Ao seu velho camarada e grande amigo, Prof. Dr. F. de Paula Leite Pinto, como renovado testemunho da sua grande estima, Of. o autor.

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(1.ª LIÇÃO)

ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO

Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA

Extracto do tomo XXXVI

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(1.ª LIÇÃO)

2-II-1952
67

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116

1952

Extracto do fasc. II do tomo XXXVI
dos
«Anais da Faculdade de Ciências do Porto»

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

1.ª Lição (1)

Radical — $\mathfrak{G}$. Anti-radical. Ideal regular máximo dum anel

---

1) **Introdução** — A noção de *radical* — G, à semelhança do que sucede com a noção de radical — J, permite estabelecer um teorema satisfatório quanto à estrutura do respectivo anel cociente. Ela foi introduzida na memória seguinte: [16] — B. Brown e N. H. McCoy, *Radicals and subdirect sums*, «American Journal of Mathematics», vol. LXIX, 1947, págs. 46 a 58.

O radical — G, dum anel $\mathfrak{S}$, será designado por N ou por $N(\mathfrak{S})$, quando houver necessidade de pôr em evidência o anel respectivo; representa uma extensão do radical — J, reduzindo-se a este em certos casos particulares, alguns dos quais serão devidamente tratados.

O estudo dos diferentes radicais (2) tem muitos pontos comuns. Damos relevo aos seguintes, que serão observados

---

(1) As três lições que vamos publicar nestes *Anais* serviram para ilustrar o discurso inaugural que pronunciámos na 1.ª secção do Congresso Luso-Espanhol, efectuado em Málaga, em Dezembro de 1951. Elas constituirão os Capítulos XVI, XVII e XVIII do livro a que já fizemos referência no § 1 (Introdução), do artigo por nós publicado no tomo XXXV, fasc. 2, 1951, desta mesma Revista. [De futuro, citaremos esse artigo com «Cap. XV»]. A numeração aqui indicada para a Bibliografia joga não só com a desse artigo, mas ainda com a que utilizámos na Conferência realizada no Congresso Luso-Espanhol levado a efeito em Lisboa, em Outubro de 1950, e publicada no tomo I das respectivas *Actas*. [De futuro, citaremos essa conferência com «Cap. XIII» ou «Cap. XIV»].

(2) Quanto a notações, terminologia, etc., utilizaremos as mesmas que foram empregadas nas nossas duas publicações referidas na nota anterior. Essas duas publicações, de resto, seguem já na linha de ideias do livro seguinte: (I) — A. Almeida Costa, *Sistemas hiper-complexos e Representações*, publicação n.º 19 do «Centro de Estudos Matemáticos da Faculdade de Ciências do Porto», 1948, 518 páginas.

a propósito do radical — G: 1) a soma de dois ideais bilaterais com uma certa propriedade é um ideal bilateral com a mesma propriedade; 2) o radical é o conjunto unido dos ideais bilaterais com aquela propriedade; 3) o anel cociente segundo o radical não tem ideal bilateral com a propriedade em causa (é semi-simples) (1); 4) o radical dum anel $\mathfrak{A}_n$, formado pelas matrizes do grau n com elementos do anel $\mathfrak{A}$, é o anel de matrizes do grau n com elementos do radical de $\mathfrak{A}$ (2); 5) um anel com elemento um, soma directa de ideais direitos simples, tem um radical $=(o)$.

O radical — J afasta-se dos radicais $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{R}^{**}$ por não ser definido em termos de nilpotência; o mesmo sucede ao radical — G. Aparece então, como característica comum, a seguinte propriedade: 6) *o radical do ideal bilateral* $\mathfrak{a}$, *de* $\mathfrak{S}$, *é o ideal* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_{**}$.

Eis aqui a demonstração relativa ao radical — J. Dado $b \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{a})$, como se tem $\mathfrak{a}\mathfrak{S}b\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}b\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{a})$, o teorema 11, do Cap. XIV, § 3, afirma-nos que os elementos de $\mathfrak{S}b\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ pertencem ao radical — J, de $\mathfrak{a}$. Nestas condições, $\mathfrak{S}b\mathfrak{S}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$ composto de elementos quase-regulares, em $\mathfrak{S}$, pelo que $b \in \mathfrak{R}_{**}$. Assim, é $b \in \mathfrak{R}_{**} \cap \mathfrak{a}$, como se deseja. Inversamente, consideremos o ideal bilateral $\mathfrak{R}_{**} \cap \mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$. É um ideal quase-regular em $\mathfrak{S}$, cujos quase-inversos pertencem ao próprio ideal. Mas, nesse caso, é também um ideal bilateral quase-regular de $\mathfrak{a}$, tendo-se $\mathfrak{R}_{**} \cap \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{a})$, o que completa a demonstração desejada.

Para fazer a teoria do radical — G nos termos indicados, que tocam as propriedades 1) a 6), não seguiremos [16], onde N é considerado um caso particular dum radical mais geral (radical — F), em termos que exporemos mais tarde. Aqui cingir-nos-emos ao trabalho seguinte: [11] — B. Brown e N. H. McCoy, *The radical of a ring*, «Duke Mathematical Journal», vol. 15, 1948, págs. 495 a 499.

Como uma característica de anti-radical, tomaremos a propriedade seguinte, oposta a 5): um anel com elemento um, soma directa de ideais direitos simples, é igual ao seu

(1) Neste ponto, o radical $\mathfrak{R}$ faz excepção, [(I), pág. 9].
(2) Esta propriedade só foi demonstrada para o radical — L, [Cap. XIII, § 4], e para o radical — J, [Cap. XIV, § 3]. Ela é válida para o radical — G, que vamos tratar.

anti-radical. A noção de *anti-radical*, a tratar adiante, foi dada na memória seguinte: [2] — R. Baer, *Radical ideals*, «American Journal of Mathematics», vol. LXV, 1943, págs. 537 a 568.

Quanto à noção de *ideal regular máximo dum anel*, encontra-se em: [12] — B. Brown e N. H. McCoy, *The maximal regular ideal of a ring*, «Proceedings of the American Mathematical Society», vol. 1, 1950, págs. 165 a 171. Veremos que se trata dum ideal bilateral com propriedades mistas. O ideal em questão, com efeito, verifica as propriedades 1), 2), 3), 4) e 6), mas falha quanto a 5). Por outro lado, o ideal regular máximo, que representaremos por M, ou $M(\mathfrak{S})$, nada tem com a hierarquia

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^{**} \subseteq \mathfrak{R}^{*} \subseteq \mathfrak{R}_{**} \subseteq N.$$

Mais precisamente ainda, acentuaremos o carácter anti-radical de M, verificando que, ao caso limite $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}_{**}$, corresponde $M=(o)$, e, ao caso limite $\mathfrak{S}=M$, corresponde $\mathfrak{R}_{**}=(o)$. Depois, ao caso limite $\mathfrak{R}_{**}=(o)$, com uma certa hipótese sobre $\mathfrak{S}$, corresponde $M=\mathfrak{S}$, e, ao caso limite $M=(o)$, com aquela mesma hipótese, corresponde um radical — J contendo determinado ideal bilateral, a que aludiremos.

2) **O radical — G** — Comecemos por uma observação. Da teoria do radical — J, desenvolvida no Cap. XIV, conclui-se ser condição necessária e suficiente, para que $b \in \mathfrak{R}_{**}$, que o ideal bilateral (b), gerado por b, seja quase-regular, ou ainda: que, para cada $a \in (b)$, se tenha $a \in \{ax+x\}$ (1). Esta última condição pode ser substituída por esta outra: que, para cada $a \in (b)$, se tenha $a \in \{ax-x\}$. De facto, supondo que, para cada $a \in (b)$, é $a \in \{ax+x\}$, tem-se $-a \in \{(-a)x+x\}$ ou $-a \in \{a(-x)+x\} = \{ax-x\}$. Visto que $\{ax-x\}$ é ideal direito, concluímos $a \in \{ax-x\}$. Inversamente, passa-se desta última condição à condição $a \in \{ax+x\}$, tendo sempre em conta que (b) é ideal.

(1) Trata-se do ideal direito que, na teoria do radical — J, foi representado por $(ax+x)$, [Cf. Cap. XIV, § 2].

O radical — G é definido em [11] de modo análogo. Assim, consideremos o ideal bilateral $G(a) = \{ax - x + \Sigma(r_i a s_i - r_i s_i)\}$, onde $x, r_i, s_i \in \mathfrak{S}$; diz-se que um elemento b pertence ao radical — G, se, para cada $a \in (b)$, for $a \in G(a)$. Quando um elemento $a \in \mathfrak{S}$ é tal que $a \in G(a)$, diz-se que a é *regular* — G. Um *ideal* (direito, esquerdo, bilateral) chama-se *regular* — G, se todos os seus elementos forem regulares — G. O radical N, em particular, é formado por elementos regulares — G. Pode também observar-se que o ideal $G(a)$ é o ideal bilateral gerado pelo ideal direito $\{ax - x\}$.

TEOREMA 1: — *Se* $c - d$ *é regular* — G *e* $d \in G(c)$, c *é regular* — G, [11, pág. 495]. Por hipótese, existem elementos $x, r_i, s_i \in \mathfrak{S}$ tais que $c - d = (c - d)x - x + \Sigma[r_i(c - d)s_i - r_i s_i]$. Tira-se daqui $c = [cx - x + \Sigma(r_i c s_i - r_i s_i)] + [d - dx - \Sigma r_i d s_i]$. Este 2.º membro é soma de dois elementos pertencentes a $G(c)$, de sorte que $c \in G(c)$, como se deseja.

COROLÁRIO 1: — *A soma de dois ideais bilaterais regulares* — G *é um ideal bilateral regular* — G. Sejam $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ os dois ideais bilaterais em causa, e escrevamos $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$. Trata-se de provar que cada $a \in \mathfrak{a}$ é regular — G. Ponhamos $a = a_1 - a_2$, com $a_i \in \mathfrak{a}_i, (i = 1, 2)$, e tenhamos em conta a hipótese de poder escrever-se $a_1 = a_1 x - x + \Sigma(r_i a_1 s_i - r_i s_i)$. Substituindo nesta igualdade a_1 por $a + a_2$, obtém-se

$$a - [ax - x + \Sigma(r_i a r_i - r_i s_i)] = \\ = -a_2 + a_2 x + \Sigma r_i a_2 s_i .$$

O 2.º membro pertence a $\mathfrak{a}_2$ e é, portanto, regular — G, assim como o primeiro. Visto que o termo entre parêntesis recto, contido no 1.º membro, pertence a $G(a)$, o teorema anterior garante que a é regular — G, como se deseja.

COROLÁRIO 2: — *O radical* N *é o ideal bilateral regular* — G, *conjunto unido de todos os ideais bilaterais regulares* — G. Em primeiro lugar, o referido conjunto unido é um ideal bilateral regular — G, precisamente o maior ideal bilateral nessas condições. O radical N, conforme a sua definição, está contido nesse conjunto unido. Por último, um

elemento b do conjunto unido gera um ideal bilateral regular — G, pelo que pertence a N.

COROLÁRIO 3: — *No homomorfismo* $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/N = \overline{\mathfrak{S}}$, *se* $a \in \mathfrak{S}$ *é regular* — G, *o seu correspondente* $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{S}}$ *é regular* — G, *e reciprocamente*. Comecemos por uma observação de carácter geral. Em qualquer homorfismo $\mathfrak{A} \sim \overline{\mathfrak{A}}$, de dois anéis, se a leva a $\bar{a}$, $G(a)$ leva a $\overline{G(a)} = G(\bar{a})$. Por consequência, a parte directa do teorema fica provada: se $a \in G(a)$ é $\bar{a} \in G(\bar{a})$. Inversamente, se $\bar{a} \in G(\bar{a})$, consideremos um elemento $a \in \mathfrak{S}$ que o tenha como correspondente. Então $a \in (G(a), N)$, pelo que $a = b + c$, com $b \in G(a)$, $c \in N$. Assim, $a - b = c$ é regular — G, e como $b \in G(a)$, a é regular — G.

COROLÁRIO 4: — *No homomorfismo* $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$, *do corolário anterior, um ideal bilateral regular* — G *tem um ideal bilateral* — G *como correspondente, e reciprocamente.* Este mesmo teorema é válido para ideais unilaterais.

COROLÁRIO 5: — *O anel* $\mathfrak{S}/N$ *é semi-simples.*

NOTA SOBRE O RADICAL — J: — À semelhança do teorema 1, podemos dar o seguinte enunciado: *se* $c - d$ *é quase-regular direito e* $d \in \{cx + x\}$, c *é quase-regular direito.* De facto, sendo $c - d + v' + (c - d)v' = o$, é $c - d = -v' - (c - d)v'$, e, portanto, $c = -(v' + cv') + (d + dv')$. Ambos os termos do 2.º membro pertencem a $\{cx + x\}$, de sorte que $c \in \{cx + x\}$. A mesma sucessão de corolários que anteriormente levaria agora ao radical $\mathfrak{R}_{**}$ e à semi-simplicidade de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$.

Suponhamos que se parte de uma outra definição de regularidade — G e se considera a regular — G sempre que $a \in G_2(a) = \{xa - x + \Sigma(r_i a s_i - r_i s_i)\}$, e apenas nesse caso. Vamos ver que o radical N_2, então obtido, é idêntico a N. Façamos corresponder a cada a o ideal bilateral $F_1(a) = \{ax - x + ya - y + \Sigma(r_i a s_i - r_i s_i)\}$ e definamos *regularidade* — F_1 pela condição $a \in F_1(a)$. Vale o seguinte

TEOREMA 2: — *A noção de regularidade* — F_1 *é idêntica à noção de regularidade* — G, [11, pág. 497]. Sem dúvida que $a \in G(a)$ arrasta $a \in F_1(a)$. Para se provar a inversa, imaginemos $a \in F_1(a)$. Existirá $y \in \mathfrak{S}$ tal que $a - (ya - y) \in G(a)$. Será também $a^2 - (ya^2 - ya)$ um elemento de $G(a)$, e, como $ya^2 - ya = yaa - ya$, vê-se que $ya^2 - ya \in G(a)$. Deste modo, $a^2 = a + (a^2 - a) \in G(a)$. Ora $a^2 - a = aa - a \in G(a)$, e, assim, $a \in G(a)$, como se deseja.

Corolário 6: — *Os radicais* N_2 *e* N *são idênticos.* Na verdade, os dois radicais são idênticos ao radical que pode determinar-se à custa dum teorema obtido do teorema 1, substituindo $G(c)$ por $F_1(c)$. Ou ainda: a regularidade $-G_2$ é idêntica à regularidade $-G$.

Teorema 3: — *O radical* $-\mathrm{J}$ *está contido no radical* N. O radical $-J$ é, com efeito, um ideal bilateral composto de elementos que são regulares $-G$, como concluímos da observação feita no começo deste §. Em particular, N contém todos os nilideais.

É curioso observar que, se for $a^n = o$, a igualdade $a = a(-a - a^2 - \ldots - a^{n-1}) - (-a - a^2 - \ldots - a^{n-1})$ mostra ser $a \in G(a)$. Dum modo geral, porém, se escrevermos $-a - \ldots - a^{n-1} = r$, tem-se $a = a^n + (ar - r)$, ou $a^n = a - (ar - r)$. O teorema 1 garante-nos que *a é regular* $-\mathrm{G}$, *sempre que a^n é regular* $-\mathrm{G}$.

Teorema 4: — *Se $\mathfrak{S}$ é comutativo, tem-se* $\mathrm{N} = \mathfrak{R}_{**}$. Em face do teorema 3, bastará provar $N \subseteq \mathfrak{R}_{**}$. Sabemos que, sendo $b \in N$, é $b = bx - x + \Sigma(r_i b s_i - r_i s_i) = b(x + \Sigma r_i s_i) - (x + \Sigma r_i s_i) = by - y$, onde $x, r_i, s_i, y \in \mathfrak{S}$. Concluímos, pois, que, para cada $b \in N$, é $b \in \{bz - z\}$. Assim, N é ideal quase-regular, como se quer.

Como no Cap. XIV, § 3, poderíamos pensar, dado um ideal bilateral $\mathfrak{a}$, regular $-G$, em destacar, em $\mathfrak{S}$, os ideais bilaterais $\mathfrak{b}$ tais que, para cada $b \in \mathfrak{b}$, existissem, $x, r_i, s_i \in \mathfrak{S}$, satisfazendo à relação de inclusão

$$b - [bx - x + \Sigma(r_i b s_i - r_i s_i)] \in \mathfrak{a}.$$

O teorema 1 garantiria ser b regular $-G$, de sorte que $\mathfrak{b}$ seria regular $-G$. Uma teoria de *ideais bilaterais quase-*

-regulares $-G$, relativamente a $\mathfrak{a}$, levaria precisamente ao radical N.

O teorema 13, Cap. XIII, § 4, pelo facto de $\mathfrak{S}/N$ não ter ideal nilpotente $\neq (o)$, permite-nos enunciar este

Teorema 5: — *É condição necessária e suficiente, para que* $\mathrm{b} \in \mathrm{N}$, *que* $\mathrm{b}\mathfrak{S} \subseteq \mathrm{N}$, *ou que* $\mathfrak{S}\mathrm{b} \subseteq \mathrm{N}$. Resulta daqui o

Corolário 7: — *É condição necessária e suficiente, para que* $\mathrm{b} \in \mathrm{N}$, *que* $\mathfrak{S}\mathrm{b}\mathfrak{S} \subseteq \mathrm{N}$. Sem dúvida que a condição é necessária. Para se ver que é suficiente, observemos o seguinte: de $\mathfrak{S} b \mathfrak{S} \subseteq N$, conclui-se $b\mathfrak{S} \subseteq N$, e desta última relação tira-se $b \in N$.

Em [11, pág. 497], encontra-se uma outra caracterização do radical N. Associemos ao elemento $a \in \mathfrak{S}$ o ideal bilateral $H(a) = \{\Sigma(x_i a y_i - x_i y_i)\}$ e definamos *regularidade* $-H$ pela condição $a \in H(a)$. Chamando *ideal regular* $-H$ todo o ideal composto de elementos regulares $-H$, é válido o

Teorema 6: — *É condição necessária e suficiente, para que* $\mathrm{b} \in \mathrm{N}$, *que* $\mathfrak{S}\mathrm{b}\mathfrak{S}$ *seja regular* $-H$. A condição é *necessária:* Se $b \in N$, então, para cada $a \in \mathfrak{S} b \mathfrak{S}$ é $a \in G(a)$, podendo escrever-se $a = ax - x + \Sigma(r_i a s_i - r_i s_i)$. Supondo $t, z \in \mathfrak{S}$, tem-se $taz = taxz - txz + \Sigma(tr_i a s_i z - tr_i s_i z)$, o que mostra ser $taz \in H(a)$, e, consequentemente, $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq H(a)$. Em virtude de se ter, conforme a definição de $H(a)$, $(\mathfrak{S} a \mathfrak{S}, H(a)) = \mathfrak{S}^2$, vê-se que aqui tem lugar a igualdade $H(a) = \mathfrak{S}^2$. Portanto, é $\mathfrak{S} b \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}^2 = H(a)$, para cada $a \in \mathfrak{S} b \mathfrak{S}$, tendo-se $a \in H(a)$, como se afirma na 1.ª parte do teorema. A condição é *suficiente:* Se, para cada $a \in \mathfrak{S} b \mathfrak{S}$, é válida a inclusão $a \in H(a)$, é igualmente válida a inclusão $a \in G(a) \supseteq H(a)$, de sorte que, pelo corolário 7, $b \in N$.

Os resultados acabados de estabelecer permitem demonstrar o seguinte

Teorema 7: — *O radical* $N(\mathfrak{a})$, *do ideal bilateral* $\mathfrak{a}$, *de* $\mathfrak{S}$, *é* $N \cap \mathfrak{a}$, [11, pág. 498]. Comecemos por verificar que, para cada $b \in N \cap \mathfrak{a}$, o ideal bilateral $\mathfrak{a} b \mathfrak{a}$, de $\mathfrak{a}$, é regular $-H$. Então, como consequência do teorema 6, ter-se-á $b \in N(\mathfrak{a})$, de sorte que $N \cap \mathfrak{a} \subseteq N(\mathfrak{a})$. Ora, considerado b, para cada $a \in \mathfrak{a} b \mathfrak{a} \subseteq N \cap \mathfrak{a}$, existem $x, r_i, s_i \in \mathfrak{S}$ tais que $a = ax - x + \Sigma(r_i a s_i - r_i s_i)$, pelo que, sendo $t, z \in \mathfrak{a}$, se tem $taz = taxz - txz + \Sigma(t r_i a s_i z - t r_i s_i z)$. A forma deste 2.º membro, visto serem arbitrários $t, z \in \mathfrak{a}$, mostra que, para cada $a \in \mathfrak{a} b \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^2$, é $\mathfrak{a} a \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^2 = H(a)$, como se viu por um raciocínio feito no teorema anterior. Desta sorte, é $a \in H(a)$, como se anunciou. Feito isto, temos de provar que, inversamente, $N(\mathfrak{a}) \subseteq N \cap \mathfrak{a}$. Dado $b \in N(\mathfrak{a})$, como se tem $\mathfrak{a} \mathfrak{S} b \mathfrak{S} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} b \mathfrak{a} \subseteq N(\mathfrak{a})$, o corolário 7 afirma-nos que os elementos de $\mathfrak{S} b \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ pertencem ao radical $N(\mathfrak{a})$. Nestas condições, $\mathfrak{S} b \mathfrak{S}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$ composto de elementos regulares $-G$, em $\mathfrak{S}$, precisamente por serem regulares $-G$, em $\mathfrak{a}$, os referidos elementos. Assim, é $b \in N$, e, portanto, $b \in N \cap \mathfrak{a}$, como se deseja.

Corolário 8: — *O radical dum anel é um anel radical,* (Veja-se a nota do final da pág. em que começa o § 3 do Cap. XIV). De facto, $N \cap N = N$.

Seja $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_n$ o anel de matrizes de grau n com elementos de $\mathfrak{A}$. Tem lugar este

Teorema 8: — *É condição necessária e suficiente, para que uma matriz* $\mathrm{S} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ik}})$ *pertença ao radical* $\mathrm{N}(\mathfrak{A}_\mathrm{n})$, *que os elementos* a_{ik} *pertençam ao radical* $\mathrm{N}(\mathfrak{A})$. A condição é *suficiente.* A demonstração de B. Brown e N. H. McCoy assenta sôbre o seguinte

Lema 1: — *Se os elementos de* $\mathrm{S} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ik}})$ *são regulares* $-\mathrm{H}$, *em* $\mathfrak{A}$, *a matriz* S *é regular* $-\mathrm{H}$, *em* $\mathfrak{A}_\mathrm{n} = \mathfrak{S}$. Visto que $a_{ik} \in H(a_{ik})$, tem-se $\mathfrak{A} a_{ik} \mathfrak{A} \subseteq H(a_{ik})$; de sorte que a relação $(\mathfrak{A} a_{ik} \mathfrak{A}, H(a_{ik})) = \mathfrak{A}^2$ leva a $H(a_{ik}) = \mathfrak{A}^2 = H(a_{11})$. Assim, para cada a_{ik}, é $a_{ik} \in H(a_{11})$, tendo-se $a_{ik} = \sum_\rho (x_{ik_\rho} a_{11} y_{ik_\rho} - x_{ik_\rho} y_{ik_\rho})$. Modificando ligeiramente uma notação introduzida no Cap. XIV, § 3, designemos por $B_{ij}[b]$, $C_{ij}[c], \ldots$ as matrizes de $\mathfrak{A}_n$, quando se colocam $b, c, \ldots$ na linha i e coluna j, deixando zero em todos os outros lugares. Vê-se imediatamente que $B_{kr}[b] S C_{sm}[c]$ tem todos os elementos nulos, salvo o elemento (k, m), que se reduz a $b a_{rs} c$. A matriz

$X_{i1}[x_{ik_\rho}] S Y_{1k}[y_{ik_\rho}] - X_{i1}[x_{ik_\rho}] Y_{1k}[y_{ik_\rho}]$ tem o elemento $x_{ik_\rho} a_{11} y_{ik_\rho} - x_{ik_\rho} y_{ik_\rho}$ no lugar (i, k), sendo nulos os restantes elementos. Nessas condições, é $\Sigma(X_{i1}[x_{ik_\rho}] \cdot S Y_{1k}[y_{ik_\rho}] - X_{i1}[x_{ik_\rho}] Y_{1k}[y_{ik_\rho}]) = A_{ik}[a_{ik}]$, e, portanto, $S = \sum_{i,k} A_{ik}[a_{ik}]$, ou seja (numa escrita simplificada):

$$S = \sum_{i,k} \Sigma (X_{i1} S Y_{1k} - X_{i1} Y_{1k}).$$

Esta igualdade mostra que S é, efectivamente, regular $-H$, em $\mathfrak{A}_n$.

Demonstrado o lema, tomemos $B = (b_{ij})$, com $b_{ij} \in N(\mathfrak{A})$. Vamos ver que $B \in N(\mathfrak{A}_n)$. Sejam $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ik})$ duas matrizes de $\mathfrak{S}$. A matriz $T = X B_{ij}[b_{ij}] Y$ tem os elementos $t_{\lambda\mu} = x_{\lambda i} b_{ij} y_{j\mu}$. Visto que $\mathfrak{A} b_{ij} \mathfrak{A}$ é regular $-H$ (teor. 6), os elementos de T são todos regulares $-H$, de sorte que o lema nos garante ser T regular H. Visto que X e Y são quaisquer em $\mathfrak{A}_n$; $\mathfrak{S} B_{ij}[b_{ij}] \mathfrak{S}$ é regular $-H$ em $\mathfrak{S}$, e, por consequência, $B_{ij}[b_{ij}] \in N(\mathfrak{A}_n)$. Deste modo, será $\Sigma\, B_{ij}[b_{ij}] = B = (b_{ij}) \in N(\mathfrak{A}_n)$, o que demonstra a suficiência indicada.

A condição é *necessária.* Seja $S = (a_{ik}) \in N(\mathfrak{A}_n)$. Se b e c se fixam arbitràriamente em $\mathfrak{A}$, tem-se

$$D = \sum_k B_{kr}[b] S C_{sk}[c] = (b a_{rs} c, \ldots, b a_{rs} c) \in N(\mathfrak{A}_n),$$

onde D, como se viu no Cap. XIV, § 3, é uma matriz diagonal de elementos diagonais iguais a $d = b a_{rs} c$. Mas D é regular $-G$, em $\mathfrak{A}_n$, tendo-se, pois, $D = DX - X + \Sigma(R_i D S_i - R_i S_i)$. Igualando, por ex., o termo $(1, 1)$ das matrizes representadas pelos dois membros, conclui-se $d \in G(d)$. Deste modo, pois que b e c são arbitrários, $\mathfrak{A} a_{rs} \mathfrak{A}$ é regular $-G$ e $a_{rs} \in N(\mathfrak{A})$, como se afirmou.

3) **O anti-radical** — Para darmos alguns detalhes sobre a teoria do anti-radical, referida na Introdução, demonstraremos dois teoremas preliminares.

Teorema 9: — *Se* $\mathfrak{r}$ *é ideal direito mínimo,* $a\mathfrak{r}$, *com* $a \in \mathfrak{S}$, *é mínimo ou nulo.* Suponhamos $a\mathfrak{r} \neq (o)$ e tomemos $o \neq b \in a\mathfrak{r}$.

Vamos ver que b gera o ideal direito $a\mathfrak{r}$. Pondo $b = ar$, $(o \neq r \in \mathfrak{r})$, o ideal direito gerado por b contém $ar\mathfrak{S}$ e mar, qualquer que seja o inteiro m. Pode ser $r\mathfrak{S} = (o)$ ou $r\mathfrak{S} = \mathfrak{r}$. Neste último caso, o ideal direito gerado por b contém $a\mathfrak{r}$, e o teorema está demonstrado. De contrário, sendo $r\mathfrak{S} = (o)$, o ideal direito gerado pelo elemento r é o conjunto $\{mr\} = \mathfrak{r}$ e o ideal direito gerado por b é o conjunto $\{mar\} = \{a \cdot mr\} = a\mathfrak{r}$.

TEOREMA 10: — *Se $\mathfrak{P}$ é uma soma dum número qualquer de ideais direitos mínimos dum anel $\mathfrak{S}$, todo o ideal direito $\mathfrak{Q}$, contido em $\mathfrak{P}$, é também uma soma dum número finito ou infinito de ideais direitos mínimos.* Escrevamos $\mathfrak{P} = \Sigma \mathfrak{r}_\alpha$, onde os $\mathfrak{r}_\alpha$ são mínimos. Dado $b \in \mathfrak{Q}$, ponhamos $b = r_\beta + r_\gamma + \dots + r_\sigma$, onde $r_\beta \in \mathfrak{r}_\beta$, etc. O ideal $(b)_d$, gerado por b, está contido em $(\mathfrak{r}_\beta, \dots, \mathfrak{r}_\sigma)$. Esta soma pode reduzir-se a uma soma directa finita mínima, $\mathfrak{r}_\beta + \dots + \mathfrak{r}_\delta$, por ex. Então, será $(b)_d \cap (\mathfrak{r}_\beta + \dots + \mathfrak{r}_\delta) = (b)_d$, e, portanto, $\mathfrak{r}_\beta + \dots + \mathfrak{r}_\delta = (b)_d + \mathfrak{r}_\gamma + \dots + \mathfrak{r}_\varepsilon$, onde os $\mathfrak{r}_\gamma, \dots$ são certos $\mathfrak{r}_\beta$. Conclui-se daqui que $(b)_d$ é uma soma directa finita de ideais direitos mínimos contidos em $\mathfrak{Q}$. Como isto sucede para cada $b \in \mathfrak{Q}$, fica demonstrado o teorema.

O teorema 9 leva à conclusão de que *a soma dos ideais direitos mínimos dum anel é um ideal bilateral.* Este ideal foi designado por BAER, [2, pág. 544], *anti-radical* de $\mathfrak{S}$. Em termos mais gerais do que os assinalados na Introdução, resulta imediatamente, da definição de anti-radical, que um anel, soma directa de ideais direitos simples, é igual ao seu anti-radical.

TEOREMA 11: — *Para todo o ideal direito $\mathfrak{J}$ contido no anti-radical, é válida a igualdade* $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}^3$. Conforme o teorema 10, $\mathfrak{J}$ é soma de ideais direitos mínimos. Se $\mathfrak{r}$ for um tal ideal, tem-se $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{J}$, e $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{r}^2 = (o)$. Se $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}$, vê-se que $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{J}^2$, e, se $\mathfrak{r}^2 = (o)$, é $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{N}$, onde $\mathfrak{N}$ é o radical superior, [Cap. XIII, § 5]. Assim, cada $\mathfrak{r}$ ou pertence a $\mathfrak{J}^2$ ou pertence à intersecção $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{N}$, pelo que $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}^2, \mathfrak{J} \cap \mathfrak{N})$. Então $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}^3$, visto que, como aliás salientaremos no teorema a seguir, é $\mathfrak{J} \cdot (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{N}) = (o)$.

TEOREMA 12: — *Se $\mathfrak{X}$ é o anti-radical de $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{z}$ um nilideal direito do mesmo anel, tem-se* $\mathfrak{X}\mathfrak{z} = (o)$. A demonstração tira-se como consequência do seguinte teorema, provado em [(I), pág. 7]: se $\mathfrak{r} \neq (o)$ é um ideal direito simples e $\mathfrak{z}$ um nilideal direito, tem-se $\mathfrak{r}\mathfrak{z} = (o)$. Em particular é $\mathfrak{X}\mathfrak{N} = (o)$, onde $\mathfrak{N}$ é o radical superior.

Acabamos de ver que o anti-radical faz parte do ideal bilateral que é aniquilador esquerdo de $\mathfrak{N}$. Vamos precisar um caso em que é idêntico a esse aniquilador.

LEMA 2: — *Se $\mathfrak{T}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$ e $x \in \mathfrak{S}$ é tal que $x\mathfrak{T} = (o)$, então, se $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{T}$ é um ideal direito mínimo entre os ideais direitos que contêm $\mathfrak{T}$, o ideal direito $x\mathfrak{r}$ ou é mínimo em $\mathfrak{S}$ ou é o ideal nulo.* Suponhamos, com efeito, $x\mathfrak{r} \neq (o)$. Sendo $o \neq b \in x\mathfrak{r}$, poremos $b = xr$, com $r \in \mathfrak{r}$. Trata-se de provar que o ideal direito gerado por b é igual a $x\mathfrak{r}$. Em virtude de se ter $xr \neq o$, é $r \notin \mathfrak{T}$, de sorte que $((r)_d, \mathfrak{T}) = \mathfrak{r}$, onde $(r)_d$ significa o ideal direito gerado pelo elemento r. Resulta, em seguida, $x(r)_d = x\mathfrak{r}$, e, portanto, $x(r)_d = (xr)_d = (b)_d$, como se deseja.

LEMA 3: — *Supondo $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$ igual ao seu anti-radical, o aniquilador esquerdo $\mathfrak{L}$, de $\mathfrak{P}$, verifica a condição* $\mathfrak{L}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$. Em primeiro lugar, como é $\mathfrak{S}' = \Sigma \mathfrak{r}'$, onde os ideais direitos $\mathfrak{r}'$ são mínimos, será $\mathfrak{S} = \Sigma \mathfrak{r}$, onde os ideais $\mathfrak{r}$ são mínimos entre os ideais que contêm $\mathfrak{P}$. Admitindo que é $x\mathfrak{P} = (o)$, será $x\mathfrak{S} = \Sigma x\mathfrak{r}$ uma soma de ideais direitos mínimos, como se conclui do lema anterior. Então é $x\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$.

No caso $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$, o ideal bilateral $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{X}$, que verifica a relação $\mathfrak{L}\mathfrak{N} = (o)$, satisfaz ainda a $\mathfrak{L}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$. Portanto:

TEOREMA 13: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel para o qual todo o ideal bilateral $\mathfrak{a} \neq (o)$ satisfaz à igualdade $\mathfrak{a}\mathfrak{S} = \mathfrak{a}$ e se $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ é igual ao seu anti-radical, o aniquilador esquerdo de $\mathfrak{N}$ é o anti-radical de $\mathfrak{S}$,* (BAER, [2]).

4) **O ideal regular máximo dum anel** — Seguindo o programa elaborado na Introdução, vamos passar ao estudo do ideal regular máximo dum anel.

Um elemento $a \in \mathfrak{S}$ dir-se-á *regular* (1), se existir $x \in \mathfrak{S}$ tal que $axa = a$. O estudo dos anéis compostos exclusivamente de elementos regulares (anéis regulares) foi feito em [(I), págs. 32 a 37]. Um *ideal* de $\mathfrak{S}$ será chamado regular, se for composto de elementos regulares.

TEOREMA 14: — *Se $\mathfrak{a}$ for ideal bilateral regular, para cada $a \in \mathfrak{a}$, existe $y \in \mathfrak{a}$ tal que $aya = a$.* Supondo $axa = a$, $(x \in \mathfrak{S})$, tem-se $axaxa = axa = a$, de sorte que basta tomar $y = xax \in \mathfrak{a}$.

A ordem de ideias anunciada vai resultar do teorema a seguir, que corresponde ao teorema 1, dado na teoria do radical — *G*.

TEOREMA 15: — *Se $c - d$ é regular e $d \in c\mathfrak{S}c$, c é regular*, [12, pág. 166].

Por hipótese, tem-se $c - d = (c - d)x(c - d)$. Tira-se daqui $c = d + cxc - cxd - dxc + dxd$. Este 2.º membro, em virtude de d ter-se a forma csc, $(s \in \mathfrak{S})$, pertence a $c\mathfrak{S}c$, o mesmo se dizendo de c.

COROLÁRIO 9: — *A soma de dois ideais bilaterais regulares é um ideal bilateral regular.* Sejam $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ os dois ideais bilaterais em causa, e escrevamos $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$. Trata-se de provar que cada $a \in \mathfrak{a}$ é regular. Ponhamos $a = a_1 - a_2$, com $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $(i = 1, 2)$, e tenhamos em conta a hipótese de poder escrever-se $a_1 = a_1 x_1 a_1$. Substituindo nesta igualdade a_1 por $a + a_2$, obtém-se $a - a x_1 a = -a_2 + a x_1 a_2 + a_2 x_1 a + a_2 x_1 a_2$. O 2.º membro pertence a $\mathfrak{a}_2$ e é, portanto, regular, assim como o primeiro. O teorema anterior garante que a é regular, como se deseja.

Posto isto, definamos o *ideal regular máximo dum anel*, que representaremos por M, ou por $\mathrm{M}(\mathfrak{S})$, como o conjunto dos elementos $b \in \mathfrak{S}$ tais que, para cada $a \in (b)$, é $a \in a\mathfrak{S}a$. Tem lugar, então, o

COROLÁRIO 10: — *M é o ideal bilateral regular, conjunto unido de todos os ideais bilaterais regulares.* Em primeiro

(1) Este vocábulo foi usado em (I) com sentido diferente: [(I), pág. 147 e (I), pág. 55].

lugar, o referido conjunto unido é um ideal bilateral regular, precisamente o maior ideal bilateral nessas condições. Ora M, conforme a sua definição, está contido nesse conjunto unido. Por último, um elemento b do conjunto unido gera um ideal bilateral regular, pelo que pertence a M.

COROLÁRIO 11: — *No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathrm{M} = \mathfrak{S}'$, se $\mathrm{a} \in \mathfrak{S}$ é regular, o seu correspondente $\mathrm{a}' \in \mathfrak{S}'$ é regular, e recìprocamente.* Neste corolário, podemos substituir M por qualquer ideal bilateral regular. No corolário 3, do § 2, também N pode substituir-se por qualquer ideal bilateral regular — *G*.

COROLÁRIO 12: — *No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$, do corolário anterior, um ideal bilateral regular tem um ideal bilateral regular como correspondente.* Esta mesma afirmação é válida para ideais unilaterais.

COROLÁRIO 13: — *O anel cociente $\mathfrak{S}/\mathrm{M}$ não tem ideal bilateral regular.*

Passemos à propriedade 6), citada no § 1.

TEOREMA 16: — *Para o ideal bilateral $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, tem-se $\mathrm{M}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathrm{M}$.*

De facto, $\mathfrak{a} \cap M$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{a}$ e de $\mathfrak{S}$. Por ser regular em $\mathfrak{S}$, é anel regular, [teor. 14]; e, assim, é regular em $\mathfrak{a}$. Conclui-se $\mathfrak{a} \cap M \subseteq M(\mathfrak{a})$. Inversamente, se $b \in M(\mathfrak{a})$, vamos ver que, cada $a \in (b)$, é regular. Isso acarretará $b \in M \cap \mathfrak{a}$, e a demonstração fica completa. Como em [12, págs. 166 e 167], escrevamos

$$a = br + sb + nb + \Sigma p_i b q_i, \quad (r, s, p_i, q_i \in \mathfrak{S};\ n \text{ inteiro}),$$

e, tendo em conta ser b um elemento regular em $\mathfrak{a}$, ponhamos $b = btb$, com $t \in \mathfrak{a}$. Vê-se que

$$a = b(tbr) + (sbt)b + nb + \Sigma(p_i bt)b(tbq_i),$$

onde os parêntesis contêm elementos pertencentes a $\mathfrak{a}$. Resulta daqui ser a pertencente ao ideal bilateral gerado por b, em $\mathfrak{a}$, e ser, portanto, regular todo o elemento de (b), como se quer.

A validade da propriedade (4) traduz-se na relação

$$M(\mathfrak{A}_n) = [M(\mathfrak{A})]_n.$$

Em particular, no caso de $\mathfrak{A}$ sêr um anel regular, ter-se-á $M(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, $M(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$. Precisamente, começaremos pelo lema seguinte, devido a VON NEUMANN.

LEMA 4: — *Se $\mathfrak{A}$ é um anel regular, tem-se* $M(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$. A demonstração de B. BROWN e N. H. MCCOY é muito simples. Dum modo geral, se ξ é um elemento dum anel qualquer $\mathfrak{S}$ tal que $a\xi a = a$, $(a \in \mathfrak{S})$, poremos $\xi = a'$. Comecemos, então, por provar o lema no caso $n = 2$. Vê-se que, se for

$$A = \begin{pmatrix} o & o \\ a & o \end{pmatrix}, \quad \text{é} \quad A' = \begin{pmatrix} o & a' \\ o & o \end{pmatrix}.$$

Em seguida, para

$$B = \begin{pmatrix} b & o \\ c & d \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} b' & o \\ o & d' \end{pmatrix},$$

é $B - BRB$ uma matriz do tipo A. Finalmente, para

$$C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} o & o \\ f' & o \end{pmatrix},$$

é $C - CSC$ uma matriz do tipo B. Então, dada a matriz arbitrária $C \in \mathfrak{A}_2$, passa-se a uma matriz do tipo B, depois a outra do tipo A. Visto que A é regular, B será regular (teor. 15), o mesmo se dizendo de C, como se deseja.

Passando ao caso de n ser qualquer, observemos que, sendo $\mathfrak{A}$ regular, são regulares $\mathfrak{A}_2$, $(\mathfrak{A}_2)_2 = \mathfrak{A}_4$, etc. Então, supondo $2^m \gtreqless n$, basta tratar o caso $2^m > n$. Se for $C \in \mathfrak{A}_n$, construamos

$$P = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}_{2^m}, \quad \text{assim como} \quad P' = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Das igualdades

$$P - PP'P = 0 = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} CDC & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

concluímos $CDC = C$. A demonstração está completada.

Posto isto, fixemos o teorema em questão.

TEOREMA 17: — *Qualquer que seja o anel* $\mathfrak{A}$, *é* $M(\mathfrak{A}_n) = [M(\mathfrak{A})]_n$. A demonstração exige apenas que se estabeleça a inclusão $M(\mathfrak{A}_n) \subseteq [M(\mathfrak{A})]_n$, visto que a inclusão contrária resulta fàcilmente do lema. Seja $A \in M(\mathfrak{A}_n)$ e ponhamos $A = ARA = ARARA$. Indicando as matrizes pelo seu elemento geral colocado num parêntesis, será, pondo ainda $AR = T$, $RA = S$,

$$(a_{ij}) = A = (AR)A(RA) = TAS = (t_{ij})(a_{ij})(s_{ij}),$$

$$a_{ij} = \sum_{p,q} t_{ip}\, a_{pq}\, s_{qj}.$$

Também é válida a igualdade

$$\sum_{p,q} B_{1p}[t_{ip}]\, A\, C_{q1}[s_{qj}] = \begin{pmatrix} a_{ij} & o \\ o & o \end{pmatrix}, \tag{1}$$

onde os $o\,o$ representam matrizes rectangulares convenientes. O elemento geral, b, do ideal bilateral gerado por a_{ij}, em $\mathfrak{A}$, tem a forma $b = r\,a_{ij} + a_{ij}\,s + n\,a_{ij} + \sum_k p_k\, a_{ij}\, q_k$, de sorte que é

$$\begin{pmatrix} b & o \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & o \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ij} & o \\ o & o \end{pmatrix} + \ldots + \sum_k \begin{pmatrix} p_k & o \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{ij} & o \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_k & o \\ o & o \end{pmatrix}.$$

Em virtude de (1) ambas as matrizes

$$\begin{pmatrix} b & o \\ o & o \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_{ij} & o \\ o & o \end{pmatrix}$$

pertencem ao ideal bilateral gerado por A, e, por isso, a primeira das mesmas matrizes é regular em $\mathfrak{A}_n$. Se for

$$\begin{pmatrix} b & o \\ o & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & Y \\ Z & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & o \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & o \\ o & o \end{pmatrix},$$

onde Y, Z, V são matrizes rectangulares convenientes, vê-se que $bxb = b$, e que, portanto, o ideal bilateral gerado por a_{ij} é regular. Assim, tem-se $a_{ij} \in M(\mathfrak{A})$, como se quer.

Nada mais nos resta que acentuar o carácter anti-radical de M, nos termos assinalados na Introdução. Seguiremos ainda [12, págs. 169 a 171].

Teorema 18: — *Qualquer que seja o anel $\mathfrak{S}$, tem-se $M \cap \mathfrak{R}_{**} = (o)$.* De facto, se a é um elemento da intersecção, existe $x \in \mathfrak{S}$ tal que $axa = a$, $axax = ax$. Se fosse $a \neq o$, ax seria um idempotente não nulo pertencente ao radical — J, o que é absurdo, [Cap. XIV, corol. 8].

Corolário 14: — *Quando $\mathfrak{S} = \mathrm{M}$, é $\mathfrak{R}_{**} = (\mathrm{o})$; e, quando $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{**}$, é $\mathrm{M} = (\mathrm{o})$.*

Definamos *aniquilador* dum ideal bilateral $\mathfrak{a}$, e representemo-lo por $\underline{\mathfrak{a}}$, como o conjunto dos elementos $a \in \mathfrak{S}$ tais que $a\mathfrak{a} = \mathfrak{a}a = (o)$. $\underline{\mathfrak{a}}$ é um ideal bilateral.

Corolário 15: — *Qualquer que seja o anel $\mathfrak{S}$, tem-se $\mathrm{M} \subseteq \underline{\mathfrak{R}}_{**}$, $\mathfrak{R}_{**} \subseteq \underline{\mathrm{M}}$, e, por consequência, o ideal regular máximo, de $\underline{\mathfrak{R}}_{**}$, é M; e o radical — J, de $\underline{\mathrm{M}}$, é $\mathfrak{R}_{**}$.* Basta ter em conta, na verdade, que o teorema dá $M\mathfrak{R}_{**} = \mathfrak{R}_{**}M = (o)$.

Em jogo com o corolário 14, devemos estudar os casos limites $\mathfrak{R}_{**} = (o)$ e $M = (o)$. O primeiro é realizado nos anéis regulares, [Cap. XIV, § 3, teor. 16], e para esses é, efectivamente, $\mathfrak{S} = M$, dando-se uma recíproca da 1.ª afirmação do referido corolário. Quanto à hipótese $M = (o)$, vamos, nas considerações a seguir, supor $\underline{\mathfrak{R}}_{**} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$. Na 2.ª afirmação do corolário 14, realiza-se uma tal inclusão, a qual basta para se ter $M = (o)$, pois que, sendo sempre $M \subseteq \underline{\mathfrak{R}}_{**}$, é, então, $M \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, e, de acordo com o teorema 18, $M = (o)$. Inversamente, vamos mostrar que,

com a condição suplementar de ser $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ um anel regular, a condição $M = (o)$ arrasta a inclusão do aniquilador do radical — J no próprio radical. Resultará, assim, o seguinte enunciado:

Teorema 19: — *Quando $\mathfrak{S} = \mathrm{M}$, é $\mathfrak{R}_{**} = (\mathrm{o})$, e reciprocamente, se $\mathfrak{S}$ for regular; quando $\underline{\mathfrak{R}}_{**} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, é $\mathrm{M} = (\mathrm{o})$, e, reciprocamente, se $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ é regular.* A inversa que foi anunciada assenta no seguinte

Lema 5: — *Se $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ é regular, tem-se $\mathfrak{R}_{**} \cap \underline{\mathfrak{R}}^2_{**} = (\mathrm{o})$.* Se a pertence à intersecção, pode escrever-se $a = \sum_{i=1}^{n} r_i r'_i$, onde $r_i, r'_i \in \underline{\mathfrak{R}}_{**}$. Sendo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$, o facto deste último anel ser regular implica que o correspondente $\overline{r}_i$, de r_i, satisfaz a uma relação $\overline{r}_i \overline{x}_i \overline{r}_i = \overline{r}_i$, pelo que existirá $x_i \in \mathfrak{S}$ verificando a igualdade $r_i - r_i x_i r_i = y_i \in \mathfrak{R}_{**}$. Supondo que a se reduz a $r_1 r'_1$, virá $a = r_1 r'_1 = (r_1 x_1 r_1 + y_1) r'_1 = r_1 x_1 r_1 r'_1 = r_1 x_1 a = o$, pois y_1 e a pertencem ao radical — J. Mas, não tendo a o aspecto indicado, ou seja, existindo n parcelas, a validade da afirmação para $n-1$ parcelas arrasta a validade para n, como vamos ver. De facto. sendo

$$a - \sum_{i=1}^{n-1} r_i r'_i = r_n r'_n,$$

é também

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_i r'_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i x_i r_i + y_i) r'_i = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i r_i r'_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} r_i x_i r_i r'_i + r_n x_n \left(a - \sum_{i=1}^{n-1} r_i r'_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (r_i x_i - r_n x_n) r_i r'_i.$$

Sob esta última forma, vê-se que a é uma soma de $n-1$ parcelas do tipo em questão, visto que $(r_i x_i - r_n x_n) r_i \in \underline{\mathfrak{R}}_{**}$, $r'_i \in \underline{\mathfrak{R}}_{**}$. Assim, é $a = o$, e o lema está demonstrado.

Quanto ao teorema, estudemos, em $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$, os correspondentes dos elementos $b \in \underline{\mathfrak{R}}^2_{**}$. Sendo $\bar{b} = \bar{b}\bar{x}\bar{b}$, por ser regular o anel cociente, é $b - bxb = o$, por ser o 1.º membro um elemento da intersecção referida no lema. Isto significa que $\underline{\mathfrak{R}}^2_{**} = (o)$, pois é um ideal bilateral regular contido no ideal regular máximo M, e este último é nulo, por hipótese. Então, $\underline{\mathfrak{R}}_{**}$, como nilideal, está contido no radical — J, e o teorema fica provado.

Finalmente, vamos passar à propriedade oposta a 5). Como se sabe de [(I), pág. 49 e seguintes], um anel com elemento um e igual à soma de ideais direitos simples é idêntico a um anel semi-simples no sentido de E. NOETHER. Mas, então, [(I), pág. 52], o anel em questão é regular, tendo-se $\mathfrak{S} = M$. Assim:

TEOREMA 20: — *Um anel com elemento um, soma directa de ideais direitos simples, é igual ao seu ideal regular máximo.*

Quando é válida a condição de mínimo, há identidade entre os anéis regulares, os anéis semi-simples noetherianos e os anéis semi-simples no sentido de JACOBSON, [Cap. XIV, § 5, teor. 23]. Veremos, mais tarde, que há ainda a mesma identidade com os anéis semi-simples no sentido de BROWN-MCCOY. É sempre $\mathfrak{S} = M$. Esta igualdade não passa, porém, dum caso particular duma proposição mais geral que vai ser demonstrada.

TEOREMA 21: — *Se, num anel $\mathfrak{S}$, é verificada a condição de mínimo para ideais direitos, tem-se $\mathfrak{S} = \mathrm{M} + \underline{\mathrm{M}}$. M, como anel, é semi-simples, em qualquer dos sentidos indicados, e $\underline{\mathrm{M}}$ tem um radical — J que inclui o aniquilador do mesmo radical.* Baseamos a demonstração nos dois lemas seguintes.

LEMA 6: — *Se um ideal bilateral $\mathfrak{a}$, dum anel $\mathfrak{S}$, tem elemento um $= e$, $\mathfrak{a}$ é uma componente directa de $\mathfrak{S}$.* Para cada $x \in \mathfrak{S}$, tem-se $ex = exe$, $xe = exe$, de sorte que $ex = xe$. Escrevendo $x = ex + (x - ex)$, aparece $\mathfrak{S} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, onde $\mathfrak{b}$ é o ideal bilateral $\{x - ex\}$. A soma em questão é directa, visto que $ex = x - ex$ arrasta $ex = ex - ex = o$. Assim é $\mathfrak{S} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, verificando-se imediatamente ter-se

$\mathfrak{b} = \underline{\mathfrak{a}}$, por ser $(x - ex)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x - ex) = (o)$, e ser, para $a \in \underline{\mathfrak{a}}$, $a = a - eae\mathfrak{b}$.

LEMA 7: — *Os ideais de $\mathfrak{S}$, contidos em M, são ideais de M; e, reciprocamente, todo o ideal de M é ideal de $\mathfrak{S}$.* Como a parte directa da afirmação é imediata, vamos passar à recíproca. Se $\mathfrak{e}'$ é um ideal esquerdo de M, dado $a \in \mathfrak{e}'$, tendo em conta ser $ra \in M$, qualquer que seja $r \in \mathfrak{S}$, ponhamos $raxra = ra$. Como $raxr \in M$, o 1.º membro pertence a $\mathfrak{e}'$, o mesmo se dizendo de ra, como se quer. É claro que raciocínio análogo pode ser feito para ideais direitos.

Posto isto, passemos ao teorema. O lema 7 mostra que, em M, é válida a condição de mínimo para ideais direitos. Por outro lado, M é anel regular. Assim, M é semi-simples. Existirá elemento um em M, de sorte que, pelo lema 6, poderá pôr-se $\mathfrak{S} = M + \underline{M}$. A condição de mínimo transporta-se a $\mathfrak{S}/M$, e, portanto, a $\underline{M} \simeq \mathfrak{S}/M$. O ideal regular máximo de $\underline{M}$ é $\underline{M} \cap M = (o)$, de sorte que a afirmação final do teorema 19, tendo em conta ser $\mathfrak{R}_{**}$ o radical — J, de $\underline{M}$, e ser $\underline{M}/\mathfrak{R}_{**}$ um anel regular, garante estar contido em $\mathfrak{R}_{**}$ o aniquilador deste, considerado em $\underline{M}$.

ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA
Extracto do tomo XXXVI

TRÊS LIÇÕES SOBRE A TEORIA GERAL DOS ANÉIS

(1.ª LIÇÃO)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116

1952