ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA
Extracto do tomo XXXVI

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(3.ª LIÇÃO)

POR
A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116
—
1952

e [11] — B. Brown e N. H. McCoy, *The radical of a ring*, «Duke Mathematical Journal», vol. 15, 1948, págs. 495 a 499.

Relativamente às considerações desenvolvidas no § 4, cabe-nos fazer ainda as duas citações bibliográficas seguintes: [19] — O. Goldman, *A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 52, 1946, págs. 1021 a 1027; e [20] — O. Goldman, no mesmo Boletim, vol. 53, 1947, pág. 956.

2) **Somas directas completas e discretas. Somas sub-directas** — Conforme dissemos já no Cap. XV, § 11, estarão aqui em causa definições semelhantes às que então se introduziram. M é um conjunto de elementos $\alpha, \beta, \mu, \nu, \ldots$, a cada um dos quais se associa um anel $\mathfrak{B}_\mu$. Uma função $f = \{f(\mu)\}$ define-se pelos seus valores $f(\mu) \in \mathfrak{B}_\mu$. Depois, pôr-se-á

$$(f+g)(\mu) = f(\mu) + g(\mu), \qquad (fg)(\mu) = f(\mu)\, g(\mu),$$

se $\{g(\mu)\}$ é outra função. O conjunto das funções constitui um anel $\mathfrak{S}$, que se chama *soma directa completa dos anéis* $\mathfrak{B}_\mu$. Entre as funções $\{f(\mu)\}$, podem destacar-se aquelas que, como $\{h(\mu)\}$, satisfazem às condições seguintes: $h(\mu) = o$, se $\mu \neq \alpha$; $h(\mu) = h(\alpha) \in \mathfrak{B}_\alpha$, se $\mu = \alpha$. O sub-conjunto das funções $\{h(\mu)\}$ é um sub-anel $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$, de $\mathfrak{S}$, isomorfo de $\mathfrak{B}_\alpha$. Será indiferente dizer que $\mathfrak{S}$ é soma directa completa dos $\mathfrak{B}_\mu$ ou dos $\overline{\mathfrak{B}}_\mu$.

No caso particular em que M é um conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$, recai-se na definição habitual de soma directa.

Quando se consideram apenas as funções $\{f(\mu)\}$ que tomam o valor zero em todos os pontos $\mu \in M$, salvo num número finito de pontos, obtém-se um sub-anel $\mathfrak{S}_0$, de $\mathfrak{S}$, que ainda contém todos os $\mathfrak{B}_\mu$, e que se diz *soma directa discreta* dos mesmos $\mathfrak{B}_\mu$. Supondo finito o conjunto M, a soma directa discreta identifica-se com a soma directa completa.

Seja agora $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$ um sub-anel de $\mathfrak{S}$. Por via do homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{B}_\mu$, segundo o qual se tem $f \to f(\mu)$, para cada μ, obtém-se uma parte de $\mathfrak{B}_\mu$ pela correspondência $\mathfrak{T} \to \mathfrak{B}'_\mu \subseteq \mathfrak{B}_\mu$. Por simplicidade, usaremos letras latinas minúsculas para representar os elementos dos conjuntos designados pelas letras góticas correspondentes. Assim, será, com $s \in \mathfrak{S}$, $t \in \mathfrak{T}$,

$$s \to b_\mu, \quad t \to b'_\mu, \quad (b_\mu, b'_\mu \in \mathfrak{B}_\mu),$$

nos homomorfismos referidos. É importante o caso em que, para qualquer μ, se tem $\mathfrak{B}'_\mu = \mathfrak{B}_\mu$. A *componente* $\mathfrak{B}'_\mu$, de $\mathfrak{T}$, no ponto μ, é, então, o próprio $\mathfrak{B}_\mu$. Nessa hipótese, diz-se que $\mathfrak{T}$ é *soma sub-directa dos anéis* $\mathfrak{B}_\mu$. Das diferentes definições, resulta imediatamente que, tanto as somas directas completas como as discretas, constituem casos particulares de somas sub-directas.

Na definição de soma sub-directa, convém observar que, em geral, não pode afirmar-se pertencer a essa soma um determinado elemento de $\mathfrak{S}$. Em particular, podem não pertencer à soma sub-directa os próprios $\mathfrak{B}_\mu$. Se, qualquer que seja μ, for $\mathfrak{B}_\mu \subseteq \mathfrak{T}$, a soma sub-directa diz-se *soma sub-directa especial*. Em tal caso, os $\mathfrak{B}_\mu$ são ideais bilaterais de $\mathfrak{T}$. Exemplos de somas sub-directas especiais são dados ainda pelas somas directas completas e discretas.

Relativamente ao problema de *representar* um anel $\mathfrak{A}$ por uma soma sub-directa, levantam-se as duas questões seguintes: 1.ª) é dado um anel $\mathfrak{A}$; trata-se de saber se ele admite tais representações, além de representações banais; 2.ª) dado ou não o anel $\mathfrak{A}$, procura-se saber a que condições deve satisfazer $\mathfrak{A}$, a fim de que possa ter uma representação como soma sub-directa de anéis de certo tipo.

Respostas a estas questões podem ser tentadas pelos teoremas de que vamos agora ocupar-nos, os quais jogam com as diferentes definições de soma a que acabamos de nos referir.

Teorema 1: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{A}$ seja isomorfo duma soma sub-directa dos anéis $\mathfrak{Q}_\mu$, que tenham lugar os homomorfismos $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Q}_\mu$, ($\mu \in M$), e que, para cada $a \neq o$, pertencente a $\mathfrak{A}$, exista um $\lambda \in M$ para o qual $a \to q_\lambda \neq o$.* Se $\mathfrak{A}$ é isomorfo da soma sub-directa, têm lugar, por definição, os homomorfismos do teorema; e o facto de a representação de $\mathfrak{A}$ ser imagem de anéis $\mathfrak{a}_\nu$. De resto, pode ver-se isto mesmo directamente, raciocinando do modo seguinte. Tomemos $a \in \mathfrak{A}$ e escrevamos $a = a_\nu + b'_\nu$. A correspondência $a \to a_\nu$ é um homomorfismo. Se for $a \neq o$, é $a \notin \Pi\, \mathfrak{b}_\nu$, pelo que, por ex., $a \notin \mathfrak{b}_\lambda$. Então, pondo $a = a_\lambda + b_\lambda$, tem-se $a_\lambda \neq o$. O teorema 1 garante agora o que se quer. Resta ver que se trata de soma sub-directa especial. Tomemos $a'_\lambda \in \mathfrak{a}_\lambda \subseteq \mathfrak{A}$. O correspondente de a'_λ no isomorfismo $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{T}$ é determinado tendo em conta as igualdades $a'_\lambda = a_\lambda + o$, $a'_\lambda = o + b_\nu$, com $a_\lambda = a'_\lambda$, $b_\nu = a'_\lambda$, se $\nu \neq \lambda$, pois que, conforme o lema 1, $\mathfrak{a}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}_\nu$, se $\nu \neq \lambda$. A afirmação fica provada.

3) **Anéis sub-directamente irredutíveis** — BIRKHOFF [1] diz que um anel $\mathfrak{A}$ é *sub-directamente irredutível*, se, dada uma representação qualquer de $\mathfrak{A}$ como soma sub-directa de anéis $\mathfrak{Q}_\mu$, alguns dos homomorfismos $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Q}_\mu$ são isomorfismos. Então, ao escrever-se $\mathfrak{Q}_\mu \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{a}_\mu$, certos $\mathfrak{a}_\mu$ são nulos, verificando-se, como em geral, $\Pi\, \mathfrak{a}_\mu = (o)$. Todavia, a intersecção dos ideais bilaterais não nulos de $\mathfrak{A}$ não pode ser nula, visto que, de contrário, poderia obter-se uma representação de $\mathfrak{A}$ como soma sub-directa, sem que nenhum $\mathfrak{a}_\mu$ fosse nulo. Podemos dizer:

TEOREMA 5: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{A} \neq (o)$ seja sub-directamente irredutível, que a intersecção dos seus ideais bilaterais não nulos seja $\neq (o)$.*

O anel (o) considera-se sub-directamente irredutível. Um anel primitivo com ideais direitos mínimos realiza também um caso particular de anel sub-directamente irredutível. Basta ter em conta, com efeito, que o anti-radical $F \neq (o)$ está, então, contido em todo o ideal bilateral não nulo do anel.

Representaremos por $J \neq (o)$ o ideal bilateral mínimo, intersecção de todos os ideais bilaterais não nulos dum anel sub-directamente irredutível.

(1) G. BIRKHOFF — *Subdirect unions in universal algebra*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 50, 1944, págs. 764 a 768.

Eis aqui um enunciado geral, devido a BIRKHOFF:

TEOREMA 6: — *Todo o anel $\mathfrak{S}$ é um isomorfo duma soma sub-directa de anéis sub-directamente irredutíveis.* Tomemos $o \neq a \in \mathfrak{S}$, e consideremos os ideais bilaterais de $\mathfrak{S}$ que não contêm a. O conjunto desses ideais é indutivo (Cap. XIV, § 5), podendo aplicar-se-lhe o princípio de ZORN, segundo o qual existe um ideal bilateral máximo $\mathfrak{a}_\alpha$, em $\mathfrak{S}$, entre os ideais bilaterais que não contêm a. Então, valerá $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\alpha \simeq \mathfrak{B}_\alpha$, $\Pi\, \mathfrak{a}_\alpha = (o)$, de sorte que $\mathfrak{S}$ é isomorfo duma soma sub-directa de anéis $\mathfrak{B}_\alpha$. Para se concluir que $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\alpha$ é sub-directamente irredutível, consideremos o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\alpha$. A cada ideal bilateral $\bar{\mathfrak{a}} \neq (o)$, do anel cociente, corresponde um ideal bilateral bem determinado $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_\alpha$, pelo que $a \in \mathfrak{a}$. Assim, ter-se-á $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{a}}$, se $\bar{a} \neq o$ é o correspondente de a naquele homomorfismo. E daqui se conclui $\Pi\, \bar{\mathfrak{a}} \neq (o)$, como se deseja.

A caracterização dos anéis sub-directamente irredutíveis por propriedades simples, em face do que acaba de ver-se, oferece grande interesse. Para o caso comutativo, o problema foi resolvido por N. H. McCOY, [18], em termos que constam dos teoremas 7 e 8, que vêm a seguir.

O teorema 7 vai assentar num lema de BIRKHOFF.

LEMA 2: — *Um anel comutativo sub-directamente irredutível $\mathfrak{S}$, sem elementos nilpotentes, é um corpo.* Tomemos $J \neq (o)$. Se $o \neq j \in J$, tem-se $(j) = J$. Determinemos o aniquilador D, pela relação $DJ = (o)$. Trata-se dum ideal, pelo que se terá $D = (o)$ ou $J \subseteq D$. Esta última relação implicaria $J^2 = (o)$, o que não pode ter lugar. Portanto, é $D = (o)$. Supondo agora $o \neq a \in \mathfrak{S}$, o ideal aJ verifica a relação $aJ = J$, dado que $aJ = (o)$ implicaria $D \neq (o)$. Deste modo, para cada elemento a, não nulo, do anel, existe x tal que $ax = j$. Provaremos, em seguida, a resolubilidade da equação $cy = a$, para cada $c \neq o$. Como $cj \neq o$, existe x tal que $cjz = j$. Então $cjza = ja$, $(cza - a)j = o$, o que dá $cza = a$. A equação em causa é resolvida pondo $y = za$, o que demonstra o lema.

TEOREMA 7: — *É necessário e basta, para que um anel comutativo $\mathfrak{S}$, com certos elementos que não são divisores de zero, seja sub-directamente irredutível, que tenham lugar as* *seguintes propriedades de* $\mathfrak{S}$: 1) *se* D *é o conjunto dos divisores de zero, o aniquilador de* D *é o ideal principal* $(\mathrm{j}) = \mathrm{J} \neq (\mathrm{o})$; 2) J *e* D *são aniquiladores recíprocos, de sorte que* D *é ideal;* 3) $\mathfrak{S}/\mathrm{D}$ *é um corpo;* 4) *para cada* $\mathrm{d}_1 \in \mathrm{D}$, *supondo* $\mathrm{d}_1 \notin \mathrm{J}$, *existe* $\mathrm{d}_2 \in \mathrm{D}$, *com* $\mathrm{d}_2 \notin \mathrm{J}$, *tal que* $\mathrm{d}_1 \mathrm{d}_2 = \mathrm{j}$. A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é o anél sub-directamente irredutível referido no teorema, admitamos que não tem elementos nilpotentes. Então, $\mathfrak{S}$ é um corpo, e as propriedades têm lugar. Teremos ùnicamente que considerar o caso em que há nilpotentes. Tomemos, então, $(j) = J \neq (o)$ e procuremos o seu aniquilador Δ. Como no lema, ou será $\Delta = (o)$ ou $J \subseteqq \Delta$. Se $a \in \mathfrak{S}$ não é divisor zero, tem-se $a j \neq o$, e $a J = J$; se a é divisor de zero, o ideal aniquilador de a é $\neq (o)$, e, portanto, $a J = (o)$. Deste modo, o aniquilador de J é precisamente D, o que também prova ser D um ideal. A propriedade 2) ficará demonstrada, logo que se prove 1). Interessa-nos passar a 3), que resultará da solubilidade da congruência $a x \equiv b\,(D)$, sempre que $a \notin D$. Mediante esta última hipótese, é $a j \neq o$, é o ideal $a j \mathfrak{S}$ não pode ser nulo, por haver em $\mathfrak{S}$ elementos que não são divisores de zero. Valerá a igualdade $a j \mathfrak{S} = J$, pelo que existirá $t \in \mathfrak{S}$ tal que $a j t = j$. Então, $a j t b = j b$, ou $(a t b - b) j = o$, o que leva a concluir-se $a t b - b \in D$, ou seja $a t b \equiv b\,(D)$. A congruência em questão é resolvida com $x = t b$. A propriedade 1) resulta do modo seguinte: sabemos que $J D = (\mathrm{o})$; de sorte que há elementos não nulos pertencentes ao aniquilador de D. Se a é um tal elemento, o simples facto de não ser nulo dá $a \mathfrak{S} \supseteqq J$, existindo, portanto, um elemento x verificando $a x = j$. Tira-se daqui, se $b \notin D$, $a x b = b j \neq o$, e, consequentemente, $x b \notin D$, pois $a D = (o)$. Em virtude de 3), pode escrever-se agora $x b s = b + d$, com $s \in \mathfrak{S}$, $d \in D$. Em seguida, tem-se $a x b s = a b + a d = a b$. Por ser $a x = j$, é também $j b s = a b$, donde $a = j s$, por não ser b um divisor de zero. Qualquer elemento que aniquile D pertence, pois, a J. Relativamente a 4), tomemos d_1 nas condições do teorema. De $d_1 \mathfrak{S} \supseteqq J$, tira-se $d_1 r = j$, para um certo $r \in \mathfrak{S}$, $r \notin J$. Se $r \notin D$, então, de $d_1 r D = j D = (o)$, conclui-se $d_1 D = (o)$, $d_1 \in J$, o que é absurdo. Será $r = d_2 \in D$, e a parte directa do teorema fica demonstrada.

A condição é *suficiente:* Se as quatro propriedades de $\mathfrak{S}$ têm lugar, vamos provar que, sendo $o \neq a \in \mathfrak{S}$, é sempre $J \supseteqq (a)$. Quando a não é divisor de zero, também a^2 não é divisor de zero, e o facto de se ter $a^2 \notin D$, em face da propriedade 3), leva a $a^2 t = a + d$, $(d \in D)$, donde se conclui $a^2 t j = a j$, pois $d j = o$, em virtude de 2). Visto que a não é divisor de zero, a lei de corte dá $a t j = j$, $(a) \supseteqq J$. Se $a \neq o$ é divisor de zero, distinguiremos dois casos: ou $a \in J$ ou $a \notin J$. No 2.º caso, tem-se $a \in D$, pelo que existe, em face de 4), $b \in D$, com $\mathrm{b} \notin J$, tal que $a b = j$, o que leva também a concluir $(a) \supseteqq J$. No 1.º caso, a demonstração de N. H. McCoy é um pouco mais complicada. Pois que $a \in J$, escreveremos $a = b j + n j$, onde $b \in \mathfrak{S}$ e n é inteiro. Depois, supondo f um elemento que não é divisor de zero, poremos $a f = (b f + n f) j \neq o$. Então, $b f + n f$ não é divisor de zero, assim como o não é $(b f + n f) f$. Em face de 3), existe $t \in \mathfrak{S}$ tal que $t(b f + n f) f = f + d$, donde se tira $t(b f + n f) f j = f j$, $t(b f + n f) j = j = t(b j + n j) f = t a f$. É ainda $(a) \supseteqq J$, como se quer.

Demonstrado o teorema 7, resta considerar o caso dos anéis comutativos que apenas se compõem de divisores de zero. É válido o

TEOREMA 8. — *É necessário e basta, para que um anel comutativo* $\mathfrak{S}$, *composto ùnicamente de divisores de zero, seja sub-directamente irredutível, que tenham lugar as seguintes propriedades:* 1) *existe um número primo determinado* p, *tal que, supondo* $\mathrm{a}\mathfrak{S} = (\mathrm{o})$, *pode determinar-se um inteiro* k, *função de* a, *por forma que* $\mathrm{p}^{\mathrm{k}}\mathrm{a} = \mathrm{o}$; 2) *existe um ideal principal* $\mathrm{J} = (\mathrm{j}) \neq (\mathrm{o})$, *tal que, para cada* $\mathrm{a} \in \mathrm{J}$, *e apenas para os elementos de* J, *se tem* $\mathrm{a}\mathfrak{S} = (\mathrm{o})$, $\mathrm{p}\,\mathrm{a} = \mathrm{o}$; 3) *supondo* $\mathrm{a}\mathfrak{S} \neq (\mathrm{o})$, *existe* $\mathrm{b} \in \mathfrak{S}$ *tal que* $\mathrm{a}\,\mathrm{b} = \mathrm{j}$. A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é anel sub-directamente irredutível, tomemos $J = (j) \neq (o)$. Admitindo que é $o \neq a \in \mathfrak{S}$, o aniquilador de a é um ideal $\Delta \supseteqq J$, pois a é divisor de zero. Da condição $a J = (o)$, para cada a, conclui-se $\mathfrak{S} J = (o)$, e, portanto, $\mathfrak{S} j = (o)$. O ideal (j) compõe-se dos elementos da forma $m j$, onde m é inteiro. Se $2 j \neq o$, é $(j) = (2 j)$, pelo que existe um inteiro x verificando a relação $2 x j = j$, ou $(2x - 1) = o$. Em qualquer caso, portanto, existe um inteiro mínimo p tal que $p j = o$, tendo-se $(j) = \{o, j, 2j, \ldots, (p-1) j\}$. Para qualquer elemento $k j \in (j)$, $(o < k \leqq p - 1)$, existe um inteiro y por forma que $k y j = j$, $(k y - 1) j = o$, ou $k y \equiv 1 \pmod p$. Conclui-se daqui que p é primo, pois uma decomposição da forma $p = q r$, ond q e r se supõem diferentes de 1 e de p, daria, para certos inteiros z e σ, $q z = 1 + \sigma q r$, $q(z - \sigma r) = 1$, o que é absurdo. Posto isto, provemos 1). Seja $o \neq a \in \mathfrak{S}$ e $a\mathfrak{S} = (o)$. O ideal gerado por a é da forma $\{\alpha a\}$, onde os $\alpha\alpha$ são inteiros. Sendo $(a) \supseteqq J$, há um inteiro mínimo β tal que $\beta a = j$. Tendo em conta ser $p j = o$, deduz-se $p \beta a = o$, de sorte que existe um inteiro mínimo γ tal que $\gamma a = o$. Então, será $(a) = \{\alpha a\} = \{o, a, 2a, \ldots, (\gamma - 1) a\}$, devendo precisar-se que se tem $\beta < \gamma$. Para cada inteiro δ verificando as condições $o < \delta \leqq \gamma - 1$, existe um inteiro x dando $\delta x a = j = \beta a$. E, sendo, $(\delta x - \beta) a = o$, obtém-se $\delta x \equiv \beta \pmod{\gamma}$. Imaginemos agora que poderia ter-se $\gamma = \lambda q^{\rho}$, onde λ, q, ρ são inteiros, com $\lambda > 1$ e q primo. Tomando $\delta = q^{\rho}$, seria válida a igualdade $q^{\rho} x = \beta + \mu \gamma$, com certos inteiros x e μ. Então, por ser $\gamma = \lambda q^{\rho}$, a relação $(x - \mu \lambda) q^{\rho} = \beta$ mostraria que todas as potências dos elementos primos da decomposição de γ figurariam em β. Como isso é absurdo, só pode ter-se $\lambda = 1$, $\gamma = q^{\rho}$. Mas, então, de $p\beta = \tau q^{\rho}$, $\beta < q^{\rho}$, tira-se $p = q$, $\beta = \tau q^{\rho - 1}$. Por consequência, é $\gamma a = p^{\rho} a = o$, o que prova 1), pondo $\rho = k$. Quanto a **2)**, tomemos $o \neq a \in J$. Ter-se-á $a = \sigma j$, $p a = \sigma p j = o$, e também $a\mathfrak{S} = \sigma j \mathfrak{S} = (o)$. Inversamente, se $o \neq a \in \mathfrak{S}$ é tal que $p a = o$, $a\mathfrak{S} = (o)$, o ideal $(a) = \{\alpha a\}$ conterá j e existirá um inteiro ρ tal que $\rho a = j$. Podemos supor $\rho < p$, pelo que existirão inteiros m e n satisfazendo à igual $m\rho + n p = 1$. Conclui-se daqui $m \rho a = a$, ou $m j = a$, pelo que $a \in J$. Resta a propriedade 3). Ora essa é imediata, visto que, supondo $a\mathfrak{S} \neq (o)$, é $a\mathfrak{S} \supseteqq J$.

A condição é *suficiente:* Mediante as propriedades 1), 2) e 3), vamos provar, com efeito, que todo o ideal principal $\neq (o)$ contém J. Seja $o \neq a \in \mathfrak{S}$ e comecemos pelo caso $a\mathfrak{S} \neq (o)$. Por 3), tem-se simplesmente, $a b = j$, e, portanto, $j \in (a)$. Relativamente ao caso $a\mathfrak{S} = (o)$; por 1), é $p^k a = o$, podendo imaginar-se $b = p^{k-1} a \neq o$. Então, $b\mathfrak{S} = (o)$, $p b = o$, e, por 2), $b \in J$. O facto de ser $p j = o$ mostra que se tem $(j) = \{o, j, 2j, \ldots, (p - 1) j\}$, de sorte que $b = \alpha j$, $(o < \alpha \leqq p - 1)$. Existem inteiros β e γ verificando a relação $\beta \alpha + \gamma p = 1$, e, por isso, tem-se $\beta \alpha j + \gamma p j = j$, ou seja $\beta b = j$. Deste modo, é $j \in (b)$, $j \in (a)$, como se afirmou.

4) **Sobre o radical — J. Anéis semi-simples** — Neste §, $\mathfrak{S}$ representará um anel e $\mathfrak{M}$ um módulo — $\mathfrak{S}$. Quando falarmos de sub-módulos de $\mathfrak{M}$, estarão em causa sub-módulos — $\mathfrak{S}$.

Suponhamos $\mathfrak{S}$ diferente do seu radical — J ($\mathfrak{S}$ não é anel radical). Existe um módulo $\mathfrak{M} \neq (o)$ que tem um sub-módulo máximo $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$. Basta observar, com efeito, que há, em $\mathfrak{S}$, um ideal direito máximo $\mathfrak{J}$, [5, § 9, e Cap. XIV, § 5]. Então, podemos tomar $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}$, prèviamente considerado $\mathfrak{S}$ como módulo — $\mathfrak{S}$.

Quaisquer que sejam $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{S}$, tomemos um sub-módulo $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$. O conjunto dos elementos de $\mathfrak{S}$ que aplicam $\mathfrak{M}$ dentro de $\mathfrak{N}$ diz-se *contractor* de $\mathfrak{M}$, em $\mathfrak{N}$. É um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$.

Para todo o sub-módulo $\mathfrak{N}$, o módulo diferença $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ é ainda módulo — $\mathfrak{S}$. A classe $x + \mathfrak{N}$, onde $x \in \mathfrak{M}$, será representada por $\overline{x}$. Se $A \in \mathfrak{S}$, a correspondência $\overline{x} \to \overline{x} A$ é um endomorfismo de $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Se o representarmos por $\overline{A}$, o conjunto dos endomorfismos $\overline{A}$ é um anel $\overline{\mathfrak{S}}$, tendo-se $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}} \simeq \mathfrak{S}/\mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é precisamente o contractor de $\mathfrak{M}$, em $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{M} \neq (o)$ diz-se um *módulo primitivo* — $\mathfrak{S}$, se tiverem lugar as duas propriedades seguintes: 1) existe um sub-módulo $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$, máximo em $\mathfrak{M}$; 2) o contractor de $\mathfrak{M}$, em $\mathfrak{L}$, é o ideal nulo.

Vê-se imediatamente que, supondo $\mathfrak{M} \neq (o)$ primitivo — $\mathfrak{S}$, este anel é irredutível e está concretizado como anel de endomorfismos de $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$. Inversamente, se $\mathfrak{S} \neq (o)$ é um anel irredutível ou primitivo, [5, § 10, e Cap. XVII, § 3], existe um ideal direito máximo $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{S}$, em $\mathfrak{S}$, para o qual o anel cociente $(\mathfrak{J} : \mathfrak{S})$ é nulo. $\mathfrak{S}$ é, nessas condições, módulo primitivo — $\mathfrak{S}$, porque o ideal bilateral $(\mathfrak{J} : \mathfrak{S})$ é o contractor de $\mathfrak{S}$ em $\mathfrak{J}$.

Na hipótese de ser $\mathfrak{S} = (o)$, a existência de módulo primitivo — $\mathfrak{S}$ é evidente. Logo:

TEOREMA 9: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja um anel primitivo, que exista um módulo fiel* $\mathbf{M} \neq (o)$, *o qual, considerado como módulo — $\mathfrak{S}$, seja primitivo — $\mathfrak{S}$.*

Se a noção de anel primitivo sugere a de módulo primitivo, a noção de anel semi-simples no sentido de JACOBSON (isto é, de anel com radical — J nulo) sugere a de *módulo quase-semi-simples* — $\mathfrak{S}$, dada aos módulos $\mathbf{M}$ nas seguintes condições: 1) há, em $\mathbf{M}$, sub-módulos $\mathfrak{L}_{\mu} \neq \mathbf{M}$ máximos; 2) os contractores $\mathfrak{b}_{\mu}$, de $\mathbf{M}$, nos $\mathfrak{L}_{\mu}$, verificam a igualdade $\Pi\mathfrak{b}_\mu=(o)$. Na verdade, a sugestão compreende-se à face do seguinte

TEOREMA 10: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja semi-simples, que contenha ideais bilaterais $\mathfrak{a}_\mu$ tais que os anéis cocientes $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\mu$ sejam primitivos e se tenha* $\Pi\mathfrak{a}_\mu=(o)$. Se $\mathfrak{S}=(o)$, então $\mathfrak{S}$ é semi-simples e o teorema é verificado. Suponhamos $\mathfrak{S}\neq(o)$. Nesse caso, se $\mathfrak{S}$ é semi-simples, não é anel radical. Existem elementos que não são quase-regulares direitos, e, conforme o teorema 27 do Cap. XIV, existem ideais direitos máximos $\mathfrak{J}$. O radical — J é a intersecção $\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$ dos ideais bilaterais $(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$ e cada anel $\mathfrak{S}/(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$ é irredutível. Assim, pois que, por hipótese, $\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})=(o)$, a condição enunciada é efectivamente necessária. Inversamente, do homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\mu$, na hipótese de o anel cociente ser primitivo, concluímos $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{S})\subseteq\mathfrak{a}_\mu$; e de $\Pi\mathfrak{a}_\mu=(o)$, tiramos $\mathfrak{R}_{**}$[1] $=(o)$. O teorema está provado.

COROLÁRIO 2: — *Um ideal bilateral dum anel semi-simples é semi-simples* [2]. Seja $\mathfrak{a}\neq(o)$ o ideal bilateral em questão. Os ideais $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_\mu=\mathfrak{a}'_\mu$ são ideais bilaterais de $\mathfrak{a}$ para os quais $\Pi\mathfrak{a}'_\mu=(o)$. Por outro lado, sendo $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'_\mu\simeq(\mathfrak{a},\mathfrak{a}_\mu)/\mathfrak{a}_\mu$, e sendo este último anel cociente um ideal bilateral do anel primitivo $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_\mu$, e é ele próprio um anel primitivo [teor. 10, Cap. XVII], pelo que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'_\mu$ será primitivo. O corolário fica estabelecido.

Voltemos aos módulos quase-semi-simples — $\mathfrak{S}$. Se $\mathbf{M}\neq(o)$ é um tal módulo, os módulos $\mathbf{M}/\mathfrak{L}_\mu$, acima referidos, são simples — $\mathfrak{S}$. O anel $\mathfrak{S}$ induz endomorfismos nos módulos diferença, tendo-se

$$\mathfrak{S}\sim\overline{\mathfrak{S}}\simeq\mathfrak{S}/\mathfrak{b}_\mu,\quad \Pi\mathfrak{b}_\mu=(o).$$

Visto que os $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}_\mu$ são anéis primitivos, resulta do teorema anterior que $\mathfrak{S}$ é um anel semi-simples. É imediato, de

(1) $\mathfrak{R}_{**}=\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{S})$, de harmonia com o Cap. XIV, representa o radical — J, de $\mathfrak{S}$.

(2) Veja-se o Cap. XVI, § 1.

resto, que $\mathbf{M}$ é fiel — $\mathfrak{S}$. Inversamente, se $\mathfrak{S}\neq(o)$ é um anel semi-simples, existem ideais direitos máximos $\mathfrak{J}_\mu\neq\mathfrak{S}$, em $\mathfrak{S}$, tais que $\Pi(\mathfrak{J}_\mu:\mathfrak{S})=(o)$, [5, § 9, ou Cap. XIV, teor. 28]. $\mathfrak{S}$, considerado como módulo — $\mathfrak{S}$ é quase-semi-simples.

Na hipótese de ser $\mathfrak{S}=(o)$, a existência de módulo quase-semi-simples — $\mathfrak{S}$ fiel é evidente. Assim:

TEOREMA 11: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja um anel semi-simples, que exista um módulo fiel $\mathbf{M}\neq(o)$, o qual, considerado como módulo — $\mathfrak{S}$, seja quase-semi-simples.* Este resultado pode ligar-se a uma proposição mais geral, relativa a uma nova definição do radical — J.

Num anel $\mathfrak{S}$, qualquer, um ideal bilateral $\mathfrak{b}$ diz-se *primitivo*, se $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$ for anel irredutível, [Cfr. 20]. Tem lugar o seguinte

TEOREMA 12: — *Se $\mathfrak{S}$ não é anel radical, o radical — J, de $\mathfrak{S}$, é a intersecção dos seus ideais bilaterais primitivos* $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{S}$. Em primeiro lugar, dum ideal direito máximo $\mathfrak{J}$, de $\mathfrak{S}$, passa-se a um ideal bilateral $(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, que é primitivo. Pelo facto de se ter $\mathfrak{R}_{**}=\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, concluímos $\Pi\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{R}_{**}$. Por outro lado, do estudo do homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$, infere-se que o radical — J está contido naquela intersecção, pelo que será $\mathfrak{R}_{**}=\Pi\mathfrak{b}$.

Se observarmos que a intersecção $\Pi\mathfrak{b}$ não é alterada com a inclusão dos ideais primitivos iguais a $\mathfrak{S}$ e que, supondo $\mathfrak{S}$ anel radical, todo o ideal primitivo é igual ao anel, podemos dar este enunciado geral:

TEOREMA 13: — *O radical — J dum anel é a intersecção dos seus ideais primitivos.*

Seja $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{S}$ um ideal primitivo. Então $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}=\mathfrak{S}'\neq(o)$ é irredutível. Em $\mathfrak{S}'$ existe ideal direito máximo $\mathfrak{J}'$ tal que $\mathbf{M}=\mathfrak{S}'/\mathfrak{J}'\neq(o)$ é irredutível — $\mathfrak{S}'$, sendo $(\mathfrak{J}':\mathfrak{S}')=(o)$. Definindo $\mathfrak{S}'$, de modo evidente, como módulo — $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}'$ é sub-módulo — $\mathfrak{S}$ máximo em $\mathfrak{S}'$. Procuremos o respectivo contractor. Se $A\in\mathfrak{S}$ é tal que $\mathfrak{S}'A\subseteq\mathfrak{J}'$, o correspondente de A no homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$ é um elemento A' para o qual $\mathfrak{S}'A'\subseteq\mathfrak{J}'$, de sorte que $A'\in(\mathfrak{J}':\mathfrak{S}')$, tendo-se

$A' = o$, $A \in \mathfrak{b}$. Por outro lado, se $A \in \mathfrak{b}$, tem-se $\mathfrak{S}'\bar{A} = \mathfrak{S}'A' = (o) \subseteq \mathfrak{J}'$. Assim, $\mathfrak{b}$ é definido como contractor de $\mathfrak{S}'$ em $\mathfrak{J}'$. Inversamente, se $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ é contractor dum módulo $\mathbf{M} \neq (o)$ num sub-módulo máximo $\mathfrak{L} \neq \mathbf{M}$, o módulo $\mathbf{M}/\mathfrak{L} \neq (o)$ é irredutível — $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$. Portanto:

TEOREMA 14: — *É condição necessária e suficiente, para que o ideal bilateral* $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ *seja primitivo, que* $\mathfrak{b}$ *seja contractor dum módulo* $\mathbf{M} \neq (o)$ *num sub-módulo máximo* $\mathfrak{L} \neq \mathbf{M}$.

COROLÁRIO 3: — *O radical* — J *dum anel* $\mathfrak{S}$ *diferente do radical é a intersecção de todos os ideais bilaterais* $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ *que são contractores de módulos* — $\mathfrak{S}$ *não nulos em sub-módulos* — $\mathfrak{S}$ *máximos naqueles módulos e diferentes deles.*

A circunstância de os anéis cocientes $\mathfrak{S}/\mathfrak{b} \neq (o)$, nos termos do corolário anterior, serem primitivos, implica a existência de módulos $\mathbf{M}' \neq (o)$ primitivos — $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$. Podemos dizer:

TEOREMA 15: — *Se* $\mathfrak{S}$ *não é anel radical, o seu radical* — J *é a intersecção de todos os ideais bilaterais* $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ *tais que existem módulos* $\mathbf{M}' \neq (o)$ *primitivos* — $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$.

Das considerações feitas resulta também este

TEOREMA 16: — *É necessário e basta, para que* $\mathfrak{S}$ *seja um anel radical, que se realize uma das condições seguintes:* 1.ª) *dado um módulo* — $\mathfrak{S}$, *com um sub-módulo* — $\mathfrak{S}$ *máximo, diferente do módulo, o contractor no sub-módulo é o próprio anel;* 2.ª) *não existe módulo* — $\mathfrak{S}$ *com sub-módulo* — $\mathfrak{S}$ *máximo diferente do módulo.*

Quaisquer que sejam $\mathbf{M}$ e $\mathfrak{S}$, tomemos um sub-módulo $\mathfrak{N}$, de $\mathbf{M}$. O conjunto dos elementos de $\mathfrak{S}$ que anulam $\mathfrak{N}$ diz-se *aniquilador de* $\mathfrak{N}$. É um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$. Se $\mathbf{M} \neq (o)$ tiver um sub-módulo $\mathfrak{Q} \neq (o)$ mínimo com um ideal aniquilador nulo, é uma trivialidade afirmar que $\mathfrak{S}$ é anel irredutível ou primitivo. Inversamente, se $\mathfrak{S}$ é irredutível, existe, por definição, módulo — $\mathfrak{S}$ mínimo, não nulo, com um ideal aniquilador nulo.

Relativamente aos ideais primitivos, é válida a caracterização expressa no enunciado que vamos indicar.

TEOREMA 14': — *É condição necessária e suficiente, para que o ideal bilateral* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ *seja primitivo, que* $\mathfrak{a}$ *seja aniquilador dum módulo simples* $\mathbf{M} \neq (o)$. De facto, se $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ é primitivo, $\mathfrak{S}/\mathfrak{a} \neq (o)$ é irredutível. Supondo $\mathbf{M} \neq (o)$ um módulo — $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ fiel, $\mathbf{M}$ pode considerar-se como módulo simples — $\mathfrak{S}$, tendo $\mathfrak{a}$ como aniquilador. Inversamente, se $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ é aniquilador dum módulo — $\mathfrak{S}$ simples $\neq (o)$, o referido módulo é irredutível — $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$.

COROLÁRIO 3': — *O radical* — J *dum anel* $\mathfrak{S}$ *diferente do radical é a intersecção de todos os ideais bilaterais* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ *que são aniquiladores de módulos* — $\mathfrak{S}$ *simples* $\neq (o)$, [19 e 20]. Em [19] dá-se uma definição de radical que concebe este precisamente como a intersecção referida no corolário. A identificação com o radical — J, que acabamos de assinalar, é devida a JACOBSON, [Cfr. 20].

Quando $\mathfrak{S}$ é tal que todo o módulo — $\mathfrak{S}$ simples $\neq (o)$ tem aniquilador $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$ (módulo — $\mathfrak{S}$ trivial), resulta do corolário anterior que $\mathfrak{S}$ é anel radical. Inversamente, dado $\mathbf{M} \neq (o)$, simples — $\mathfrak{S}$; se $\mathfrak{S}$ é anel radical, não podemos supor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ o aniquilador de $\mathbf{M}$, pois que, ainda pelo corolário 3', seria então $\mathfrak{R}_{**} \subseteq \mathfrak{a}$. Deste modo, tem-se o

TEOREMA 16': — *É condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{S}$ *seja anel radical, que todo o módulo* — $\mathfrak{S}$ *simples, não nulo, seja um módulo* — $\mathfrak{S}$ *trivial.*

É claro que a existência de módulos — $\mathfrak{S}$ simples triviais é um facto banal, em todos os casos.

Suponhamos $\mathfrak{S} \neq (o)$ um anel semi-simples. Considerados, nos termos do corolário 3, todos os ideais bilaterais $\mathfrak{q}_\mu \neq \mathfrak{S}$ que contraem os diferentes módulos $\mathbf{M}_\mu$ em sub-módulos máximos $\mathfrak{L}_\mu \neq \mathbf{M}_\mu$, a soma directa discreta [Cfr. Cap. XV, § 11] dos módulos $\mathbf{M}_\mu/\mathfrak{L}_\mu$ representa um módulo — $\mathfrak{S}$ fiel, pelo seguinte: se $o \neq A \in \mathfrak{S}$, não pode ter-se $\mathbf{M}_\mu A \subseteq \mathfrak{L}_\mu$, para cada μ; visto que, de contrário, seria $A \in \Pi\,\mathfrak{b}_\mu$, e, portanto, $A = o$, por ser $\Pi\,\mathfrak{b}_\mu = (o)$. Há, assim, uma parcela da soma directa discreta, pelo menos, que não é anulada por A. Inversamente, façamos a hipótese de que $\mathfrak{S} \neq (o)$ admite um módulo — $\mathfrak{S}$ fiel do tipo duma soma directa discreta de módulos $\mathbf{M}_\mu/\mathfrak{L}_\mu$, como acaba de indicar-se; se, para todos os $\mathbf{M}_\mu$, fosse $\mathbf{M}_\mu \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{L}_\mu$, a soma directa discreta seria um módulo — $\mathfrak{S}$ trivial, não fiel. Há, pois, contractores de certos M_μ, nos correspondentes $\mathfrak{L}_\mu$, tais que $\mathfrak{b}_\mu \neq \mathfrak{S}$. A intersecção desses $\mathfrak{b}_\mu$ não pode ser $\neq (o)$, visto que um elemento da mesma anula a soma directa. Deste modo, $\mathfrak{S}$ é semi-simples, valendo o

TEOREMA 17: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S} \neq (o)$ seja semi-simples, que exista um módulo — $\mathfrak{S}$ fiel, isomorfo duma soma directa discreta de módulos $M_\mu/\mathfrak{L}_\mu$, onde os $\mathfrak{L}_\mu \neq M_\mu$ são sub-módulos máximos nos M_μ.* E também:

TEOREMA 17′: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S} \neq (o)$ seja semi-simples, que exista um módulo — $\mathfrak{S}$ fiel, isomorfo duma soma directa discreta de módulos — $\mathfrak{S}$ simples $\neq (o)$*, [19].

O final do § será dedicado a salientar duas afirmações feitas já: uma, no § 1 do Cap. XVII, relativa à teoria de WEDDERBURN-ARTIN; a outra, no § 1 deste Capítulo, sobre o papel das somas sub-directas.

TEOREMA 18 (1.° teor. de WEDDERBURN-ARTIN): — *Um anel semi-simples, com condição de cadeia descendente para ideais direitos, é uma soma directa de anéis simples* (1) *que se anulam mùtuamente.* O teor. 23, Cap. XIV, garante-nos que, neste caso, o radical — J coincide com o radical $\mathfrak{R}$. O teorema enunciado é, assim, o teorema 5.°, pág. 51, de (I). Eis aqui a demonstração de JACOBSON, [5, § 11]. Pelo facto de $\mathfrak{S}$ ser semi-simples, existem ideais bilaterais $\mathfrak{a}_\mu$ tais que $\Pi\, \mathfrak{a}_\mu = (o)$. Vamos ver que a condição de cadeia descendente permite substituir a intersecção considerada por uma intersecção finita. Tomemos um ideal $\mathfrak{a}_1$, entre os $\mathfrak{a}_\mu$. É claro que poderia dar-se o caso de haver um $\mathfrak{a}_\mu = (o)$. Então, $\mathfrak{S}$ seria primitivo e a condição de cadeia garantiria tratar-se dum anel simples idêntico a um anel completo de matrizes com elementos dum anel de divisão, o que demonstraria o teorema (cfr. Cap. XVII, teor. 15-a). Deste modo, para continuarmos, suporemos $\mathfrak{a}_1 \neq (o)$. Não podem todos os $\mathfrak{a}_\mu$ conter $\mathfrak{a}_1$, visto que $\Pi\, \mathfrak{a}_\mu = (o)$. Se $\mathfrak{a}_1$ não está contido em $\mathfrak{a}_2$, será $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Admitindo

(1) Aqui deve entender-se: anel simples, completamente redutível, com elemento um.

que esta última intersecção é nula, fica encontrada a intersecção finita $\Pi\, \mathfrak{a}_\mu = (o)$. Não sendo assim, existe um $\mathfrak{a}_3$ que não contém $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$, de sorte que $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_3$. O processo continua, mas como é limitado pela condição descendente, chega-se forçosamente a $\prod_{i=1}^{N} \mathfrak{a}_i = (o)$. Pode então admitir-se que os $\mathfrak{a}_i$ constituem um conjunto mínimo, nenhum deles podendo suprimir-se, para que a intersecção continue a ser nula. Faremos $\prod_{i \neq j} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}'_j$, para cada valor $j = 1, 2, \ldots, N$. O anel factor $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_j$, de harmonia com o teorema 10, supõe-se primitivo; e, como nele tem lugar a condição descendente, concluímos tratar-se de anel simples. Nessas condições, o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a}_j$ mostra que $\mathfrak{a}_j$ é ideal-bilateral máximo. Seguem-se daqui as igualdades $(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}'_j) = \mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}'_j = \mathfrak{S}$, para cada j; e, pelo teorema 42′, do § 10, do Cap. XV, conclui-se a relação $\mathfrak{S} = \mathfrak{a}'_1 + \ldots + \mathfrak{a}'_N$. Do facto de ser $\mathfrak{a}'_j \simeq \mathfrak{S}/\mathfrak{a}_j$ resulta que os $\mathfrak{a}'_j$ são simples. O teorema está demonstrado.

O teorema 10, em combinação com o teorema 1a, permite se enuncie o teorema a seguir, que é uma verdadeira generalização do 1.° teorema de WEDDERBURN-ARTIN:

TEOREMA 19: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja semi-simples, que seja isomorfo duma soma sub-directa de anéis primitivos.*

Os §§ finais do Capítulo, ainda em correlação com os assuntos já tratados, serão especialmente consagrados ao conteúdo de [16], o qual, conjuntamente com o conteúdo de [11], desenvolvido no Cap. XVI, deve ser posto em confronto com a teoria do radical — J, tratada no Cap. XIV.

5) **A noção de radical** — F — Os autores da teoria do radical — G deram essa teoria, pela primeira vez, em [16, § 4], em consequência de raciocínios mais gerais expostos em [16, § 3]. E' desses raciocínios que nos vamos ocupar.

Dado um anel $\mathfrak{S}$, seja $a \in \mathfrak{S}$. Imaginemos um processo de construção dum ideal bilateral $F(a)$, correspondente de a, gozando da propriedade seguinte: se $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$ for um homomorfismo anular, no qual a tem $\bar{a}$ como correspondente, $F(a)$ tem precisamente $F(\bar{a}) = \overline{F(a)}$ como correspondente. Precisamente, $G(a)$, $F_1(a)$, $H(a)$ dão realizações de $F(a)$, [Cfr. Cap. XVI, § 2].

Diz-se que $b \in \mathfrak{S}$ é um elemento do *radical* — F, de $\mathfrak{S}$, se, para cada $a \in (b)$, for $a \in F(a)$. A propriedade $a \in F(a)$ caracteriza a como regular — F. Um ideal (direito, esquerdo, bilateral) chama-se *regular* — F, se todos os seus elementos forem regulares — F. Representaremos por N_F o radical — F. Em N_F estão contidos todos os ideais bilaterais que são regulares — F e todos os elementos de N_F são regulares — F.

Visto que $F(a)$ é um ideal bilateral, $F(o)$ é um ideal bilateral. Então $o \in F(o)$ é sempre realizado, de modo que o é regular — F e o ideal (o) é regular — F. Pelo menos, tem-se $(o) \subseteq N_F$. É fácil dar dois casos limites na definição de N_F. Suponhamos, primeiramente, $F(a) = (o)$, qualquer que seja a. Então, $b \in N_F$ significa: se $a \in (b)$, é $a \in F(a) = (o)$. Em particular, $b \in (b)$, e, portanto, $b = o$. Assim, $N_F = (o)$, qualquer que seja $\mathfrak{S}$. Em segundo lugar, tomemos $F(a) = \mathfrak{S}$, para cada a. Então, $b \in N_F$ significa: se $a \in (b)$, é $a \in F(a) = \mathfrak{S}$. Isto sucede qualquer que seja b. Tem-se $\mathfrak{S} = N_F$, para todo o anel $\mathfrak{S}$.

Suponhamos que $\mathfrak{S}$ não é anel radical, isto é, $\mathfrak{S} \neq N_F$. À semelhança do que se fez no Cap. XIV, teorema 27, demonstraremos a proposição seguinte:

TEOREMA 20: — *Num anel* $\mathfrak{S}$, *que não é anel radical, o ideal* $\mathrm{F}(\mathrm{a})$, *suposto que* a *não é regular* — F, *pode sempre «mergulhar-se» num ideal bilateral* $\mathfrak{L}$ *tal que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ *é sub-directamente irredutível e tem o radical* — F *igual a zero.*

Tomemos o conjunto E dos ideais bilaterais de $\mathfrak{S}$ com as duas propriedades seguintes: 1) contêm o ideal $F(a)$; 2) não contêm o elemento a. O ideal $F(a)$ é um exemplo. A aplicação do princípio de ZORN ao conjunto E mostra-nos que há em E, um ideal bilateral $\mathfrak{L}$ com as três propriedades seguintes: 1′) contém $F(a)$; 2′) não contém a; 3′) não está contido noutro ideal de E. Por isso, se um ideal bilateral $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, contiver $\mathfrak{L}$, terá de satisfazer a estas duas condições: 1″) conter $F(a)$; 2″) conter a. Posto isto, estudemos o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{L}$. Sé $\bar{a}$ é o correspondente de a, como $a \notin \mathfrak{L}$, será $\bar{a} \neq o$. O anel cociente em causa é $\neq (o)$. Supondo $\bar{\mathfrak{a}} \neq (o)$ um ideal bilateral do

mesmo, será $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{L}$ o seu correspondente em $\mathfrak{S}$. Como $a \in \mathfrak{a}$, vê-se que $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{a}}$. Assim $\bar{a} \neq o$ pertence a todos os ideais bilaterais não nulos de $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ e o teorema 5 permite concluir que este anel cociente é sub-directamente irredutível. Quanto ao radical — F, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$, o facto de ser $F(a) \subseteq \mathfrak{L}$ mostra que $F(\bar{a}) = (o)$; daqui se tira $o \neq \bar{a} \notin F(\bar{a})$. O referido radical é, assim, o ideal nulo, pois qualquer ideal bilateral $\neq (o)$, devendo conter $\bar{a}$, não é regular — F. O teorema fica estabelecido.

Ao corolário 14 do Cap. XIV, faremos corresponder aqui o

TEOREMA 21: — *Supondo* $\mathfrak{L}$ *um ideal bilateral de* $\mathfrak{S}$ *tal que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ *não tem radical* — F, *o radical* $\mathrm{N_F}$, *de* $\mathfrak{S}$, *está contido em* $\mathfrak{L}$. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{L}$, dados $b \in N_F$ e o ideal (b), os seus correspondentes são $\bar{b}$ e $(\bar{b})$. Para cada $\bar{a} \in (\bar{b})$, há um $a \in (b)$ que o tem como correspondente. Ora $a \in F(a)$, de sorte que $\bar{a} \in \overline{F(a)} = F(\bar{a})$, o que prova ser $\bar{b}$ pertencente ao radical — F, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$. Nas condições do teorema, tem-se $\bar{b} = o$, $b \in \mathfrak{L}$, e, portanto, $N_F \subseteq \mathfrak{L}$.

Eis agora a afirmação correspondente ao teorema 28 do referido Cap. XIV:

TEOREMA 22: — *Se* $\mathfrak{S}$ *não é anel radical,* $\mathrm{N_F}$ *reduz-se a* $\Pi\mathfrak{L}$, *onde* $\mathfrak{L}$ *percorre todos os ideais bilaterais de* $\mathfrak{S}$ *nas condições seguintes:* 1) $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ *é sub-directamente irredutível;* 2) $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ *tem um radical* $-\mathrm{F} = (\mathrm{o})$, [16, pág. 49].

O teorema anterior garante-nos que se tem $N_F \subseteq \Pi\mathfrak{L}$. A demonstração da igualdade $\Pi\mathfrak{L} = N_F$ faz-se agora provando que, sendo $b \notin N_F$, é necessàriamente $b \notin \Pi\mathfrak{L}$. Ora, supondo b em tais condições, existe $a \in (b)$ tal que $a \notin F(a)$. Os raciocínios do teorema 20 mostraram a existência de $\mathfrak{L}$ tal que $a \notin \mathfrak{L}$. Desse modo, ter-se-á $a \notin \Pi\mathfrak{L}$, e, portanto, $b \notin \Pi\mathfrak{L}$, visto que $a \in (b)$.

COROLÁRIO 4: — *O radical* $\mathrm{N_F}$ *é um ideal bilateral.* Esta afirmação é independente do facto de $\mathfrak{S}$ ser ou não anel radical.

COROLÁRIO 5: — $\mathrm{N_F}$ *é o conjunto unido de todos os ideais bilaterais regulares* — F.

Se $\mathfrak{S}$ é anel radical, é regular — F, o que prova a afirmação. Se $\mathfrak{S}$ não é anel radical, o corolário resulta de ser N_F um ideal bilateral regular — F que contém todos os ideais bilaterais regulares — F.

TEOREMA 23: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja um anel radical, que não exista $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{S}$ para o qual:* 1) *$\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ seja sub-directamente irredutível;* 2) *$\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ tenha radical — $\mathrm{F} = (\mathrm{o})$.* A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é anel radical, não existe $\mathfrak{L}$, visto que, se existisse, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{L}$, o correspondente de $\mathfrak{S} = N_F$ seria (o), o que daria $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}$, contra a hipótese $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{S}$. A condição é *suficiente:* Se $\mathfrak{L}$ não existe, $\mathfrak{S}$ é anel radical, visto que, se o não fosse, existiria $\mathfrak{L}$ nas condições indicadas.

TEOREMA 24: — *O anel $\mathfrak{S}/\mathrm{N_F}$ é semi-simples.* Se $\mathfrak{S}$ é anel radical, $\mathfrak{S}/N_F = (o)$, e o teorema é válido. De contrário, tomemos um dos ideais $\mathfrak{L}$ referidos no teorema 22. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/N_F$, tem-se $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/N_F$; sabe-se, então, que é $\mathfrak{S}/\mathfrak{L} \simeq (\mathfrak{S}/N_F)/(\mathfrak{L}/N_F)$. Na hipótese $N_F = \mathfrak{L}$, o teorema está demonstrado. Admitindo $\mathfrak{L} \supset N_F$, o isomorfismo referido, combinado com o teorema 21, mostra que o radical do anel cociente está contido em $\mathfrak{L}/N_F$. Se $\bar{b}$ pertencer a esse radical, pode dar-se-lhe a forma $\bar{b} = c + N_F$, com $c \in \Pi\mathfrak{L} = N_F$. É, pois, $\bar{b} = o$, o que acaba de estabelecer o teorema.

Estamos agora em condições de demonstrar a proposição que, nesta teoria, deve substituir o teorema 19. Tem-se:

TEOREMA 25: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja semi-simples, que seja isomorfo duma soma sub-directa de anéis sub-directamente irredutíveis, cada um dos quais com um radical — F igual a (o).*

A condição é *suficiente:* Supondo $\mathfrak{S}$ isomorfo duma soma sub-directa de anéis $\mathfrak{B}_\mu$, como se refere no enunciado, o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{B}_\mu$ determina um isomorfismo $\mathfrak{B}_\mu \simeq \mathfrak{S}/\mathfrak{b}_\mu$, sendo $\prod_\mu \mathfrak{b}_\mu = (o)$. Por ser $N_F \subseteq \mathfrak{b}_\mu$, qualquer que seja μ, resulta $N_F \subseteq \Pi\,\mathfrak{b}_\mu = (o)$. A condição é *necessária.* Admitindo que é $N_F = (o)$, pode ter-se $\mathfrak{S} = N_F = (o)$. O teorema é válido para este caso. Se $\mathfrak{S} \neq N_F$, então $\mathfrak{S}$ não é anel radical, e o teorema 22 afirma a existência dum conjunto de ideais $\mathfrak{L}_\mu$ tais que $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}_\mu$ é sub-directamente irredutível, tem radical — F igual a (o) e $\Pi\,\mathfrak{L}_\mu = (o)$. Da teoria das somas directas, sabemos que $\mathfrak{S}$ é isomorfo duma soma sub-directa dos anéis $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}_\mu$.

Os anéis sub-directamente irredutíveis com um radical — F igual a (o) desempenham aqui um papel análogo ao dos anéis primitivos na teoria de JACOBSON. Aqueles anéis podem caracterizar-se ainda por este outro

TEOREMA 26: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{A} \neq (\mathrm{o})$, sub-directamente irredutível, tenha radical — F igual a (o), que a intersecção J dos seus ideais bilaterais não nulos contenha um elemento $\mathrm{a} \neq \mathrm{o}$ tal que $\mathrm{F}(\mathrm{a}) = (\mathrm{o})$.*

É claro que, supondo $\mathfrak{A} \neq (o)$ sub-directamente irredutível e $N_F = (o)$, o facto de ser $J \neq (o)$ leva a $J \neq N_F$. Tomemos $b \neq o$, em J. Como J é mínimo, será $(b) = J$. O ideal (b) não é regular — F. Existe $a \in (b)$ tal que $a \notin F(a)$. Então, $F(a) = (o)$, pois $F(a) \neq (o)$ acarretaria $F(a) \supseteq J = (b)$, $a \in F(a)$. Inversamente, a existência, em J, de $a \neq o$, tal que $F(a) = (o)$, mostra que J não é regular — F. Será $N_F = (o)$, pois a relação $N_F \neq (o)$ daria $J \subseteq N_F$, ou seja a regularidade — F, de J.

A fim de aplicarmos os resultados anteriores ao caso em que a regularidade — F se reduz à regularidade — G, teremos necessidade deste

LEMA 3: — *Num anel qualquer, um ideal bilateral mínimo $\mathfrak{a} \neq (\mathrm{o})$, com uma unidade esquerda e, de $\mathfrak{S}$, tem elemento um.* Sendo $x \in \mathfrak{a}$, é $ex = x$. O ideal esquerdo $\{xe - x\}$ é, então, um ideal bilateral contido em $\mathfrak{a}$. Admitamos $\{xe - x\} = \mathfrak{a}$. Será, em particular, $ze - z = e$, para um certo $z \in \mathfrak{a}$. Daqui tira-se $ze - ze = e = o$, o que é absurdo. Ter-se-á, pois, $\{xe - x\} = (o)$, pelo que e satisfaz a $xe = x$, para cada $x \in \mathfrak{a}$, como afirma o teorema.

Posto isto, conforme o teorema 26, tomemos o anel sub-directamente irredutível $\mathfrak{A} \neq (o)$ e suponhamos nulo o radical — G: $N = (o)$. O referido teorema 26 garante a existência, em J, de $e \neq o$, tal que $G(e) = (o)$. Mas, sendo $G(e) = \{ex - x + \Sigma(r_i e s_i - r_i s_i)\}$, vê-se que, pondo $r_i =$

$= s_i = o$, é $ex - x = o$, qualquer que seja $x \in \mathfrak{A}$. Por isso, e é unidade esquerda em $\mathfrak{A}$. Da relação $e\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \subseteq J$ e do lema anterior, resulta ser $\mathfrak{A} = J$ um anel simples com elemento um. Podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 27: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{A} \neq (o)$ seja sub-directamente irredutível e tenha radical — G igual a (o), que seja anel simples com elemento um.* Já vimos que a condição é necessária. Para se provar que é suficiente, basta ter em conta os factos seguintes: 1) $\mathfrak{A} \neq (o)$ é sub-directamente irredutível (teor. 5); 2) o elemento $1 \in J = \mathfrak{A}$ é tal que $G(1) = \{x - x + \Sigma(r_i s_i - r_i s_i)\} = (o)$. Então, pelo teorema 26, é $N = (o)$.

COROLÁRIO 6: — *Um anel simples $\mathfrak{A}$ sem elemento um é um anel radical.* Se $\mathfrak{A} = (o)$, a afirmação é imediata. Se $\mathfrak{A} \neq (o)$, não pode ser nulo o seu radical — G. Então: $(o) \neq N = \mathfrak{A}$.

TEOREMA 28 (1.º teorema de WEDDERBURN-ARTIN generalizado): — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S} \neq (o)$ seja semi-simples ($N = (o)$), que seja isomorfo duma soma sub-directa de anéis simples com elemento um.* A condição é *necessária:* Na verdade, é $\mathfrak{S} \neq N$, por hipótese, e os teoremas 25 e 27 (por esta ordem) estabelecem o resultado. A condição é *suficiente:* É o que se conclui combinando os teoremas 27 e 25 (por esta ordem).

TEOREMA 29: — *Se $\mathfrak{S}$ não é anel radical ($\mathfrak{S} \neq N$), N é a intersecção de todos os ideais bilaterais $\mathfrak{L}$, de $\mathfrak{S}$, tais que $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ é simples e tem elemento um.* Esta afirmação resulta combinando os teoremas 22 e 27.

COROLÁRIO 7: — *Se $\mathfrak{S}$ tem elemento um, N é a intersecção de todos os ideais bilaterais máximos de $\mathfrak{S}$.* Visto que existe elemento um, $\mathfrak{S}$ não é anel radical. Quaisquer que sejam os ideais $\mathfrak{L}$ do teorema anterior, $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ tem elemento um; então, basta considerar os ideais $\mathfrak{L}$ que garantem ser $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}$ um anel simples, e esses são precisamente os ideais bilaterais máximos.

TEOREMA 30: — *É condição necessária e suficiente, para que N coincida com o radical — J, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ não tenha ideal bilateral regular — G.* Se $N = \mathfrak{R}_{**}$, é claro que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ não tem radical — G. Inversamente, se aquele anel cociente não tem radical — G, o estudo do homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ mostra que todo o ideal regular — G tem (o) como correspondente. Em particular, será $N \to (o)$, o que leva a $N \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, e, portanto, a $N = \mathfrak{R}_{**}$.

A condição expressa no teorema anterior realiza-se em cada anel $\mathfrak{S}$, no qual vale a condição de cadeia descendente para ideais direitos, como vamos ver. É claro que, dada uma decomposição dum anel $\mathfrak{A}$ numa soma directa de ideais bilaterais, sob a forma $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s$, esta soma é também soma directa completa dos $\mathfrak{a}_\mu$. Pondo aqui $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{a}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{a}_s$, são os ideais $\mathfrak{b}_i$ que verificam a condição $\Pi \mathfrak{b}_i = (o)$, [teor. 42, § 10, Cap. XV]; além de se ter $\mathfrak{a}_i \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{b}_i$. Posto isto, admitamos válida a condição descendente para os ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contêm o radical — J. Então, $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ é um anel semi-simples no sentido de [(I), pág. 49]. Reduz-se, por isso, a uma soma directa de anéis simples com elemento um, sendo nulo o seu radical — G. Assim:

TEOREMA 31: — *Se, num anel $\mathfrak{S}$, é válida a condição descendente para os ideais direitos que contêm o radical — J, tem-se $N = \mathfrak{R}_{**}$.*

Supondo agora válida a condição descendente para todos os ideais direitos do anel (ou para os ideais direitos que contêm o radical usual $\mathfrak{R}$ e para os ideais direitos contidos em $\mathfrak{R}$), é $N = \mathfrak{R}_{**} = \mathfrak{R}$. Então:

TEOREMA 32 (1.º teor. de WEDDERBURN-ARTIN): — *Um anel semi-simples (isto é, com $N = (o)$), no qual seja válida a condição de cadeia descendente para ideais direitos, é uma soma directa de anéis simples que se anulam mùtuamente.* Na verdade, em [16, pág. 52], estabelece-se, mesmo, o seguinte

TEOREMA 33: — *Um anel semi-simples, no qual seja válida a condição de cadeia descendente para ideais bilaterais, é uma soma directa de anéis simples que se anulam mùtuamente.* Se $\mathfrak{S} = (o)$, o teorema é válido. Supondo $\mathfrak{S} \neq (o)$, como se admite $N = (o)$, $\mathfrak{S}$ não é anel radical, tendo-se $N = \Pi \mathfrak{L} =$

$=(o)$, nos termos do teorema 29. A condição descendente do enunciado leva a $\Pi\mathfrak{L}_i=(o)$, $(i=1, 2, \ldots, r)$, constituindo os $\mathfrak{L}_i$ um conjunto mínimo de intersecção $=(o)$. Então, $\mathfrak{S}$ é isomorfo duma soma sub-directa de anéis $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}_i$, $(i=1, 2, \ldots, r)$. Seja $o \neq b \in \prod_{i=2}^{r} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}'_1$. Não poderá ter-se $b \in \mathfrak{L}_1$, de sorte que o elemento correspondente a b, naquele isomorfismo, será $(b+\mathfrak{L}_1, \ldots, b+\mathfrak{L}_r)=(\bar{b}_1, o, \ldots, o)$, com $\bar{b}_1 \neq o$. A totalidade dos elementos $\bar{b}_1$ obtidos por este processo constitui um ideal bilateral não nulo de $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}_1$. Como este anel cociente é simples, podemos afirmar que a soma sub-directa acima referida abrange todos os elementos da forma $(\bar{b}_1; o, \ldots, o)$, com $\bar{b}_1 \in \mathfrak{S}/\mathfrak{L}_1$. O mesmo se diz dos restantes índices i. Deste modo, fazem parte da soma sub-directa todos os elementos da forma $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r)$, quaisquer que sejam os $\bar{b}_i \in \mathfrak{S}/\mathfrak{L}_i$. A soma sub-directa é, assim, a soma directa completa das $\mathfrak{S}/\mathfrak{L}_i$ verificando-se todas as condições do enunciado.

Observação: — À semelhança do que sucedeu a propósito do teorema 10, temos aqui também $\mathfrak{L}'_i \simeq \mathfrak{S}/\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{L}'_i \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}_i+\mathfrak{L}'_i=\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}'_1+\ldots+\mathfrak{L}'_r=\mathfrak{S}$. Num caso como no outro, trata-se de somas sub-directas especiais muito particulares. Um teorema mais geral é este:

Teorema 34: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja isomorfo duma soma sub-directa especial de anéis simples com elemento um, que todo o ideal bilateral não nulo de $\mathfrak{S}$ contenha um ideal bilateral simples com elemento um,* [17, págs. 872 e 873]. A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é isomorfo da soma sub-directa especial $\mathfrak{T}$, de anéis $\mathfrak{B}_\mu$, simples, e com elemento um, consideremos o ideal bilateral $\mathfrak{b} \neq (o)$, de $\mathfrak{T}$, e tomemos $o \neq b \in \mathfrak{b}$. Por via de $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{B}_\mu$, a b corresponde, quando $\mu=\lambda$ (por ex.), um elemento $b_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, com $b_\lambda \neq o$. Se $c \in \mathfrak{T}$ for o elemento para o qual $c_\mu=o$, salvo c_λ que supõe $=1 \in \mathfrak{B}_\lambda$, o elemento $a=bc \in \mathfrak{b}$ tem nulos todos os a_μ, salvo $a_\lambda=b_\lambda$. O conjunto dos elementos de $\mathfrak{B}_\lambda$ contidos em $\mathfrak{b}$ é, assim, um ideal bilateral $\neq (o)$, o que significa $\mathfrak{B}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}$, como se deseja.

A condição é *suficiente:* Dado $\mathfrak{S}$, consideremos o conjunto $\{\mathfrak{a}_\nu\}$ dos ideais bilaterais simples com elemento um. O aniquilador de $\mathfrak{S}$, como ideal bilateral, é nulo, visto que, de contrário, conteria um $\mathfrak{a}_\nu$, o elemento um do qual não anularia $\mathfrak{S}$, por não anular $\mathfrak{a}_\nu$. A condição suplementar do teorema 4 é verificada, de sorte que bastará ter em conta as propriedades de $\mathfrak{S}$ referidas no teorema 3. O lema 6 do final do Cap. XVI garante ter-se, para cada ν, $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_\nu+\mathfrak{b}_\nu$. E, como é $\mathfrak{a}_\nu \cap \mathfrak{a}_\mu=(o)$, por serem simples ambos os ideais, apenas resta verificar que se tem $\Pi\mathfrak{b}_\nu=(o)$. A condição $\Pi\mathfrak{b}_\nu \neq (o)$ arrastaria a existência dum $\mathfrak{a}_\lambda$ contido na intersecção; em seguida, o elemento $1 \in \mathfrak{a}_\lambda$ daria $(o)=1.\mathfrak{b}_\lambda \supseteq 1.\Pi\mathfrak{b}_\nu \neq (o)$, pois $\Pi\mathfrak{b}_\nu \subseteq \mathfrak{b}_\lambda$. O teorema está provado.

Ainda sobre somas sub-directas especiais, podemos demonstrar um outro teorema que especializa igualmente o anterior. Para isso, começaremos por enunciar um certo número de lemas, os quais devem comparar-se com as proposições correspondentes de págs. 49 a 51, de (I).

Lema 4: — *Dado um anel $\mathfrak{S}$, se $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral sem nilideal de $\mathfrak{S}$, no qual vale a condição de mínimo para os ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contém, então, supondo $\mathfrak{r}=e\mathfrak{S}\subset\mathfrak{a}$, existe um ideal direito $\mathfrak{r}'=E\mathfrak{S}\supset e\mathfrak{S}$, igualmente contido em $\mathfrak{a}$.* A decomposição direita de Peirce, $\mathfrak{S}=e\mathfrak{S}+\mathfrak{B}$, leva a $\mathfrak{a}=e\mathfrak{S}+\mathfrak{B}\cap\mathfrak{a}=e\mathfrak{S}+\mathfrak{r}_1$, onde $\mathfrak{r}_1$ é um ideal direito de $\mathfrak{S}$ contido em $\mathfrak{a}$. Pela condição de mínimo do enunciado, existe um idempotente $e' \neq e$ pertencente a $\mathfrak{r}_1$ e tal que $ee'=o$. Pondo $e_1=e$, $e_2=e'-e'e$, vê-se que $e_2e_1=e_1e_2=o$, $e_2^2=e_2$, de sorte que o idempotente $E=e_1+e_2$ dá precisamente $\mathfrak{r}'=E\mathfrak{S}=e_1\mathfrak{S}+e_2\mathfrak{S}\supset\mathfrak{r}$. [Os raciocínios são exactamente os do teorema 2.°, de pág. 50, de (I)].

Lema 5: — *O ideal $\mathfrak{a}$ do lema anterior é soma directa de ideais direitos simples de $\mathfrak{S}$.* A demonstração faz-se com os raciocínios do teorema 1.°, de [(I), págs. 49 e 50].

Lema 6: — *$\mathfrak{a}$ tem uma unidade esquerda, se as condições do lema 4 são verificadas,* [(I), pág. 50, corolário].

LEMA 7: — $\mathfrak{a}$ *tem, sempre nas mesmas condições, elemento um.* Designemos por u a unidade esquerda de $\mathfrak{a}$ referida no lema anterior e façamos a decomposição de PEIRCE $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}u + \mathfrak{A}$. Será $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}u + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}$, assim como $u.(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}).u = (o)$. Tira-se daqui $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a})^2 = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}).u(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a})u.(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{a}) = (o)$, o que leva a $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}u$, como se afirma.

LEMA 8: — *Dado um anel $\mathfrak{S}$, se $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$, que não contém nilideal de $\mathfrak{S}$, e se vale em $\mathfrak{a}$ a condição de mínimo para os ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contém, então $\mathfrak{a}$ é uma soma directa de anéis simples, cada um dos quais isomorfo dum anel completo de matrizes com elementos dum anel divisão*, [17, págs. 873 e 874]. Sabemos que $\mathfrak{a}$, por ter elemento um, é parcela de $\mathfrak{S}$ [Cap. XVI, § 4, lema 6]: $\mathfrak{S} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Deste modo, não só todo o ideal de $\mathfrak{S}$ contido em $\mathfrak{a}$ é ideal de $\mathfrak{a}$, como ainda todo o ideal de $\mathfrak{a}$ é ideal de $\mathfrak{S}$. Por isso, $\mathfrak{a}$, como anel, é anel semi-simples noetheriano [(I), pág. 51, teorema 5.º].

TEOREMA 35: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja isomorfo duma soma sub-directa especial de anéis simples, cada um dos quais isomorfo dum anel completo de matrizes com elementos dum anel de divisão, que todo o ideal bilateral de $\mathfrak{S}$ contenha um ideal bilateral satisfazendo à condição de mínimo para os ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contém e sem nilideal de $\mathfrak{S}$.* A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é isomorfo da soma sub-directa especial de anéis $\mathfrak{B}_\mu$ (simples, noetherianos), estamos em condições previstas pelo teorema 34, de sorte que, dado o ideal bilateral $\mathfrak{b} \neq (o)$, de $\mathfrak{S}$, há um $\mathfrak{B}_\lambda \subseteq \mathfrak{b}$. Ora $\mathfrak{B}_\lambda$ satisfaz à condição de mínimo para os ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contém e não possui nilideal de $\mathfrak{S}$.

A condição é *suficiente:* Dado $\mathfrak{S}$, consideremos os ideais bilaterais $\mathfrak{L}$, de $\mathfrak{S}$, satisfazendo às condições indicadas no enunciado, que são também as condições a que satisfaz $\mathfrak{a}$ no lema 8. Cada $\mathfrak{L}$, nos termos desse lema, é uma soma directa de ideais bilaterais $\mathfrak{a}_\nu'$, de $\mathfrak{S}$, que são anéis simples noetherianos. Tomando, então, o conjunto dos $\mathfrak{a}_\nu$, a demonstração faz-se como no teorema 34.

Para termo das considerações deste Capítulo, provaremos a proposição a seguir.

TEOREMA 36: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel $\mathfrak{S}$ seja isomorfo duma soma directa discreta de anéis simples com elemento um, que $\mathfrak{S}$ seja a soma dos seus ideais bilaterais simples com elemento um.* A condição é *necessária:* Se $\mathfrak{S}$ é isomorfo da soma directa discreta indicada no teorema, tomemos em $\mathfrak{S}$ os seus ideais bilaterais que correspondem, por via do isomorfismo, aos anéis simples com elemento um. Em face da definição de soma directa discreta, vê-se que aqueles ideais bilaterais são os únicos ideais bilaterais simples com elemento um. Assim, a condição do teorema é necessária.

A condição é *suficiente:* Se $\mathfrak{S}$ é a soma dos seus ideais bilaterais $\mathfrak{a}_\nu$, simples e com elemento um, tem-se $\mathfrak{a}_\mu \cap \mathfrak{a}_\nu = (o)$, $(\mu \neq \nu)$, assim como $\mathfrak{S} = \mathfrak{a}_\mu + \mathfrak{b}_\mu$, com um certo ideal bilateral $\mathfrak{b}_\mu$, correspondente a μ. Suponhamos $a \in \mathfrak{S}$ tal que $a\mathfrak{S} = \mathfrak{S}a = (o)$. Decompondo a sob a forma $a = a_\alpha + a_\beta + \ldots + a_\lambda$, $(a_\alpha \in \mathfrak{a}_\alpha, \ldots)$, e chamando e_ν o elemento um de $\mathfrak{a}_\nu$, tem-se $\mathfrak{a}_\mu e_\nu \subseteq \mathfrak{a}_\mu \cap \mathfrak{a}_\nu$, ou seja $\mathfrak{a}_\mu e_\nu = o$, se $\mu \neq \nu$. Então $a(e_\alpha + e_\beta + \ldots + e_\lambda) = a = o$, como também resulta da hipótese $a\mathfrak{S} = (o)$. Conclui-se daqui que o aniquilador de $\mathfrak{S}$ é o ideal nulo. Se supusermos agora $a \in \Pi\, \mathfrak{b}_\nu$, tem-se $a e_\alpha = a_\alpha \in \Pi\, \mathfrak{b}_\nu \subseteq \mathfrak{b}_\alpha$. A igualdade $\mathfrak{a}_\alpha \cap \mathfrak{b}_\alpha = (o)$ dá $a_\alpha = o$, o mesmo se dizendo de $a_\beta, \ldots, a_\lambda$, pelo que $a = a_\alpha + \ldots + a_\lambda = o$, $\Pi\, \mathfrak{b}_\nu = (o)$. O teorema 4 é aplicável, reduzindo-se $\mathfrak{S}$ a um anel isomorfo da soma sub-directa especial dos $\mathfrak{a}_\nu$. O sistema $\{a_\nu\}$ dos elementos correspondentes a $a \in \mathfrak{S}$ determina-se pelas decomposições $\mathfrak{S} = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}_\alpha$, escrevendo $a = a_\alpha + b_\alpha$ e pondo $a \to a_\alpha$. Vê-se, deste modo, que, admitindo ser $a = a_\alpha + a_\beta + \ldots + a_\lambda$, é $a \to a_\rho = o$, se $\rho \neq \alpha, \beta, \ldots, \lambda$. A soma especial é discreta, como se afirmou.

Publicações do CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA
DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
N.º 31

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(3.ª LIÇÃO: SOMAS SUB-DIRECTAS DE ANÉIS, ANÉIS SEMI-SIMPLES)

POR
A. ALMEIDA COSTA

Publicação subsidiada pelo INSTITUTO DE ALTA CULTURA
1 9 5 2