ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA
Extracto do tomo XXXVI

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(2.ª LIÇÃO)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116
—
1952

Extracto do fasc. III do tomo XXXVI
dos
«Anais da Faculdade de Ciências do Porto»

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

2.ª Lição (1)

Anéis primitivos

1) **Introdução** — Dedicaremos esta lição ao estudo aprofundado dos *anéis primitivos* de Jacobson, os quais, como veremos no § 3, se identificam com os anéis densos ou irredutíveis de que já falámos nos Capítulos XIV e XV. Será utilizada a Bibliografia seguinte: [4] — N. Jacobson, *Structure theory of simple without finiteness assumptions*, «Transactions of the American Mathematical Society», vol. 57, 1945, págs. 228 a 245; [5] — N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, «American Journal of Mathematics», vol. 67, 1945, págs. 299 a 320; [8] — N. Jacobson, *On the theory of primitive rings*, «Annals of Mathematics», vol. 48, 1947, págs. 8 a 21; [9] — T. Nakayama e G. Azumaya, *On irreducible rings*, «Annals of Mathematics», vol. 48, 1947, págs. 949 a 965.

As considerações aqui desenvolvidas, parte das quais assentam sobre uma ideia devida a J. Dieudonné, a que aludiremos adiante, incluirão um método de estudo de certos anéis simples, no qual se reencontra, como caso particular, o 2.º teorema fundamental de Wedderburn-Artin, constante de [(I), pág. 57]. No Capítulo seguinte serão coroados os raciocínios expostos, tratando-se uma análise extensa dos anéis semi-simples nos diferentes sentidos. Far-se-á o que pode chamar-se, em certos pontos, uma teoria de Wedderburn-Artin generalizada.

(1) Veja-se a 1.ª lição no fascículo anterior deste mesmo tomo, págs. 65 a 83, a fim de serem compreendidas as citações bibliográficas.

2) **Sobre os anéis densos ou irredutíveis** — Encontrámos, pela primeira vez, a noção de anel irredutível no Cap. XIV, § 5. No Cap. XV, § 15, foi introduzida a noção de anel denso. A identidade das duas noções foi demonstrada no Cap. XV, § 16, por via do importante teorema de CHEVALLEY-JACOBSON. No § próximo será dada uma definição abstracta de anel irredutível. Aqui vamos provar um certo número de resultados interessantes, que traduzem propriedades dos anéis em questão.

Voltemos a considerar, como no Cap. XV, o anel $\overline{\mathfrak{A}}$ dos endomorfismos — $\mathfrak{D}$, do módulo $\mathfrak{M}$ sobre o anel de divisão $\mathfrak{D}$. Sabemos que todo o sub-módulo — $\mathfrak{D}$, finito ou não, é imagem homomorfa de $\mathfrak{M}$ definida por idempotente, visto ser sempre uma parcela duma soma directa igual a $\mathfrak{M}$. Fàcilmente se vê que $\overline{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{D}$ têm a mesma *característica,* subentendida esta como o número inteiro zero, se nenhum inteiro $\neq o$ anula todos os elementos do anel; ou, de contrário, como o mais pequeno inteiro que goza daquela propriedade. Sejam, com efeito, q e p as características respectivas. Se $p=o$, para cada $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ e cada inteiro $m \neq o$ é $mA \neq o$, se $A \neq o$. Na verdade, seja $x \in \mathfrak{M}$ tal que $xA \neq o$. Então $x \,.\, mA = x(A + \ldots + A) = m \,.\, xA$, e $xA \,.\, mu$ (1) $= xA \,.\, u + \ldots + xA \,.\, u = xu \,.\, A + \ldots + xu \,.\, A = m \,.\, xA$. Se fosse $x \,.\, mA = o$, seria $xA \,.\, mu = o$, $xA(mu)(mu)^{-1} = xA = o$, contra a hipótese. Ao caso $p=o$ corresponde, pois, $q=o$. Supondo $p \neq o$, escrevamos sucessivamente, se m não é múltiplo de p: $xA \neq o$, $x \,.\, mA = m \,.\, xA$, $xA \,.\, mu = m \,.\, xA$, $xA(mu)(mu)^{-1} = xA$, como anteriormente. Vê-se que $xA \,.\, mu = x \,.\, mA \neq o$. Assim, a característica de $\overline{\mathfrak{A}}$ só pode ser um múltiplo de p. Por outro lado, $x \,.\, pA = p \,.\, xA = xA \,.\, pu = o$ mostra que essa característica é p. É claro que todos os sub-anéis de $\overline{\mathfrak{A}}$, que não se reduzem ao anel zero, têm a mesma característica p.

Sejam agora $\mathfrak{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, e um sub-módulo finito $\mathfrak{N}$, de ordem n. Dado um anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$ de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathfrak{M}$ (que, como sabemos, pode não ser a totalidade de tais endomorfismos), os elementos de $\overline{\mathfrak{A}}$, que induzem

(1) Aqui u é ainda o elemento um do anel de divisão $\mathfrak{D}$.

endomorfismos em $\mathfrak{N}$ (ou aplicam $\mathfrak{N}$ dentro de $\mathfrak{N}$), constituem um sub-anel $\overline{\mathfrak{B}}$, de $\overline{\mathfrak{A}}$, e têm a totalidade dos endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathfrak{N}$, como imagem homomorfa. Essa totalidade é um anel $\mathfrak{D}'_n$, onde $\mathfrak{D}'$ é um anel de divisão anti-isomorfo de $\mathfrak{D}$ (1). Assim, se $\overline{\mathfrak{C}}$ for o sub-anel de $\overline{\mathfrak{B}}$ composto dos elementos que induzem em $\mathfrak{N}$ o endomorfismo nulo, tem-se $\overline{\mathfrak{B}}/\overline{\mathfrak{C}} \simeq \mathfrak{D}'_n$. Portanto, [8, pág. 9]:

TEOREMA 1: — *Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel denso de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathfrak{M}$, ou $\overline{\mathfrak{A}}$ é isomorfo dum anel $\mathfrak{D}'_m$ (caso em que $\mathfrak{M}$ é finito sobre $\mathfrak{D}$), ou, não sendo assim, $\overline{\mathfrak{A}}$ tem sub-anéis com imagens homomorfas $\mathfrak{D}'_n$, para qualquer n inteiro. $\mathfrak{D}'$ é anel de divisão anti-isomorfo de $\mathfrak{D}$.*

Insistamos em que a concretização do anel irredutível $\mathfrak{A}$, como anel de endomorfismos de $\mathfrak{M}$, implica que $\mathfrak{M}$ seja *módulo fiel:* os endomorfismos pertencentes a $\mathfrak{A}$ são todos distintos (2). NAKAYAMA e AZUMAYA, [9], definem *anel de ideal irredutível* como aquele anel irredutível $\mathfrak{A}$ que tem um ideal direito mínimo fiel. A esse respeito, é válido o seguinte

TEOREMA 2: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel irredutível $\mathfrak{A}$ seja anel de ideal irredutível, que exista em $\mathfrak{A}$ ideal direito mínimo.*

Que a condição é *necessária,* resulta da definição. Para se ver que é *suficiente,* tomemos $\bar{\mathfrak{r}}$ como ideal direito mínimo do anel irredutível $\mathfrak{A}$. Vamos provar que $\bar{\mathfrak{r}}$ é fiel. Tomemos um módulo fiel $\mathfrak{M}$. Tem-se $\mathfrak{M}\bar{\mathfrak{r}} \neq (o)$, pelo que existe $v \in \mathfrak{M}$ tal que $v\bar{\mathfrak{r}} \neq (o)$. Será $v\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{M}$. Se $a \in \mathfrak{A}$ for tal que $\bar{\mathfrak{r}}a = (o)$, vê-se que $v\bar{\mathfrak{r}}a = \mathfrak{M}a = (o)$, $a = o$. Apenas o elemento nulo de $\mathfrak{A}$ induz em $\bar{\mathfrak{r}}$ o endomorfismo nulo, q. e. d.

Em virtude de ter lugar o homomorfismo $\bar{\mathfrak{r}} \sim v\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{M}$, consideremos um elemento $r \in \bar{\mathfrak{r}}$ tal que $vr = o$. Se for

(1) Cfr. [(I), pág. 239].
(2) Tem sido nossa regra de sempre, pressupor que os elementos dum conjunto de endomorfismos se imaginam sempre distintos.

$r \neq o$, o ideal direito $(r)_d$ é igual a $\overline{\mathfrak{r}}$, tendo-se $v(r)_d = (o) = v\overline{\mathfrak{r}} = \mathfrak{M}$, o que é absurdo. Deste modo, a relação $vr = o$ implica $r = o$, pelo que tem lugar o isomorfismo $\overline{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{M}$, o que permite enunciar este.

COROLÁRIO 1: — *Se um anel irredutível tem ideais direitos mínimos, tais ideais são todos isomorfos.*

Estendamos a noção de representação tratada em (I), Cap. VIII. Dado um anel $\mathfrak{S}$, uma representação de $\mathfrak{S}$ será uma correspondência anular homomorfa $a \to \bar{a}$, entre $a \in \mathfrak{S}$ e $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{S}}$, na qual este último anel se supõe concretizado como anel de endomorfismos de determinado módulo. A representação será *fiel,* se a correspondência $a \to \bar{a}$ for um isomorfismo, e será *irredutível,* se $\overline{\mathfrak{S}}$ for irredutível. Em (I), geralmente, os elementos de $\mathfrak{S}$ induziam endomorfismos num módulo finito relativo a um anel de divisão. Então, aos referidos endomorfismos, fizemos corresponder matrizes quadradas finitas com elementos daquele anel de divisão, de sorte que a representação era dada, indirectamente, por um anel de matrizes finitas.

Duas representações $\overline{\mathfrak{S}}_1$ e $\overline{\mathfrak{S}}_2$, de $\mathfrak{S}$, dir-se-ão *equivalentes,* se os módulos $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$, sobre que operam $\overline{\mathfrak{S}}_1$ e $\overline{\mathfrak{S}}_2$, respectivamente, forem isomorfos — $\mathfrak{S}$. Significa isto o seguinte: se $x_1 \in \mathfrak{M}_1$, $x_2 \in \mathfrak{M}_2$, há uma correspondência isomorfa $x_1 \to x_2$, tal que, para cada $a \in \mathfrak{S}$, se tem $x_1 a \to x_2 a$. O símbolo $x_1 a$ representa $x_1 \bar{a}_1$, onde $\bar{a}_1 \in \overline{\mathfrak{S}}_1$ é o correspondente de a no homomorfismo anular $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}_1$. Definição análoga se dá de $x_2 a$.

Do que anteriormente se disse sobre anéis irredutíveis, podemos concluir este

TEOREMA 3: — *Todas as representações fiéis dum anel irredutível que tenha ideais direitos mínimos são equivalentes.* Se $\mathfrak{A}$ for o anel irredutível e $\overline{\mathfrak{r}}$ um ideal direito mínimo do mesmo, supondo $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$ duas concretizações de $\mathfrak{A}$ como endomorfismos de $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$, respectivamente, vimos que os ideais $\overline{\mathfrak{r}}_1$ e $\overline{\mathfrak{r}}_2$, isomorfos de $\mathfrak{r}$, e pertencentes a $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$, verificavam as relações $x_1\overline{\mathfrak{r}}_1 = \mathfrak{M}_1$, $x_2\overline{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{M}_2$, para um certo $x_1 \in \mathfrak{M}_1$ e um certo $x_2 \in \mathfrak{M}_2$. Das relações

$\overline{\mathfrak{r}} \simeq \overline{\mathfrak{r}}_1 \simeq x_1\overline{\mathfrak{r}}_1 = \mathfrak{M}_1$, $\overline{\mathfrak{r}} \simeq \overline{\mathfrak{r}}_2 \simeq x_2\overline{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{M}_2$, resulta a afirmação. Observemos mais uma vez que o isomorfismo — $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$, é condicionado como se segue: $x_1\bar{r}_1 \to x_2\bar{r}_2$, $x_1\bar{r}_1 a = x_1\bar{r}_1\bar{a}_1 \to x_2\bar{r}_2 a = x_2\bar{r}_2\bar{a}_2$, $(\bar{r}_1 \in \overline{\mathfrak{r}}_1, \bar{r}_2 \in \overline{\mathfrak{r}}_2)$. Pondo $x_1\bar{r}_1 = \xi_1$, $x_2\bar{r}_2 = \xi_2$, vemos que o isomorfismo $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2$ arrasta, efectivamente, para cada $\xi_1 \in \mathfrak{M}_1$, a existência de $\xi_2 \in \mathfrak{M}_2$ tal que

$$\xi_1 \to \xi_2, \quad \xi_1 a = \xi_1 \bar{a}_1 \to \xi_2 a = \xi_2 \bar{a}_2.$$

Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel irredutível de endomorfismos de $\mathfrak{M}$, consideremos, no anel dos endomorfismos de $\mathfrak{M}$, [(I), pág. 225], os endomorfismos que comutam com $\overline{\mathfrak{A}}$, isto é os endomorfismos — $\overline{\mathfrak{A}}$. [Veja-se o Cap. XV, § 16, teorema de CHEVALLEY-JACOBSON]. Eles constituem um anel de divisão $\mathfrak{D}$. [Veja-se o tomo 1.°, pág. 128]. M torna-se, então, num *módulo duplo* relativamente a $\overline{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{D}$, [(I), pág. 237]. Neste sentido, podemos dizer que uma representação fiel dum anel irredutível $\mathfrak{A}$ é dada por um anel irredutível de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, o que mais nos aproxima da teoria dada em (I), Cap. VIII.

Designemos, então, por $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ os anéis de divisão que constituem os comutadores dos anéis $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$ referidos nos esclarecimentos ao teorema 3. Sabemos que

$$\xi_1 \to \xi_2 = \xi_1 S, \quad \xi_1 + \eta_1 \to \xi_2 + \eta_2 = (\xi_1 + \eta_1) S = \xi_1 S + \eta_1 S,$$
$$\eta_1 \to \eta_2 = \eta_1 S, \qquad \xi_1 \bar{a}_1 \to (\xi_1 \bar{a}_1) S = \xi_2 \bar{a}_2 = (\xi_1 S) \bar{a}_2,$$

onde S representa o isomorfismo $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2$. Tem lugar a igualdade $\bar{a}_1 S = S \bar{a}_2$, da qual se deduz $\bar{a}_2 = S^{-1} \bar{a}_1 S$, representando por S^{-1} o isomorfismo inverso de S. Definamos, em seguida, se $\alpha_1 \in \mathfrak{D}_1$, a seguinte correspondência: $\alpha_1 \to S^{-1} \alpha_1 S = \alpha_2$. Vamos ver que $\alpha_2 \in \mathfrak{D}_2$ e que a correspondência anterior define $\mathfrak{D}_2$ como imagem isomorfa de $\mathfrak{D}_1$. Na verdade, é $\alpha_1 S = S \alpha_2$, de sorte que

$$\xi_1 \alpha_1 \to (\xi_1 \alpha_1) S = (\xi_1 S) \alpha_2 = \xi_2 \alpha_2,$$
$$(\xi_1 \alpha_1) \bar{a}_1 = (\xi_1 \bar{a}_1) \alpha_1 \to (\xi_2 \alpha_2) \bar{a}_2 = (\xi_2 \bar{a}_2) \alpha_2.$$

Concluímos daqui a comutabilidade de α_2 e $\overline{\mathfrak{A}}_2$, e, portanto, podemos afirmar ser $\alpha_2 \in \mathfrak{D}_2$. Reciprocamente, se

$\alpha'_2 \in \mathfrak{D}_2$, ponhamos $\alpha'_1 = S\alpha'_2 S^{-1}$; então $\alpha'_1 \in \mathfrak{D}_1$ e $\alpha'_2 = S^{-1}\alpha'_1 S$. Estes resultados permitem precisar o teorema 3 e enunciar o

TEOREMA 3a: — *Se $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$ são duas concretizações (fiéis) dum anel de ideal irredutível $\mathfrak{A}$, se $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$* [1] *são os módulos sobre que operam aqueles anéis e se $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ são os comutadores de $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$, respectivamente, existem isomorfismos $\mathbf{M}_1 \simeq \mathbf{M}_2$, $\overline{\mathfrak{A}}_1 \simeq \overline{\mathfrak{A}}_2$, $\mathfrak{D}_1 \simeq \mathfrak{D}_2$, segundo os quais têm lugar as correspondências seguintes: $\xi_1 \to \xi_2$, $\xi_1 \bar{a}_1 \to \xi_2 \bar{a}_2$, $\xi_1 \alpha_1 \to \xi_2 \alpha_2$.*

Daremos agora uma definição importante:

DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO SEMI-LINEAR [2] — Consideremos um módulo $\mathbf{M}$ sobre um anel de divisão $\mathfrak{D}$. Em seguida, tomemos uma transformação linear S, de $\mathbf{M}$ sobre si (automorfismo), assim como um automorfismo A, de $\mathfrak{D}$. S diz-se uma *transformação semi-linear,* se tiverem lugar as seguintes correspondências:

$$x \to xS = x', \qquad x + y \to (x+y)S = x' + y',$$
$$y \to yS = y', \qquad x\alpha \to x'\bar{\alpha} = (xS)(\alpha A),$$

nas quais, bem entendido, $x, x', \ldots \in \mathbf{M}$; $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathfrak{D}$; e $\bar{\alpha}$ é o transformado de α por via de A.

Conformes com a definição anterior, suponhamos que, no teorema 3a, os dois módulos $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ se reduzem a um mesmo módulo $\mathbf{M}$ e que os dois anéis de divisão $\mathfrak{D}_i$, $(i = 1, 2)$, se reduzem também ao mesmo anel de divisão $\mathfrak{D}$. Podemos enunciar esta proposição [5, § 13]:

TEOREMA 4: — *Dois anéis irredutíveis, $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$, que contenham ideais direitos mínimos, não podem ser isomorfos, a não ser que operem sobre módulos isomorfos. Supostos $\overline{\mathfrak{A}}_1$ e $\overline{\mathfrak{A}}_2$*

(1) Dificuldades técnicas, já referidas numa nota do Cap. XV, obrigam-nos a substituir, por vezes, as letras góticas por letras latinas correspondentes: M, em vez de $\mathfrak{M}$, F, em vez de $\mathfrak{F}$, etc.

(2) Para o desenvolvimento desta noção, veja-se (II), pág. 26 e seguintes.

a operar no mesmo módulo (fiel) $\mathbf{M}$, sobre o anel de divisão $\mathfrak{D}$, se a correspondência isomorfa $\overline{\mathfrak{A}}_1 \simeq \overline{\mathfrak{A}}_2$ leva de $\bar{\mathfrak{a}}_1$ a $\bar{\mathfrak{a}}_2$, existe uma transformação semi-linear S, de $\mathbf{M}$, segundo a qual $\bar{\mathfrak{a}}_2 = \mathrm{S}^{-1}\bar{\mathfrak{a}}_1 \mathrm{S}$, $\alpha_2 = \mathrm{S}^{-1}\alpha_1 \mathrm{S}$, onde $\alpha_i \in \mathfrak{D}$ e onde a correspondência $\alpha_1 \to \alpha_2$ é o automorfismo de $\mathfrak{D}$ associado a S.

No Cap. XIV, § 5, foi demonstrado que um anel irredutível não tem radical — J. *A fortiori,* não terá radical $\mathfrak{R}$. É válido este

TEOREMA 5: — *O anti-radical dum anel $\mathfrak{A}$, de ideal irredutível, é um ideal bilateral mínimo $\mathrm{F} \neq (o)$, contido em todo o ideal bilateral $\mathfrak{a} \neq (o)$.*

Seja $\mathfrak{r} \neq (o)$ um ideal direito mínimo fixo de $\mathfrak{A}$. Sabemos que é $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}$, visto não haver em $\mathfrak{A}$ ideal nilpotente. Se $\mathfrak{r}_\alpha$ é outro ideal mínimo, existe $r_\alpha \in \mathfrak{r}_\alpha$ tal que $r_\alpha \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\alpha$, como se viu ao demonstrar o teorema 2. Será, assim, $F = \sum_\alpha \mathfrak{r}_\alpha = \sum_\alpha r_\alpha \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{r}$. Por outro lado, para cada $a \in \mathfrak{A}$, é $a\mathfrak{r}$ imagem homomorfa de $\mathfrak{r}$, pelo que se terá $a\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{r}$, ou $a\mathfrak{r} = (o)$. Conclui-se, deste modo, que, para cada $a \in \mathfrak{A}$, é $a\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\alpha$, para um certo α, sempre que $a\mathfrak{r} \neq (o)$. Portanto: $\mathfrak{A}\mathfrak{r} \subseteq F$, ou seja $\mathfrak{A}\mathfrak{r} = F$. Tomemos agora $o \neq b \in F$. O ideal direito $b\mathfrak{A}$ é $\neq (o)$, pelo seguinte: se fosse $b\mathfrak{A} = (o)$, o ideal direito gerado por b seria da forma $(b)_d = \{mb\}$; por outro lado, como sub-ideal direito de F, em virtude do teorema 10, do § 3, do Cap. anterior, ter-se-ia $(b)_d = \sum r'_\alpha \mathfrak{r}$, o que daria, supondo $r'_\alpha \mathfrak{r} \neq (o)$, $r'_\alpha \mathfrak{r}\mathfrak{A} \subseteq (b)_d \mathfrak{A} = (o)$, $r'_\alpha \mathfrak{r}\mathfrak{A} = r'_\alpha \mathfrak{r} \supset (o)$. Posto isto, consideremos um ideal direito qualquer mínimo $\mathfrak{r}_1$, contido em $b\mathfrak{A}$. Sabemos que $F = \mathfrak{A}\mathfrak{r}_1$. Mas, então, $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{A}b\mathfrak{A} \subseteq F$, o que dá $\mathfrak{A}b\mathfrak{A} = F$ e demonstra ser F um ideal bilateral mínimo. Continuando a considerar $\mathfrak{r}_1 \subseteq F$, tomemos $\mathfrak{a} \neq (o)$. Tem-se $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{r}_1^2\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1\mathfrak{a} \neq (o)$, visto que $\mathfrak{r}_1$ é irredutível — $\mathfrak{A}$. Da relação $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1\mathfrak{a} \subseteq F$, tira se $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1\mathfrak{a} = F$, e, sendo $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, conclui-se $F \subseteq \mathfrak{a}$, como afirma o teorema.

COROLÁRIO 2: — *O anti-radical F, assim como qualquer ideal esquerdo (ou direito), dum anel $\mathfrak{A}$, de ideal irredutível, é módulo fiel relativamente a $\mathfrak{A}$.* Da circunstância de ser $\mathfrak{r} \subseteq F$, para cada ideal direito mínimo, resulta que F é módulo direito fiel. Se $\mathfrak{e} \neq (o)$ for agora um ideal esquerdo qualquer, consideremos o seu aniquilador esquerdo $\mathfrak{b}$, que é ideal bilateral. Será, necessàriamente, $\mathfrak{b}=(o)$, visto que, de outro modo, ter-se-ia $F\subseteq\mathfrak{b}$, $F\mathfrak{e}=(o)$, contra o facto de F ser fiel. Assim, $\mathfrak{e}$ é fiel. Também F é módulo esquerdo fiel, e este facto permite provar o corolário para os ideais direitos.

TEOREMA 6: — *Todo o anel de ideal irredutível (direito) é anel de ideal esquerdo irredutível. Qualquer ideal direito (ou esquerdo) mínimo é gerado por um idempotente primitivo*, [8, pág. 13; 9, pág. 951]. A demonstração resulta imediatamente do

LEMA 1: — *Se um anel $\mathfrak{S}$, para o qual $\mathfrak{R}=(o)$, contém um ideal direito mínimo, contém um ideal esquerdo mínimo*, [8, pág. 13]. Como o ideal direito mínimo $\mathfrak{r}_1$ não é nilpotente, existe um idempotente primitivo e_1 tal que $\mathfrak{r}_1=e_1\mathfrak{S}$, [(I), pág. 19]. O ideal esquerdo $\mathfrak{S}e_1$ não admite sub-ideal com idempotente, [(I), pág. 20]. Importa ver, porém, que não há ideal regular esquerdo $\mathfrak{e}\subset\mathfrak{S}e_1$. Se $\mathfrak{e}$ existir, não poderá ter-se $e_1\mathfrak{e}=(o)$, pois, de contrário, seria $\mathfrak{e}e_1\mathfrak{e}=(\mathfrak{e}e_1)\mathfrak{e}=\mathfrak{e}^2=(o)$. Seja, então, $r\in\mathfrak{e}$ tal que $e_1 r=e_1 r e_1\neq o$. Visto que $e_1\mathfrak{S}e_1$ é um anel de divisão isomorfo do anel dos endomorfismos de $e_1\mathfrak{S}$, [(I), págs. 69, 70 e 235], a equação $(e_1 x e_1)(e_1 r e_1)=e_1 e_1 e_1=e_1$ é solúvel, tendo-se $e_1=(e_1 x e_1) r\in\mathfrak{e}$. O ideal $\mathfrak{e}$ será igual a $\mathfrak{S}e_1$, contra a hipótese (1).

A parte final do teorema 6, como se anota no lema acabado de provar, foi demonstrada em (I). Podemos precisar aqui a seguinte recíproca:

TEOREMA 7: — *Todo o idempotente primitivo dum anel de ideal irredutível gera um ideal direito (ou esquerdo) mínimo.* Sabemos que um ideal direito gerado por um idempotente primitivo não tem sub-ideal com idempotente. Ora, dado um ideal direito $\mathfrak{s}\neq(o)$, qualquer, se $\mathfrak{r}$ é um ideal direito mínimo (não nulo), tem-se $\mathfrak{s}\mathfrak{r}\neq(o)$, de sorte que existe $a\in\mathfrak{s}$ tal que $a\mathfrak{r}\neq(o)$. Assim, $\mathfrak{r}\simeq a\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{s}$, pelo que todo o

(1) No caso dos anéis simples, este teorema havia sido dado por E. ARTIN e G. WHAPLES, *The theory of simple rings*, «American Journal of Mathematics», vol. 65, 1943, págs. 87 a 107.

ideal direito tem sub-ideal mínimo com idempotente primitivo. Daqui resulta a afirmação.

TEOREMA 8: — *Um anel irredutível comutativo reduz-se a um corpo.* Sejam $\overline{\mathfrak{A}}$ o anel, $\mathbf{M}$ o módulo sobre que opera e $\mathbf{D}$ o comutador de $\overline{\mathfrak{A}}$. Por hipótese, tem-se $\overline{\mathfrak{A}}\subseteq\mathbf{D}$. Dado $d\in\mathbf{D}$, suponhamos $d\neq o$ e tomemos $o\neq x\in\mathbf{M}$. Como $\mathbf{D}$ é anel de divisão, não pode ser $xd=o$, de sorte que existe $a\in\overline{\mathfrak{A}}$, $(a\neq o)$, tal que $xa=xd$. Daqui se tira $x(a-d)=o$, com $a-d\in\mathbf{D}$. Pelo facto de $a-d$ ter inverso quando seja $a-d\neq o$, conclui-se $d=a$, $\mathbf{D}=\overline{\mathfrak{A}}$.

3) **Anéis primitivos** — Um anel $\mathfrak{A}$ diz-se *primitivo* (ou *primitivo direito)*, se contiver um ideal direito máximo $\mathfrak{J}$ tal que $(\mathfrak{J}:\mathfrak{A})=(o)$. Este cociente foi definido no Cap. XIV, § 5. Anàlogamente, define-se um *anel primitivo esquerdo* como aquele para o qual existe um ideal esquerdo máximo $\mathfrak{J}'$ tal que $(\mathfrak{J}':\mathfrak{A})_e=(o)$. Dum modo geral, o último símbolo de cociente significa o conjunto dos elementos $a\in\mathfrak{A}$ para os quais $a\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{J}'$. de sorte que se tem $(\mathfrak{J}':\mathfrak{A})_e.\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{J}'$. Os anéis primitivos dão a realização abstracta dos anéis irredutíveis, já referida no começo do § 2. Tem efectivamente lugar o seguinte

TEOREMA 9: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{A}$ seja primitivo, que $\mathfrak{A}$ seja irredutível*, [5, § 10]. Consideremos o ideal direito máximo $\mathfrak{J}$, de $\mathfrak{A}$, este suposto primitivo. Pondo $\mathbf{M}=\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, os elementos de $\mathfrak{A}$ levam a definir um anel $\overline{\mathfrak{A}}$ de endomorfismos de $\mathbf{M}$, nos termos indicados no Cap. XIV, § 5. Tem-se $\overline{\mathfrak{A}}\simeq\mathfrak{A}/(\mathfrak{J}:\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$, visto que $(\mathfrak{J}:\mathfrak{A})=(o)$, por hipótese. Nesta concretização de $\mathfrak{A}$, por via de $\overline{\mathfrak{A}}$, vê-se que $\mathfrak{A}$ é irredutível, pois $\mathfrak{J}$ é máximo e $\mathbf{M}$ não tem sub-módulos $-\mathfrak{A}$. Inversamente, suponhamos $\overline{\mathfrak{A}}\neq(o)$ um anel irredutível de endomorfismos dum módulo $\mathbf{M}\neq(o)$. Dado $x\in\mathbf{M}$ e diferente de zero, representemos por $\overline{\mathfrak{J}}_x$ o ideal direito aniquilador de x. Este ideal é máximo, como vamos verificar, mostrando que todo o ideal direito $\overline{\mathfrak{r}}\supset\overline{\mathfrak{J}}_x$, contendo um elemento $a\notin\overline{\mathfrak{J}}_x$, é igual a $\overline{\mathfrak{A}}$. Pois que $xa\neq o$, tomemos $b\in\overline{\mathfrak{A}}$ arbitrário e $c\in\overline{\mathfrak{A}}$ tal que $xac=xb$. Será $x(b-ac)=o$, e, portanto,

$b - ac \in \overline{\mathfrak{J}}_x$, o que mostra ser b a soma dum elemento de $\overline{\mathfrak{J}}_x$ e dum elemento do ideal direito gerado por a. Por outro lado é $\overline{\mathfrak{J}}_x \subset \overline{\mathfrak{A}}$, visto que $x\overline{\mathfrak{A}} = \mathbf{M}$. Assim, $\overline{\mathfrak{J}}_x$ é máximo. Para se demonstrar, por fim, a igualdade $(\overline{\mathfrak{J}}_x : \overline{\mathfrak{A}}) = (o)$, basta ter em conta que, se d pertence àquele cociente, é $x\overline{\mathfrak{A}}d = (o)$, $\mathbf{M}d = (o)$, e, portanto, $d = o$.

O importante teorema acabado de demonstrar permite que, de futuro, ao falarmos de anel primitivo, possamos raciocinar sobre ele como se se tratasse dum anel de endomorfismos (irredutível). Supondo $\mathfrak{r} \neq (o)$ um ideal direito dum anel primitivo, existe $x \in \mathbf{M}$ tal que $x\mathfrak{r} \neq (o)$. Será, necessàriamente, $x\mathfrak{r} = \mathbf{M}$. Se $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} \neq (o)$ for um ideal bilateral, qualquer que seja $x \neq o$, tem-se $x\mathfrak{a} \supseteq x\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathbf{M}\,\mathfrak{a} \supset (o)$, $x\mathfrak{a} = \mathbf{M}$. Daqui o teorema a seguir, que deve comparar-se com o teorema 56 do Cap. XV, do qual é, na verdade, uma generalização [veja-se o teorema 18, adiante]:

TEOREMA 10: — *Um ideal bilateral* $\mathfrak{a} \neq (o)$ *dum anel primitivo é um anel primitivo.*

COROLÁRIO 3: — *Num anel primitivo, o produto de dois ideais bilaterais* $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$, *não nulos, é* $\neq (o)$. De facto, sendo $x \neq o$ é $x\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathbf{M}\,\mathfrak{a}_2 = \mathbf{M}$.

Podemos reconhecer uma outra consequência, a qual nos traduz um facto já estabelecido no Cap. XIV:

COROLÁRIO 4: — *Um anel primitivo não pode ter ideal direito nilpotente* $\neq (o)$. De contrário, existiria também ideal bilateral nilpotente $\neq (o)$, contra o corolário anterior.

COROLÁRIO 5: — *O anti-radical dum anel* $\mathfrak{A}$, *de ideal irredutível, como anel, é simples.* Seja $\mathfrak{T}_2 \subset F$ um ideal bilateral de F. Como $F\mathfrak{T}_2F \subseteq \mathfrak{T}_2 \subset F$, o facto de F ser mínimo em $\mathfrak{A}$ mostra que o ideal bilateral $F\mathfrak{T}_2F$, de $\mathfrak{A}$, é nulo. Como se trata dum produto de dois ideais bilaterais do anel primitivo F, será $F\mathfrak{T}_2 = (o)$, e, depois, pela mesma razão, $\mathfrak{T}_2 = (o)$, como se quer.

É bom fazer a observação de que todos os ideais direitos mínimos de $\mathfrak{A}$ o são também de F. Se for, por ex.,

$\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}$ um ideal de F contido no ideal mínimo $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{A}$, será $\mathfrak{r}_1 F \subseteq \mathfrak{r}_1$, e, portanto, o ideal direito $\mathfrak{r}_1 F$, de $\mathfrak{A}$, será nulo. Ter-se-á $F\mathfrak{r}_1F = (o) = (F\mathfrak{r}_1)F$. Tira-se daqui $F\mathfrak{r}_1 = (o)$. O ideal direito $\mathfrak{r}_1$, de F, será ideal bilateral, o que exige $\mathfrak{r}_1 = (o)$.

Tratemos um módulo $\mathbf{M}$, sobre o anel de divisão $\mathfrak{D}$, e consideremos o anel denso $\overline{\mathfrak{A}} \neq (o)$, de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$. Sabemos, do Cap. XV, § 4, que, dado o ideal esquerdo $\overline{\mathfrak{J}}'$, de $\overline{\mathfrak{A}}$, o sub-módulo $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}'$ é irredutível — $\overline{\mathfrak{J}}'$; e ainda que, se for $\overline{\mathfrak{r}}$ o ideal direito aniquilador de $\overline{\mathfrak{J}}'$, aquele sub-módulo é também irredutível — $\overline{\mathfrak{J}}' / \overline{\mathfrak{r}} \cap \overline{\mathfrak{J}}'$. Por isso, este anel cociente é primitivo. Aqui, provaremos este

TEOREMA 11: — *Se* $\overline{\mathfrak{J}}' \neq (o)$ *for um ideal esquerdo do anel denso* $\overline{\mathfrak{A}}$, *de endomorfismos* — $\mathbf{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *sobre o anel de divisão* $\mathbf{D}$, *o referido ideal induz um anel denso de endomorfismos* — $\mathbf{D}$, *no sub-módulo* — $\mathbf{D}$ *igual a* $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}'$, [8, pág. 10]. Demonstrámos que é $\mathfrak{L} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = x\overline{\mathfrak{J}}'$, para cada $x \in \mathbf{M}$ que não seja nulo. Em particular, as mesmas igualdades são válidas, supondo $o \neq x \in \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}'$. $\overline{\mathfrak{J}}' / \overline{\mathfrak{r}} \cap \overline{\mathfrak{J}}'$ é anel irredutível de endomorfismos de $\mathfrak{L}$, mas não se afirmou que o seu comutador não pudesse ser maior do que $\mathbf{D}$.

Posto isto, à semelhança do que fizemos no Cap. XV, § 16, estabeleceremos a proposição, procedendo do modo seguinte: 1) tomamos $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{L}$, independentes — $\mathbf{D}$, e $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{L}$, quaisquer; 2) escolhemos $A_1, \ldots, A_n \in \overline{\mathfrak{A}}$ tais que $x_i A_i = x_i$, $x_i A_j = o$, se $i \neq j$; 3), em seguida, consideremos $B_1, \ldots, B_n \in \overline{\mathfrak{J}}'$, por forma que $x_i B_i = y_i$; então, será $C = \Sigma A_i B_i \in \overline{\mathfrak{J}}'$ e ter-se-á $x_j C = x_j A_j B_j = x_j B_j = y_j$, como se deseja.

Ora sabemos que as operações indicadas no processo são todas possíveis. Em particular, quanto a 3), basta ter em conta que, como acima se lembrou, para cada $x \neq o$ pertencente a $\mathfrak{L}$, é $x\overline{\mathfrak{J}}' = \mathfrak{L}$.

Passemos aos ideais direitos $\overline{\mathfrak{J}} \neq (o)$, de $\overline{\mathfrak{A}}$. Também no Cap. XV, § 4, vimos que, sendo $\mathfrak{P}$ o aniquilador modular de $\overline{\mathfrak{J}}$, o módulo $\mathbf{M}/\mathfrak{P} = \overline{\mathbf{M}}$ era irredutível — $\overline{\mathfrak{J}}$; e ainda que, sendo $\bar{\mathfrak{e}}$ o ideal esquerdo aniquilador de $\overline{\mathfrak{I}}$, $\overline{\mathbf{M}}$ era irredutível $-\overline{\mathfrak{I}}/\bar{\mathfrak{e}} \cap \overline{\mathfrak{I}}$. Por isso, este anel cociente é primitivo. Aqui, provaremos este

TEOREMA 11′: — *Se* $\overline{\mathfrak{I}} \neq (o)$ *for um ideal direito do anel denso* $\overline{\mathfrak{A}}$, *de endomorfismos* $-\mathbf{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *sobre o anel de divisão* $\mathbf{D}$, *e se* $\mathfrak{P}$ *for o aniquilador modular de* $\overline{\mathfrak{I}}$, *o referido ideal direito induz um anel denso de endomorfismos* $-\mathbf{D}$ *no módulo* $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/\mathfrak{P}$, [8, págs. 10 e 11]. O módulo $\overline{\mathbf{M}}$, sobre $\mathbf{D}$, pode ser de 1.ª ordem. Nesse caso o teorema é imediato. Admitindo, em seguida, que há em $\overline{\mathbf{M}}$ dois elementos independentes $-\mathbf{D}$, os raciocínios desenvolvidos a propósito do teorema de CHEVALLEY-JACOBSON provam que $\mathbf{D}$ é o comutador de $\overline{\mathfrak{I}}$ (mais precisamente: de $\overline{\mathfrak{I}}/\bar{\mathfrak{e}} \cap \overline{\mathfrak{I}}$), se $\overline{\mathfrak{I}}$ for duas vezes transitivo. Daqui resulta, então, o teorema enunciado, [Cfr. Cap. XV, § 16]. Ora a dupla transitividade estabelece-se pelo processo seguinte: 1) tomam-se $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \overline{\mathbf{M}}$ e independentes $-\mathbf{D}$, e bem assim $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ com aqueles por correspondentes no homomorfismo $\mathbf{M} \sim \overline{\mathbf{M}}$; 2) determina-se $B \in \overline{\mathfrak{I}}$ tal que $x_1 B = x_1$, $x_2 B = x_2$; 3) consideram-se $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$ e $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ de modo que $x_1 A = z_1$, $x_2 A = z_2$; 4) então, conclui-se $x_1 B A = x_1 A = z_1$, $x_2 B A = z_2$; 5) depois, dados $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \overline{\mathbf{M}}$ e quaisquer, supondo que $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$ os têm como correspondentes, vê-se que, efectivamente, $\bar{x}_1 B A = \bar{z}_1$, $\bar{x}_2 B A = \bar{z}_2$, sendo $B A \in \mathfrak{I}$.

Tudo está, portanto, na demonstração de 2). Para isso, raciocina JACOBSON como vai ver-se. Pois que $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ são independentes $-\mathbf{D}$, não pode ter-se $\bar{x}_1 \alpha + \bar{x}_2 \beta = o$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{D})$, a não ser que $\alpha = \beta = o$. Assim, tem-se $x_1 \alpha + x_2 \beta \notin \mathfrak{P}$, salvo o caso excepcional. Isto significa que só o elemento zero do espaço $[x_1, x_2]$ é anulado por $\overline{\mathfrak{I}}$. Se $C \in \overline{\mathfrak{I}}$ não anula àquele espaço, suponhamos $x_1 C$ e $x_2 C$ independentes $-\mathbf{D}$. Admitindo que $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ é tal que $x_1 C A = x_1$, $x_2 C A = x_2$, o elemento $B = C A \in \overline{\mathfrak{I}}$ satisfaz ao pedido. Resta o caso em que existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{D}$ tais que $x_1 C \alpha_1 + x_2 C \alpha_2 = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) C = o$, sendo $\neq o$ um dos α_i. Qualquer outro elemento de $[x_1, x_2]$ que seja anulado por C é necessàriamente da forma $(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)\gamma$, visto não poder haver dois elementos independentes $-D$ gozando

dessa propriedade. Os elementos $D \in \overline{\mathfrak{I}}$ são de duas categorias: ou $[x_1, x_2] D = (o)$, ou $[x_1, x_2] D \neq (o)$. Para os de 1.ª categoria, tem-se $(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) D = o$; se os da 2.ª categoria forem tais que $(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) D = o$, então todos os elementos de $\overline{\mathfrak{I}}$ anulam $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2$, o que não pode ter lugar, pois $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 \notin \mathfrak{P}$. Há, deste modo, um elemento $D \in \overline{\mathfrak{I}}$ tal que $(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) D \neq o$. Pode suceder que $x_1 D$ e $x_2 D$ sejam independentes $-\mathbf{D}$, o que estabelecerá o teorema, como se viu atrás num caso análogo. Finalmente, supondo $(x_1 D)\beta_1 + (x_2 D)\beta_2 = (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) D = o$, com um dos $\beta_i \neq o$, encontramo-nos na situação seguinte:

$$
\begin{aligned}
(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) C &= o, & (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) D &\neq o,\\
(x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) C &\neq o, & (x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) D &= o.
\end{aligned}
$$

Na verdade, falta verificar que $(x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) C \neq o$. Ora, se se tivesse $(x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) C = o$, ter-se-ia também $x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)\gamma$, com $\gamma \neq o$, e, portanto, $(x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2) D = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2) D . \gamma \neq o$, o que não é verdadeiro. Pondo $y_1 = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2$, $y_2 = x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2$, os elementos $y_1, y_2 \in [x_1, x_2]$ são independentes $-\mathbf{D}$, pelo que constituem uma base daquele espaço. Se $A_1, A_2 \in \overline{\mathfrak{A}}$ forem tais que $(y_1 D) A_1 = y_1$, $(y_2 C) A_2 = y_2$, o elemento $B = D A_1 + C A_2$ é tal que $y_1 B = y_1$, $y_2 B = y_2$, valendo igualmente $x_1 B = x_1$, $x_2 B = x_2$, porque B define, neste caso, a transformação idêntica em $[x_1, x_2]$. Visto que $B \in \overline{\mathfrak{I}}$, o teorema fica completamente estabelecido.

Em aditamento ao que acabamos de dizer, tomemos em $\mathbf{M}$ elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ supostos independentes $-\mathbf{D}$, módulo $\mathfrak{P}$. Por hipótese, dados $\alpha_i \in \mathbf{D}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, não poderá ter-se $x_1 \alpha_1 + \ldots + x_n \alpha_n \in \mathfrak{P}$, salvo se todos os α_i forem nulos. Existe $B \in \overline{\mathfrak{I}}$ tal que $\bar{x}_i B = \bar{x}_i$, de sorte que $x_i B = x_i + p_i$, $(p_i \in \mathfrak{P})$. Admitindo que $p_1, \ldots, p_r$, $(r \lesseqgtr n)$, são independentes $-\mathbf{D}$, escolhamos $A_1 \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $x_i A_1 = x_i$, $p_j A_1 = o$, $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Vê-se que $x_i B A_1 = x_i$. Dados $z_1, \ldots, z_n$, arbitrários em $\mathbf{M}$, seja $A_2 \in \overline{\mathfrak{A}}$ um endomorfismo verificando as relações $x_i A_2 = z_i$. O endomorfismo $B A_1 A_2$

pertence a $\overline{\mathfrak{I}}$, tendo-se $x_i B A_1 A_2 = x_i A_2 = z_i$. Conclui-se este

TEOREMA 12: — *Se $\overline{\mathfrak{I}} \neq (o)$ for um ideal direito do anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$, de endomorfismos — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$, sobre o anel de divisão $\mathbf{D}$, e se $\mathfrak{P}$ for o aniquilador modular de $\overline{\mathfrak{I}}$, dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{M}$ e independentes — $\mathbf{D}$, módulo $\mathfrak{P}$, e dados $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{M}$ e quaisquer, existe $C \in \overline{\mathfrak{I}}$ tal que $x_i C = z_i$, $(i = 1, \dots, n)$.*

Passemos a considerar ainda os ideais bilaterais de $\overline{\mathfrak{A}}$. Se $\mathfrak{a} \neq (o)$ é um tal ideal, tem-se $(o) \neq \mathbf{M}\mathfrak{a} = \mathbf{M}$. O teorema 11 garante que $\mathfrak{a}$ induz, em $\mathbf{M}$, um anel denso de endomorfismos — $\mathbf{D}$. O teorema 10 fica mais preciso com o seguinte enunciado:

TEOREMA 13: — *Se $\mathfrak{a} \neq (o)$ for um ideal bilateral do anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$, de endomorfismos — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$, sobre o anel de divisão $\mathbf{D}$, o referido ideal é um anel denso de endomorfismos — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$.*

Ao estabelecer-se a identidade dos anéis irredutíveis aos anéis primitivos, ficou demonstrada a existência de ideais direitos máximos em todo o anel irredutível. Tomando $x \in \mathbf{M}$ não nulo, o seu aniquilador direito $\overline{\mathfrak{I}}_x$ é ideal direito máximo no anel irredutível $\overline{\mathfrak{A}}$, de endomorfismos — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$. Vimos, no Cap. XIV, § 5, que o radical — J dum anel qualquer é a intersecção $\Pi(\mathfrak{I}:\mathfrak{S})$, onde $\mathfrak{I}$ percorre todos os ideais direitos máximos. No caso dos anéis primitivos, tendo-se $(\overline{\mathfrak{I}}_x:\overline{\mathfrak{A}}) = (o)$, conclui-se, de novo, que o radical — J dum anel irredutível é nulo. É evidente que $\Pi \overline{\mathfrak{I}}_x = (o)$, se x percorre $\mathbf{M}$. Portanto:

TEOREMA 14: — *Um anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$, de endomorfismos de $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{D}$, tem ideais direitos máximos. A intersecção desses ideais é o ideal nulo.*

Continuemos a adoptar a notação indicada no § 15, Cap. XV, segundo a qual $[x_1, \dots, x_n]$ é um sub-espaço — $\mathbf{D}$ com a base independente formada pelos x_i. Repre-

sentaremos por $\overline{\mathfrak{I}}_{[x_1,\dots,x_n]}$ o seu aniquilador direito. É imediato que se tem

$$\begin{aligned} &\overline{\mathfrak{I}}_{[x_{n+1}]} \cap \overline{\mathfrak{I}}_{[x_1,\dots,x_n]} = \\ &= \overline{\mathfrak{I}}_{[x_1,\dots,x_{n+1}]} \subset \overline{\mathfrak{I}}_{[x_1,\dots,x_n]}, \end{aligned} \tag{1}$$

pois que $x_{n+1} \notin [x_1, \dots, x_n]$. Se o módulo (espaço) $\mathbf{M}$ tiver uma infinidade de dimensões, existe uma cadeia infinita $\overline{\mathfrak{I}}_{[x_1]} \supset \overline{\mathfrak{I}}_{[x_1, x_2]} \supset \dots$. Assim, se num anel denso for válida a condição de cadeia descendente para ideais direitos, concluímos que o módulo $\mathbf{M}$ só pode ter um número finito de dimensões. Tem lugar o

TEOREMA 15: — *É condição necessária e suficiente, para que o anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$, de endomorfismos de $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{D}$, verifique a condição de cadeia descendente para ideais direitos, que o módulo $\mathbf{M}$ seja finito sobre $\mathbf{D}$.* Acabamos de ver que a condição é necessária. Sabemos que é suficiente, porque, se $\mathbf{M}$ é finito (de ordem n) sobre $\mathbf{D}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ representa a totalidade dos endomorfismos — $\mathbf{D}$, de $\mathbf{M}$, reduzindo-se a um anel $\mathbf{D}'_n$, anti-isomorfo dum anel completo de matrizes do grau n com elementos de $\mathbf{D}$, como se observou no aludido § 15 do Cap. XV. Podemos exprimir-nos ainda, dizendo:

TEOREMA 15 a: — *Um anel primitivo que satisfaz à condição de cadeia descendente para ideais direitos é um anel simples [e semi-simples, no sentido de (I), Cap. II].*

De (1) tira-se ainda a consequência seguinte: se $\mathfrak{N}_1$ e $\mathfrak{N}_2$ são dois sub-espaços finitos, sobre $\mathbf{D}$, e se $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, o ideal direito aniquilador de $\mathfrak{N}_2$ é sub-conjunto autêntico do ideal direito aniquilador de $\mathfrak{N}_1$. Podemos concluir o mesmo doutra maneira, na hipótese de $\overline{\mathfrak{A}}$ ser o absoluto — $\mathbf{D}$, [(I), págs. 257-258]. Então, como vimos nos §§, 13 e 15, do Cap. XV, cada sub-módulo $\mathfrak{N}$, que seja finito sobre $\mathbf{D}$, é aniquilador modular dum idempotente pertencente a $\overline{\mathfrak{A}}$. Realiza-se uma hipótese aludida no § 3 daquele mesmo Capítulo, a qual nos permite afirmar: 1) $\mathfrak{N}$ é aniquilador modular do seu ideal aniquilador $\overline{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{N}}$; 2) para cada $\mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}_1$, tem-se $\overline{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{N}_2} \subset \overline{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{N}_1}$.

Quando o número de dimensões de $\mathfrak{N}_2$ excede uma unidade o número de dimensões de $\mathfrak{N}_1$, qualquer que seja o anel dando $\overline{\mathfrak{A}}$, não há ideal direito entre os respectivos aniquiladores (diz-se que $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_1}$ é *primo sobre* $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_2}$). Imaginemos, com efeito, que se tem $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_2} \subset \overline{\mathfrak{J}} \subseteq \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_1}$. Vamos ver que, qualquer que seja $B \in \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_1}$, é $B \in \overline{\mathfrak{J}}$. Tomemos $x \in \mathfrak{N}_2$, mas supondo $x \notin \mathfrak{N}_1$. Para cada $C \in \overline{\mathfrak{J}}$, sob a hipótese $C \notin \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_2}$, é $xC \neq o$, visto que, se fosse $xC = o$, o endomorfismo C anularia $\mathfrak{N}_1$ e x, e, portanto, anularia $\mathfrak{N}_2$. Da condição $xC \neq o$, tira-se a existência de $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $xCA = xB$; e, então, sendo $x(B - CA) = o$, concluímos $B - CA = I_2 \in \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_2} \subset \overline{\mathfrak{J}}$. Logo, é $B = CA + I_2 \in \overline{\mathfrak{J}}$, q. e. d. Vale, assim, o

TEOREMA 16: — *Se $\mathfrak{N}_1$ e $\mathfrak{N}_2$ são dois sub-módulos finitos de* $\mathbf{M}$, *sobre* $\mathbf{D}$, *e se $\mathfrak{N}_2$ tem mais uma dimensão do que $\mathfrak{N}_1$, entre os aniquiladores direitos $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_1}$ e $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}_2}$, contidos num anel denso* $\overline{\mathbf{A}}$, *de endomorfismos* $-\mathbf{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *não existe ideal direito,* [4, pág. 231].

Em paralelo com o teorema 14, demonstraremos agora a importante proposição seguinte:

TEOREMA 17: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel denso $\overline{\mathfrak{A}} \neq (o)$, de endomorfismos* $-\mathbf{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *sobre o anel de divisão* $\mathbf{D}$, *tenha ideais direitos mínimos, que haja em $\overline{\mathfrak{A}}$ transformações lineares finitas não nulas,* [4, pág. 232]. Se $\overline{\mathfrak{A}}$ tem transformações lineares finitas, escrevendo $\mathbf{M} = [x] + \mathbf{N}$, sabemos que existe idempotente $E \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $\mathbf{M}\,E = [x]$. Estudemos o ideal direito aniquilador de $\mathbf{N}$, precisamente $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}} = E\overline{\mathfrak{A}}$, [Cfr. os teoremas 19 e 19′ do Cap. XV, § 6]. Se $o \neq B \in \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}}$ e se $C \in \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}}$ é qualquer, não pode ter-se $xB = o$, visto que, de contrário, B anularia $\mathbf{M}$ e seria $B = o$. Então, sendo $xB \neq o$, existe $D \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $xBD = xC$. Daqui tira-se $x(C - BD) = o$, $C - BD = o$, pois $C - BD \in \overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}}$. A igualdade $C = BD$ demonstra que a condição é *suficiente,* dado que aquela igualdade prova ser mínimo o ideal $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{N}}$. Para se ver que é *necessária,* tomemos o ideal direito mínimo $\overline{\mathfrak{J}}$,

de $\overline{\mathbf{A}}$. Como este anel não tem ideais nilpotentes, será $\overline{\mathfrak{J}} = E_1\overline{\mathbf{A}}$. Vamos mostrar que o sub-espaço $\mathbf{M}\,E_1$ tem uma dimensão. Admitamos que poderiam encontrar-se $x, y \in \mathbf{M}\,E_1$ e independentes $-\mathbf{D}$. Como $xE_1 = x$, $yE_1 = y$, escolhendo $B \in \overline{\mathbf{A}}$ de tal forma que $xB = o$, $yB \neq o$, ter-se-ia $xE_1B = o$, $yE_1B \neq o$, de sorte que $o \neq E_1B \in \overline{\mathfrak{J}}_{[x]}$. Sendo $E_1 \in \overline{\mathfrak{J}}$, o ideal direito $\overline{\mathfrak{J}} \cap \overline{\mathfrak{J}}_{[x]}$ seria $\neq (o)$, e, portanto, igual a $\overline{\mathfrak{J}}$. Assim, $\overline{\mathfrak{J}} \subseteq \overline{\mathfrak{J}}_{[x]}$, $E_1 \in \overline{\mathfrak{J}}_{[x]}$, o que levaria ao absurdo $xE_1 = o$. O teorema está provado.

Continuemos a supor $\overline{\mathbf{A}}$ irredutível e com transformações lineares finitas $\neq o$. O conjunto dessas transformações é anel denso em $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{D}$, pois forma um ideal bilateral $\overline{F} \neq (o)$, de $\overline{\mathbf{A}}$, que, como anel, é simples (Cap. XV, corol. 17, e teor. 13 deste Cap.). Ora o anti-radical $\mathfrak{X} = \Sigma\mathfrak{r} \neq (o)$ está contido em $\overline{F}$ (teor. 5) e é também ideal bilateral. Ter-se-á $\mathfrak{X} = \overline{F}$, o que permite dar este enunciado:

TEOREMA 18: — *O anel denso* $\overline{\mathbf{A}}$, *com ideais direitos mínimos, tem um anti-radical que é precisamente igual ao bilateral de* $\overline{\mathbf{A}}$ *formado pelas transformações lineares finitas de* $\mathbf{M}$ *pertencentes a* $\overline{\mathbf{A}}$.

Com o objectivo de demonstrarmos o último teorema deste §, provaremos o seguinte

LEMA 2: — *Num anel $\mathfrak{S}$, para o qual $\mathfrak{R} = (o)$, o aniquilador esquerdo dum ideal direito mínimo é um ideal esquerdo máximo.* Supondo $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{S}$ o ideal direito mínimo e considerando as decomposições $\mathfrak{S} = e_1\mathbf{A} + \mathfrak{B}e_1 + \mathfrak{J} + e_1\mathfrak{S}e_1 = \mathfrak{S}e_1 + \mathbf{A}$, [(I), págs. 16 e 17], sabemos que o ideal esquerdo $\mathbf{A} = e_1\mathbf{A} + \mathfrak{J}$ é o aniquilador esquerdo de e_1 ou de $\mathfrak{r}_1$. O lema 1 do § 2 diz-nos que $\mathfrak{S}e_1$ é mínimo. Visto que se tem $\mathfrak{S}/\mathbf{A} \simeq \mathfrak{S}e_1$, segue-se que $\mathbf{A}$ é máximo, como se diz no enunciado.

TEOREMA 19: — *Um anel primitivo* $\mathbf{A}$, *que contenha ideais direitos mínimos, é primitivo esquerdo,* [8, pág. 13; e 9, pág. 951]. Se $\mathfrak{r} = e\mathbf{A}$ é um ideal direito mínimo, (cfr.

teor. 6), em virtude de se ter $\mathfrak{R}=(o)$, o aniquilador esquerdo $\mathfrak{e}$, de $\mathfrak{r}$, é um ideal esquerdo máximo, [lema]. Vamos ver que $(\mathfrak{e}:\mathbf{A})_e=(o)$. Admitindo que este cociente é $\neq(o)$, ter-se-á $F\subseteq(\mathfrak{e}:\mathbf{A})_e$, como se viu no teorema 5. Assim, $(o)\subset F\mathbf{A}\subseteq\mathfrak{e}$, (cfr. corol. 3), de sorte que $F\mathfrak{r}=(o)$. Ora, sendo $\mathfrak{r}\subseteq F$, virá $\mathfrak{r}^2=(o)$, o que é absurdo.

Parece não se saber ainda se a primitividade esquerda é válida para um anel primitivo qualquer (isto é, sem ideais mínimos). Das considerações feitas resulta, todavia, que, em todos os casos, o anti-radical dum anel primitivo pode também definir-se como a soma dos seus ideais esquerdos mínimos (cfr. teor. 5).

No que vai seguir-se, vamos ter ocasião de aplicar os resultados dos dois §§ anteriores ao estudo dos anéis simples, sem intervenção de condições de cadeia, [4, págs. 233 a 237]. DIEUDONNÉ (1) deu, em 1943, um método de estudo dos mesmos anéis, apenas sob a hipótese de existência de ideais mínimos. Esse método foi generalizado por JACOBSON aos anéis primitivos, ainda sob a mesma hipótese, como veremos no § 8, depois de termos dado no § 7 a importante noção de espaços vectoriais duais.

4) **Anéis simples** — Vimos já que um anel denso $\overline{\mathbf{A}}$ pode degenerar num anel simples (e semi-simples). No § anterior, com efeito, provámos que, tendo lugar em $\overline{\mathbf{A}}\neq(o)$ a condição de cadeia descendente para ideais direitos, é $\overline{\mathbf{A}}=F$ um anel completo de matrizes finitas com elementos dum anel de divisão. E, no § 2, demonstrámos que um anel irredutível comutativo se reduz a um corpo.

Seja $\mathbf{A}$ um anel simples, sujeito à restrição de não ser um *anel zero:* $\mathbf{A}^2\neq(o)$. Admitamos mais que existem em $\mathbf{A}$ ideais direitos mínimos. Se $\mathfrak{r}\neq(o)$ for um tal ideal, é claro que $\mathbf{A}$ induz em $\mathfrak{r}$ um anel de endomorfismos: $\mathbf{A}\sim\overline{\mathbf{A}}$, $x\in\mathfrak{r}$, $x\to xa=xA$, $(a\in\mathbf{A},\ A\in\overline{\mathbf{A}})$.

(1) J. DIEUDONNÉ — *Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis*, «Bulletin de la Société Mathématique de France», vol. 71, 1943, págs. 1 a 30.

Sendo $\overline{\mathbf{A}}\simeq\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, onde o ideal bilateral $\mathfrak{a}$ é caracterizada pela relação $\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}=(o)$, ou se tem $\mathfrak{a}=(o)$ ou $\mathfrak{a}=\mathbf{A}$. Neste último caso, conclui-se $\mathfrak{r}\mathbf{A}=(o)$, $\mathfrak{r}^2=(o)$. Como haverá um ideal bilateral nilpotente contendo $\mathfrak{r}$, $\mathbf{A}$ será anel zero, contra a hipótese. Assim, ter se-á, necessàriamente, $\mathfrak{a}=(o)$, $\mathbf{A}\simeq\overline{\mathbf{A}}$. O anel simples considerado é realizado como anel irredutível de endomorfismos. Mas, então, é um anel de transformações lineares finitas dum módulo $\mathbf{M}=\mathfrak{r}$ sobre um anel de divisão $\mathbf{D}$ (cfr. teor. 18). Vale este

TEOREMA 20: — *Se $\mathbf{A}$ é um anel simples tal que $\mathbf{A}^2\neq(o)$ e tal que possui ideal direito mínimo $\neq(o)$, então $\mathbf{A}$ concretiza-se como anel denso de endomorfismos dum módulo sobre um anel de divisão, compondo-se ùnicamente de transformações lineares finitas desse módulo. Inversamente, um anel denso de transformações lineares finitas dum módulo sobre um anel de divisão é um anel simples com ideais direitos mínimos, não podendo reduzir-se a um anel zero*, [4, pág. 234]. A 2.ª parte do teorema resulta do corolário 17 do Cap. XV e do teorema 17 deste Capítulo. Em particular, a existência de idempotente no anel garante que é $\mathbf{A}^2\neq(o)$, [cfr. Cap. XV, § 15, lema 2].

Se o anel simples $\mathbf{A}$, de que fala o teorema anterior, verificar a condição de cadeia descendente, caímos no teorema 15 (cond. necessária) ou 2.º teorema de WEDDERBURN-ARTIN, [veja-se a Introdução].

COROLÁRIO 6 (ARTIN-WHAPLES) (1): — *É condição necessária e suficiente, para que um anel simples $\mathbf{A}$, com ideais direitos mínimos, e não anel zero, satisfaça à condição de cadeia descendente para ideais direitos, que tenha elemento um.* Se $\mathbf{A}$ não é anel zero, reduz-se a um anel denso de transformações lineares finitas dum módulo. Como a transformação idêntica tem de ser finita, o módulo será finito, de sorte que $\mathbf{A}$ é simples e semi-simples, no sentido de (I), Cap. II, verificando-se a condição de cadeia referida. A inversa é conhecida, [(I), pág. 51].

(1) E. ARTIN e G. WHAPLES — Trabalho citado na nota relativa ao teorema 1.

Corolário 7: — *Se* $\mathbf{A}$ *é um anel simples, para o qual* $\mathbf{A}^2 \neq (o)$ *e no qual existe ideal direito mínimo* $\neq (o)$, *então* $\mathbf{A}$ *possui ideal direito máximo e a intersecção dos ideais direitos máximos é* $= (o)$. De facto, concretizado $\mathbf{A}$ como anel denso, o teorema 14 leva imediatamente à afirmação.

Os teoremas 3a e 4 permitem se enunciem aqui os dois teoremas a seguir.

Teorema 21: — $\overline{\mathbf{A}}_1$ *e* $\overline{\mathbf{A}}_2$ *são duas concretizações (fiéis) dum anel simples* $\mathbf{A}$, *para o qual* $\mathbf{A}^2 \neq (o)$ *e no qual existe ideal direito mínimo* $\neq (o)$, *então, se* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *são os módulos sobre que operam aqueles anéis e se* $\mathbf{D}_1$ *e* $\mathbf{D}_2$ *são os comutadores de* $\overline{\mathbf{A}}_1$ *e* $\overline{\mathbf{A}}_2$, *respectivamente, existem isomorfismos* $\mathbf{M}_1 \simeq \mathbf{M}_2$, $\overline{\mathbf{A}}_1 \simeq \overline{\mathbf{A}}_2$, $\mathbf{D}_1 \simeq \mathbf{D}_2$, *segundo os quais têm lugar as correspondências seguintes:* $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, $\xi_1 \bar{a}_1 \rightarrow \xi_2 \bar{a}_2$, $\xi_1 \alpha_1 \rightarrow \xi_2 \alpha_2$.

Teorema 22: — *Seja* $\mathbf{M}$ *um módulo sobre o anel de divisão* $\mathbf{D}$ *e sejam* $\overline{\mathbf{A}}_1$ *e* $\overline{\mathbf{A}}_2$ *dois anéis densos isomorfos de transformações lineares finitas de* $\mathbf{M}$, *sobre* $\mathbf{D}$. *Se a correspondência isomorfa* $\overline{\mathbf{A}}_1 \simeq \overline{\mathbf{A}}_2$ *leva de* a_1 *a* a_2, *existe uma transformação semi-linear* S, *de* $\mathbf{M}$, *segundo a qual* $\mathrm{a}_2 = \mathrm{S}^{-1} \mathrm{a}_1 \mathrm{S}$, $\alpha_2 = \mathrm{S}^{-1} \alpha_1 \mathrm{S}$, *onde* $\alpha_i \in \mathbf{D}$ *e onde a correspondência* $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ *é o automorfismo de* $\mathbf{D}$ *associado a* S.

Como um anel simples, que não é anel zero, não contém ideal direito nilpotente, é $\mathfrak{R} = (o)$. O lema 1 permite se afirme que a teoria dos anéis simples desenvolvida neste § tem ainda lugar se o anel tem ideal esquerdo mínimo $\neq (o)$.

Ultimaremos as considerações sobre anéis simples $\mathbf{A}$, dando um teorema de estrutura para o caso em que $\mathbf{A}$ tem ideal direito máximo. Se, por ex., existe $1 \in \mathbf{A}$, o radical — J, de $\mathbf{A}$, só pode ser (o). Existe $a \in \mathbf{A}$ não nulo que não é quase-regular direito. Então, como se viu no Cap. XIV, § 5, teor. 27, o ideal $(x + a x)$ mergulha-se num ideal direito máximo. Tem sentido, assim, fazer a hipótese em causa.

Seja $\mathfrak{I}$ ideal direito máximo de $\mathbf{A}$. Pondo $\mathbf{M} = \mathbf{A}/\mathfrak{I}$, $\mathbf{M}$ é irredutível — $\mathbf{A}$. Este anel induz em $\mathbf{M}$ um anel $\overline{\mathbf{A}}$ de endomorfismos, nos termos indicados no mesmo Cap. XIV,

§ 5. Se $\mathbf{D}$ fôr o comutador de $\overline{\mathbf{A}}$, este é denso em $\mathbf{M}$, sobre $\mathbf{D}$. E, sendo $\overline{\mathbf{A}} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é o ideal bilateral definido por $\mathbf{A}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{I}$, ter-se-á $\mathfrak{a} = (o)$ ou $\mathfrak{a} = \mathbf{A}$. Esta segunda hipótese implica $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathfrak{I} \subset \mathbf{A}$, e, portanto, $\mathbf{A}^2 = (o)$. Admitindo que $\mathbf{A}$ não é anel zero, vê-se que $\mathbf{A} \simeq \overline{\mathbf{A}}$. Concretizado $\mathbf{A}$ como anel denso, o seu anti-radical será igual a $\mathbf{A}$, se existirem ideais direitos mínimos. Doutra forma, será $F = (o)$. Tem-se, [4, pág. 236]:

Teorema 23: — *Se* $\mathfrak{A}$ *é um anel simples, para o qual* $\mathfrak{A}^2 \neq (o)$ *e no qual existe ideal direito máximo, então, se existe ideal direito mínimo,* $\mathfrak{A}$ *é concretizado como anel de transformações lineares finitas; de contrário, não havendo ideal direito mínimo, concretizado* $\mathfrak{A}$ *como anel denso de transformações lineares dum módulo sobre um anel de divisão, todas essas transformações são infinitas* ($\mathrm{F} = (o)$).

5) **Espaços vectoriais duais** — Dado o módulo $\mathfrak{M}$ sobre o anel de divisão $\mathfrak{D}$, continuaremos a usar as mesmas notações que até aqui. Assim, $x, y, z, \ldots$ são elementos de $\mathfrak{M}$; $\alpha, \alpha_1, \beta, \ldots$ são elementos de $\mathfrak{D}$, que operam à direita de $\mathfrak{M}$; e o elemento um $= u \in \mathfrak{D}$ induz em $\mathfrak{M}$ o endomorfismo idêntico. Quanto a terminologia, falaremos indiferentemente de módulo ou espaço, de elemento ou de vector do espaço.

$\Phi(x)$ diz-se uma *forma linear* em x, se satisfizer os seguintes axiomas: 1) $\Phi(x) \in \mathfrak{D}$; 2) $\Phi(x\alpha) = \Phi(x) \cdot \alpha$; 3) $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Dadas n formas lineares $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, diz-se que as mesmas são *linearmente independentes*, quando uma relação $\beta_1 \Phi_1 + \ldots + \beta_n \Phi_n = o$ implicar $\beta_1 = \ldots = \beta_n = o$.

Lema 3: — *Se* $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ *forem formas linearmente independentes, existem vectores* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in \mathbf{M}$ *tais que* $\Phi_i(\mathrm{x}_j) = \delta_{ij}$, *com* $\delta_{ii} = \mathrm{u}$, $\delta_{ij} = o$, $(i \neq j)$.

Por hipótese, existe y_1 tal que $\Phi_1(y_1) = \alpha \neq o$. Então é $\Phi_1(y_1 \alpha^{-1}) = u$. Pondo $y_1 \alpha^{-1} = z_1$, tem-se $\Phi_1(z_1) = u$. Em seguida, façamos $y = x - z_1 \Phi_1(x)$. Vê-se que $\Phi_1(y) = o$. Todavia, existe y tal que $\Phi_2(y) \neq o$, pois, de contrário, ter-se-ia $\Phi_2(x) - \Phi_2(z_1)\Phi_1(x) = o$, não havendo independência entre Φ_1 e Φ_2. Se, fazendo $y = y_2$, for $\Phi_2(y_2) = \beta \neq o$, é $\Phi_2(y_2 \beta^{-1}) = u$, de sorte que, pondo $z_2 = y_2 \beta^{-1}$, vale $\Phi_1(z_1)=u$, $\Phi_1(z_2)=o$, $\Phi_2(z_2)=u$. E, pondo $x_1=z_1-z_2\Phi_2(z_1)$, $x_2=z_2$, é $\Phi_1(x_1)=u$, $\Phi_1(x_2)=o$, $\Phi_2(x_1)=o$, $\Phi_2(x_2)=u$. Duma maneira geral, admitamos que, para $r<n$, se construíram $y_1, y_2, \ldots, y_r$, sob as condições $\Phi_i(y_j)=\delta_{ij}$, $(i, j=1, 2, \ldots, r)$; vamos construir $x_1, \ldots, x_{r+1}$, de modo a realizar as condições $\Phi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $(i, j=1, \ldots, r+1)$. O teorema ficará provado.

Se pusermos $y=x-\sum_{i=1}^{r} y_i\Phi_i(x)$, verifica-se que $\Phi_j(y)=o$, para cada $j=1, 2, \ldots, r$. Para um certo y é, porém, $\Phi_{r+1}(y)\neq o$, visto que, de contrário, ter-se-ia a relação seguinte

$$o=\Phi_{r+1}(x)-\Phi_{r+1}(y_1)\Phi_1(x)-\ldots-\Phi_{r+1}(y_r)\Phi_r(x),$$

qualquer que fosse x, não havendo independência entre $\Phi_1, \ldots, \Phi_{r+1}$. Se, fazendo $y=z_{r+1}$, for $\Phi_{r+1}(z_{r+1})=\gamma\neq o$, é $\Phi_{r+1}(z_{r+1}\gamma^{-1})=\Phi_{r+1}(y_{r+1})=u$, com $y_{r+1}=z_{r+1}\gamma^{-1}$. Por meio das igualdades

$$x_1=y_1-y_{r+1}\Phi_{r+1}(y_1), \ldots, x_r=y_r-y_{r+1}\Phi_{r+1}(y_r),$$
$$x_{r+1}=y_{r+1},$$

ficam definidos os desejados $x_1, \ldots, x_{r+1}$.

Lema 4: — *Se $\Phi(x)$ for uma forma linear que se anula sempre que se anulam as formas $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, então Φ é uma combinação linear dos Φ_i.* Suponhamos $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, $(n \lesseqgtr m)$, os Φ_i linearmente independentes. Se Φ fosse independente destes Φ_i, poderíamos encontrar, à face do lema anterior, um vector x_{n+1} para o qual $\Phi_i(x_{n+1})=o$, $\Phi(x_{n+1})\neq o$, contra a hipótese do enunciado.

Seja A uma transformação linear de $\mathfrak{M}$ (endomorfismo — $\mathfrak{D}$). Se considerarmos $\Phi(xA)=\Psi(x)$, vê-se imediatamente que $\Psi(x)$ é uma forma linear.

Imaginemos agora um segundo espaço $\mathfrak{M}'$, sobre $\mathfrak{D}$. Suporemos $x', y', z', \ldots$ elementos de $\mathfrak{M}'$ e aplicaremos $\alpha, \beta, \ldots$ à esquerda de $x', y', \ldots$, escrevendo $\alpha x', \alpha y', \ldots$. Assim, $\mathfrak{M}'$ será um *espaço vectorial esquerdo* sobre $\mathfrak{D}$.

Se cada sistema $(x', x)=x'(x)$ representar um elemento de $\mathfrak{D}$, por forma que se tenha

$$(x', x+y)=(x', x)+(x', y), \quad (x', x\alpha)=(x', x)\alpha,$$
$$(x'+y', x)=(x', x)+(y', x), \quad (\alpha x', x)=\alpha(x', x),$$

diz-se que (x', x) é uma *forma bilinear* de x' e de x. Supondo ainda que $(y', x)=o$, quando y' é fixo e x é qualquer, implica $y'=o$; e que $(x', y)=o$, quando y é fixo e x' é qualquer, implica $y=o$; a forma bilinear diz-se *não degenerada,* e os espaços $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ dizem-se *espaços vectoriais duais.*

Sejam A uma transformação linear em $\mathfrak{M}$ e A' uma transformação linear em $\mathfrak{M}'$. Se for válida a relação $(x', xA)=(x'A', x)$, quaisquer que sejam x e x', as duas transformações lineares chamam-se *adjuntas* (uma da outra). Reconhece-se imediatamente que não podem duas transformações lineares A' e B', diferentes, de $\mathfrak{M}'$, ser adjuntas de A. De facto, da igualdade $(x'A', x)=(x'B', x)$, deduzia-se $(x'(A'-B'), x)=o$. Fixando x', como x é qualquer, ter-se-ia $x'(A'-B')=o$. Visto que esta relação seria válida para cada x', viria $A'=B'$, contra a hipótese.

É fácil de dar exemplos de transformações adjuntas. Sejam $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{M}$ e $x'_1, \ldots, x'_r \in \mathfrak{M}'$. A transformação $x \to xA=\sum x_i(x'_i, x)$ é uma transformação linear finita em $\mathfrak{M}$, que tem como adjunta a transformação linear finita $x' \to x'A'=\sum(x', x_i)x'_i$, de $\mathfrak{M}'$. Na verdade, vale $(x', xA)=\sum(x', x_i)(x'_i, x)=(x'A', x)$. Inversamente, se $x \to xA=\sum x_i\Phi_i(x)$ for uma transformação linear finita de $\mathfrak{M}$, com uma adjunta, vamos ver que os $\Phi_i(x)$ são formas lineares do tipo $\Phi_i(x)=(x'_i, x)$. Bem entendido que suporemos os x_i linearmente independentes em $\mathfrak{M}$, de sorte que as funções (x', x_i) são formas lineares em x' para as quais não existe uma relação $\sum(x', x_i)\lambda_i=o$, sem que todos os λ_i sejam nulos. De harmonia com o lema 3, escolhamos $y'_1, \ldots, y'_r$ tais que $(y'_j, x_i)=\delta_{ij}$. Vê-se que é $(y'_j, xA)=\sum(y'_j, x_i)\Phi_i(x)=\Phi_j(x)=(y'_jA', x)$, se A' é a adjunta de A. Pondo

$y'_j A' = x'_j$, tem-se $\Phi_j(x) = (x'_j, x)$, como se afirmou. É válido, pois, o seguinte

Lema 5: — *Dados os espaços vectoriais duais $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$, é condição necessária e suficiente, para que uma transformação linear finita $\mathrm{x} \to \mathrm{x}\mathrm{A} = \Sigma\, \mathrm{x}_\mathrm{i} \Phi_\mathrm{i}(\mathrm{x})$, de $\mathfrak{M}$, tenha uma transformação linear adjunta A', de $\mathfrak{M}'$, que existam $\mathrm{x}'_\mathrm{i} \in \mathfrak{M}'$ tais que $\Phi_\mathrm{i}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}'_\mathrm{i}, \mathrm{x})$.*

Observação: — Se Λ é uma transformação unívoca de $\mathfrak{M}'$ em si, satisfazendo à relação $(x', xA) = (x'\Lambda, x)$, então Λ é uma transformação linear de $\mathfrak{M}'$, igual à adjunta A', de A.

Exemplo: — Suponhamos $\mathbf{M}$ o espaço gerado pela sequência $x_1, x_2, \dots$, sob a hipótese da independência — $\mathfrak{D}$, dos x_i. Ter-se-á, $x \in \mathbf{M}$, $x = x_{i_1}\alpha_{i_1} + \dots + x_{i_r}\alpha_{i_r}$, onde as parcelas são em número finito. Uma forma linear $\Phi(x)$ fica definida, desde que se conheçam os $\Phi(x_i) = \beta_i \in \mathfrak{D}$. Será, então, $\Phi(x) = \beta_{i_1}\alpha_{i_1} + \dots + \beta_{i_r}\alpha_{i_r}$. Entre as formas lineares, consideremos ùnicamente aquelas para as quais o sistema $(\beta_1, \beta_2, \dots)$, dos β_i, contém um número finito de $\beta_i \beta_i$ não nulos. Em particular, são desse tipo

$$\Phi_1(x) = x'_1 \to (u, o, o, \dots);\ \Phi_2(x) = x'_2 \to (o, u, o, \dots);\ \text{etc.}$$

A forma linear geral do tipo considerado toma o aspecto

$$x' = \Phi(x) = \lambda_{i_1}\Phi_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}\Phi_{i_r} = \\ = \lambda_{i_1} x'_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} x_{i_r},$$

sendo precisamente $\Phi(x_{i_j}) = \lambda_{i_j}$, $(i_j = 1, 2, \dots, r)$. O conjunto dos x' constitui um espaço linear esquerdo sobre $\mathfrak{D}$, gerado pelos elementos $x'_1, x'_2, \dots$, que são independentes — $\mathfrak{D}$. Se, ao sistema x', x, fazemos corresponder o elemento

$$(x', x) = x'(x) = \Phi(x) = \lambda_{i_1}\alpha_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}\alpha_{i_r} \in \mathfrak{D},$$

vemos que $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$ são espaços vectoriais duais. Na verdade, $(x', x) = o$, qualquer que seja x, leva a $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_r} = o$, ou seja a $x' = o$; e $(x', x) = o$, qualquer que seja x', leva a $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_r} = o$, ou seja a $x = o$.

Posto isto, definamos uma transformação linear A, de $\mathbf{M}$, como habitualmente, escrevendo $x_i A = \sum_k x_k \alpha_{ki}$, de modo que a A se faz corresponder a matriz (α_{ki}). Como apenas um número finito de $x_k x_k$ pode aparecer na expressão de $x_i A$, concluímos que a matriz (α_{ki}) só tem um número finito de elementos não nulos em cada coluna. Anàlogamente, para uma transformação linear A', de $\mathbf{M}'$, poremos $x'_j A' = \sum_k \alpha'_{jk} x'_k$, definindo uma matriz que só tem um número finito de elementos não nulos em cada linha. Do estudo feito no tomo 1.°, Cap. I, sabemos ser $A \to (\alpha_{ki})$ um anti-isomorfismo e $A' \to (\alpha'_{jk})$ um isomorfismo. Se A e A' são adjuntas, tem-se, em particular, $(x'_j, x_i A) = \sum_k (x'_j, x_k)\,\alpha_{ki} = \alpha_{ji}$, $(x'_j A', x_i) = \sum_k \alpha'_{jk}(x'_k, x_i) = \alpha'_{ji}$. Neste exemplo, por consequência, é condição necessária, para que uma transformação linear A tenha uma adjunta A', que a matriz (α_{ki}) tenha em cada fila apenas um número finito de elementos não nulos. E a inversa é verdadeira, como se verifica tomando, então $\alpha'_{ji} = \alpha_{ji}$.

6) **Anéis primitivos com ideais direitos mínimos** — Dado o espaço $\mathfrak{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, suponhamos $\overline{\mathfrak{A}}$ um anel denso de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathfrak{M}$. A existência em $\overline{\mathfrak{A}}$, de transformações lineares finitas, é equivalente à existência de ideais direitos mínimos (teor. 17). O conjunto $\overline{F}$ dessas transformações é um ideal bilateral mínimo $\neq (o)$, que constitui também um anel denso de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathfrak{M}$.

Consideremos uma decomposição $\mathfrak{M} = [v] + \mathfrak{N}$ e representemos por $\overline{\mathfrak{I}}'[v]$ o ideal de contracções em $[v]$. Para cada $B \in \overline{\mathfrak{I}}'[v]$, se $B \neq o$, temos $\mathfrak{M}B = [v]$. Pondo $x \to xB = v\Phi(x) = v x'(x)$, define-se uma forma linear $x'(x)$, que, para um certo $x_0 \in \mathfrak{M}$, dá $x'(x_0) = u \in \mathfrak{D}$. Se B_1 e B_2 são tais que $xB_i = v x'_i(x)$, $(i = 1, 2)$, tem-se $x(B_1 + B_2) = v(x'_1(x) + x'_2(x)) = v y'(x)$, com $B_1 + B_2 \in \overline{\mathfrak{I}}'[v]$.

Se $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ é tal que $vA = v\alpha$, vê-se que $xBA = (vx'(x))A = vAx'(x) = v\alpha x'(x)$. Deste modo, a cada $B \in \overline{\mathfrak{J}}'[v]$ se faz corresponder uma forma linear determinada, correspondendo, aliás, a BB diferentes, formas diferentes. O conjunto $\mathfrak{M}'$ destas formas constitui um espaço linear esquerdo sobre $\mathfrak{D}$, como se mostrou já. Vamos provar que $\mathfrak{M}'$ é independente de v. Tomemos $w \in \overline{\mathfrak{J}}'[w]$. Supondo $xB = vx'(x)$ e $A \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $vA = w$, obtém-se $xBA = vAx'(x) = wx'(x)$. A cada $B \in \overline{\mathfrak{J}}'[v]$ corresponde $C = BA \in \overline{\mathfrak{J}}'[w]$, de tal modo que B e C determinam a mesma forma $x'(x) \in \mathfrak{M}'$. Há uma correspondência biunívoca entre os elementos B e C, a qual verifica as seguintes condições: $B_1 \to C_1$, $B_2 \to C_2$, $B_1 + B_2 \to C_1 + C_2$, $AB_1 \to AC_1$, $(A \in \overline{\mathfrak{A}})$. Quanto à condição do produto, é claro que se tem

$$xAB_1 = vx_1'(xA) = vy_1'(x),$$
$$xAC_1 = wx_1'(xA) = wy_1'(x),$$

visto que, sendo, por ex., $AB_1 \in \overline{\mathfrak{J}}'[v]$, é $x_1'(xA) = y_1'(x)$ uma forma linear pertencente a $\mathfrak{M}'$. Assim, os dois ideais esquerdos em causa são isomorfos, questão que adiante será precisada.

Voltemos ao estudo de $x'(x) = (x', x) \in \mathfrak{D}$. Trata-se duma forma bilinear não degenerada de x' e de x, pois $x'(z) = o$, qualquer que seja x', com z fixo, implica necessàriamente $z = o$, visto que, admitindo $z \neq o$, seria $\overline{\mathfrak{J}}'[z] \neq (o)$ um ideal para o qual $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{J}}'[z] = [z] = z\overline{\mathfrak{J}}'[z]$, (Cfr. Cap. XV, teor. 13; e, bem assim, o teor. 11 deste Capítulo), existindo $B \in \overline{\mathfrak{J}}'[z]$ tal que $zB \neq o$. Então, na correspondência $x \to xB = zx'(x)$, ter-se-ia $z \to zB = zx'(z) \neq o$, o que daria $x'(z) \neq o$. No tocante a concluir que é $z' = o$, se $z'(x) = o$ para qualquer x, o raciocínio é imediato. Podemos afirmar que $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ são duais.

Nestas condições, seja $F \in \overline{F}$ uma transformação linear finita de $\mathbf{M}$. Se pusermos $\mathbf{M}F = [y_1, \ldots, y_n]$, vê-se que

$$x \to xF = y_1\Phi_1(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x).$$

Admitindo que é, para $A_1 \in \overline{\mathfrak{A}}$, $y_1A_1 = y_1$, $y_iA_1 = o$, $(i \neq 1)$, tem-se

$$x \to xFA_1 = y_1A_1\Phi_1(x) = y_1\Phi_1(x).$$

Anàlogamente se definem $A_2, \ldots, A_n$. Concluímos ser $\Phi_i(x) = x_i'(x) \in \mathbf{M}'$. Em face do lema 5, podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 24: — *Se $\mathfrak{A}$ é um anel primitivo com ideais direitos mínimos, concretizado num anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$ de transformações lineares dum espaço $\mathbf{M}$, sobre um anel de divisão $\mathfrak{D}$, existe um espaço dual $\mathbf{M}'$, de $\mathbf{M}$, tal que toda a transformação linear finita F, de $\mathbf{M}$, pertencente a $\overline{\mathfrak{A}}$, tem uma transformação linear adjunta F', de $\mathbf{M}'$*, [8, pág. 14].

O teorema estende-se a todos os elementos de $\mathfrak{A}$, como vai ser demonstrado. Sabemos que, para cada $A \in \overline{\mathfrak{A}}$, se tem $x'(xA) = y'(x) \in \mathbf{M}'$. Diremos que, por via de A, se define em $\mathbf{M}'$ uma transformação A', segundo a qual $x'A' = y'$. Fàcilmente se prova que A' é linear. De facto, supondo $x \to xB_1 = vx_1'(x)$, $x \to xB_2 = vx_2'(x)$, vê-se que

$$x \to xAB_1 = vx_1'(xA) = vx_1'A'(x),$$
$$x \to xAB_2 = vx_2'(xA) = vx_2'A'(x),$$
$$x \to x(B_1 + B_2) = v[x_1'(x) + x_2'(x)],$$
$$x \to xA(B_1 + B_2) = v(x_1' + x_2')A'(x) =$$
$$= v(x_1'(xA) + x_2'(xA)) = v(x_1'A' + x_2'A').$$

Portanto é $(x_1' + x_2')A' = x_1'A' + x_2'A'$. Por outro lado, tem-se

$$x \to xC_1 = v\alpha x_1'(x),$$
$$x \to xAC_1 = v\alpha x_1'(xA) = v\alpha x_1'A'(x).$$

É agora imediato que $(x', xA) = (x'A', x)$, pois, esta igualdade é apenas uma outra forma de escrever $x'(xA) = x'A'(x)$. A correspondência $A \to A'$ é um anti-isomorfismo anular, como vamos ainda ver. Supondo $A_1 \to A_1'$, $A_2 \to A_2'$, tem-se

$$x \to xB = vx'(x), \quad xA_1A_2 \to (xA_1A_2)B =$$
$$= vx'(xA_1A_2) = vx'A_2'(xA_1) = vx'A_2'A_1'(x);$$

de sorte que $A_1 A_2 \rightarrow A_2' A_1'$. E é também

$$x(A_1 + A_2) \rightarrow x(A_1 + A_2)B = v\,x'(xA_1 + xA_2) = \\ = v(x'(xA_1) + x'(xA_2)) = v(x'A_1'(x) + x'A_2'(x)) = \\ = v(x'A_1' + x'A_2')(x) = v\,x'(A_1' + A_2')(x),$$

de sorte que $A_1 + A_2 \rightarrow A_1' + A_2'$. Finalmente, se $A \neq o$, da relação $(x', xA) = (x'A', x)$, válida quaisquer que sejam x' e x, pode concluir-se $A' \neq o$ do modo a seguir. Seja $y \in \mathbf{M}$ um elemento para o qual $yA \neq o$; pois que $\overline{F}$ é denso, tomemos $F \in \overline{F}$ por forma que $yAF \neq o$. Então, sendo

$$x \rightarrow xF = \Sigma\, y_i x_i'(x), \quad yA \rightarrow yAF = \Sigma\, y_i x_i'(yA) \neq o,$$

há um x_i' para o qual $x_i'(yA) = (x_i'A', y) \neq o$, o que implica $A' \neq o$, como se afirmou. Tem lugar este importante

TEOREMA 25: — *Se $\mathfrak{A}$ é um anel primitivo com ideais direitos mínimos, existe um sistema de espaços duais $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$, sobre um anel de divisão $\mathfrak{D}$, tais que:* 1) *$\mathfrak{A}$ é concretizado num anel $\overline{\mathfrak{A}}$ de transformações lineares de $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$;* 2) *a cada transformação linear pertencente a $\overline{\mathfrak{A}}$ corresponde uma transformação linear adjunta de $\mathbf{M}'$;* 3) *o conjunto destas adjuntas forma um anel $\overline{\mathfrak{A}}'$ anti-isomorfo de $\overline{\mathfrak{A}}$;* 4) *o anel $\overline{\mathfrak{A}}'$ contém as adjuntas de todas as transformações lineares finitas de $\mathbf{M}$ que possuem adjuntas.* A propriedade 4) esclarece-se fàcilmente. Se G é uma transformação linear finita de $\mathbf{M}$ com adjunta, vale, conforme o lema 5,

$$x \rightarrow xG = \sum_{i=1}^{r} y_i(x_i', x), \qquad x_i' \in \mathbf{M}'.$$

Supondo que $B_i \in \overline{\mathfrak{J}}'[y_i]$ verifica a relação $x \rightarrow xB_i = y_i(x_i', x)$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, tem-se $x \rightarrow xG = \Sigma\, xB_i = x.\Sigma B_i$, onde $G = \Sigma B_i \in \overline{\mathfrak{A}}$. Na correspondência $\overline{\mathfrak{A}} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{A}}'$, tem lugar a igualdade $(x', x.\Sigma B_i) = (x', xG) = (x'.\Sigma B_i', x) = (x'G', x)$, onde $G' = \Sigma B_i' \in \overline{\mathfrak{A}}'$.

Seja agora $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ um sub-espaço — $\mathfrak{D}$. O ideal esquerdo $\mathfrak{n} = \overline{\mathfrak{J}}'$, de $\overline{\mathfrak{A}}$, que é ideal de contracções em $\mathbf{N}$, induz um anel denso de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, em $\mathbf{N}$, tendo-se $\mathbf{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = v\overline{\mathfrak{J}}'$, para cada v não nulo pertencente a $\mathbf{N}$. Também aqui, dados $o \neq w \in \mathbf{N}$ e $x' \in \mathbf{M}'$, existe $D \in \overline{\mathfrak{J}}'$ tal que $x \rightarrow xD = w\,x'(x)$, como resulta de existir $D \in \overline{\mathfrak{J}}'[w]$ naquelas exactas condições. E, mais geralmente ainda, se $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{N}$ e $x_1', \ldots, x_n' \in \mathbf{M}'$, existe $C \in \overline{\mathfrak{J}}'$ para o qual $x \rightarrow xC = \Sigma\, v_i x_i'(x)$. Duma maneira mais precisa, é $C \in \Sigma\,\overline{\mathfrak{J}}'[v_j] \subseteqq \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F} = \overline{\mathfrak{J}}_0' \subseteqq \overline{\mathfrak{J}}'$, onde $\overline{F}$ conserva o significado de anti-radical de $\overline{\mathfrak{A}}$. Da circunstância de existir $x_{i0} \in \mathbf{M}$ tal que $x'(x_{i0})u \in \mathfrak{D}$, conclui-se ser também $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_0' = \mathbf{N}$. É claro, por outro lado, que, para cada $C \in \overline{\mathfrak{J}}_0'$, se tem $x \rightarrow xC = \Sigma\, v_i x_i'(x)$, onde $v_i \in \mathbf{N}$, $x_i' \in \mathbf{M}'$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, pois $C \in \overline{F}$ e $\mathbf{M}C = [v_1, \ldots, v_n] \subseteqq \mathbf{N}$.

A cada $\mathbf{N}$ fizemos corresponder, por via de $\mathfrak{n} = \overline{\mathfrak{J}}'$ o ideal $\overline{\mathfrak{J}}_o' = \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F}$. Esta correspondência é biunívoca, como vamos provar. De facto, dado $\overline{\mathfrak{J}}_0'$, isto é, dado um ideal esquerdo de $\overline{\mathfrak{A}}$ contido em $\overline{F}$, formemos $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_0' = \mathbf{N}$. Se $\overline{\mathfrak{J}}'$ for o ideal de contracções em $\mathbf{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}'$, tudo está em provarmos que qualquer transformação linear finita, de $\mathbf{M}$, contida em $\overline{\mathfrak{J}}'$, está contida em $\overline{\mathfrak{J}}_0'$. Ponhamos $\overline{\mathfrak{J}}_0'' = \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F}$. Sem dúvida que é $\overline{\mathfrak{J}}_0'' \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_0'$. Dado agora $B_0'' \in \overline{\mathfrak{J}}_0''$, seja $x \rightarrow xB_0'' = \Sigma\, v_i x_i'(x)$, onde $v_i \in \mathfrak{N}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Visto ser, para $o \neq v \in \mathfrak{N}$, $v\overline{\mathfrak{J}}_0' = \mathfrak{N}$, existem endomorfismos $B_{0i}' \in \overline{\mathfrak{J}}_0'$ tais que $vB_{0i}' = v_i$, de sorte que $xB_0'' = \Sigma\, vB_{0i}' x_i'(x) = \Sigma\, v x_i'(x) B_{0i}'$. Se representarmos por $F_i \in \overline{\mathfrak{J}}_0'' \subset \overline{F}$ a transformação $x \rightarrow v x_i'(x)$, e considerarmos, depois, $\Sigma F_i B_{0i}'$, vê-se que $x \rightarrow x\Sigma F_i B_{0i}' = \Sigma (xF_i) B_{0i}' = \Sigma\, v x_i'(x) B_{0i}' = xB_0''$, de sorte que $B_0'' = \Sigma F_i B_{0i}' \in \overline{\mathfrak{J}}_0'$, como se deseja. Bem entendido que, a $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ diferentes, correspondem $\overline{\mathfrak{J}}_0' \overline{\mathfrak{J}}_0'$ diferentes, como se reconhece verificando que a igualdade $\overline{\mathfrak{J}}_{01}' = \overline{\mathfrak{J}}_{02}'$ arrastaria $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_{01}' = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_{02}' = \mathbf{N}_2$. Fixemos o seguinte enunciado:

TEOREMA 26: — *Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel denso de endomorfismos — $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, e se $\overline{\mathfrak{A}}$ tem ideais direitos mínimos, há uma correspondência biunívoca completa entre os sub-espaços — $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, e os ideais esquerdos de $\overline{\mathfrak{A}}$ contidos no seu anti-radical,* [8, pág. 15].

Havendo em $\overline{\mathfrak{A}}$ ideais direitos mínimos, há também ideais esquerdos mínimos. A soma destes últimos é ainda igual ao anti-radical, como se observou no final do § 3. Seja, então, $\overline{\mathfrak{J}}'$ um ideal esquerdo mínimo. Pondo $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = = \mathbf{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_0'$, vê-se que $(o) \neq \overline{\mathfrak{J}}_0' = \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F}$, o que mostra ser $\overline{\mathfrak{J}}' = \overline{\mathfrak{J}}_0'$. O ideal $\overline{\mathfrak{J}}'$ compõe-se de transformações lineares finitas, pelo que terá necessàriamente a forma $\overline{\mathfrak{J}}' = = \overline{\mathfrak{J}}'[v]$. Inversamente, um ideal esquerdo desta forma é mínimo. Assim:

Teorema 27: — *O anti-radical do anel $\overline{\mathfrak{A}}$, do teorema anterior, é a soma de todos os seus ideais esquerdos $\overline{\mathfrak{J}}'[\mathrm{v}]$.*

Como um anel primitivo com ideais direitos mínimos é primitivo esquerdo, os seus ideais esquerdos mínimos, todos da forma $\overline{\mathfrak{J}}'[v]$, são isomorfos. Deste modo precisamos uma observação já feita.

Partamos agora dum ideal esquerdo $\overline{\mathfrak{J}}' \neq (o)$ e formemos $\mathfrak{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' \neq (o)$. Como $\overline{\mathfrak{J}}'$ induz um anel denso de endomorfismos $- \mathfrak{D}$, em $\mathfrak{N}$, tem-se também $\mathfrak{N} = v\overline{\mathfrak{J}}'$, para cada $v \neq o$, $v \in \mathfrak{N}$. Dados $o \neq w \in \mathfrak{N}$ e $x' \in \mathbf{M}'$, ponhamos $w = vC$, $C \in \overline{\mathfrak{J}}'$, $x \to xA = vx'(x)$, $(A \in \overline{\mathfrak{A}})$, de sorte que $x \to xAC = vCx'(x) = wx'(x)$, $AC \in \overline{\mathfrak{J}}'$. Podem repetir-se, deste modo, sobre o ideal $\overline{\mathfrak{J}}'$, as considerações já desenvolvidas sobre o ideal de contracções $\mathfrak{n}$, em $\mathfrak{N}$. Tem se $\mathfrak{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}_0'$, $\mathfrak{N} = \mathbf{M}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \cap \overline{F} = \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F} = = \overline{\mathfrak{J}}_0'$. Se $\overline{\mathfrak{J}}' \supseteqq \overline{F}$, é $\overline{\mathfrak{J}}_0' = \overline{F}$, ao mesmo tempo que $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = = \mathbf{M}\overline{F} = \mathbf{M}$, como resulta da correspondência biunívoca entre os sub-módulos $- \mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, e os ideais esquerdos de $\overline{\mathfrak{A}}$ contidos em $\overline{F}$. E ainda, se supusermos $\overline{\mathfrak{J}}'$ máximo, e $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' \subset \mathbf{M}$, da relação $\mathbf{M} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' + \mathfrak{N}'$, concluímos que $\mathfrak{N}'$ só pode ter uma dimensão, pois que, supondo $y_1, y_2 \in \mathfrak{N}'$ independentes $- \mathfrak{D}$, ter-se-ia $\overline{\mathfrak{J}}' \subset (\overline{\mathfrak{J}}', \overline{\mathfrak{J}}'[y_1]) \subset \subset (\overline{\mathfrak{J}}', \mathfrak{n}') = \overline{\mathfrak{A}}$, onde $\mathfrak{n}'$ é o ideal de contracções em $\mathfrak{N}'$. É válido o

Teorema 28: — *Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel denso de endomorfismos $- \mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, com ideais direitos mínimos, para cada ideal esquerdo $\overline{\mathfrak{J}}' \neq (\mathrm{o})$, de $\overline{\mathfrak{A}}$, é válida a igual-*

dade $\overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F} = \mathfrak{n} \cap \overline{F}$, onde $\mathfrak{n} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}'$ é o ideal de contracções em $\mathfrak{N} = \mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}'$. Além disso, se $\overline{\mathfrak{J}}'$ é máximo, ou se tem $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = \mathbf{M}$, ou $\mathbf{M} = \overline{\mathfrak{J}}' + [\mathrm{v}]$. A igualdade $\mathbf{M}\overline{\mathfrak{J}}' = \mathbf{M}$ realiza-se mediante a única condição $\overline{\mathfrak{J}}' \supseteqq \overline{F}$, [8, pág. 18].

Regressemos ao anel $\overline{\mathfrak{A}}'$, anti-isomorfo de $\overline{\mathfrak{A}}$. É evidente que se trata dum anel denso em $\mathbf{M}'$, sobre $\mathfrak{D}$. Para o reconhecer, tomemos $x_1', \ldots, x_n' \in \mathbf{M}'$, independentes — $- \mathfrak{D}$, e $y_1', \ldots, y_n' \in \mathbf{M}'$, quaisquer. Depois, sejam $x_1, \ldots, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$ tais que $(x_i', x_j) = \delta_{ij}$. A transformação linear $x' \to \Sigma (x', x_i) y_i'$ pertence a $\overline{\mathfrak{A}}'$, por ser adjunta de $x \to \to \Sigma x_i (y_i', x)$. Ora a referida transformação determina a correspondência $x_j' \to y_j'$, como se deseja. Nestas condições, seja $\overline{\mathfrak{J}}$ um ideal direito de $\overline{\mathfrak{A}}$. O seu correspondente, em $\overline{\mathfrak{A}}'$, será um ideal esquerdo $\overline{\mathfrak{J}}'$, para o qual, como numa questão análoga anterior, se definem $\overline{\mathfrak{J}}_0' = \overline{\mathfrak{J}}' \cap \overline{F}'$ e $\mathfrak{N}' = = \mathbf{M}'\overline{\mathfrak{J}}' = \mathbf{M}'\overline{\mathfrak{J}}_0'$. As transformações lineares finitas pertencentes a $\overline{\mathfrak{J}}_0'$ são da forma $x' \to \Sigma (x', x_i) y_i'$, com $y_i' \in \mathbf{M}'\overline{\mathfrak{J}}'$. Passando a $\overline{\mathfrak{J}}_0 = \overline{\mathfrak{J}} \cap \overline{F}$, vê-se que $\overline{\mathfrak{J}}_0$ se compõe das transformações lineares contidas em $\overline{\mathfrak{J}}$ que são da forma $x \to \Sigma x_i (y_i', x)$. Podemos dizer:

Teorema 29: — *Nas condições do teorema 25, há uma correspondência biunívoca completa entre os sub-espaços $- \mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}'$, e os ideais direitos de $\overline{\mathfrak{A}}$ contidos no seu anti-radical.*

Ainda relativamente a ideais direitos, é válido o

Teorema 30: — *Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel denso de endomorfismos $- \mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, com transformações lineares finitas não nulas e com elemento um, então, dado o ideal direito máximo $\overline{\mathfrak{J}}$, de $\overline{\mathfrak{A}}$, ou é $\overline{\mathrm{F}} \subseteqq \overline{\mathfrak{J}}$, ou $\overline{\mathfrak{J}}$ é o ideal direito aniquilador dum sub-espaço $- \mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, com uma dimensão,* [8, págs. 18 e 19]. Consideremos a realização abstracta de $\overline{\mathfrak{A}}$ pelo anel primitivo de $\mathfrak{A}$. Como se viu no Cap. XIV, § 5, dado um ideal direito $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{A}$, por existir $1 \in \mathfrak{A}$, o ideal $(\mathfrak{r} : \mathfrak{A})$ é o maior ideal bilateral contido em $\mathfrak{r}$. Se F é o correspondente, em $\mathfrak{A}$, de $\overline{F} \subseteqq \overline{\mathfrak{A}}$, há equivalência entre a afirmação F não contido em $\mathfrak{r}$ e $(\mathfrak{r} : \mathfrak{A}) = (o)$, pelo seguinte: se a inclusão não é válida, é $(\mathfrak{r}:\mathfrak{A})=(o)$, visto que, de contrário, ter-se-ia $F\subseteq(\mathfrak{r}:\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{r}$; inversamente, sendo $(\mathfrak{r}:\mathfrak{A})=(o)$, é F não contido em $\mathfrak{r}$, pois que aquele ideal cociente é o maior ideal bilateral contido em $\mathfrak{r}$.

Nestas condições, seja $\mathfrak{J}$ o ideal direito máximo, de $\mathfrak{A}$, que corresponde a $\overline{\mathfrak{J}}$. Se $\overline{F}\subseteq\overline{\mathfrak{J}}$, verifica-se uma das afirmativas do teorema. Se $\overline{F}$ não está contido em $\overline{\mathfrak{J}}$, então F não está contido em $\mathfrak{J}$ e $(\mathfrak{J}:\mathfrak{A})=(o)$. O módulo $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ é irredutível — $\mathfrak{A}$. Conforme um raciocínio do Cap. XIV, § 5, $\mathfrak{A}$ induz um anel de endomorfismos em $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, o qual é isomorfo de $\mathfrak{A}$ e de $\overline{\mathfrak{A}}$. O teorema 4 garante o isomorfismo $\mathbf{M}\simeq\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. Ora, neste último módulo, $\mathfrak{J}$ é precisamente o ideal direito aniquilador de $1+\mathfrak{J}$. Se for $x\in\mathbf{M}$ o correspondente de $1+\mathfrak{J}$ naquele isomorfismo, o sub-espaço $[x]\neq(o)$ responde à segunda afirmativa do enunciado.

PUBLICAÇÕES DO CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA
DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
N.º 30

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(2.ª LIÇÃO: ANÉIS PRIMITIVOS)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

1 9 5 2