, em $\mathfrak{S}$, ideais esquerdos mínimos todos igualmente isomorfos. Apenas fixaremos este enunciado:

TEOREMA 43: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel simples, não anel zero e com ideal direito mínimo, o anel dos seus endomorfismos — $\mathfrak{S}$ é isomorfo dum anel completo de matrizes de linhas somáveis com elementos dum anel de divisão isomorfo do anel dos endomorfismos — $\mathfrak{S}$ dum ideal direito mínimo de $\mathfrak{S}$.*

O anel simples $\mathfrak{S}$ do teorema anterior não é, em geral, um anel fechado, em qualquer dos dois sentidos em que se tome a respectiva noção. De facto, $\mathfrak{S}$ não tem, em geral, elemento um. Se há $1 \in \mathfrak{S}$, a soma $\Sigma\, e_\mu \mathfrak{S}$ é necessàriamente finita, reduzindo-se $\mathfrak{S}$ a um anel simples noetheriano, fechado no primeiro sentido indicado.

Em ligação com a teoria das representações, é válida a seguinte proposição, que joga com o segundo sentido da noção de anel fechado.

TEOREMA 44: — *Um anel simples noetheriano $\mathfrak{S}$ concretiza-se como anel fechado no absoluto de qualquer dos seus ideais direitos simples.* Partamos de $\mathfrak{S} = \sum_{i,j} \mathbf{D}' e_{ij}$, onde os e_{ij} constituem um sistema de matrizes unidades e $\mathbf{D}'$ é o anel de divisão composto dos elementos de $\mathfrak{S}$ que comutam com as referidas matrizes, [(I), págs. 37-39 e 54-58]. Sabemos que $\mathbf{D}'$ é isomorfo de $e_{11}\mathfrak{S}e_{11}$ e que

$$\mathfrak{S}=\sum_{i,j}\mathbf{D}'e_{ij}=\sum_{i}\left(\sum_{j}\mathbf{D}'e_{ij}\right)=\sum_{i}\mathfrak{r}_i,$$

com $\mathfrak{r}_i=\sum_{j}\mathbf{D}'e_{ij}=e_{ii}\mathfrak{S}=e_i\mathfrak{S}$, $(e_{ii}=e_i)$. Os $\mathfrak{r}_i$ são ideais direitos simples. A expressão anterior de $\mathfrak{S}$ considera este como módulo — $\mathbf{D}'$ esquerdo. Embora $\mathbf{D}'$, por comutar com os e_{ij}, possa ser colocado à direita, importa fixar o lugar de $\mathbf{D}'$, a fim de ser interpretada convenientemente a aplicação dum produto $a'b'$ (de elementos de $\mathbf{D}'$) aos elementos base. Na notação utilizada, b' opera em primeiro lugar. Ora é $(a'b')e_{ij}=e_{ij}(a'b')\neq e_{ij}(b'a')$, em geral. Do que já se disse, resulta ser $\mathfrak{r}_1=\mathbf{D}'e_{11}+\ldots$ $\ldots+\mathbf{D}'e_{1n}$ um módulo que concretiza $\mathfrak{S}$ como anel irredutível de endomorfismos. Dado $x_1\in\mathfrak{r}_1$, a correspondência $x_1\to x_1s$, $(s\in\mathfrak{S})$, é operatória relativamente a $\mathbf{D}'$: $a'x_1\to a'x_1.s=a'.x_1s$, $(a'\in\mathbf{D}')$. Os elementos de $\mathfrak{S}$ induzem, pois, endomorfismos — $\mathbf{D}'$ em $\mathfrak{r}_1$. Vamos ver que qualquer endomorfismo — $\mathbf{D}'$ é definido por um elemento de $\mathfrak{S}$. Se ele determina a correspondência

$$e_{1i}\to e'_{1i}=\sum_{k}d'_{ik}e_{1k},\qquad (d'_{ik}\in\mathbf{D}'),$$

vê-se que, pondo

$$s=\sum_{j,k}d'_{jk}e_{jk},\quad \text{é}\quad e_{1i}s=\sum_{k}d'_{ik}e_{1k}.$$

Em resumo: $\mathfrak{S}$ está concretizado, no absoluto $\mathfrak{A}_1$ dos endomorfismos de $\mathfrak{r}_1$, como anel dos endomorfismos — $\mathbf{D}'$. $\mathbf{D}'$ tem, em $\mathfrak{A}_1$, uma imagem anti-isomorfa $\mathbf{D}$. Então, $\mathbf{D}$ é um anel de divisão e $\mathfrak{S}$ é o seu comutador. Sabemos, da teoria dos anéis irredutíveis, que $\mathfrak{S}$ e $\mathbf{D}$ são comutadores recíprocos. O teorema está provado.

Usando a terminologia da teoria das representações, já referida no § 4, o resultado acabado de provar significa que aos ideais direitos simples dum anel simples $\mathfrak{S}$, completamente redutível e com elemento um, pertencem representações recíprocas irredutíveis, fiéis, de $\mathfrak{S}$. O anel de representação é o anel de divisão $\mathbf{D}$, dos endomorfismos — $\mathfrak{S}$ à direita de cada um daqueles ideais, compor-

tando-se cada ideal direito simples como módulo duplo para o qual, além de $\overline{\mathbf{D}}=\mathfrak{S}$, é ainda $\overline{\overline{\mathbf{D}}}=\overline{\mathfrak{S}}=\mathbf{D}$. Claramente que, como acontece na teoria das representações recíprocas por meio de matrizes, $\mathbf{D}$, assim como $\mathfrak{S}$, são operadores direitos do módulo $\mathfrak{r}_1$ de representação, [(I), Cap. VIII].

Vai seguir-se a proposição já anunciada no começo deste §, assim como depois do teorema 36. Por meio dela, precisa-se um caso importante de anel fechado, no segundo dos sentidos anteriormente referidos. Constitui uma generalização do que se passa com anéis de divisão de endomorfismos. Tem-se:

TEOREMA 45: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel simples noetheriano de endomorfismos, contendo o endomorfismo idêntico, então $\mathfrak{S}$ e $\overline{\mathfrak{S}}$ são comutadores recíprocos no absoluto* $\mathfrak{A}$ (ou ainda: *$\mathfrak{S}$ é fechado em* $\mathfrak{A}$). De harmonia com as considerações que precederam o teorema 32, escrevamos $\mathbf{M}=\sum\mathfrak{m}_\mu$, $(\mu\in M)$, ou, mais precisamente, $\mathbf{M}=\sum x_\mu\mathfrak{r}_\mu$, onde os x_μ são elementos de $\mathbf{M}$ e os $\mathfrak{r}_\mu$ são ideais direitos simples duma decomposição de $\mathfrak{S}$. Cada $\mathfrak{m}_\mu$ é módulo — $\mathfrak{S}$, fechado — $\mathfrak{S}$, como resulta do teorema 44. Então, pelo corolário 10, do § 7, $\mathbf{M}=\sum\mathfrak{m}_\mu$ é módulo — $\mathfrak{S}$, fechado — $\mathfrak{S}$.

Tal como no caso dos anéis de divisão, podemos fazer também aqui uma verificação directa do teorema. Os isomorfismos $\Delta_{\mu\nu}=\varphi_\mu^{-1}\varphi_\nu$, introduzidos em [24, § 12], e já utilizados novamente no § 7 deste Capítulo, assim como na questão análoga, acabada de referir, relativa a anéis de divisão, dão $x_\mu\mathfrak{r}_\mu\simeq x_\nu\mathfrak{r}_\nu$, podendo ser definidos desta maneira: considera-se um isomorfismo $\mathfrak{r}_\mu\simeq\mathfrak{r}_\nu$, no qual $e_\mu\to\rho_\nu$, e, em seguida, põe-se $x_\mu e_\mu\to x_\nu\rho_\nu$, $x_\mu e_\mu s\to$ $\to x_\nu\rho_\nu s$, $(s\in\mathfrak{S})$. Se designarmos por $\overline{\mathfrak{R}}_\mu$ e $\overline{\mathfrak{L}}_\mu$ os anéis de endomorfismos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{r}_\mu$ e de $x_\mu\mathfrak{r}_\mu$, respectivamente, sabemos, [Cap. XV, teor. 50], que $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ é isomorfo do anel dos endomorfismos — $\overline{\mathfrak{R}}_\mu$, de $\mathfrak{r}_\mu$, anel que, pelo teorema 44, é isomorfo de $\mathfrak{S}$. Assim, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ e $\mathfrak{S}$ são isomorfos. Uma análise um pouco mais detalhada leva a encontrar, para cada $\Theta\in\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$, um $s \in \mathfrak{S}$ determinado, tal que $\Theta = s$. O teorema fica, então, demonstrado. Tomemos $\Theta \in \overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ e chamemos $E_\mu \in \overline{\mathfrak{S}}$ o endomorfismo — $\mathfrak{S}$ que aplica $\mathbf{M}$ sobre $x_\mu \mathfrak{r}_\mu$. Θ determina um endomorfismo — $E_\mu \overline{\mathfrak{S}} E_\mu$, em $x_\mu \mathfrak{r}_\mu$, ao qual corresponde um endomorfismo — $\overline{\mathfrak{K}}_\mu$, de $\mathfrak{r}_\mu$. Este último endomorfismo de harmonia com os raciocínios relativos ao teorema 44, é definido por uma multiplicação, à direita, por um elemento $s \in \mathfrak{S}$: $r_\mu \to r_\mu s$. O endomorfismo — $\overline{\mathfrak{L}}_\mu$ de que resultou é, pois, $x_\mu r_\mu \to x_\mu r_\mu s = (x_\mu r_\mu)\Theta$. Basta agora provar que se tem $x_\nu r_\nu \to (x_\nu r_\nu)\Theta = x_\nu r_\nu s$, qualquer que seja ν. Para isso, suponhamos $e_\mu \to \rho_\nu$, $e_\mu t \to \rho_\nu t = r_\nu$; então, $x_\mu e_\mu t \to (x_\mu e_\mu t)\Delta_{\mu\nu} = (x_\mu e_\mu t) E_\mu \Delta_{\mu\nu} = (x_\mu e_\mu t) E_{\mu\nu} = x_\nu \rho_\nu t = x_\nu r_\nu$; $x_\nu r_\nu \to (x_\nu r_\nu)\Theta = (x_\nu \rho_\nu t)\Theta = (x_\mu e_\mu t) . E_{\mu\nu}\Theta = (x_\mu e_\mu t)\Theta E_{\mu\nu} = (x_\mu e_\mu t s) E_{\mu\nu} = (x_\mu e_\mu t) E_{\mu\nu} . s = x_\nu r_\nu s$.

O teorema acabado de provar entra, de resto, no enunciado geral seguinte, que não é mais do que o corolário 10 enunciado no § 8:

TEOREMA 46: — *Se $\mathfrak{R}$ é um anel de endomorfismos dum módulo $\mathbf{M}$, contendo o endomorfismo idêntico, $\mathfrak{R}$ e $\overline{\mathfrak{R}}$ serão comutadores recíprocos no absoluto $\mathfrak{A}$, de $\mathbf{M}$, sempre que se possa escrever $\mathbf{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$, como soma directa de submódulos — $\mathfrak{R}$, isomorfos — $\mathfrak{R}$, para cada um dos quais $\mathfrak{R}$ é fechado.*

$\mathfrak{S}$ volta a ser simples, com um corpo $\mathfrak{Z} = \mathfrak{K}$ como centro. Se $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ é o anel dos seus endomorfismos — $\mathfrak{K}$, tem-se $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} \supseteq \mathfrak{T}$. Os subanéis $\mathfrak{S}_d$ e $\mathfrak{S}_e$ são comutadores recíprocos, tanto dentro de $\mathfrak{A}$ como de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ ou de $\mathfrak{T}$. Dentro de $\mathfrak{A}$ e de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ são comutadores recíprocos, e, dentro de $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{T}$ são igualmente comutadores recíprocos. Imaginemos $\mathfrak{K}$ um corpo primo. Tendo em conta os raciocínios relativos a anéis irredutíveis, podemos afirmar:

TEOREMA 47: — *Num anel simples $\mathfrak{S}$, cujo centro seja um corpo primo $\mathfrak{K}$, todos os endomorfismos são endomorfismos — $\mathfrak{K}$.*

12) **Produtos directos** — A noção de produto directo introduzida em [29, págs. 95-97] não invoca a existência

de bases. O processo é diferente, assim, do que se utilizou em [(I), pág. 138].

Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$ dois módulos com um domínio operatório que é um anel de divisão $\mathbf{D}$. Em $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ opera à direita; em $\mathbf{M}'$, à esquerda; em ambos os casos, o elemento um de $\mathbf{D}$ será operador unitário dos módulos. Supondo $x, y, x_\mu, y_\mu, \ldots \in \mathbf{M}$, $x', y', x'_\mu, y'_\mu, \ldots \in \mathbf{M}'$, consideremos os sistemas da forma $(x_1 x'_1, x_2 x'_2, \ldots, x_m x'_m)$ e introduzamos no conjunto desses sistemas uma relação de equivalência, segundo a qual dois sistemas equivalentes são formados pelos mesmos símbolos, apenas colocados, possivelmente, em ordem diferente. A soma

$$(x_1 x'_1, \ldots, x_m x'_m) + (y_1 y'_1, \ldots, y_n y'_n) = (x_1 x'_1, \ldots, \ldots, y_n y'_n), \qquad (m = \text{ ou } \neq n),$$

é, então, uma soma de classes de equivalentes. Ela é comutativa e associativa, pelo que o conjunto das classes forma um semi-grupo abeliano. Uma classe pode agora ser representada pelo símbolo $\Sigma\, x_\nu x'_\nu$, onde o somatório é finito. É de observar que o símbolo $\Sigma\, o_\mu o'_\mu$, no qual $o_\mu = o$ é o zero de $\mathbf{M}$ e $o'_\mu = o'$ o zero de $\mathbf{M}'$, não desempenha o papel de zero dentro do semi-grupo. Por ex., terá de escrever-se

$$(x_1 x'_1, x_2 x'_2) + (oo', oo') = (x_1 x'_1, x_2 x'_2, oo', oo').$$

Diremos que $X = \Sigma\, x_\nu x'_\nu$ é uma *forma*. ARTIN e WHAPLES introduzem as formas nulas como vai ver-se. Substituamos os x'_ν por outros elementos y'_μ, escrevendo

$$x'_\nu = \sum_\mu \beta_{\nu\mu} y'_\mu, \qquad (\beta_{\nu\mu} \in \mathbf{D}). \tag{2}$$

Então, X toma o aspecto formal

$$\sum_\nu x_\nu \Big(\sum_\mu \beta_{\nu\mu} y'_\mu\Big) = \sum_\mu \Big(\sum_\nu x_\nu \beta_{\nu\mu}\Big) y'_\mu .$$

Se as relações (2) puderem ser escolhidas de modo que se tenha

$$\sum_{\nu} x_\nu \beta_{\nu\mu} = o\,, \tag{3}$$

diz-se que $\Sigma x_\nu x'_\nu$ é uma *forma nula*. Visto ser $\mathbf{M}$ um módulo sobre $\mathbf{D}$, exprimamos os x_ν em elementos independentes — $\mathbf{D}$:

$$x_\nu = \sum_{\rho} y_\rho \, \alpha_{\rho\nu}\,, \qquad (\alpha_{\rho\nu} \in \mathbf{D})\,. \tag{4}$$

Tendo em conta (3), encontra-se

$$\sum_{\nu,\rho} y_\rho \, \alpha_{\rho\nu} \, \beta_{\nu\mu} = o\,, \qquad \sum_{\nu} \alpha_{\rho\nu} \, \beta_{\nu\mu} = o\,.$$

Este resultado vai permitir-nos verificar que se reconhece também ser X uma forma nula com a substituição (4). Na verdade, vem

$$X = \sum_{\nu} (\sum_{\rho} y_\rho \, \alpha_{\rho\nu})\, x'_\nu = \sum_{\rho} y_\rho \, (\sum_{\nu} \alpha_{\rho\nu} \, x'_\nu)\,;$$

e, tendo em conta (2),

$$\sum_{\nu} \alpha_{\rho\nu} \, x'_\nu = \sum_{\nu} \alpha_{\rho\nu} \, (\sum_{\mu} \beta_{\nu\mu} \, y'_\mu) = \sum_{\mu} (\sum_{\nu} \alpha_{\rho\nu} \, \beta_{\nu\mu})\, y'_\mu = o\,.$$

Conclui-se:

TEOREMA 48: — *Se* $\mathrm{X} = \Sigma \mathrm{x}_\nu \mathrm{x}'_\nu$ *é uma forma nula à face de* (2), *o mesmo facto pode reconhecer-se por uma substituição do tipo* (4); *se* X *é uma forma nula à face de* (4), *sem que haja, então, necessidade de supor os* y_ρ *independentes, o mesmo facto pode reconhecer-se por uma substituição do tipo* (2), *supostos agora os* y'_μ *linearmente independentes.*

COROLÁRIO 12: — *O reconhecimento de* X *como forma nula pode sempre fazer-se por meio de relações do tipo* (2), *nas quais os* y'_μ *se supõem independentes* — $\mathbf{D}$. Não importa o número finito dos y'_μ nem o modo como se escolham.

Se X e Y são duas formas nulas, a soma $X + Y$ é ainda uma forma nula. Esta afirmação prova-se tendo em conta o corolário anterior, não havendo qualquer dificuldade, mesmo que apareçam em Y elementos x'_ν já existentes em X.

Representaremos por $\mathfrak{L}$ o conjunto das formas nulas.

TEOREMA 49: — *Se* $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in \mathfrak{L}$, *a hipótese* $\mathrm{X} \in \mathfrak{L}$ *arrasta* $\mathrm{Y} \in \mathfrak{L}$. Supondo $X = \Sigma x_\nu x'_\nu$, $Y = \Sigma y_\mu y'_\mu$, a expressão simultânea dos x'_ν, y'_μ em elementos independentes z'_ρ leva a coeficientes nulos destes últimos na soma $X + Y$. Como isso também sucede em X, com a expressão dos x'_ν nos mesmos z'_ρ, igual facto se dará em Y, se os y'_μ se exprimirem nos z'_ρ.

O símbolo $-X$ significará $\Sigma(-x_\nu)\, x'_\nu$. Então verifica-se que $X + (-X)$, mediante as substituições $x'_\nu = x'_\nu$, toma o aspecto $\Sigma(x_\nu - x_\nu)\, x'_\nu$, pelo que é uma forma nula.

No semi-grupo das formas introduz-se agora uma relação de equivalência: X e Y são equivalentes quando $X + (-Y) \in \mathfrak{L}$. Escreve-se, nesse caso, $X \equiv Y \pmod{\mathfrak{L}}$. Esta relação de equivalência permite dividir as formas em classes. Nas classes, vamos dar uma noção de soma, que é independente das formas que as representam, o que permitirá construir um grupo aditivo com essas classes, grupo no qual o elemento zero é a classe $\mathfrak{L}$.

Suponhamos $X \equiv Y \pmod{\mathfrak{L}}$. Então, $X + (-Y) \in \mathfrak{L}$, $X + Z + (-Y) + (-Z) \in \mathfrak{L}$, ou seja $X + Z \equiv Y + Z \pmod{\mathfrak{L}}$. Na soma $X + Z$ pode, assim, substituir-se X por uma forma equivalente Y. Se, em seguida, for $Z \equiv T \pmod{\mathfrak{L}}$, tem-se ainda $X + Z \equiv Y + Z \equiv Y + T \pmod{\mathfrak{L}}$. Escrevendo o sinal $=$ para formas congruentes, obtém-se o grupo aditivo de que se falou. Será designado por *produto directo* dos espaços $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$, sobre $\mathbf{D}$, e representado por $\mathbf{M} \times_{\mathbf{D}} \mathbf{M}'$.

A construção feita mostra que, supondo $X = \Sigma x_\nu x'_\nu$ e $Y = \Sigma y_\mu y'_\mu$ formas iguais, é possível exprimir simultâneamente os x'_ν e os y'_μ em elementos z'_ρ, de modo que X e Y venham a tomar a mesma expressão. Por ex., tem-se $x(x' + y') = x x' + x y'$, porque, pondo $(x' + y') = x' + y'$,

$x' = x'$, $y' = y'$, os dois membros tomam a expressão única $xx' + xy'$. Anàlogamente, é $(x+y)x' = xx' + yx'$, assim como $x(\alpha x') = (x\alpha)x'$. Quanto a esta última igualdade, ela chega a reconhecer-se pondo $(\alpha x') = \alpha x'$, $x' = x'$.

Se o anel de divisão $\mathbf{D}$ é comutativo, poremos $\mathbf{D} = \mathfrak{K}$. O corpo $\mathfrak{K}$, cujo elemento um continuará sempre a considerar-se como operador unitário, pode, então, imaginar-se domínio operatório do produto directo $\mathbf{M} \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}'$. Há, com efeito, possibilidade de definir a aplicação de $h \in \mathfrak{K}$ a uma forma $\Sigma x_\nu x'_\nu$ por qualquer das igualdades $(\Sigma x_\nu x'_\nu)h = \Sigma(x_\nu h)x'_\nu = \Sigma x_\nu(hx'_\nu)$, visto que $(\Sigma x_\nu x'_\nu)hh' = (\Sigma(x_\nu h)x'_\nu)h' = \Sigma(x_\nu hh')x'_\nu = (\Sigma x_\nu(hx'_\nu))h' = \Sigma x_\nu(h'hx'_\nu) = \Sigma x_\nu(hh'x'_\nu)$.

Neste caso, imaginaremos o produto directo $\mathbf{M}' \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}$ formado exactamente pelos mesmos elementos que aquele outro e escreveremos

$$\mathbf{M} \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}' = \mathbf{M}' \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}.$$

Seja agora um terceiro módulo $\mathbf{M}''$, sobre $\mathfrak{K}$. É válida a propriedade associativa expressa na igualdade seguinte:

$$\mathbf{M} \times_{\mathfrak{K}} (\mathbf{M}' \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}'') = (\mathbf{M} \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}') \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}''. \quad (5)$$

Por certo que, sendo o primeiro membro composto de somas de elementos da forma $x.x'x''$, $(x'' \in \mathbf{M}'')$, há uma correspondência da forma $\Sigma x.x'x'' \to \Sigma xx'.x''$. Vamos ver que ela é unívoca, pelo facto de uma forma nula ter uma forma nula como correspondente. Comecemos por exprimir em $\Sigma x.x'x''$ os elementos x por elementos y, independentes — $\mathfrak{K}$, de modo a encontrar como coeficientes dos yy formas nulas do produto $\mathbf{M}' \times_{\mathfrak{K}} \mathbf{M}''$. Em cada um destes coeficientes comparecerão elementos x'', que, em seguida, se exprimirão em elementos y'', independentes — $\mathfrak{K}$, de modo a chegar a obter-se para coeficientes de cada y'' o elemento nulo de $\mathbf{M}'$. Se, depois, em $\Sigma xx'.x''$, começarmos por operar primeiramente com os $x''x''$, utilizando a sua anterior expressão nos $y''y''$, em seguida com os xx, utilizando as suas expressões nos yy, reconhece-se anàlogamente que $\Sigma xx'.x''$ é uma forma nula.

O raciocínio acabado de fazer pode repetir-se, partindo da imagem para o original. A correspondência em causa é biunívoca.

Neste caso de $\mathbf{D} = \mathfrak{K}$, ARTIN e WHAPLES, supondo $\mathbf{M} = \mathfrak{S}$, $\mathbf{M}' = \mathfrak{S}'$ dois anéis com o domínio operatório $\mathfrak{K}$, introduzem em $\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{S}'$ uma noção de produto que faz do produto directo um anel com o mesmo domínio operatório. Põem, por hipótese,

$$\sum_\nu x_\nu x'_\nu . \sum_\mu y_\mu y'_\mu = \sum_{\nu,\mu} (x_\nu y_\mu)(x'_\nu y'_\mu). \quad (6)$$

A justificação desta igualdade ficará feita, provando que o produto obtido é o mesmo, se as formas do 1.° membro se substituem por formas equivalentes. Suponhamos $Z = X$. Então, é

$$(X + (-Z))Y = XY + (-Z)Y,$$

à face da regra (6). Se o produto duma forma nula por uma forma qualquer for uma forma nula, será $XY + (-Z)Y$ uma forma nula e $XY = ZY$, como se deseja. Admitamos, pois, que $X = \Sigma x_\nu x'_\nu$ é uma forma nula. A regra (6) mostra que, se for $X.(yy') = o$, será $XY = o$, visto que Y é uma soma $\Sigma yy'$. Ora $X(yy') = \Sigma(x_\nu y)(x'_\nu y')$. Se a substituição $x'_\nu = \Sigma \alpha_{\nu\mu} z'_\mu$ levar, em X, a coeficientes nulos dos z_μ, a substituição $x'_\nu y' = \Sigma \alpha_{\nu\mu}(z'_\mu y')$ levará, em $X(yy')$, a coeficientes nulos dos $z'_\mu y'$. A igualdade (6) está justificada.

Vamos fazer algumas observações importantes. Tomemos, no produto directo de dois módulos $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$, uma expressão $\Sigma x_\mu x'_\mu$, com a hipótese de os x_μ serem independentes — $\mathbf{D}$. A referida expressão não pode ser uma forma nula, a não ser que os x'_μ sejam nulos. Podemos dizer, utilizando uma linguagem simbólica: a independência — $\mathbf{D}$, em $\mathbf{M}$, arrasta a independência — $\mathbf{M}'$ no produto.

Este facto é particularmente significativo, no caso do produto directo de anéis com elemento um. Se $u \in \mathfrak{S}$ é seu elemento um, os elementos $u x' \in \mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{S}'$ formam um anel isomorfo de $\mathfrak{S}'$, pois $u x' = o$ implica $x' = o$. Representá-lo-emos por $\mathfrak{S}'_1$. O mesmo se diz, se $u' \in \mathfrak{S}'$ é elemento um, quanto aos elementos $x u'$, que formam um anel $\mathfrak{S}_1$, isomorfo de $\mathfrak{S}$. E vê-se que é, precisamente, $\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}'_1 \mathfrak{S}_1$. Os dois anéis $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}'_1$ têm o mesmo elemento um, que é $u u'$, e são igualmente elementos comuns os elementos $(u k) u' = u (k u')$. Não há outros elementos pertencentes aos dois anéis, pois, supondo $x u' = u x'$, não podem x' e u' ser independentes — $\mathfrak{K}$, visto que isso acarretaria $x u' + (-u) x' = o$, $x = o$, $u = o$. Ter-se-á $x' = k u'$, e o elemento comum toma o aspecto $u (k u') = (u k) u'$, como se disse. É válido o

TEOREMA 50: — *O produto directo de dois anéis com elemento um, suposto $\mathfrak{K}$ o respectivo corpo operatório, é sempre um anel com elemento um, igual ao produto ordinário de dois subanéis comutáveis, isomorfos dos anéis dados, e ambos com o mesmo elemento um do produto. O anel produto e os subanéis têm uma parte comum, que é um corpo isomorfo de $\mathfrak{K}$.*

13) **Aplicações aos anéis simples** — A noção de produto directo que acaba de ser analisada terá largas aplicações nos §§ a seguir.

ARTIN e WHAPLES formulam este enunciado:

TEOREMA 51: — *Dado um anel simples $\mathfrak{S}$, com elemento um e centro $\mathfrak{K}$, se o anel $\mathfrak{R}$ tem o mesmo elemento um que $\mathfrak{S}$ e contém $\mathfrak{K}$ no seu centro, todo o ideal bilateral de $\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{R}$ tem a forma $\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{B}$, onde $\mathfrak{B}$ é ideal bilateral de $\mathfrak{R}$.* Supomos que será útil indicar aqui a demonstração dada por NAKAYAMA e AZUMAYA, [9, pág. 955]. Ela assenta no seguinte

LEMA 2: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel simples com elemento um e se $\mathbf{M}$ é um módulo duplo — $\mathfrak{S}$ (direito e esquerdo) com uma base de elementos independentes — $\mathfrak{S}$, comutáveis com $\mathfrak{S}$, e no qual $1 \in \mathfrak{S}$ é operador unitário, dado um submódulo admissível $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, ele possui igualmente uma base independente, comutável com $\mathfrak{S}$.* Escrevamos $\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{S} u_\mu = \Sigma u_\mu \mathfrak{S}$, $(\mu \in M)$, com a hipótese de os u_μ constituírem a base de $\mathfrak{M}$. Cada

submódulo $\mathfrak{S} u_\mu$ é admissível, podendo atribuir-se aos seus elementos a forma $s u_\mu t$, com $s, t \in \mathfrak{S}$, visto que $s u_\mu . t = u_\mu s . t = u_\mu (s t) = (s t) u_\mu = s . t u_\mu = s . u_\mu t$. Além disto, $\mathfrak{S} u_\mu$ é isomorfo — $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ de $\mathfrak{S}$, e, portanto, simples. Dado, então, $\mathfrak{N}$, ao escrever-se $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$, sabemos que $\mathfrak{N}'$ é soma de certos submódulos $\mathfrak{S} u_\mu$ [34, § 5]. Do facto de se ter $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}/\mathfrak{N}'$ resulta a afirmação.

Passemos ao teorema. Em virtude de $\mathfrak{R}$ ser módulo sobre $\mathfrak{K}$, podemos escrever $\mathfrak{R} = \Sigma u_\mu \mathfrak{K}$, $(\mu \in M)$. Os elementos u_μ, independentes — $\mathfrak{K}$, são independentes — $\mathfrak{S}$ no produto directo. Tem-se $\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{R} = \Sigma u_\mu \mathfrak{S}$, $(\mu \in M)$, pelo que o produto directo se encontra precisamente nas condições do lema acabado de provar. Dado o ideal bilateral do produto, como $\mathfrak{S}$ faz parte do produto, $\mathfrak{a}$ é módulo — $\mathfrak{S}$. Pode escrever-se $\mathfrak{a} = \Sigma v_\nu \mathfrak{S}$, $(\nu \in N)$, onde, pelo facto de os únicos elementos do produto directo que comutam com $\mathfrak{S}$ serem os elementos de $\mathfrak{R}$, se tem $v_\nu \in \mathfrak{R}$, [Cfr. 29, pág. 103]. Se quisermos reconhecer a afirmação relativa ao comutador de $\mathfrak{S}$, podemos raciocinar como vai ver-se. Seja $\Sigma s_\rho r_\rho$ um elemento do produto directo, comutável com cada $s' \in \mathfrak{S}$. É lícito supor os r_ρ independentes — $\mathfrak{K}$, doutra forma far-se-ia uma substituição linear dos mesmos r_ρ por outros independentes. Então, como s' pertence ao produto, a hipótese $\Sigma s_\rho r_\rho . s' = s' . \Sigma s_\rho r_\rho$ arrasta $\Sigma (s_\rho s' - s' s_\rho) r_\rho = o$. Visto que os r_ρ são igualmente independentes — $\mathfrak{S}$, resulta $s_\rho s' - s' s_\rho = o$, ou seja $s_\rho \in \mathfrak{K}$, pois s' é qualquer. Deste modo tem-se $\Sigma s_\rho r_\rho \in \mathfrak{R}$, como se afirmou.

Posto isto, consideremos $\mathfrak{T} = \Sigma v_\nu \mathfrak{K}$. Tem lugar a igualdade $\mathfrak{a} = \mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{T}$. Em seguida, valem as relações

$$\mathfrak{R} \mathfrak{a} = \mathfrak{R} (\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{T}) = \mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{R} \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{a} = \mathfrak{S} \times_{\mathfrak{K}} \mathfrak{T},$$

o que acarreta $\mathfrak{R} \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}$, porque, se se tivesse $a \in \mathfrak{R} \mathfrak{T}$ e $a \notin \mathfrak{T}$, um elemento $s a$, (com $o \neq s \in \mathfrak{S}$), não tomaria a forma $\Sigma s_\mu t_\mu$, $(t_\mu \in \mathfrak{T})$, como se reconhece supondo os t_μ independentes — $\mathfrak{K}$ e escrevendo $s a = \Sigma s_\mu t_\mu$, ou seja $\Sigma s_\mu t_\mu - s a = o$. De facto os t_μ e a seriam independentes — $\mathfrak{K}$ e independentes — $\mathfrak{S}$, o que daria $s_\mu = o$, $s = o$.

Deste modo, como se disse, é $\mathfrak{R}\mathfrak{T}\subseteq\mathfrak{T}$, e, anàlogamente, $\mathfrak{T}\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{T}$, pelo que o teorema está provado, pondo $\mathfrak{T}=\mathfrak{B}$.

COROLÁRIO 13: — *Se $\mathfrak{H}$ é uma álgebra associativa com elemento um (finita ou não), sobre o corpo $\mathfrak{K}$, e se $\mathfrak{S}$ é um anel simples de centro $\mathfrak{K}$, todo o ideal bilateral de $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{H}$ é da forma $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$, onde $\mathfrak{B}$ é ideal bilateral de $\mathfrak{H}$.* A existência de elemento $1\in\mathfrak{H}$ permite considerar $\mathfrak{K}$ contido em $\mathfrak{H}$, assim como identificar os ideais admissíveis com os ideais ordinários.

COROLÁRIO 14: — *Se $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}$ são anéis simples, o primeiro de centro $\mathfrak{K}$, o outro com $\mathfrak{K}$ no seu centro, o produto directo $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{R}$ é um anel simples.*

A demonstração de ARTIN-WHAPLES, do teorema 51, é diferente. Como ela permite completar o referido teorema, vamos também expô-la aqui, com ligeiras alterações. Supondo $\mathfrak{a}$ o ideal bilateral de $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{R}$, representemos por $\mathfrak{B}$ a intersecção $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{R}$. Vê-se que $\mathfrak{B}$ é ideal bilateral de $\mathfrak{R}$ e que o produto directo $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$ está contido em $\mathfrak{a}$. Basta ver agora que, inversamente, todo o elemento de $\mathfrak{a}$ pertence a $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$, para se concluir o teorema. Partamos de $\alpha=\Sigma s_i r_i\in\mathfrak{a}$. Visto que os s_i se podem supor independentes — $\mathfrak{K}$, tomemos $T_i\in\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_d,\mathfrak{S}_e)=\mathfrak{T}$ tal que $s_i T_i=1\in\mathfrak{S}$, $s_j T_i=o$, $(i\neq j)$. Pelo facto de ser $T_i=$ $=\sum_j E^{(d)}_{a_{ij}} E^{(e)}_{b_{ij}}$, tem-se, para cada $x\in\mathfrak{S}$, $x T_i=\sum_j b_{ij} x a_{ij}$. Mas, então, pode dar-se sentido a αT_i, pondo $\alpha T_i=$ $=\sum_j b_{ij}\alpha a_{ij}$. Vê-se que $\alpha T_i=\sum_j b_{ij}(\sum_k s_k a_k) a_{ij}=$ $=\sum_k(\sum_j b_{ij} s_k a_{ij}) r_k=\sum_k T_i(s_k) r_k= T_i(s_i) r_i=r_i$. Por outro lado, porém, $\alpha T_i\in\mathfrak{a}$, de sorte que $r_i\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{R}$, $\alpha\in\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{B}$, como se deseja. Podemos fixar este

ADITAMENTO AO TEOREMA 51: — *O ideal bilateral $\mathfrak{B}$, se for $\mathfrak{a}$ o ideal bilateral em causa no produto directo, é dado pela relação $\mathfrak{B}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{R}$.*

Os raciocínios acabados de fazer vão servir no esclarecimento da estrutura do anel $\mathfrak{T}=\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_d,\mathfrak{S}_e)$, sempre sob

a hipótese de $\mathfrak{S}$ ser simples com elemento um. É válido o seguinte.

TEOREMA 52: — *O anel $\mathfrak{T}=\mathfrak{S}_d\mathfrak{S}_e$, sob a hipótese de $\mathfrak{S}$ ser simples, de centro $\mathfrak{K}$, tem a estrutura $\mathfrak{T}=\mathfrak{S}_d\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{S}_e$, reduzindo-se, pois, a um anel simples do tipo $\mathfrak{S}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{S}'$, onde $\mathfrak{S}'$ é anti-isomorfo de $\mathfrak{S}$.*

O teorema é consequência imediata deste

LEMA 3: — *Se $\mathfrak{R}$ é um anel no qual os subanéis $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ verificam as condições seguintes: 1) $\mathfrak{P}$ é simples e tem centro $\mathfrak{K}$; 2) $\mathfrak{Q}$ contém $\mathfrak{K}$ no seu centro; 3) $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ têm o mesmo elemento um; 4) $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ compõem-se de elementos individualmente comutáveis; então a estrutura do produto $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ é a mesma que a do produto directo $\mathfrak{P}\times_{\mathfrak{K}}\mathfrak{Q}$.*

Consideremos dois anéis $\mathfrak{P}'$ e $\mathfrak{Q}'$ isomorfos de $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$, respectivamente. O produto directo $\mathfrak{P}'\times_{K}\mathfrak{Q}'$ compõe-se de elementos da forma $\Sigma p'_\nu q'_\nu$, aos quais faremos corresponder $\Sigma p_\nu q_\nu$, no produto $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Esta correspondência é unívoca, porque, se forem $\Sigma p'_\nu q'_\nu=\Sigma p''_\mu q''_\mu$ duas expressões dum mesmo elemento do produto directo, a expressão $\Sigma p'_\nu q'_\nu-\Sigma p''_\mu q''_\mu$ representa zero e pode transformar-se deixando apenas aqueles dos q'_ν, q''_μ que forem independentes — $\mathfrak{K}$. Feito isso, os coeficientes respectivos serão elementos nulos de $\mathfrak{P}'$. Procedendo da mesma maneira com a diferença $\Sigma p_\nu q_\nu-\Sigma p_\mu q_\mu$, na qual se supõe $\Sigma p_\mu q_\mu$ correspondente de $\Sigma p''_\mu q''_\mu$, vê-se que aquela diferença é nula, tendo-se $\Sigma p_\nu q_\nu=\Sigma p_\mu q_\mu$. A univocidade acabada de provar mostra que $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ é imagem homomorfa do produto directo. Para se concluir que é isomorfa, designemos por $\mathfrak{a}'$ o ideal bilateral do produto directo de imagem (o). Tem-se $\mathfrak{a}'=\mathfrak{P}'\times_{K}\mathfrak{b}'$, onde $\mathfrak{b}'=\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{Q}'$ é ideal bilateral de $\mathfrak{Q}'$. $\mathfrak{b}'$, como parte de $\mathfrak{a}'$ e de $\mathfrak{Q}'$, tem o correspondente (o) em $\mathfrak{Q}$. Só pode ser $\mathfrak{b}'=(o)$, e, portanto, $\mathfrak{a}'=(o)$, como se deseja.

Na hipótese de o anel simples $\mathfrak{S}$ ser finito (de ordem n) sobre o corpo $\mathfrak{K}$ que é seu centro, o anel irredutível $\mathfrak{T}$, como anel denso em $\mathfrak{S}$, sobre $\mathfrak{K}$, representa a totalidade dos endomorfismos — $\mathfrak{K}$. Tem-se $\mathfrak{A}_{K}=\mathfrak{S}\times_{K}\mathfrak{S}'$. Como se sabe que $\mathfrak{A}_{\mathbf{K}}$ é isomorfo do anel completo de matrizes quadradas de grau n com elementos de $\mathfrak{K}$, tem-se:

TEOREMA 53: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel simples, de grau* n, *sobre o corpo $\mathfrak{K}$ que é seu centro, o produto directo $\mathfrak{S}\times_{\mathbf{K}}\mathfrak{S}'$, onde $\mathfrak{S}'$ é anti-isomorfo de $\mathfrak{S}$, tem a estrutura do anel completo de matrizes quadradas do grau* n *com elementos de $\mathfrak{K}$.*

Em [(I), págs. 166 e 213] encontram-se os enunciados a seguir, que particularizam o teorema anterior.

COROLÁRIO 15: — *Se $\mathfrak{D}$ é uma álgebra central finita de divisão e $\mathfrak{D}^{-1}$ é a sua álgebra recíproca, o produto $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}^{-1}$ é uma álgebra completa de matrizes.*

COROLÁRIO 16: — *O produto directo duma álgebra central simples finita pela sua recíproca é uma álgebra completa de matrizes.*

Antes de ultimarmos este § com alguns teoremas que voltam a tratar de álgebras simples, daremos certas proposições que envolvem a condição de mínimo.

Seja $\mathfrak{M}$ um módulo relativo ao anel $\mathfrak{S}$. Se $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ são dois submódulos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{M}$, tais que $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, tomemos $\mathfrak{N}$ como outro submódulo — $\mathfrak{S}$ qualquer. Ponhamos $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{M}_2\cap\mathfrak{N}$, e, escrevendo, para cada $n\in\mathfrak{N}$, $n=m_1+m_2$, $(m_1\in\mathfrak{M}_1,\ m_2\in\mathfrak{M}_2)$, chamemos $\mathfrak{N}_1$ ao conjunto dos elementos m_1. Tanto $\mathfrak{N}_2$ como $\mathfrak{N}_1$ são ainda submódulos — $\mathfrak{S}$. Imaginemos, em seguida, que $\mathfrak{N}'\subseteq\mathfrak{N}$ é ainda submódulo — $\mathfrak{S}$. Admitindo que, na decomposição dos elementos $n'\in\mathfrak{N}'$, segundo a relação $n'=m_1'+m_2'$, comparecem todos os elementos m_1 relativos a $\mathfrak{N}$, e que, além disso, se tem $\mathfrak{N}_2\subseteq\mathfrak{N}'$, vamos ver que é $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'$. De facto, tomemos $n=m_1+m_2$, qualquer, e escrevamos $n'=m_1+m_2'$, o que é possível, por hipótese. Então, é $n-n'=m_2-m_2'\in\mathbf{N}_2\subseteq\mathbf{N}'$. Vê-se que $n\in\mathbf{N}'$ e a afirmação fica provada. Baseados neste resultado, demonstram ARTIN e WHAPLES a seguinte proposição:

TEOREMA 54: — *Sejam $\mathfrak{M}$ um módulo — $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ dois submódulos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{M}$. Supondo $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ e admitindo que é válida a condição de mínimo para os dois*

submódulos, a mesma propriedade tem lugar para $\mathfrak{M}$. Tomemos um conjunto qualquer de submódulos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{M}$. Para cada $\mathbf{N}$, desse conjunto, consideremos os submódulos $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ correspondentes. Depois, fixemos, entre os $\mathbf{N}\mathbf{N}$, apenas aqueles para os quais $\mathbf{N}_2$ é mínimo entre os $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2$; e, por último, entre os $\mathbf{N}\mathbf{N}$ já fixados, escolhamos aqueles para os quais $\mathbf{N}_1$ é mínimo, entre os $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1$. As considerações anteriores provam que, cada $\mathbf{N}$ assim obtido, é mínimo.

TEOREMA 55: — *Se $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}$ são dois anéis contendo um corpo $\mathfrak{K}$, cujo elemento um é elemento um de cada um deles, a condição de mínimo para ideais direitos é válida em $\mathfrak{S}\times_{\mathbf{K}}\mathfrak{R}$, se for válida em $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}$ for finito sobre $\mathfrak{K}$.* Como o produto directo dos anéis se pode considerar módulo sobre $\mathfrak{S}$, a validade da condição de mínimo para os seus submódulos — $\mathfrak{S}$ arrastará o teorema. Pondo $\mathfrak{R}=x_1\mathfrak{K}+\dots+x_n\mathfrak{K}$, onde os $x_i\in\mathfrak{R}$ se supõem independentes — $\mathfrak{K}$, tem-se

$$\mathfrak{S}\times_{\mathbf{K}}\mathfrak{R}=x_1\mathfrak{S}+\dots+x_n\mathfrak{S},$$

soma que é directa, porque os x_i são também independentes — $\mathfrak{S}$. O teorema anterior (que não exige, aliás, se suponha $\mathfrak{M}$ soma directa) estabelece a proposição, pelo facto de cada $x_i\mathfrak{S}$, como módulo — $\mathfrak{S}$, ser isomorfo de $\mathfrak{S}$.

TEOREMA 56: — *É condição necessária e suficiente, para que o anel $\mathfrak{T}$, referido no teorema 52, verifique a condição de mínimo para os seus ideais direitos, que $\mathfrak{S}$ seja finito sobre $\mathbf{K}$.* A condição é *necessária:* Supondo que $\mathfrak{T}$ verifica a condição de mínimo, admitamos não ser $\mathfrak{S}$ finito sobre $\mathbf{K}$. Existe uma sucessão infinita $s_1, s_2, \dots\in\mathfrak{S}$, de elementos independentes — $\mathbf{K}$. Dados os sub-espaços — $\mathbf{K}$, de $\mathfrak{S}$, representados por $[s_1, \dots, s_n]$ e $[s_1, \dots, s_{n+1}]$, o ideal direito $\mathfrak{J}_{n+1}$, de $\mathfrak{T}$, que aniquila o segundo aniquila o primeiro, existindo, todavia, $T\in\mathfrak{J}_n=$ aniquilador de $[s_1, \dots, s_n]$ que não aniquila $[s_1, \dots, s_{n+1}]$. Basta tomar, com efeito, $T\in\mathfrak{T}$ tal que $s_iT=o$, $s_{n+1}T=1$, $(i=1, 2, \dots, n)$. A cadeia $\mathfrak{J}_1\supset\mathfrak{J}_2\supset\dots\supset\mathfrak{J}_n\supset\dots$ seria infinita, o que é absurdo.

A condição é *suficiente:* Esse facto é consequência imediata do teorema anterior. Dele foi dado, no teorema 53, uma demonstração directa.

$\mathfrak{S}$ volta a ser anel simples com elemento um e centro $\mathbf{K}$; e vai agora sujeitar-se à condição de mínimo para ideais direitos. Sabemos que $\mathfrak{S}$ é, então, um anel completo de matrizes com elementos dum anel de divisão $\mathfrak{C}$: $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_n$. O centro de $\mathfrak{C}$ é $\mathbf{K}$, por ser o mesmo que o centro de $\mathfrak{S}$. Em geral, $\mathfrak{S}$ é álgebra infinita sobre $\mathbf{K}$. No que vai seguir-se, porém, $\mathfrak{H}_1$ e $\mathfrak{H}_2$ representarão duas sub-álgebras finitas de $\mathfrak{S}$, com o mesmo elemento um que $\mathfrak{S}$, simples e equivalentes. No isomorfismo $\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{H}_2$ o corpo $\mathbf{K}$ é invariante. Com os símbolos $\mathfrak{H}_1^{(e)}$ e $\mathfrak{H}_2^{(e)}$ significaremos duas álgebras anti-isomorfas de $\mathfrak{H}_1$ e $\mathfrak{H}_2$, respectivamente, e ambas contidas em $\mathfrak{S}_e$. Finalmente, definiremos dois produtos directos $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$, pondo $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_d \times_{\mathbf{K}} \mathfrak{H}_1^{(e)}$, $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}_d \times_{\mathbf{K}} \mathfrak{H}_2^{(e)}$. Em [(I), pág. 278], foi demonstrado, por um método devido a E. NOETHER, o seguinte:

TEOREMA 57: — *Duas álgebras simples equivalentes $\mathfrak{H}_1$ e $\mathfrak{H}_2$, finitas sobre $\mathbf{K}$, contidas em $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_n$, sob a hipótese de $\mathbf{K}$ ser o centro de $\mathfrak{S}$ e de as álgebras terem o mesmo elemento um que $\mathfrak{S}$, deduzem-se uma da outra por um automorfismo interno de $\mathfrak{S}$.*

A demonstração vai assentar num lema.

LEMA 4: — *Se $\mathbf{M}$ é um módulo relativamente a dois anéis simples $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$, ambos com condição de mínimo para ideais direitos, não anéis zero e isomorfos, sob as hipóteses de o elemento um de cada anel ser operador unitário do módulo e de $\mathbf{M}$ verificar a condição de mínimo para submódulos — $\mathfrak{R}_1$ e submódulos $\mathfrak{R}_2$, existe uma transformação semi-linear* S, *de $\mathbf{M}$, segundo a qual:* $\mathrm{x} \to \mathrm{x}\mathrm{S}$, $\mathrm{x}\mathrm{R}_1 \to (\mathrm{x}\mathrm{S})\mathrm{R}_2$, $(\mathrm{x} \in \mathbf{M}$, $\mathrm{R}_1 \in \mathfrak{R}_1$, $\mathrm{R}_2 \in \mathfrak{R}_2)$. Claramente que $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ se podem supor concretizados como anéis de endomorfismos de $\mathbf{M}$. Têm lugar as decomposições $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_\rho$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \ldots + \mathbf{N}_\sigma$, a primeira em submódulos — $\mathfrak{R}_1$ simples, a segunda em submódulos — $\mathfrak{R}_2$, também simples. Os $\mathbf{M}_i$ são isomorfos — $\mathfrak{R}_1$ dum ideal direito simples de $\mathfrak{R}_1$, os $\mathbf{N}_j$ isomorfos — $\mathfrak{R}_2$ dum ideal direito simples de $\mathfrak{R}_2$. Podemos conceber cada $\mathbf{N}_i$ como módulo — $\mathfrak{R}_1$,

pondo, para cada $y_i \in \mathbf{N}_i$, $y_i R_1 = y_i R_2$, onde R_1 e R_2 se correspondem no isomorfismo. Deverá ser, portanto, $\sigma = \rho$, existindo um isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{N}_j$, segundo o qual $x_i \to y_j$, $x_i R_1 \to y_j R_2$, para cada par (i, j). Obtém-se um automorfismo S, de $\mathbf{M}$, procedendo do modo seguinte: escreve-se $x = x_1 + \ldots + x_\rho$, $(x \in \mathbf{M}$, $x_i \in \mathbf{M}_i)$, onde x é arbitràriamente dado, em seguida passa-se a $y_1 + \ldots + y_\rho$, onde $x_i \to y_i$, no isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{N}_i$. Então, é $x \longleftrightarrow y$, $x R_1 \longleftrightarrow y R_2 = x S R_2 = x R_1 S$. O lema fica estabelecido.

O teorema prova-se agora fàcilmente. Tomemos o anel simples $\mathfrak{S}$ como módulo sobre o qual $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$, contidos em $\mathfrak{T}$, operam à direita. Aplicando o resultado acabado de assinalar, consideraremos o automorfismo S, de $\mathfrak{S}$, a que o mesmo alude. Em seguida, tomamos, em particular, $R_1 = R_2 = E_a^{(d)} \in \mathfrak{S}_d \subseteq \mathfrak{T}$, (não devemos esquecer que no isomorfismo $R_1 \simeq R_2$ há invariância de $\mathfrak{S}_d$). Vem $x \to xS$, $x E_a^{(d)} = xa \to xS \,.\, E_a^{(d)} = xS \,.\, a$. E, para $x = 1$, é $1 \to 1S = b$, $1 E_a^{(d)} = a \to ba$. É simplesmente, por consequência, $xS = bx$, onde $b \in \mathfrak{S}$ é fixo. Como S é um isomorfismo, a condição $bx = o$ arrasta $x = o$. O elemento b, não sendo divisor de zero à esquerda tem inverso b^{-1}, como demonstraremos dentro dum momento. Sejam $H_1^{(e)} \in \mathfrak{H}_1^{(e)} \subseteq \mathfrak{R}_1$ e o seu correspondente $H_2^{(e)} \in \mathfrak{H}_2^{(e)} \subseteq \mathfrak{R}_2$ no isomorfismo $\mathfrak{R}_1 \simeq \mathfrak{R}_2$. Representando por h_1 e h_2 os elementos de $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{S}$ que estão em correspondência com $H_1^{(e)}$ e $H_2^{(e)}$, vem $x H_1^{(e)} = h_1 x \to h_1 x \,.\, S = xS \,.\, H_2^{(e)} = h_2 \,.\, xS = h_2 b x = b h_1 x$. No caso $x = 1$, é simplesmente $h_2 b = b h_1$. Daqui tira-se $h_2 = b h_1 b^{-1}$, o que demonstra o teorema, provada que seja a existência de b^{-1}.

Ora a condição de mínimo para ideais direitos é válida em $\mathfrak{S}$, de sorte que existe um inteiro n para o qual $b^n \mathfrak{S} = b^{n+1} \mathfrak{S}$. Assim, existe $c \in \mathfrak{S}$ tal que $b^n = b^{n+1} c$. Então, b não é divisor de zero, à direita, tendo-se, anàlogamente, $c' b = 1$, $c = c' = b^{-1}$, visto que em $\mathfrak{S}$ é também válida a condição de mínimo para ideais esquerdos.

COROLÁRIO 17: — *Todo o automorfismo duma álgebra simples finita, com elemento um, que deixa invariante o seu centro, é interno.*

COROLÁRIO 18: — *Se D é um anel de divisão de centro K, dois subanéis que contenham K, finitos sobre K, isomorfos relativamente a K, deduzem-se um do outro por um automorfismo interno.*

14) **Uma questão de dimensionalidade** — Embora um módulo M, sobre um anel simples noetheriano $\mathfrak{S}$, cujo elemento um é operador unitário, seja uma soma directa discreta $\mathrm{M}=\Sigma\,\mathfrak{m}_\mu$, $(\mu \in M)$, para a qual a cardinalidade de M é bem determinada, não podemos afirmar que, pondo $\mathfrak{m}_\mu = x_\mu \mathfrak{S}$, $(x_\mu \in \mathfrak{m}_\mu)$, sejam os x_μ independentes — $\mathfrak{S}$. Por ex., consideremos o espaço M, a m dimensões, sobre $\mathfrak{S}$, que é o conjunto dos vectores $(y_1, \ldots, y_m)$, $(y_i \in \mathfrak{S})$. Escrevendo $v_1=(1, o, \ldots, o), \ldots, v_m=(o, \ldots, o, 1)$, vê-se que $\mathrm{M}=v_1\mathfrak{S}+\ldots+v_m\mathfrak{S}$. Cada $v_j\mathfrak{S}$ é soma directa de submódulos — $\mathfrak{S}$ simples, da forma $v_j\mathfrak{S}=v_j\mathfrak{r}_1+\ldots+v_j\mathfrak{r}_n$, onde os $\mathfrak{r}_j$ são ideais directos simples da decomposição de $\mathfrak{S}$. Supondo $\xi_{j_i}=v_j r_i \neq o$, $(r_i \in \mathfrak{r}_i)$, pode pôr-se $v_j\mathfrak{S}=\xi_{j_1}\mathfrak{S}+\ldots+\xi_{j_n}\mathfrak{S}$, mas os ξ_{j_i} não são geralmente independentes — $\mathfrak{S}$.

Vamos tratar um caso, para o qual tem sentido falar da dimensão$(\mathrm{M}/\mathfrak{S})$, determinada em correlação com a cardinalidade da soma $\mathrm{M}=\Sigma\,\mathfrak{m}_\mu$.

Seja $\mathfrak{R}$ um anel com elemento um, do qual o anel simples noetheriano $\mathfrak{S}$ é subanel com o mesmo elemento um. São válidos os raciocínios que passamos a expor. Escrevamos $\mathfrak{S}=\mathfrak{r}_1+\ldots+\mathfrak{r}_n=e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_n\mathfrak{S}$, onde os e_i são idempotentes ortogonais e os $e_i\mathfrak{S}=\mathfrak{r}_i$ são simples. Também se tem $\mathfrak{R}=e_1\mathfrak{R}+\ldots+e_n\mathfrak{R}$, como soma directa. Consideremos $\mathfrak{R}$ como espaço — $\mathfrak{S}$ direito. Sabemos que $\mathfrak{R}=\Sigma\, x_\mu \mathfrak{r}_\mu$, $(\mu \in M;\ \mathfrak{r}_\mu$ algum dos $\mathfrak{r}_i)$; e também sabemos que cada $e_i\mathfrak{R}$ se pode considerar soma de certos $x_\mu\mathfrak{r}_\mu$. Poremos

$$\mathfrak{R}=\sum_{i=1}^{n} e_i\mathfrak{R}=\Sigma\, x_{\mu_1}\mathfrak{r}_{\mu_1}+\ldots+\Sigma\, x_{\mu_n}\mathfrak{r}_{\mu_n},$$
$$(e_i\mathfrak{R}=\Sigma\, x_{\mu_i}\mathfrak{r}_{\mu_i}).$$

Vamos ver que os diferentes $e_i\mathfrak{R}$ são isomorfos — $\mathfrak{R}$. Partamos do isomorfismo $e_1\mathfrak{S}\simeq e_2\mathfrak{S}$, por via do qual

$$\begin{array}{ll}
e_1 \to b_2 \in \mathfrak{r}_2 = e_2\mathfrak{S}, & b_1 e_2 \to e_2, \\
b_1 \to e_2 \in \mathfrak{r}_2, & b_1 b_2 \to e_2 b_2 = b_2, \\
e_1 a \to b_2 a,\ (a \in \mathfrak{S}), & e_1 b_1 \to b_2 b_1, \\
e_1 e_1 \to b_2 e_1 = b_2, & (b_1 e_2 = b_1;\ b_1 b_2 = e_1;\ b_2 b_1 = e_2).
\end{array}$$

Ampliando este isomorfismo para um homomorfismo — $\mathfrak{R}$, segundo o qual $e_1 r \to b_2 r$, $(r \in \mathfrak{R})$, vê-se que, por um lado, $b_2 r$ percorre totalmente $e_2\mathfrak{R}$, pois $b_2\mathfrak{R}=e_2 b_2\mathfrak{R}\subseteq e_2\mathfrak{S}\mathfrak{R}=e_2\mathfrak{R}$, e $e_2\mathfrak{S}\mathfrak{R}=b_2\mathfrak{S}\mathfrak{R}\subseteq b_2\mathfrak{R}$; por outro lado, o homomorfismo é isomorfismo, pois, supondo $b_2 r = o$, tem-se $b_1 b_2 r = e_1 r = o$.

Demonstrado o isomorfismo — $\mathfrak{R}$, podemos afirmar, mais particularmente, que $e_1\mathfrak{R}$ e $e_2\mathfrak{R}$ são isomorfos — $\mathfrak{S}$. Então, a cada parcela simples — $\mathfrak{S}$ de $e_1\mathfrak{R}$, da forma $x_{\mu_1}\mathfrak{r}_{\mu_1}$ podemos associar uma parcela simples — $\mathfrak{S}$ de cada $e_i\mathfrak{R}$, por forma a considerarmos $\mathfrak{R}$ como soma directa de módulos — $\mathfrak{S}$, isomorfos de $\mathfrak{S}$. Escrevendo $\mathfrak{R}=\Sigma\,\mathfrak{S}_\nu$, $(\nu \in N)$, vamos ver qual a estrutura de cada $\mathfrak{S}_\nu \simeq \mathfrak{S}$. Se designarmos por w_ν o correspondente, em $\mathfrak{S}_\nu$, de $1 \in \mathfrak{S}$, é $\mathfrak{S}_\nu = w_\nu\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}=\Sigma\, w_\nu\mathfrak{S}$. Nesta soma directa discreta os w_ν são independentes — $\mathfrak{S}$, porque, sob a hipótese $w_\alpha s_\alpha+\ldots+w_\lambda s_\lambda = o$, $(s_\alpha, \ldots \in \mathfrak{S})$, além de se ter $w_\alpha s_\alpha = \ldots = w_\lambda s_\lambda = o$, tem-se também $s_\alpha = \ldots = s_\lambda = o$, como resulta dos isomorfismos $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}_\alpha$, etc.

A cardinalidade de M, conjunto dos $\mu\,\mu$ da soma $\mathfrak{R}=\Sigma\, x_\mu\mathfrak{r}_\mu$, é bem determinada. Como ela se obtém do produto de n pela cardinalidade de N, esta última relativa ao conjunto dos $\nu\,\nu$ da soma $\mathfrak{R}=\Sigma\, w_\nu\mathfrak{S}$, podemos falar da ordem $(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})=$ cardinalidade de N. E, se $\mathfrak{S}_1$ for um segundo anel noetheriano, agora contido em $\mathfrak{S}$, e ainda com o mesmo elemento um de $\mathfrak{S}$ e de $\mathfrak{R}$ tem-se $(\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_1)=(\mathfrak{R}/\mathfrak{S}).(\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_1)$. Podemos dizer:

TEOREMA 58: — *Supondo $\mathfrak{R}$ um anel qualquer com elemento um que é elemento um dum subanel simples noetheriano $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{R}$, então $\mathfrak{R}$ tem a forma $\mathfrak{R}=\Sigma\, w_\nu\mathfrak{S}$, $(\nu \in \mathrm{N})$, como soma directa discreta de submódulos $\mathrm{w}_\nu\mathfrak{S}$, todos isomorfos — $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{S}$, existindo uma ordem determinada $(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})=$ cardinalidade de N.*

15) **Comutadores de subanéis dos anéis simples** — Dum modo geral, se $\mathfrak{R}$ é um anel e $\mathfrak{C}$ um conjunto de elementos de $\mathfrak{R}$, ARTIN e WHAPLES designam pelo símbolo $\mathfrak{R}^{\mathfrak{C}}$ o comutador de $\mathfrak{C}$, em $\mathfrak{R}$. Esse comutador é um subanel. No caso de haver domínio operatório para $\mathfrak{R}$, o comutador de $\mathfrak{C}$ é subanel admissível.

Se $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$ são dois anéis quaisquer que admitem o corpo K como domínio operatório, formemos $\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$. Não tem sentido falar de $(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{C}}$, por não sabermos se $\mathfrak{C}$ pertence ao produto directo. Se $\mathfrak{R}'$ tem elemento um $= u'$, o conjunto dos elementos $\{cu'\}$, $c\in\mathfrak{C}$, que viremos a substituir por $\mathfrak{C}$, tem o comutador $(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{R}^{\mathfrak{C}}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$, como vamos ver. É imediato que um elemento do 2.º membro comuta com todos os cu'. Inversamente, se $\Sigma r_\nu r'_\nu$ pertence ao 1.º membro, suponhamos os r'_ν independentes — K, como é sempre possível. Para cada cu' é, por hipótese, $cu'.\Sigma r_\nu r'_\nu = \Sigma r_\nu r'_\nu . cu'$, ou seja $\Sigma(c r_\nu - r_\nu c) r'_\nu = o$. Daqui segue-se $c r_\nu = r_\nu c$, o que prova ser $r_\nu \in \mathfrak{R}^{\mathfrak{C}}$. Tem lugar esta proposição:

TEOREMA 59: — *No produto directo $\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$, suposto $\mathfrak{R}'$ com elemento um, o comutador de $\mathfrak{C}\subseteq\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$ é definido pela igualdade $(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{R}^{\mathfrak{C}}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$.*

Quando se sabe que o anel $\mathfrak{Q}$ é o produto directo de dois subanéis $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$, tem sentido escrever $(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{C}}$, assim como $\mathfrak{R}^{\mathfrak{C}}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$. As duas expressões são ainda iguais, pelo seguinte: se $c\in\mathfrak{C}$, um elemento $\Sigma r_\nu r'_\nu$ da primeira expressão, supostos os r'_ν independentes — K, dá $c.\Sigma r_\nu r'_\nu = \Sigma r_\nu r'_\nu . c$, sem qualquer dificuldade de interpretação, visto que os r_ν, r'_ν, c são elementos de $\mathfrak{Q}$. E tem-se ainda $c r_\nu = r_\nu c$. Anàlogamente, um elemento da 2.ª expressão pertence à 1.ª. Convém chamar aqui a atenção para o que vamos dizer. Seja ainda $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$ o produto directo de dois subanéis. Os elementos pertencentes a factores distintos do produto, salvo os elementos de K, que podem ser comuns, não têm entre si mais do que relações formais de comutabilidade. Afirmando-se que $\mathfrak{R}$ é subanel do produto directo $\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$, vê-se que $r\in\mathfrak{R}$ toma o aspecto $r = \Sigma r_\nu r'_\nu$, parecendo haver operações, além da simples comutabilidade, envolvendo os elementos de $\mathfrak{R}$ e de $\mathfrak{R}'$. Conclui-se que os r'_ν, da expressão de r, terão de ser elementos de K, pelo que K estará

contido em $\mathfrak{R}'$. Também se terá $\mathrm{K}\subseteq\mathfrak{R}$, por motivo análogo. É válido o

TEOREMA 60: — *Se $\mathfrak{Q}$ é o produto directo de dois subanéis $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$, da forma $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$, o corpo K está contido nos dois subanéis, pelo que $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$ têm o mesmo elemento um de K.*

COROLÁRIO 19: — *Se $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$ for o produto directo de dois subanéis, o primeiro dos quais de centro K, o comutador de $\mathfrak{R}$ é o subanel $\mathfrak{R}'$ e o centro de $\mathfrak{Q}$ é o centro de $\mathfrak{R}'$.* Na verdade, sendo $\mathfrak{R}'$ o comutador de $\mathfrak{R}$, o centro de $\mathfrak{Q}$ terá de estar contido em $\mathfrak{R}'$. Será o centro de $\mathfrak{R}'$.

Voltemos ao produto $\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$ e suponhamos $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{T}'$ dois subanéis admissíveis de $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$, respectivamente. O símbolo $(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{T}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{T}'}$ tem sentido preciso, constatando-se imediatamente que é

$$\mathfrak{R}^{\mathfrak{T}}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'^{\mathfrak{T}'}\subseteq(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{T}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{T}'}. \qquad (7)$$

A inclusão inversa vai ser demonstrada com novas hipóteses. Para isso, exigiremos que o 2.º membro comute separadamente com $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{T}'$, o que sucederá se supusermos estes dois subanéis contidos no seu produto directo. Então, ambos têm elemento um, que será o elemento um do produto. Esse elemento um pertencerá também a $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ e ao produto directo destes. Em suma, provaremos o

TEOREMA 61: — *Dado o produto directo $\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'$ de dois anéis com elemento um, se $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{T}'$ forem dois subanéis admissíveis de $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$, respectivamente, cada um deles com o elemento um do anel a que pertence, é válida a igualdade $\mathfrak{R}^{\mathfrak{T}}\times\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}'^{\mathfrak{T}'}(\mathfrak{R}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{R}')^{\mathfrak{T}\times_{\mathrm{K}}\mathfrak{T}'}$.* Provemos, pois, a inclusão contrária de (7). Se um elemento $\Sigma r_\nu r'_\nu$, com os r'_ν independentes — K, pertence ao 2.º membro de (7), ele comutará com os elementos de $\mathfrak{T}$, o que leva a $r_\nu\in\mathfrak{R}^{\mathfrak{T}}$. Se exprimirmos, em seguida, $\Sigma r_\nu r'_\nu$, por forma a conservarmos aqueles dos seus r_ν que são independentes — K, obtemos uma expressão $\Sigma r_\mu r'_\mu$, na qual $r_\mu\in\mathfrak{R}^{\mathfrak{T}}$, e, além disso, os diferentes r_μ são independentes—K. Então, da comutabilidade de $\Sigma r_\mu r'_\mu = \Sigma r_\nu r'_\nu$ com os elementos de $\mathfrak{T}'$, concluímos $r'_\mu \in \mathfrak{R}^{\mathfrak{T}'}$, o que demonstra a proposição.

Dentro da notação utilizada, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{R}}$ significa o centro de $\mathfrak{R}$. Tem lugar o corolário a seguir.

COROLÁRIO 20: — *O produto directo* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{R}'$ *de dois anéis do centro* K *tem o centro* K. *Inversamente, se* $\mathfrak{Q}$, *de centro* K, *puder escrever-se sob a forma de produto directo de subanéis como a indicada, o centro de cada factor é também* K. Tratemos apenas a afirmação inversa. Sem dúvida que K faz parte do centro de $\mathfrak{R}$. Esse centro não pode ser maior do que K, pois, de contrário, o mesmo sucederia ao centro de $\mathfrak{Q}$. Pelo corolário 19, o centro de $\mathfrak{Q}$ é o centro de $\mathfrak{R}'$. O centro deste último será K.

Particularizaremos agora os anéis $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$, supondo $\mathfrak{R}$ simples e noetheriano e $\mathfrak{R}' = \mathfrak{S}'$ uma álgebra simples finita sobre K, este último um corpo que é o centro de $\mathfrak{R}$ e está contido no centro de $\mathfrak{S}'$. O produto directo $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}'$ é anel simples noetheriano (teor. 55 e corolário 14). Vamos aplicar-lhe o teorema 57, supondo $\mathfrak{H}_1$ e $\mathfrak{H}_2$ duas sub-álgebras simples equivalentes, finitas sobre K, com o mesmo elemento um do produto directo, e contidas, respectivamente, em $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}'$. A equivalência $\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{H}_2$ exige invariância de K, mas como o teorema 57 exige que se tenha K para centro do produto directo, vamos supor $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}'$ de centro K, por forma a realizar essa condição. Há um automorfismo interno que, deixando K invariante, determina os seguintes isomorfismos, dentro de $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}'$: $\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{H}_2$,

$$\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}' = (\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}')^{\mathfrak{H}_1} \simeq (\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}')^{\mathfrak{H}_2} = \\ = \mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}_2},$$

$$\mathfrak{R}^{(\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1})} = (\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}')^{\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}'} \simeq \\ \simeq (\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}')^{\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}_2}} = \mathfrak{S}'^{(\mathfrak{S}'^{\mathfrak{H}_2})}.$$

Mais especialmente ainda, admitamos que $(\mathfrak{H}/\mathrm{K}) = n$ e tomemos para $\mathfrak{S}'$ o anel K_n de matrizes quadradas de grau n com elementos de K. $\mathfrak{S}'$ será, efectivamente, uma álgebra simples, finita sobre K, de ordem n^2, contendo uma sub-álgebra $\mathfrak{H}_2$, isomorfa de $\mathfrak{H}_1$, num isomorfismo que deixa K invariante. K é o centro de $\mathfrak{S}'$. É possível precisar certas propriedades do produto $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$. Façamos, antes, algumas observações. $\mathfrak{H}_2$ costuma receber a designação de *1.ª representação regular directa de* $\mathfrak{H}_1$; provém da multiplicação, à esquerda dos elementos base de $\mathfrak{H}_1$, pelos elementos de $\mathfrak{H}_1$. Conforme [(I), pág. 135], o comutador de $\mathfrak{H}_2$, dentro de K_n, é uma álgebra $\mathfrak{H}_2^*$, anti-isomorfa de H_1, que costuma receber a designação de *2.ª representação regular recíproca de* H_1; provém da multiplicação, à direita dos elementos base de H_1, pelos elementos de H_1. O produto $\mathrm{H}_2 \times_{\mathrm{K}} \mathrm{H}_2^*$ pode não ser igual a K_n, pelo facto de não sabermos ser K o centro de H_1, [Cf. lema 3 e teorema 53].

Passemos agora ao estudo de $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$. Sabemos, pelo teorema 57, existir um automorfismo interno que determina os seguintes isomorfismos: $\mathrm{H}_1 \simeq \mathrm{H}_2$, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n \simeq$ $\simeq \mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{H}_2^*$, $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1})} \simeq \mathrm{H}_2$. Concluímos daqui, imediatamente, que é $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1})} = \mathrm{H}_1$, o que permite enunciar este teorema de ARTIN-WHAPLES:

TEOREMA 62: — *Dado o anel simples noetheriano* $\mathfrak{R}$, *de centro* K, *se* H_1 *é uma sub-álgebra simples finita de* $\mathfrak{R}$, *com o mesmo elemento um de* $\mathfrak{R}$, *de corpo fundamental* K *e de ordem* $(\mathrm{H}_1/\mathrm{K}) = \mathrm{n}$, *existe um automorfismo interno do produto directo* $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$, *segundo o qual:* 1) $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$ *e* $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{H}_2^*$ *são isomorfos, significando com* H_2^* *o comutador, em* K_n, *da imagem de* H_1; 2) $\mathfrak{R}^{(\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1})} = \mathrm{H}_1$; 3) $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1}$ *é álgebra simples sobre* K, *com condição de mínimo;* 4) *o grau* $(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1})$ *é* $\mathrm{n} = (\mathrm{H}_1/\mathrm{K})$. Demonstradas que estão as alíneas 1) e 2), passemos a 3). Visto que $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$ e $\mathfrak{R} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{H}_2^*$ são isomorfos (com invariância de K), o facto de o último produto ser simples arrasta que o seja o primeiro. Dado um ideal bilateral $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1}$, se pudesse ser $a \in \mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1}$, $a \notin \mathfrak{a}$, então, supondo $b \in \mathrm{K}_n$, ter-se-ia $ab \in \mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_n$, com $a b \notin a \times_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n$, o que não pode ter lugar. Assim, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1}$ é álgebra simples sobre $\mathbf{K}$. Ela verifica a condição de mínimo, porque essa condição é verificada por $\mathfrak{R}^{\mathfrak{H}_1} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n$ e o teorema 63 a seguir, provará a propriedade para $\mathbf{R}^{\mathfrak{H}_1}$. Resta a alínea 4). Sabendo que $\mathbf{R}^{\mathbf{H}_1}$ é anel simples noetheriano, cujo elemento um é operador unitário de $\mathbf{R}$, existe um grau $(\mathbf{R}/\mathbf{R}^{\mathbf{H}_1})$ e são válidas as igualdades

$$(\mathbf{R} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n/\mathbf{R}^{\mathbf{H}_1} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n) = (\mathbf{R}/\mathbf{R}^{\mathbf{H}_1}) =$$
$$= (\mathbf{R} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n / \times \mathbf{R} \times_{\mathbf{K}} \mathbf{H}_2^*) = (\mathbf{K}_n/\mathbf{H}_2^*),$$

$$(\mathbf{K}_n/\mathbf{K}) = n^2 = (\mathbf{K}_n/\mathbf{H}_2^*)\,(\mathbf{H}_2^*/\mathbf{K}) = n\,.\,(\mathbf{K}_n/\mathbf{H}_2^*),$$

e, portanto, $(\mathbf{R}/\mathbf{R}^{\mathbf{H}_1}) = n = (\mathbf{H}_1/\mathbf{K})$, como se tinha afirmado.

TEOREMA 63: — *Supondo $\mathbf{R}$ e $\mathfrak{S}$ dois anéis que contêm um corpo $\mathbf{K}$, cujo elemento um é elemento um de cada um deles, a validade da condição de mínimo para ideais direitos no produto $\mathbf{R} \times_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}$ arrasta a validade da mesma condição para $\mathbf{R}$, se $\mathfrak{S}$ for finito sobre* $\mathbf{K}$. Se houvesse uma sucessão ilimitada de ideais direitos em $\mathbf{R}$, concluía-se a existência duma sucessão ilimitada de ideais direitos no produto, o que seria absurdo.

Da alínea 4) do teorema 62, tira-se o

COROLÁRIO 21: — *Se $\mathfrak{D}$ é uma álgebra central de divisão sobre $\mathbf{K}$ e $\mathfrak{F}$ uma sub-álgebra finita, com o mesmo elemento um de $\mathfrak{D}$, o comutador $\overline{\mathfrak{F}}$, de $\mathfrak{F}$, em $\mathfrak{D}$, verifica a relação* $(\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{F}}) = (\mathfrak{F}/\mathbf{K})$.

Muito importantes, pelas aplicações que delas podem fazer-se, são as considerações que passamos a desenvolver. $\mathbf{R}$ supõe-se um anel simples noetheriano, de centro $\mathbf{K}$, e $\mathfrak{Q}$ um subanel contendo $\mathbf{K}$ e tal que $\mathbf{R} = (\mathfrak{Q}\, w_1, \mathfrak{Q}\, w_2, \ldots, \mathfrak{Q}\, w_n)$, $(w_i \in \mathbf{R})$. Interessa-nos o estudo do anel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ dos endomorfismos — $\mathfrak{Q}$, de $\mathbf{R}$, com $\mathfrak{Q}$ a operar à esquerda. A multiplicação, à direita, de cada $x \in \mathbf{R}$, por um elemento fixo $a \in \mathbf{R}$, define um tal endomorfismo. Sabemos o

significado de $\mathfrak{T} = \mathbf{R}_d \times_{\mathbf{K}} \mathbf{R}_e$. Se considerarmos a multiplicação de $\mathbf{R}$, à esquerda, pelos elementos que comutam com $\mathfrak{Q}$, obtemos igualmente endomorfismos — $\mathfrak{Q}$. Em $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ está contido, portanto, o produto directo $\Delta = \mathbf{R}_d \times_{\mathbf{K}} \mathbf{R}_e{}^{\mathfrak{Q}_e}$, onde $\mathfrak{Q}_e$, é imagem de $\mathfrak{Q}$ em $\mathbf{R}_e$, (Cfr. lema 3). Inversamente, qualquer endomorfismo — $\mathfrak{Q}$, contido em $\mathfrak{T}$, pertence ao produto directo anterior, como vamos ver. Escrevamos $x \to x\,.\sum\limits_{\nu} E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu}$, onde os r_ν se supõem independentes — $\mathbf{K}$. Para cada $t \in \mathfrak{Q}$, é $t x \to t\,(x\,.\,\Sigma\, E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu}) = (x\,.\,\Sigma\, E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu})\, E^{(e)}_t = x\, E^{(e)}_t\, (\Sigma\, E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu})$. Como os $E^{(d)}_{r_\nu}$ são independentes — $\mathbf{K}$, $E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(e)}_t = E^{(e)}_t E^{(e)}_{r'_\nu}$, donde se tira a conclusão desejada.

Ponhamos $\mathbf{R}_e{}^{\mathbf{K}_e} = \overline{\mathfrak{Q}}_e$. Existem os graus $(\Delta/\mathbf{R}_d)$ e $(\overline{\mathfrak{Q}}_e/\mathbf{K})$, que são iguais. O nosso 2.º objectivo consiste em verificar que se tem $(\overline{\mathfrak{Q}}_e/\mathbf{K}) \overset{=}{<} n$, o que resultará de se provar ser $(\Delta/\mathbf{R}_d) \overset{=}{<} n$. Δ é uma parte de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$. Cada $\sigma \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ fica definido dando os correspondentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dos $w_1, w_2 \ldots, w_n$. A cada σ se faz corresponder, desta maneira, um vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dum espaço vectorial $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{R}$, que tem n dimensões sobre $\mathbf{R}$ (aplicado à direita) e que é completamente redutível. Estudemos $\sigma E^{(d)}_r \in \mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}$. Vê-se que $w_i\,.\,\sigma E^{(d)}_r = x_i E^{(d)}_r = x_i\, r$. É claro, deste modo, como os elementos de $\mathbf{R}_d$ se aplicam a $\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}$. E será $(\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}/\mathbf{R}_d) \overset{=}{<} (\mathbf{M}/\mathbf{R})$, pois $\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}$, que pode supor-se módulo — $\mathbf{R}$ (em vez de $\mathbf{R}_d$), é isomorfo — $\mathbf{R}$ duma parte de $\mathbf{M}$. Sendo $(\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}/\mathbf{R}_d) \leqq n$, é também $(\Delta/\mathbf{R}_d) \overset{=}{<} n$, consequentemente $(\overline{\mathfrak{Q}}_e/\mathbf{K}) \overset{=}{<} n$. O caso em que $(\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}/\mathbf{R}_d) = n$ tem lugar quando os vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ podem ser quaisquer. Então, os w_i deverão ser independentes — $\mathfrak{Q}$, porque uma relação $\Sigma\, q_i\, w_i = o$, $(q_i \in \mathfrak{Q})$, tomando $x_i = 1$, $x_j = o$, $(j \neq i)$, dará $q_i = o$. Inversamente, a independência — $\mathfrak{Q}$ dos w_i permite que os $(x_1, \ldots, x_n)$ percorram todo o espaço $\mathbf{M}$. Sabemos, de resto, que $\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}$ é, nessa hipótese, isomorfo do anel completo das matrizes do grau n com elementos de $\mathfrak{Q}$, [(I), pág. 240], possuindo uma dimensionalidade n^2, sobre $\mathfrak{Q}$, e valendo a relação $(\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}/\mathfrak{Q}) = n^2 = (\mathfrak{A}_{\mathrm{Q}}/\mathbf{R})\,.\,(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})$. Fixemos o

TEOREMA 64: — *Se* $\mathbf{R}$ *é um anel simples noetheriano, de centro* $\mathbf{K}$, *e se* $\mathfrak{Q}$ *é um subanel de* $\mathbf{R}$ *contendo* $\mathbf{K}$, *tal que* $\mathbf{R}=(\mathfrak{Q}\,w_1, \ldots, \mathfrak{Q}\,w_n)$, *o comutador* $\mathbf{R}^{Q}$ *é uma álgebra* $\mathbf{H}$, *sobre* $\mathbf{K}$, *de ordem* $\gtreqless n$. *Na hipótese de se ter* $\mathbf{R}=\mathfrak{Q}\,w_1+ + \ldots + \mathfrak{Q}\,w_n$, *o anel* $\mathfrak{A}_Q$, *dos endomorfismos* — $\mathfrak{Q}$, *de* $\mathbf{R}$, *e a imagem* $\mathbf{R}_d$, *isomorfa de* $\mathbf{R}$, *contida em* $\mathfrak{A}_Q$, *verificam uma igualdade da forma* $(\mathfrak{A}_Q/\mathfrak{Q})=(\mathfrak{A}_Q/\mathbf{R}_d)\,.\,(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})$. Claramente que $\mathbf{R}^{Q}$ é anti-isomorfo de $\mathbf{R}_e^{Q_e}=\overline{\mathfrak{Q}}_e$.

Imaginemos que, continuando a ser $\mathbf{R}$ um anel como no teorema anterior, $\mathbf{H}$ é uma subálgebra simples, finita sobre $\mathbf{K}$, com o elemento um de $\mathbf{R}$. Supondo $(\mathbf{H}/\mathbf{K})=n$, o teorema 62 garante-nos ser $(\mathbf{R}/\mathbf{R}^{H})=n$. Tomando, então, $\mathfrak{Q}=\mathbf{R}^{H}$, a ordem de $\mathbf{R}$ relativamente à álgebra simples $\mathfrak{Q}$, é igual a n. Podemos escrever $\mathbf{R}=\mathfrak{Q}\,w_1+ + \ldots + \mathfrak{Q}\,w_n$, com os elementos w_i independentes — $\mathfrak{Q}$. O grau $(\Delta/\mathbf{R}_d)=(\mathbf{H}/\mathbf{K})=n$ mostra que se tem $\Delta=\mathfrak{A}_Q$, visto ser $(\mathfrak{A}_Q/\mathbf{R}_d)=n$. É válido o

TEOREMA 65: — *Se* $\mathbf{R}$ *é um anel simples noetheriano de centro* $\mathbf{K}$, $\mathbf{H}$ *uma subálgebra de* $\mathbf{R}$, *simples, finita sobre* $\mathbf{K}$, *e com o elemento um de* $\mathbf{R}$, *então:* 1) *o comutador* $\mathfrak{Q}=\mathbf{R}^{H}$ *é álgebra simples sobre* $\mathbf{K}$, *não finita, em geral, mas com condição de mínimo;* 2) *o grau* $(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})$ *é finito e igual a* $(\mathbf{H}/\mathbf{K})$; 3) *todos os endomorfismos* — $\mathfrak{Q}$, *de* $\mathbf{R}$, *pertencem ao produto directo* $\mathfrak{T}=\mathbf{R}_d \times_K \mathbf{R}_e$ (*); 4) *suposto, inversamente,* $\mathfrak{Q}$ *um subanel simples de* $\mathbf{R}$, *contendo* $\mathbf{K}$, *com condição de mínimo, para o qual* $(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})=n$ *e tal que todos os endomorfismos* — $\mathfrak{Q}$, *de* $\mathbf{R}$, *pertencem a* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$ *é comutador duma subálgebra de* $\mathbf{R}$, *simples, finita sobre* $\mathbf{K}$, *e com o elemento um de* $\mathbf{R}$. As alíneas 1), 2) e 3), tendo em conta o teorema 62 e os raciocínios que precederam este enunciado, encontram-se demonstradas, pelo que resta a alínea 4). Ora escrevamos, conforme a hipótese, $\mathbf{R}=\mathfrak{Q}\,w_1+\ldots+\mathfrak{Q}\,w_n$. Tem-se aqui $\Delta=\mathbf{R}_d \times_K \mathbf{R}_e^{Q_e}=\mathfrak{A}_Q$, em virtude de ser, também por hipótese, $\mathfrak{A}_Q \subseteq \mathfrak{T}$, e de se ter $\Delta=\mathfrak{A}_Q \cap \mathfrak{T}$. Como $\mathfrak{A}_Q$ é isomorfo de $\mathfrak{A} \times_K \mathbf{K}_n$, segue-se, pelo corolá-

(*) ARTIN WHAPLES exprimem-se dizendo que todos os endomorfismos — Q são funções lineares analíticas.

rio 14 e pelo teorema 55, que $\mathfrak{A}_Q$ é anel simples com condição de mínimo, e, portanto, álgebra simples noetheriana sobre $\mathbf{K}$. Tira-se depois, por virtude da expressão de $\Delta= =\mathfrak{A}_Q$ como produto directo, que $\mathbf{R}_e^{Q_e}=\mathbf{H}_e$ é álgebra simples sobre $\mathbf{K}$, o mesmo se dizendo de $\mathbf{R}^{Q}=\mathbf{H}$, que tem, aliás, o mesmo elemento um que $\mathbf{R}$. A ordem $(\Delta/\mathbf{R}_d)=(\mathfrak{A}_Q/\mathbf{R}_d)$ é n, o que dá $(\mathbf{H}/\mathbf{K})=n$. Então $(\mathbf{R}/\mathbf{R}^{H})$, pelo teorema 62, é de ordem n, mas como $\mathbf{R}^{H}$ contém $\mathfrak{Q}$, a ordem $(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})=n$, que satisfaz à relação $(\mathbf{R}/\mathfrak{Q})=(\mathbf{R}/\mathbf{R}^{H}).(\mathbf{R}^{H}/\mathfrak{Q})$, mostra ser $(\mathbf{R}^{H}/\mathfrak{Q})=1$, isto é, $\mathfrak{Q}=\mathbf{R}^{H}$. O teorema encontra-se completamente demonstrado.

A fim de enunciarmos um aditamento ao teorema acabado de provar, justifiquemos este

LEMA 5: — *Dado o anel* $\mathbf{R}$ *do teorema 65, em todo o elemento* $T=E_{r'_\nu}^{(e)}\,E_{r_\nu}^{(d)} \in \mathfrak{T}$, *que serve para definir uma transformação linear analítica em* $\mathbf{R}$, *é possível supor simultâneamente independentes* — $\mathbf{K}$ *tanto os* $E_{r'_\nu}^{(e)}$ *como os* $E_{r_\nu}^{(d)}$. De facto, comecemos por exprimir os $E_{r_\nu}^{(d)}$ naqueles, de entre eles, que são independentes — $\mathbf{K}$. Os novos $E_{r'_\mu}^{(e)}$, tais que $\sum E_{r'_\nu}^{(e)}\,E_{r_\nu}^{(d)}=\sum E_{r'_\mu}^{(e)}\,E_{r_\mu}^{(d)}$, podem não ser independentes. Façamos neles uma substituição análoga à que foi feita nos $E_{r_\nu}^{(d)}$. Agora pode suceder que os novos $E_{r_\sigma}^{(d)}$ não sejam independentes. Como o número de termos da soma vai diminuindo, enquanto os $E_{r_\sigma}^{(d)}$ e os $E_{r'_\sigma}^{(e)}$ não forem simultâneamente independentes, a afirmação fica estabelecida. De resto, é claro, T pode ser um elemento qualquer de $\mathfrak{T}$. Pode dar-se agora o aditamento referido.

ADITAMENTO AO TEOREMA 65: — *Todos os endomorfismos* — $\mathfrak{Q}$, *de* $\mathbf{R}$, *da forma* $x \to x\sigma$, *tais que, para todo o* $q \in \mathfrak{Q}$, *se tenha* $xq \to (xq)\sigma = x\sigma.q$, *postos sob a forma de função linear analítica* $x \to x.\sum E_{r'_\nu}^{(e)}\,E_{r_\nu}^{(d)}=\sum r'_\nu\,x\,r_\nu$, *são susceptíveis de tomar este outro aspecto:* $x \to x \sum E_{a'_\nu}^{(e)}\,E_{a_\nu}^{(d)}$, *onde os* a'_ν, *assim como os* a_ν, *são elementos de* $\mathbf{H}$ *indepen-*

dentes — K. Demonstrámos, na verdade, que os endomorfismos — $\mathfrak{Q}$ eram todos analíticos, consequentemente da forma $x \to x . \Sigma E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu}$, com $r'_\nu = a'_\nu \in \mathrm{R}^{\mathrm{Q}} = \mathrm{H}$; $r_\nu \in \mathrm{R}$. A hipótese $x q \to x q . \Sigma E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu} = (x . \Sigma E^{(e)}_{r'_\nu} E^{(d)}_{r_\nu}) q$, supostos os $E^{(e)}_{r'_\nu}$ independentes — K, mostra que se tem $E^{(d)}_q E^{(d)}_{r_\nu} = E^{(d)}_{r_\nu} E^{(d)}_q$, ou seja $E^{(d)}_{r_\nu} = E^{(d)}_{a_\nu} \in \mathrm{R}_e^{\mathrm{Q}_e} = \mathrm{H}_e$. Em virtude do lema, é admissível que os a_ν e os a'_ν sejam independentes — K, visto não sairmos de H, efectuando as operações que o referido lema indica.

Eis agora um teorema final, que tem em conta um certo número de raciocínios anteriores:

TEOREMA 66: — *Se* R *é um anel simples noetheriano, de centro* K, H *uma subálgebra de* R, *central, simples, finita sobre* K, *todo o automorfismo* σ, *de* R, *que deixa invariante o comutador* $\mathfrak{Q} = \mathrm{R}^{\mathrm{H}}$, *é um automorfismo interno, definido por um elemento* $\mathrm{a}' \in \mathrm{H}$. Para cada $q \in \mathfrak{Q}$, tem-se $x q . \sigma = x \sigma . q \sigma = x \sigma . q$, $q x . \sigma = q \sigma . x \sigma = q . x \sigma$, de sorte que σ é um endomorfismo — $\mathfrak{Q}$ nas condições do aditamento ao teorema 65, portanto uma função linear analítica da forma $x \to x . \Sigma E^{(e)}_{a'_\nu} E^{(d)}_{a_\nu}$, $(a_\nu, a'_\nu \in \mathrm{H})$, com os a_ν independentes — K, assim como os a'_ν. Seja a transformação $x \to \rho(x) = x . \Sigma E^{(e)}_{b'_\mu} E^{(d)}_{b_\mu}$, $(b_\mu, b'_\mu \in \mathrm{H})$, tal que $l(a'_1) = 1$, $l(a'_i) = o$, $(i \neq 1)$. Vê-se que $\sum_\mu b'_\mu [(b_\mu x) \sigma] = \Sigma b'_\mu (b_\mu \sigma . x \sigma) = (\Sigma b'_\mu . b_\mu \sigma) x \sigma = a' . x \sigma$, onde $a' \in \mathrm{H}$. Por outro lado, tem-se $\Sigma b'_\mu [(b_\mu x) \sigma] = \sum_\mu b'_\mu (\sum_\nu a'_\nu b_\mu x a_\nu) = \sum_\nu [(\sum_\mu b'_\mu a'_\nu b_\mu) . x a_\nu] = x a_1$, donde se conclui $a' . x \sigma = x a_1$, com $a_1 \neq o$. Tomemos agora a função linear analítica $l_1(x) = \sum_\rho c'_\rho x c_\rho$ tal que $c'_\rho, c_\rho \in \mathrm{H}$, $l_1(a_1) = 1$. Tem-se $\sum_\rho a' . (x c'_\rho) \sigma . c_\rho = \sum_\rho a' (x \sigma . c'_\rho \sigma) c_\rho = a' . x \sigma . c$, onde $c \in \mathrm{H}$. Também se tem $\sum_\rho a' . (x c'_\rho) \sigma . c_\rho = \sum_\rho x c'_\rho a_1 c_\rho = x$, visto que $a' . (x c'_\rho) \sigma = x c'_\rho a_1$. É, assim, $a' . x \sigma . c = x$. Para $x = 1$, obtém-se

$a' c = 1$, o que dá $c = a'^{-1}$. Portanto, é $a' . x \sigma . a'^{-1} = x$, ou seja, como afirma o teorema, $x \sigma = a'^{-1} x a'$, visto que $a' \in \mathrm{H}$.

16) **Aplicação a anéis quaisquer** — Neste § final, indicaremos algumas aplicações interessantes a anéis quaisquer. Começaremos pela seguinte proposição:

TEOREMA 67: — *Seja* R *um anel qualquer cujo centro contém o corpo* K *e cujo elemento um é o elemento um de* K; *se* H *é uma álgebra central simples, finita sobre* K, *contida em* R, *e se uma função linear analítica* $\mathrm{l}(\mathrm{x})$, *definida em* R, *não idênticamente nula e com coeficientes pertencentes a* H, *aplica os elementos de* H *em* K, *o conjunto dos elementos* $\mathrm{l}(\mathrm{x})$, $[\mathrm{x} \in \mathrm{R}]$, *constitui o comutador* R^{H}.

A demonstração assenta no seguinte

LEMA 6: — *Dados* R *e* H *nas condições do teorema, se uma função linear analítica* $\mathrm{l}(\mathrm{x})$, *com coeficientes pertencentes a* H, *leva a zero, quando aplicada a cada* $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$, *o mesmo sucede quando* $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$. Como a subálgebra H possui o centro K, o seu anel de endomorfismos — K é da forma $\mathfrak{T} = \mathrm{H}_d \times_{\mathrm{K}} \mathrm{H}_e$, como resulta dos teoremas 52 e 53. Por hipótese, a função $l(x) = \Sigma a'_\nu x a_\nu = x . \Sigma E^{(e)}_{a'_\nu} E^{(d)}_{a_\nu}$ leva a zero, quando aplicada a cada $x \in \mathrm{H}$. Podemos exprimir os $a'_\nu \in \mathrm{H}$ em elementos independentes — K, por forma a dar a $l(x)$ o aspecto $\Sigma a'_\nu x a_\mu$, com os a'_μ independentes. Mesmo que $x \in \mathrm{R}$, a aplicação de l ao elemento x leva a idênticos resultados sob os dois aspectos, porque os elementos de K se podem deslocar para a direita de x, mesmo na hipótese $x \in \mathrm{R}$. Mas, sendo $x . \Sigma E^{(e)}_{a'_\mu} E^{(d)}_{a_\mu} = o$, se $x \in \mathrm{H}$, o endomorfismo — K, representado por $\Sigma E^{(e)}_{a'_\mu} E^{(d)}_{a_\mu} \in \mathfrak{T}$, é nulo. Então, como os $E^{(e)}_{a'_\mu}$ são independentes, os $E^{(d)}_{a_\mu}$ são nulos. O mesmo se diz dos a_μ e o lema fica provado.

Passemos ao teorema. Seja $o \neq a \in \mathrm{H}$. Como $l(x) \in \mathrm{K}$, se $x \in \mathrm{H}$, tem-se $a l(x) - l(x) a = o$, para cada $x \in \mathrm{H}$. Pelo lema, será $a l(x) = l(x) a$, para cada $x \in \mathrm{R}$. Isto significa $l(x) \in \mathrm{R}^{\mathrm{H}}$. Inversamente, se $y \in \mathrm{R}^{\mathrm{H}}$, tomemos

$a \in H$ tal que $o \neq l(a) = k \in K$. Será $l(k^{-1}a) = 1$ e $l(k^{-1}ay) = l(k^{-1}a)y$, pois y comuta com os elementos de H. Vê-se que $l(k^{-1}ay) = y$, pelo que y tem efectivamente a forma $l(x)$. O teorema está demonstrado.

TEOREMA 68: — *Dados* R *e* H, *como no começo do enunciado do teorema 67, é válida a igualdade* $R = H \times_K R^H$. Esta afirmação muito geral pode concluir-se do modo a seguir. Supondo $e_1, \ldots, e_n$ uma base de H, existem funções lineares analíticas $l_i(x)$, $[i = 1, 2, \ldots, n]$, com coeficientes em H, tais que $l_i(e_i) = 1$, $l_i(e_j) = o$, $[i \neq j]$. A função linear analítica $l(x) = l_1(x)e_1 + \ldots + l_n(x)e_n - x$, com coeficientes em H, aplica todos os elementos de H sobre zero, pelo que aplicará sobre zero cada $x \in R$. Então será $x = l_1(x)e_1 + \ldots + l_n(x)e_n$, para cada $x \in R$. Como cada $l_i(x)$ não é idênticamente nula e aplica os elementos de H sobre K, segue-se $R^H = \{l_i(x)\}$, e, consequentemente, $R = H.R^H$. Dentro de R, os subanéis H e R^H realizam as condições indicadas a propósito do lema-3. Por isso é $R = H \times_K R^H$, como se afirmou, [Cfr. (I), pág. e seguintes, assim como (I), pág. 140].

Para remate, daremos os dois corolários a seguir.

COROLÁRIO 22: — Se $\mathfrak{S}$ *é um anel qualquer e* H *uma subálgebra central simples, finita sobre* K, *tem-se, supondo* $u \in H$ *o seu elemento um*, $u\mathfrak{S}^K = H \times_K u\mathfrak{S}^H$. Comecemos por observar que se tem $((u\mathfrak{S}u)^K)^H = (u\mathfrak{S}u)^H$. De facto, um elemento de $u\mathfrak{S}u$ que comuta com H comuta com $K \subseteq H$. É, portanto, um elemento de $(u\mathfrak{S}u)^K$ que comuta com H, pelo que o 2.º membro está contido no primeiro. Que o primeiro está contido no segundo, é imediato, pois $(u\mathfrak{S}u)^K \subseteq u\mathfrak{S}u$. Posto isto, mostremos que $(u\mathfrak{S}u)^H = u\mathfrak{S}^H$. Um elemento do 2.º membro tem a forma us, onde $s \in \mathfrak{S}$ é tal que $sa = as$, para cada $a \in H$. Em particular, pondo $a = u$, vem $su = us = usu$. Assim, $us \in (u\mathfrak{S}u)^H$. Inversamente, um elemento deste último comutador é da forma $utu = u.utu$, com $t \in \mathfrak{S}$. É, portanto, o produto de u por um elemento de $\mathfrak{S}$ que comuta com H, pelo que pertence a $u\mathfrak{S}^H$. Anàlogamente se tem $(u\mathfrak{S}u)^K = u\mathfrak{S}^K$, de sorte que, pelo teorema anterior, $(u\mathfrak{S}u)^K = u\mathfrak{S}^K = H \times_K ((u\mathfrak{S}u)^K)^H = H \times_K u\mathfrak{S}^H$.

COROLÁRIO 23: — *Supondo* $\mathfrak{D}$ *duma álgebra central de divisão, finita sobre* K, *dado um módulo* $\mathfrak{M}$, *sobre* $\mathfrak{D}$, *se* $\mathfrak{A}_K$ *e* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ *forem, respectivamente, os anéis dos seus endomorfismos —* K *e* $\mathfrak{D}$, *tem-se* $\mathfrak{A}_K = \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} \times_K \mathfrak{D}$. É claro que $\mathfrak{A}_K$ possui elemento um e tem K por centro. Tanto $\mathfrak{D}$ como $\mathfrak{D}_{\mathfrak{D}}$ estão contidos em $\mathfrak{A}_K$, sendo $(\mathfrak{A}_K)^{\mathfrak{D}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$. A estrutura do produto directo do enunciado é a mesma que a de $\mathfrak{A} \cdot_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}$.