Introdução à Mecânica Celeste

Cap. I

Os princípios da Mecânica de Galileu-Newton

1) A Dinâmica antiga – Discutiremos posteriormente as noções de espaço e de tempo. Neste momento limitamo-nos a admitir que elas são as do senso comum. A Cinemática, ou ciência do movimento, repousa simplesmente sôbre os conceitos de espaço e tempo. (As suas leis supor-se-ão também conhecidas.)

A escola aristotélica 1) aceitava dois tipos de movimento. Um deles, que tinha na queda dos corpos para a Terra o exemplo mais chocante, era o tipo dos "movimentos espontâneos", iniciados e realizados sem dispêndio de esfôrço, e que apenas poderiam terminar quando se lhes opusessem determinados obstáculos; o outro caracterizava os "movimentos forçados", isto é, os movimentos que só poderiam iniciar e conservar-se com dispêndio de esfôrço e que se "consumiam" fàcilmente, desde que o esfôrço cessasse. Um exemplo dêste segundo tipo seria dado pelo movimento duma pe

1) De Aristóteles, filósofo grego, que viveu do ano 384 (a.C.) ao ano 322 (a.C.).

lançada no ar. A ideia da extinção gradual do movimento substituía uma outra, segundo a qual, sempre que havia movimento, deveria haver esfôrço. Nesta última, com efeito, levantava-se imediatamente a questão de compreender a possibilidade de uma pedra poder abandonar a mão que a lança no ar, visto que a acção da mão cessa imediatamente após o momento em que a pedra a abandona.

Decorreram séculos, até que Galileu, à volta de 1580, criou a dinâmica científica.

2) **A Dinâmica de Galileu** – Uma das memoráveis experiências de Galileu consistiu simplesmente em deixar escorregar uma esfera metálica ao longo duma ranhura AB aberta numa mesa inclinada sôbre o horizonte e em deixar que o movimento da esfera prosseguisse depois ao longo de uma segunda ranhura BC, inclinada em sentido contrário ao de AB e situada com esta no mesmo plano vertical. Galileu pôde concluir que o ponto C, em que o movimento cessava, quási se encontrava no plano horizontal passando por A, ponto

tinha início o movimento da esfera. Se êste resultado era sempre o mesmo, para as diferentes inclinações de AB e de BC. O grande filósofo, descriminando nitidamente o que era de caracter secundário em face do que deveria considerar-se principal, atribuiu a efeitos das mesas AB e BC sôbre a esfera e à resistência do ar o facto de o ponto C não estar precisamente no plano horizontal de A. À medida que a inclinação de BC ia diminuindo, o movimento da esfera sôbre BC ia sendo cada vez mais longo, e, finalmente, quando BC se tornava horizontal, <u>o movimento não cessava</u>. O movimento, por outras palavras, deixava de extinguir-se, pelo menos "em pensamento". O pequeno esfôrço a dispender para o conservar era totalmente necessário para vencer efeitos secundários.

Nesta experiência, em contradição com a dinâmica antiga, encontra-se pois, um movimento que não é espontaneo, pelo facto de não entrar espontaneamente em movimento uma esfera pousada num plano horizontal, mas que também não carece de esfôrço para se manter indefinidamente no tempo, pelo que também não é um movimento forçado.

<u>Galileu</u> foi ainda mais longe. Tendo estudado o movimento de queda ao longo de AB, constatou que o mesmo era acelerado e que a aceleração era constante. Constatou ainda que ao longo de BC o movimento era retardado, e que a aceleração negativa era também constante.

A aceleração negativa diminuia em valor absoluto, à medida que diminuia a inclinação de BC. Galileu poude concluir que a esfera persistia indefinidamente em movimento rectilíneo e uniforme sôbre o plano horizontal BC, com uma velocidade igual à velocidade atingida na queda, no ponto B.

Esta "persistência" dum côrpo em movimento rectilíneo e uniforme, quando não sujeito a qualquer esfôrço, ou a persistência no estado repouso, nas mesmas condições, foi demonstrada por Galileu por muitas outras experiências. Foi ainda mais preciso. Imaginemos um jacto de água que, sob pressão constante, sai dum tubo colocado horizontalmente. Galileu explicou a trajectória parabólica seguida pelo jacto, deixando "persistir" o movimento horizontal da água, tal como existe à saída do tubo, e sobrepondo-lhe o movimento da queda dos corpos para a Terra, que antecipadamente havia estudado, e do qual conhecia a constante de aceleração.

A conclusão fundamental que acaba de ser exposta leva a procurar qual o motivo por que um movimento pode mudar de direcção ou de velocidade. Duma maneira mais precisa, diremos: importa procurar das razões que podem levar à variação do vector velocidade.

Galileu atribuiu tal facto a uma causa que designou sob

o nome de força. O movimento da queda dos corpos para a Terra, com[o]
movimento acelerado, era ocasionado por uma fôrça que designou pel[o]
nome de pêso.

Imaginemos uma mola suspensa que se distende pela acção dum pêso. Po[r]
fim a mola e pêso ficam em equilíbrio. O pêso, que tinha começ[a-]
do por distender a mola e "cair", vê o seu movimento modificado; a [mo-]
la, que tinha começado por mover-se (pelo menos em parte), cessa
também o movimento. Há em jôgo, além do pêso, a fôrça de diste[n-]
são da mola. Vê-se aqui a acção do pêso (que o fazia cair) compensada por uma
fôrça de origem diferente. Em muitas outras experiências pode cons-
tatar-se que as fôrças (como causas de movimento ou de modificações
de movimento) eram compensáveis por pesos
distendendo fios em determinadas direcções.

Para Galileu, o pêso, em cada lugar da Terra, era computado
como uma fôrça constante (para cada côrpo). A comparação dos pê[sos]
era feita por meio da balança.

O carácter da compensação de fôrças e pesos acima referido levo[u]
a definir a fôrça como grandeza vectorial (Stevin). As regras de
composição de fôrças como grandezas vectoriais puderam ser verifica-
dos experimentalmente. Nessas experiências, tratava-se sempre de

avaliar fôrças em pêso e de verificar que várias forças podiam ser aplicadas a um côrpo sem alterarem o estado de repouso ou de movimento dêste, ou de verificar que uma fôrça podia substituir várias nos efeitos destas sôbre o estado de repouso ou de movimento do côrpo.

Desenvolveu-se assim, incidentalmente, a Estática, ou ciência do equilíbrio.

Mas continuemos a Dinâmica. Tomemos uma experiência como a seguinte (máquina de Atwood)[1]: dois pesos A e B são iguais suspensos nas extremidades dum fio de pêso desprezável e o fio faz-se passar por uma roldana instalada no alto duma haste colocada verticalmente. Em qualquer posição dos pêsos há equilíbrio. Se um pêso adicional muito pequeno (para que se possa imaginar sempre o mesmo sistema em movimento quando o pêso adicional varia) se coloca sôbre um daqueles dois pesos, começa o movimento do sistema, descendo A (por ex.) e subindo B. O movimento, como o revela a observação, é acelerado. Se o pêso adicional se duplica, a nova aceleração é dupla da primeira. Nesta experiência não pode dizer-se que haja um sistema a cair pela acção do pêso. Há simplesmente uma fôrça (um pequeno pêso) a determinar o movimento dum sistema constituído pelos dois pesos A e B, pelo próprio peso adicional e até pela roldana. A conclusão a notar é esta:

1) O aparelho data de 1784. As experiências de Galileu foram principalmente as do plano inclinado.

a aceleração do sistema é proporcional à fôrça aceleratriz.

Na experiência anterior houve alterações da fôrça, conservando-se o sistema móvel. Uma experiência em que, pelo contrário, há uma mesma fôrça a acelerar sistemas diferentes, pode realizar-se ainda com a máquina de Atwood, modificando agora os pesos A e B, que se substituem por pesos A' e B', e conservando o pêso adicional. Conclui-se então, o seguinte: as acelerações são inversamente proporcionais aos pesos A e A' (ou B e B')

Mostra a experiência que a aceleração dos corpos que caiem muda com o lugar à superfície da Terra. Se está assente a ideia de que a aceleração dum côrpo é proporcional à fôrça aceleratriz, tem de admitir-se que o pêso dum côrpo varia igualmente com o lugar. O que para o côrpo se mantém constante à superfície da Terra é a razão do pêso para a aceleração. Essa constante diz-se a massa do côrpo.

A noção de massa é independente, pelo menos sob o ponto de vista da abstracção pura, da noção de pêso. Quando na máquina de Atwood se substituem A e B por A' e B', verificou-se, de facto, que as massas se modificaram como os pesos, mas essa circunstância é, em princípio, meramente acidental. A massa do côrpo revela-se como uma resistência à modificação do movim to. Quanto maior fôr a massa tanto menor é a aceleração que uma dada fôrça lhe comunica. É costume designar por <u>inércia</u> a resistência aludida e caracterizar a massa por adjunção da palavra <u>inerte</u>. Tem-se, assim, a noção de <u>massa inerte</u>.

Uma outra experiência que pode realizar-se, para precisar bem a ideia da inércia que acabamos de dar, é a seguinte: um martelo, de cabo enfiado num eixo horizontal, pode deixar-se rodar em tôrno dêsse eixo, de modo que o masso do martelo venha bater numa bola, colocada num plano também horizontal; medida a aceleração do movimento da bola (na sua fase inicial), e considerando várias bolas, verifica-se que o seu valor é inversamente proporcional ao pêso da bola. Toma-se como evidente, se o martelo é sempre o mesmo, admitir que a fôrça aceleratriz é sempre a mesma. É claro que o pêso da bola (compensado pelo plano horizontal sôbre que assenta) deve ser considerado um elemento estranho à experiência. As diferentes bolas utilizadas é que oferecem maior ou menor resistência na sua passagem do repouso para o movimento.

Podemos agora esclarecer o facto de ser a mesma a aceleração para todos os corpos que caem ou rolam num plano inclinado. Os corpos que são mais pesados são solicitados por uma fôrça maior, mas a sua inércia é também maior.

<u>O pêso aparece-nos como um tipo de fôrça que imprime a todos os corpos a mesma aceleração.</u> O pêso é, assim, uma fôrça bem estranha. Modifica-se com o côrpo sôbre o qual actua e duma maneira tal que o cociente do pêso pela massa inerte tem um valor constante. O cociente do pêso dum corpo pela aceleração correspondente diz-se também <u>massa pesante</u> do corpo.

Pode enunciar-se o resultado seguinte: <u>a massa pesante é igual à massa inerte.</u>

Para terminármos as nossas considerações sôbre a dinâmica galileana falaremos ainda da <u>reacção</u>. Aceita-se que <u>se um côrpo exerce sôbre um outro uma certa acção, recebe da parte dêste outro uma reacção igual e oposta.</u> Tanto a acção como a reacção são entendidas como fôrças actuantes. O princípio enunciado esclarece, por exemplo, o facto de se conseguir em repouso uma bola assente num plano horizontal. Esclarece também as leis num plano inclinado etc. Nas considerações anteriores, falámos de sistemas e de corpos. Julgaremos as mesmas como suficientes para esclarecerem os movimentos dum ponto com massa (ponto material) e supremos que os enunciados se referem, na verdade, a pontos materiais.

3) <u>As unidades de fôrça e massa</u> – Estabelecidas as leis da mecânica de <u>Galileu</u>, por meio de experiências realizadas num lugar determinado, levanta-se a questão de saber se elas se mantêem quando se muda de lugar. Não há mais a fazer do que repetir as experiências em causa, nos diferentes lugares da Terra, e observar o que acontece. Verifica-se que tudo se passa da mesma, apenas <u>g</u> muda, tomando um valor mínimo no equador terrestre e crescendo depois quando o valor absoluto da latitude aumenta.

Se se trata de comparar os pêsos de dois corpos em lugares diferentes, e se, num dado lugar, o pêso dum é duplo do do outro, êste resultado mantém-se quando se muda de lugar. Podemos dizer que, uma vez feita, num lugar, a verificação da igualdade de dois pêsos, fica feita a verificação da igualdade das respectivas massas inertes ou pesantes.

Mas ponhamos uma outra questão. Suponhamos que um determinado côrpo, pelo seu pêso, dá, num determinado lugar, uma certa distensão a uma mola. Noutro ponto da Terra, o mesmo côrpo (que tem outro pêso) dará uma distensão diferente à mola. Se tomássemos como unidade de pêso (ou de fôrça) o pêso que distende duma certa quantidade uma dada mola, êsse pêso seria representado por corpos diferentes em pontos diferentes da Terra. Seria um êrro tomar como unidade de pêso o pêso duma certa porção de determinado metal. Por isso não é costume tomar a unidade de pêso como unidade fundamental, a juntar às unidades de tempo e de comprimento. Toma-se, pelo contrário, a unidade de massa como tal unidade fundamental e diz-se: a unidade de massa é a massa duma certa porção de determinado metal.

4) Os princípios da Mecânica formulados por Newton – Foi em 1687 que Newton formulou os três princípios seguintes da Mecânica, como consequências dos resultados experimentais de Galileu:

1º). – Princípio da inércia: um material persiste no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme, enquanto não houver fôrças que sôbre ele actuem;

2º) – Princípio da proporcionalidade das fôrças às acelerações: a aceleração que uma fôrça introduz no estado do movimento dum ponto material é proporcional à massa do ponto, tem a direcção e sentido da fôrça, e é independente do estado do movimento anterior (o qual pode ser causado por outras fôrças, que determinam outras acelerações, a compôr vectorialmente com a nova aceleração introduzida a fim de ser obtida a aceleração total);

3º) – Princípio da igualdade da acção e da reacção: se um ponto material exerce uma acção sôbre um segundo, recebe, da parte dêste outro, uma reacção igual e directamente oposta.

5) <u>As fôrças de inércia</u> - Admitiremos, para precisar, que os princípios de <u>Newton</u> são válidos num sistema de referência ligado à Terra. Posteriormente analisaremos mais em detalhe esta hipótese. Se há um sistema móvel com respeito à Terra, a lei das acelerações relativas é definida na igualdade

$$\overline{\gamma_r} = \overline{\gamma_{ab}} + (-\overline{\gamma_{ar}}) + (-\overline{\gamma_c}) ,$$

onde γ_r é a aceleração relativa, γ_{ab} a absoluta, γ_{ar} a de transporte e γ_c a de <u>Coriolis</u> ou aceleração complementar. No sistema relativo não podemos dizer que a fôrça é o produto da massa pela aceleração relativa, pois

$$\overline{F} = m\overline{\gamma_{ab}} \neq m\overline{\gamma_r} .$$

Se juntarmos vectorialmente à fôrça absoluta as fôrças de inércia,

$$-m\overline{\gamma_{ar}} = \text{fôrça centrífuga ou fôrça de inércia de transporte},$$

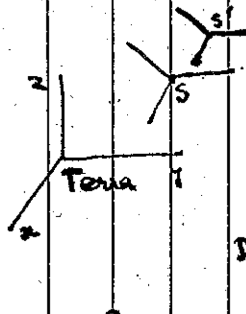
$$-m\overline{\gamma_c} = \text{fôrça centrífuga composta ou fôrça complementar},$$

e se designarmos por <u>fôrça relativa</u> o vector assim obtido, temos ainda a igualdade

Fôrça relativa = massa de inércia X aceleração relativa.

Um caso há em que na passagem da Terra para um sistema em movimento com respeito a ela se não torna necessário fazer intervir as fôrças de inércia. É o caso em que o sistema tem uma translação rectilínea e uniforme relativamente à Terra.

Mais geralmente ainda: suponhamos um sistema S em movimento qualquer com respeito à Terra, e um segundo sistema S' em translação rectilínea e uniforme relativamente a S. Um ponto móvel M tem a mesma aceleração relativa, avaliada de S ou de S'. Para passar da fôrça avaliada em S para a fôrça avaliada em S', não há necessidade de fazer intervir fôrças suplementares.



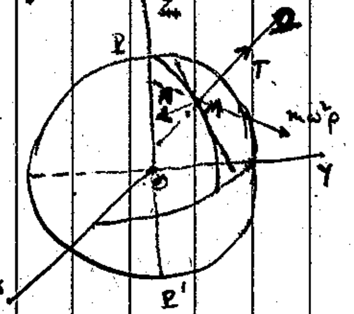
Diz-se princípio da relatividade da mecânica de Galileu-Newton o reconhecimento da circunstância de que em dois sistemas com movimento uniforme, um com respeito ao outro, as mesmas fôrças absolutas produzem as mesmas acções.

Sob o ponto de vista da lógica, levanta-se a questão de saber se não have de facto, um sistema de referência no qual as fôrças de inércia desapareçam e se êsse sistema não será diferente do que se supôs ligado à Terra. Só nele é que um ponto material móvel, subtraído a toda a acção, teria e conservaria um movimento rectilíneo e uniforme. Um tal sistema diz-se um sistema de inércia ou um sistema fundamental da mecânica. Serão igualmente sistemas de inércia todos os que se encontrem em translação rectilínea e uniforme com respeito a um dêles.

6) <u>Os movimentos à superfície da Terra</u> – Na impossibilidade em que nos encontramos de realizar a experiência do ponto material isolado, é admissível a atitude de tomar um dado sistema como sistema de inércia. Compete à experiência verificar se os resultados tirados da hipótese que se formular correspondem ou não à realidade. Nós vamos proceder do modo seguinte: <u>tomamos como sistema de inércia um sistema com origem no centro do Sol e com as arestas dirigidas para as estrêlas infinitamente afastadas.</u>

Nesse sistema a Terra tem um movimento de translação (não rectilínea e uniforme) e tem um movimento de rotação. Nos movimentos à superfície da Terra torna-se-á necessário fazer intervir as fôrças de inércia. É nessas condições que vamos fazer o seu estudo. Veremos, em seguida, que os resultados teóricos são confirmados pela experiência.

Antes de mais nada, porém, digamos duas palavras sôbre a medida do tempo. Se a experiência do ponto material isolado fôsse realizável, o movimento do ponto forneceria a unidade de tempo: <u>seria o tempo necessário para percorrer a unidade de comprimento.</u> Não sucedendo assim, a medida do tempo, que, de comêço, dissémos ser a do senso comum, tem de começar ser precisada. ~~[illegible]~~ É exactamente no movimento de rotação da Terra à volta do seu eixo que encontramos o "relógio" necessário. <u>Por convenção</u>, atribuimos à duração dessa rotação (dia sideral) um valor constante, Posto isto, tomemos um sistema de eixos paralelos aos eixos de inércia e que tenha por origem o centro da Terra. Durante alguns dias, o movimento de translação dêsses eixos pode considerar-se rectilíneo e uniforme, e os mesmos podem considerar-se como eixos de inércia. É com respeito a eles que nós pomos em evidência a rotação da Terra.



Sejam, na figura junta, OXYZ os eixos de inércia tirados do centro O da Terra. Se um ponto M, extremidade dum fio de prumo ΩM, se encontra em equilíbrio, êle é resultante de três fôrças:

1.ª) → acção, $\underline{A}$, da Terra pròpriamente dita, que se torna evidentemente necessário fazer intervir e que, por simetria, podemos supôr que encontra o eixo P'P; 2.ª) → tensão, T, do fio; 3.ª) → $m\omega^2\rho$ = fôrça centrífuga, desde que ω represente a rotação diurna e $\underline{\rho}$ o raio do paralelo que passa por M. Pelo facto de a fôrça centrífuga e a acção da Terra estarem contidas no plano PMP', a tensão T do fio, e, portanto, o próprio fio estão também no referido plano.

O ângulo de ΩM (a direcção de ΩM diz-se vertical em M) com o equador terrestre diz-se latitude φ do ponto M. Podemos supô-la, e bem assim $\underline{\rho}$, determinada por observações astronómicas.

Projectemos as três fôrças, primeiramente sôbre a vertical ΩM, depois sôbre a horizontal tangente ao meridiano. Tem-se

(1)
$$\begin{cases} T - A\cos\alpha + m\omega^2\rho\cos\varphi = 0 \\ -A\,\mathrm{sen}\,\alpha + m\omega^2\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \end{cases}$$

O valor de T é o que se chama <u>peso do ~~corpo~~ ponto M,</u> mudado de sinal. O pêso pròpriamente dito, como resultante de A e da fôrça centrífuga, deve considerar-se, em cada ponto da ~~[illegible]~~ Terra como constante. Se um côrpo cai, tanto A como a fôrça centrífuga não mudam. Se <u>m</u> é a massa de inércia do ponto M, as duas fôrças consideradas, por consequência, imprimir-lhe-ão uma aceleração constante, que representaremos com <u>g</u>. A direcção dessa aceleração é, de resto, igual e de sinal contrário à da tensão do fio. Poremos, assim,

$$-T = +mg = \bar{A} + m\omega^2\bar{\rho}.$$

Então, as equações (1) tomarão a forma

$$A\cos\alpha - m\omega^2\rho\cos\varphi - mg = 0$$
$$A\operatorname{sen}\alpha - m\omega^2\rho\operatorname{sen}\varphi = 0.$$

Num ponto do equador, seria $\varphi = 0$, e viria

$$A_0\cos\alpha_0 - m\omega^2\rho_0 - mg_0 = 0$$
$$A_0\operatorname{sen}\alpha_0 = 0.$$

Sendo $A_0 \neq 0$, conclui-se

$$mg_0 = -m\omega^2\rho_0 + A_0$$

É possível fazer determinações experimentais de A_0 (ou de A) e concluir

$$\frac{m\omega^2\rho_0}{A_0} \simeq \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}.$$

Logo, ter-se-á

$$mg_0 = +A_0\left(1 - \frac{1}{17^2}\right).$$

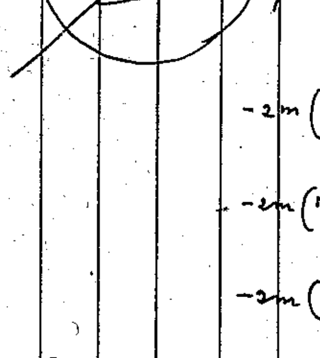
Bastaria que ω fôsse 17 vezes maior para desaparecer o pêso no equador.

O ângulo α diz-se <u>desvio da vertical devido à rotação</u>.

Passemos a tratar agora, propriamente, da questão do movimento à superfície da Terra. Façamos o cálculo da fôrça centrífuga composta:

$$-m\overline{\gamma_c} = -2m\,\overline{\omega} \wedge \overline{V_r}.$$

Como eixos de referência, tomaremos a vertical $\overline{Oz}$ (vizinhança do ponto M em que se estuda o movimento) a tangente $\overline{Oy}$ ao meridiano e a tangente ao paralelo dirigida para oeste. As componentes de $\overline{\omega}$ são



$$p = 0, \quad q = -\omega\cos\varphi, \quad r = \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi;$$

e as da fôrça centrífuga composta serão

$$-2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) = 2m\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt} + 2m\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$-2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) = -2m\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{dx}{dt},$$

$$-2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) = -2m\omega\cos\varphi\frac{dx}{dt}.$$

Designando com mX, mY, mZ as componentes da fôrça ainda não considerada segundo os mesmos eixos, será

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + 2\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt} + 2\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - 2\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z - g - 2\omega\cos\varphi\frac{dx}{dt}.$$

No caso da queda livre, é $X = Y = Z = 0$. Então as integrações efectuam-se com rigor, pois, por intermédio da segunda, vem

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\; x,$$

e, por intermédio da última, tem-se

$$\frac{dz}{dt} = -gt - 2\omega\cos\varphi . x,$$

quando se supõe que é nula a velocidade inicial do ponto, que cai a partir da origem. A substituição de $\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ na primeira equação dá

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\cos\varphi\left(-gt - 2\omega\cos\varphi\, x\right) - 2\omega\,\text{sen}\,\varphi \cdot 2\omega\,\text{sen}\,\varphi\, x,$$

ou seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\omega^2 x = -2\omega\cos\varphi \cdot gt.$$

Esta equação de 2ª ordem com coeficientes constantes integra-se rigorosamente, como se sabe, e uma vez calculado o integral determinam-se y e z por meio de quadraturas.

Basta-nos, porém, uma integração aproximada, que tem em conta a circunstância de ser ω muito pequeno. Considerando ω como um parâmetro, desenvolvamos x, y, z em série de ω:

$$x = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \cdots,$$

$$y = y_0 + \omega y_1 + \omega^2 y_2 + \cdots,$$

$$z = z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 + \cdots.$$

Aqui supõe-se que $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ são funções do tempo que se anulam, bem como as suas derivadas primeiras, para $t=0$. Substituindo êstes desenvolvimentos nas equações

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega\cos\varphi . z + 2\omega\,\text{sen}\,\varphi . y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega\,\text{sen}\,\varphi \cdot x,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt - 2\omega\cos\varphi\, x,$$

encontra-se

$$\frac{dx_0}{dt} + \omega\frac{dx_1}{dt} + \omega^2\frac{dx_2}{dt} + \cdots = 2\omega\cos\varphi\left(z_0 + \omega z_1 + \cdots\right) + 2\omega\,\text{sen}\,\varphi\left(y_0 + \omega y_1 + \cdots\right.$$

$$\frac{dy_0}{dt} + \omega\frac{dy_1}{dt} + \omega^2\frac{dy_2}{dt} + \cdots = -2\omega\,\text{sen}\,\varphi\left(x_0 + \omega x_1 + \cdots\right)$$

$$\frac{dz_0}{dt} + \omega \frac{dz_1}{dt} + \omega^2 \frac{dz_2}{dt} + \cdots = -gt - 2\omega \cos\varphi (x_0 + \omega x_1 + \cdots).$$

Destas igualdades se tira:

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = 2\cos\varphi\, z_0 + 2\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot y_0;$$

$$\frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_1}{dt} = -2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, x_0,$$

$$\frac{dz_0}{dt} = -gt, \quad \frac{dz_1}{dt} = -2\cos\varphi\, x_0.$$

Por consequência, tem-se

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = -\frac{gt^3}{3}\cos\varphi,$$

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = 0,$$

$$z_0 = -\frac{1}{2}gt^2, \qquad z_1 = 0.$$

Limitando-nos a êste grau de aproximação, que corresponde a supôr $\omega^2 = 0$, tem-se

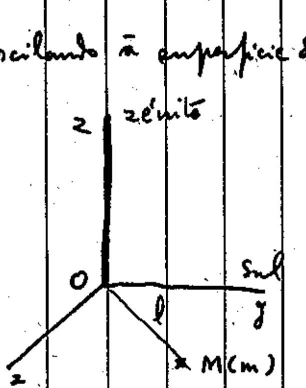
$$x = -\omega\cos\varphi \cdot \frac{gt^3}{3}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2.$$

A esta aproximação corresponde, como se vê, um x negativo, ou seja um desvio para êste do côrpo que cai. Se quizermos levar a aproximação mais adiante, podemos verificar ao lado dêste desvio um outro para o Sul. O grave, em vez de descrever a vertical, descreve, no plano xz uma parábola semi-cúbica de equação

$$z^3 = -\frac{1}{8}g^3 \frac{9x^2}{g^2\omega^2\cos^2\varphi} \quad \text{ou} \quad 4\omega z^{3/2}\cos\varphi = 3\sqrt{2g}\cdot x:$$

Todos os resultados que acabamos de deduzir teòricamente são confirmados pela experiência. A hipótese feita de considerar a Terra como possuindo uma rotação relativamente ás fixas encontra-se confirmada.

7) <u>O pêndulo de Foucault e o giroscópio</u> - Tomemos um pêndulo esférico oscilando à superfície da Terra, por efeito duma velocidade inicial (ou ainda, por ex., deslocando a massa oscilante de sua posição de equilíbrio). O sistema de referência continua a ser o do sistema anterior. Se l fôr o comprimento do fio e designarmos com N a tensão do mesmo, têem-se as seguintes equações do movimento:



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} + 2\omega\left(\operatorname{sen}\varphi\,\frac{dy}{dt} + \cos\varphi\,\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2\omega\operatorname{sen}\varphi\,\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} - g - 2\omega\cos\varphi\,\frac{dx}{dt}.$$

A integração destas equações é delicada; faz-se com uma restrição que vamos introduzir. Se nos limitamos às pequenas oscilações, isto é se admitimos que $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, são quantidades de 1ª ordem, tais que os seus produtos por ω ou os seus produtos duas a duas são desprezáveis em frente de quantidades finitas, então, tendo em vista que é

$$x^2+y^2+z^2 = l^2,$$

ou seja

$$z^2 = l^2-(x^2+y^2) = l^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)$$

$$z = -l\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{1/2} = -\left(l - \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{l^2}\right) = -l,$$

vê-se que devemos pôr $\frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, de sorte que o nosso sistema toma a forma seguinte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{\ell} + 2\omega \operatorname{sen}\varphi \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{\ell} - 2\omega \operatorname{sen}\varphi \frac{dx}{dt},$$

$$N = +g.$$

Podemos escrever ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x + 2\omega \operatorname{sen}\varphi \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}y - 2\omega \operatorname{sen}\varphi \frac{dx}{dt}. \qquad (B)$$

A integração destas equações faz-se pela combinação das fôrças vivas e pela dos momentos cinéticos. Vem

$$d\frac{1}{2}v^2 = -\frac{g}{\ell}(x\,dx + y\,dy).$$

Introduzindo coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

será

$$d\frac{1}{2}v^2 = -\frac{g}{\ell}r\,dr, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{g}{\ell}\frac{r^2}{2} + \text{Const},$$

Podemos, pois, escrever

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -\frac{g}{\ell}\frac{r^2}{2} + \text{Const}.$$

A combinação dos momentos cinéticos obtem-se multiplicando em (B) a 1ª equação por y e a 2ª por x. Tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -2\omega \operatorname{sen}\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = -2\omega \operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{r\,dr}{dt}$$

Sabemos que é

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \text{diferencial de área}.$$

Nessas condições, obtem-se

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot r\frac{dr}{dt},$$

ou seja

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = -\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot r^2 + \text{const.}$$

Somos assim levados ao sistema

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\dfrac{g}{l}\,r^2 + \text{const.}, \\[2ex] r^2\dfrac{d\vartheta}{dt} = -\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot r^2 + \underset{k'}{\underset{\shortparallel}{\text{const}}}, \end{cases}$$ que vamos discutir.

Suponhamos que o pêndulo se encontrava inicialmente na posição de equilíbrio e que se lhe dava uma pequena impulsão. Na origem do tempo, seria $r = 0$, e, portanto, $\overset{k'=0}{\cancel{r^2\frac{d\vartheta}{dt} = 2\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\, r^2}}$. Pondo $\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = \omega'$, tem-se

$$r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \omega'\right) = 0,$$

e, como $r \neq 0$,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\omega' \qquad \vartheta = -\omega' t + \vartheta_0 = \vartheta_0 - \omega' t.$$

O plano de oscilação do pêndulo gira no sentido retrógrado (ou negativo) com uma velocidade angular ω'. A duração da rotação é

$$\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi}.$$

Se tomarmos como unidade de tempo o dia sideral, é $\omega = 2\pi$ e a duração da rotação do pêndulo é $\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\varphi}\right)$ dias siderais ou $\dfrac{24}{\mathrm{sen}\,\varphi}$ horas siderais.

Duma maneira geral é

$$r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \omega'\right) = C.$$

Representando com σ o ângulo $\sigma = \omega' t + \vartheta$, tem-se

$$r^2\frac{d\sigma}{dt} = C.$$

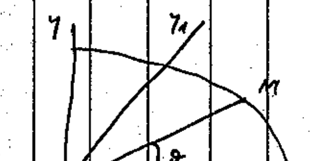
O sistema dá

$$\begin{cases} r^2 \dfrac{d\sigma}{dt} = C \\ \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \omega'^2 - 2\omega'\dfrac{d\sigma}{dt}\right] = -\dfrac{g}{l} r^2 + h. \end{cases}$$

Substituindo na 2ª equação $r^2 \dfrac{d\sigma}{dt}$ por C e desprezando quantidades de 4ª ordem em frente das de 2ª, obtem-se

$$(A) \quad \begin{cases} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = C \\ \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega' C + h - \dfrac{g}{l} r^2 = -\dfrac{g}{l} r^2 + h', \end{cases}$$

onde $h' = h + 2\omega' C$ é uma nova constante. Se tivermos em conta que $\sigma = \omega' t + \theta$



vê-se que o conjunto de coordenadas (r, θ) se pode interpretar como segue: imaginemos o sistema ortogonal Ox_1y_1 com uma rotação no sentido retrógrado à volta de Oz e com velocidade angular ω'. O ponto M, extremidade do pêndulo, tem as coordenadas (r, θ) no sistema Ox_1y_1. O sistema (A) é o sistema que se obtem resolvendo em coordenadas polares o movimento dum ponto atraído por um centro fixo proporcionalmente à distância. A trajectória do ponto é uma elipse de centro O, descrita no período

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Estes resultados explicam agora inteiramente a experiência de Foucault. Nesta experiência, o pêndulo, primeiramente em repouso na superfície da Terra, era lançado (deslocado da posição de equilíbrio) com valores iniciais $\dfrac{dr}{dt}$ e $\dfrac{d\theta}{dt}$ iguais a zero (bastava deslocar o pêndulo da posição vertical, prendendo-o por um fio e queimar o fio). Se o valor inicial de r é a, visto que r tem apenas um máximo

e um mínimo, a será um dos semi-eixos da elipse ($\frac{dr}{dt}=0$ na origem do tempo).
A constante C tem o valor $a^2\omega'$, de sorte que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = \omega' > 0$. Isto significa que o movimento da extremidade do pêndulo se pode, em resumo, definir assim:
"o ponto descreve uma elipse no sentido directo (positivo) e esta elipse tem uma rotação, ao mesmo tempo, no sentido negativo. O período de rotação da elipse é $T = \frac{2\pi}{\omega'}$, e o período do movimento do ponto é $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$." Como C representa a constante das áreas (em referência ao ângulo σ) e como, por outro lado, é $C = a^2\omega' = \frac{2\pi a^2}{T}$, têem-se as relações

$$\left\{ C = \frac{2\pi a b}{T_1} = \frac{2\pi a^2}{T} \quad \text{ou seja} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{a}{b}. \right.$$

A última relação ~~que estabelece~~ que a razão dos períodos é igual à razão dos semi-eixos é designada sob o nome de teorema de Chevilliet.

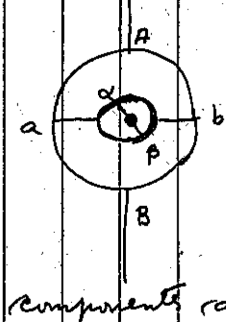
Para se ter uma ideia perfeita do movimento, diga-se que, sendo T_1, por ex., da ordem de 1^s, é T da ordem de 32^h. Isto significa que a é extremamente grande em face de b. A elipse pode, em primeira aproximação, assimilar-se ao seu semi-eixo maior, tratando-se, pràticamente, duma oscilação num plano que gira no sentido retrógrado.

A experiência de Foucault, como a da queda dos graves, confirma a rotação da Terra relativamente aos sistemas de inércia.

Passemos ao giroscópio.

O giroscópio é, sob o ponto de vista mecânico, um sólido pesado de revolução, suspenso do seu centro de gravidade, podendo, por consequência, ter uma rotação à volta dum eixo qualquer passando por aquele centro de gravidade.

A suspensão de Foucault compreende-se imediatamente na fig. junta:



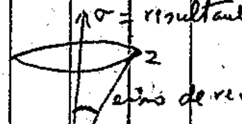
$\overline{AB}$ é um 1.º eixo, vertical, de rotação;

$\overline{ab}$ é um 2.º eixo, horizontal, de rotação;

$\alpha\beta$ é um 3.º eixo, perpendicular aos outros dois.

O sólido pode ter uma rotação qualquer à volta do seu centro de gravidade, para o que bastará dispôr das 3 componentes da rotação sôbre os 3 eixos considerados.

Colocando-nos no ponto de vista mais simples, em que num pequeno volume do sólido se pode supôr constante a atracção da Terra. Vamos, nessa hipótese, estudar o movimento do giroscópio com respeito a um sistema de eixos $Gxyz$ cuja origem está no centro de gravidade do giroscópio e que teem direcções fixas (dirigidos para as fixas). Necessitamos de juntar às fôrças absolutas que solicitam cada ponto as fôrças aparentes. As fôrças absolutas são as atracções terrestres e a reacção do ponto fixo. Aquelas atracções substituem-se por uma fôrça única passando pelo ponto fixo (admitimos que são fôrças iguais aplicadas nos diferentes pontos, paralelas entre si). Quanto às fôrças aparentes, não temos que entrar com a fôrça centrífuga composta, pois que o arrastamento é uma translação, As fôrças centrífugas são, para todos os pontos, da forma $m\omega^2 R$, em que R é uma constante. Elas têem uma resultante que passa igualmente pelo ponto fixo. Em última análise, o nosso giroscópio (em eixos $Gxyz$) é solicitado por fôrças com uma resultante passando pelo centro de gravidade. O movimento do sólido pode enunciar-se desta maneira: α) a resultante cinética $\overline{O\sigma}$ tem uma direcção invariável (em eixos $Gxyz$), de modo que está constantemente dirigida para a mesma estrela; β) à volta da direcção invariável da resultante cinética gira o eixo Oz de revolução do sólido; γ) nessas condições, se num dado instante, tomado como instante inicial, o sólido começa a girar à volta do seu eixo de revolução, sabemos que êsse eixo persiste no tempo como eixo de rotação, por ser eixo principal de inércia; δ) como, por outro lado, o sólido gira à volta duma direcção invariável, segue-se que o eixo de revolução está constantemente dirigido para uma fixa.



Êste resultado é, ainda, confirmado pela experiência.

8) <u>O movimento da Lua</u> - O movimento da Lua relativamente a eixos de direcção fixa passando pelo centro da Terra é sensivelmente um movimento circular uniforme, estando o centro do círculo no centro da Terra. O período de revolução é um pouco superior a 27 dias. Considerando, durante êsse intervalo de tempo, os eixos de referência como eixos de inércia e me-

dindo na acceleração (centrípeta) pela fórmula $\gamma = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{RT} = \frac{4\pi^2 R}{T}$, onde $\underline{v}$ é a velocidade, T o período de revolução e R o raio do círculo, verifica-se que se obtem $\gamma = 0,272$ cm/seg^2. Como R é 60 vezes o raio terrestre, têm lugar as relações

$$\frac{g}{\gamma} = 3600 = 60^2, \quad \text{ou} \quad \frac{g}{60^2} = \frac{\gamma}{1^2},$$

nas quais $\underline{g}$ é a aceleração de queda dos graves à superfície da Terra. É-se levado a admitir, tendo em conta que a atracção terrestre, à superfície da Terra vai diminuindo com a altitude, que a Terra exerce atracções variando na razão inversa dos quadrados das distâncias.

9) As leis de Kepler - Vimos já como as leis de Kepler levaram a admitir que o Sol imprimia aos diferentes planetas uma aceleração que variava na razão inversa do quadrado das distâncias, aceleração que tinha a expressão $\gamma = -\frac{\mu_0}{r^2}$, onde μ_0 era uma constante característica do Sol. Tinha-se, de resto, $\mu_0 = \frac{C^2}{p}$, onde $\underline{C}$ é a constante das áreas e $\underline{p}$ o parâmetro da órbita do planeta. Como $C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$, tem-se ainda

$$\mu_0 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 b^2}\, a = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

A quantidade constante do sistema solar $\frac{a^3}{T^2}$ tem o valor

$$\frac{a^3}{T^2} = 3,355 \times 10^{24} \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-2}.$$

Para o movimento dos satélites à volta dos planetas, o valor de $\frac{a^3}{T^2}$ é diferente. No caso da Lua, por ex., encontra-se que êsse valor é 330 000 vezes mais pequeno do que o relativo ao sistema solar.

(10) <u>A lei da atracção universal de Newton</u> – Tomemos o Sol, por ex.. A aceleração que ele determina sôbre um corpo (planeta) é da forma

$$\gamma = -\frac{F_0}{r^2}.$$

Assim, o produto γr^2, da aceleração pelo quadrado da distância, é uma constante. Um resultado análogo tem lugar para os movimentos à volta dos planetas, de sorte que nós admitimos como geral a afirmação de que

aceleração × quadrado da distância =
= constante característica dum corpo celeste, ao qual atribuiremos o índice $\underline{1}$ = F_1.

Se m_2 fôr a massa dum corpo $\underline{2}$, a fôrça F que $\underline{1}$ determina sôbre $\underline{2}$ ...

$$F = \frac{m_2 F_1}{r^2} = \text{(fôrça de 1 sôbre 2)}.$$

Por ex.: atribuindo a Urano o índice $\underline{u}$ e ao Sol o índice $\underline{s}$, a acção do Sol sôbre Urano será $\frac{m_u F_s}{r_{us}^2}$, e a acção de Urano sôbre o Sol será $\frac{m_s F_u}{r_{us}^2}$. Em virtude do princípio da igualdade da acção e da reacção deveremos ter $\frac{m_u F_s}{r_{us}^2} = \frac{m_s F_u}{r_{us}^2}$. A acção em causa, por um lado produto da massa de Urano por um factor independente de Urano, por outro lado produto da massa do Sol por um factor independente do Sol (à parte a distância) pode representar-se sob a forma $f.\frac{m_s m_u}{r_{us}^2}$, em que f é independente de Urano e do Sol. Escrevemos a lei de atracção universal de Newton com o aspecto

$$F = f.\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos atraentes, r a sua distância e f uma constante chamada constante de gravitação.

Vimos já que a lei de Newton permitia escrever as equações do movimento dos planetas. No sistema de referência ligado ao Sol, a descrição dos fenómenos corresponde quási ao que é realmente observado. Obtem-se um resultado conforme com a realidade tomando a origem dos eixos no centro de gravidade do sistema solar.

11) As massas de inércia e gravitacional – A lei de Newton foi estabelecida baseada no resultado experimental seguinte: o corpo M_1 determina sobre o corpo M_2 ~~[illegible]~~ uma aceleração independente de M_2, da forma $\frac{f m_1}{r^2}$. A massa m_1 do corpo M_1, ou massa inerte, pode pois ser obtida pelo processo que vai indicar-se: vê-se a aceleração que M_1 determina num ponto, multiplica-se êsse valor pelo quadrado da distância e divide-se o resultado pela constante da atracção universal. Para recordar êsse processo de determinação da massa, diz-se esta também massa gravitacional. E tem-se a conclusão: as massas de inércia e gravitacional são idênticas.

Compreende-se agora que, sendo a queda dos graves um caso particular da atracção universal, todos os corpos tenham à superfície da Terra a mesma aceleração, visto que esta é independente do corpo $\underline{2}$ (corpo que cai) apenas depende de $\underline{1}$ (neste caso a Terra).

É claro que ao escrever-se a expressão da lei da atracção, faz-se, de facto, uma hipótese nova, introduzindo as massas inertes. Chamando massas de gravitação aos coeficientes que devem substituí-las, importa a verificação experimental das duas massas.

12) <u>A experiência de Eötvös</u> – A experiência de Eötvös serve, precisamente, para fazer a comparação das massas. Num ponto determinado da Terra, a força da gravidade é a resultante da atracção, que é proporcional à massa de gravitação, e da força centrífuga, que é proporcional à massa de inércia. Se, para os diferentes corpos, as variações de uma e de outra não seguem a mesma lei, a direcção da gravidade deve mudar, num lugar determinado com os corpos. Ora nenhum desvio foi encontrado, podendo exprimir-se em resultado da experiência de Eötvös, que, à parte um erro da ordem de $1/100.000.000$, as duas massas são idênticas.

Capítulo III

A relatividade restrita

1) O espaço absoluto e o tempo absoluto – Newton, antes de formular pròpriamente os princípios da Mecânica, teve necessidade de esclarecer as noções de espaço e de tempo. Quando se diz, por ex., que um corpo não sujeito a qualquer fôrça tem um movimento rectilíneo e uniforme, tal afirmação só tem sentido, como já várias vezes se assinalou, quando se sabe qual é o sistema de referência.

Convém fazer uma observação. Se uma mesa horizontal se prolonga de modo a dar-lhe dimensões muito grandes, uma bola móvel com movimento rectilíneo e uniforme ao longo da mesa só aparentemente, de facto, descreve uma trajectória rectilínea. A trajectória é, na verdade, uma linha curva, porque a mesa não é plana. Como nota M. Born, se Galileu pudesse ter feito observações tão precisas que lhe revelassem tal circunstância, possìvelmente a complexidade do fenómeno teria sido um estôrvo à descoberta da lei da inércia. O mesmo se diz quanto às leis de Kepler. Se êste astrónomo pudesse ter observado a complexidade da trajectória dos planetas no seu movimento à volta do Sol, não teria formulado as suas leis simples que foram uma confirmação importante da lei da atracção universal.

Como se disse, Newton encontrou-se em face da questão do sistema de referência. Para Newton, a escolha do tal corpo sólido de referência ap sentava-se como uma deslocação do problema, visto que um dia poderia vir a constatar-se o movimento do Sol e a questão do previlégio deste astro para nele valer a lei da inércia não seria um facto que se impusesse. Newton convenceu-se assim, de que um sistema de referência determinado experimentalmente, para nele terem lugar os princípios da Mecânica, não poderia existir. O que se diz da linha recta do princípio da inércia diz-se também da característica de "uniforme" do movimento que entra nesse princípio. Newton foi levado, por todas estas circunstâncias, a introduzir um "espaço absoluto" e um "tempo absoluto".

O espaço absoluto não tem "relação com qualquer objecto exterior" e mantém-se sempre "igual e imóvel".

O tempo absoluto "decorre em si mesmo de modo uniforme e independentemente de objecto exterior"

Estas ideias de absoluto, independente da experiência, não são de aceitar em Física. Uma noção só pode entrar no domínio da Física, com efeito, se ela corresponde a alguma coisa que possa descrever-se por medidas. Ora, neste sentido, a determinação dum lugar no espaço de Newton não se fixa por medidas, visto que não há um sistema de referência ligado a qualquer coisa real.

Quanto ao tempo, a questão é análoga. Se as nossas faculdades de sentir se modificassem não teríamos possibilidade de saber, no caso de se modificar também a "duração" dos fenómenos, que tal se tinha produzido.

Deve dizer-se que já antes de <u>Kant</u> outros filósofos se tinham insurgido contra as ideias de espaço e tempo de <u>Newton</u> e tinham afirmado que as noções correspondentes só existiam em "correlação" com o homem pensante, tal como sucede com outras características dos corpos, tais como a côr, a dureza, etc.

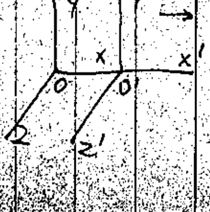
Quando <u>Kant</u> afirma que o espaço não é uma noção empírica deduzida da experiência, mas que é uma representação necessária <u>a priori</u>, que está na base de toda a percepção; que o espaço não representa qualquer propriedade de qualquer coisa em si ou nas suas relações com as outras coisas; enfim, que o espaço é apenas a forma de todos os fenómenos, <u>Kant</u> não faz afirmações novas. O que há de novo na filosofia kantista é a indicação da fonte que origina as noções de espaço e de tempo. Kant afirma que estas noções têem no intelecto a mesma origem que têem as noções de unidade, de heterogeneidade, etc.

O espaço e o tempo são, pois, condições necessárias a toda a experiência.

Todavia, só pode estabelecer-se um tal resultado depois de feitas as considerações a que aludimos. Antes disso, e inversamente, é possível, por abstracção, partindo da realidade experimental, chegar às noções de espaço e de tempo. A êste respeito (Veja-se <u>Schouten</u>, Raum, Zeit und Relativitätsprinzip), distingue-se o "espaço experimental", que só existe onde há corpos, o "espaço imaginação", que admite a divisão indefinida das partículas, sem chegar a um limite, e o "espaço noção", que limite à divisão material e cria as noções de ponto, recta e plano. O espaço noção é que é o espaço onde é válido o modêlo euclidiano. O espaço não euclideano é, por isso, uma criação do espírito. Falta-lhe realidade experimental, que já falta também ao espaço imaginação. Não há razão de dar qualquer previlégio ao espaço euclideano, sendo indiferente ao pensamento as diferentes geometrias. Ao passar-se ao "espaço experimental", é a experiência que deverá indicar-nos qual dessas geometrias se adapta melhor aos resultados das medidas. Podemos resumir as nossas considerações dizendo que a "geometria é inseparável da experiência" e que o modêlo euclideano não é válido a priori.

Não nos é possível ir mais longe, por agora, nos raciocínios que vimos fazendo. Vamos entrar no domínio objectivo da Física e ver como, com Einstein, as noções de espaço e tempo ganham um sentido relativo preciso.

2) Revisão das noções de espaço e de tempo – Dissemos, no Capítulo anterior, o que devia entender-se por princípio da relatividade da Mecânica. Nos diferentes sistemas próprios da Mecânica, os fenómenos mecânicos têem as mesmas leis. Quando se passa, porém, aos fenómenos ópticos ou electromagnéticos, não sucede assim. Se o sistema acentuado da figura



se move com a velocidade $\underline{v}$ relativamente ao sistema não acentuado, e se a velocidade da luz neste último sistema é $\underline{c}$, a velocidade da luz, apreciada de O', pode ser $c+v$ ou $c-v$ para os fenómenos luminosos que se propagam ao longo do eixo dos $x'x'$. A relatividade da mecânica falha, como se disse. Vamos, porém, com Einstein, libertar-nos de modo objectivo de certas ideias preconcebidas, realizando sistemas de medidas de espaço e de tempo em $\underline{O}$ e $\underline{O'}$, de modo a poder vir a estabelecer um "princípio de relatividade para a Física".

Mecânica Celeste

1937-1940

— O problema do movimento e do equilíbrio dos corpos que povoam o espaço constitue o objecto da Mecânica Celeste.

— A ciência pura; a característica da mecânica como passagem às físicas.

— A Mecânica Celeste é uma parte da física.

— Mas ao passar à Ciência aplicada tem de se fazer processo de hipóteses.

— A Mecânica Celeste pode, assim, reduzir-se a um grande problema de Mecânica. Para isso fazem-se as hipóteses:

1º "Os corpos celestes são formados por pontos materiais e agrupam-se em sistemas, isolados no espaço; as dimensões dos diferentes sistemas são pequenas em face das distâncias que separam o mesmo sistema."

2º "Os movimentos destes sistemas são determinados pelas acções mútuas dos corpos que o compõem, as quais têm lugar segundo a lei de Newton."

Curso de Mecânica Celeste

- Introdução à Mec. Celeste
  - Memorial de Geometria;
  - Memorial de Análise;
  - Memorial de Mecânica Racional;
  - Memorial de Astronomia;
  - Teoria da relatividade restrita;
- Mec. Celeste
  - Redução dos problemas da Mecânica Celeste;
  - Estudo detalhado do movimento central;
  - Movimento dum sólido à volta dum ponto fixo;
  - Tábuas do movimento kepleriano;
  - Bases [illegible] e fundamentais do cálculo de órbitas [illegible]
  - Teoria das órbitas;

Mec. Celeste (Continuação)

- Séries do movimento kepleriano
- Estudo das funções perturbatrizes
- Equações do movimento dos planetas
- Cálculo das perturbações
- As desigualdades seculares e as desigualdades de período longo
- Teoria da [illegible]
- Movimento da Terra.
- Teoria das marés.
- A teoria da relatividade em Mecânica Celeste.

Indicações bibliográficas:

Traité de Mécanique Céleste, de F. Tisserand, tome I, Gauthier Villars, 1889;
" " " ", de F. Tisserand, tome II, " ", 1891;
Leçons de Mécanique Céleste, de H. Poincaré, tome I, " ", 1905;
" " " ", de H. Poincaré, tome II, " ", 1907;
" " " ", de H. Poincaré, tome II, 2e Partie, " ", 1909;
" " " ", de H. Poincaré, tome III, " ", 1910;
Cours de Mécanique Céleste, de M. H. Andoyer, tome I, Paris, Gauthier Villars et Cie, 1923;
" " " ", de M. H. Andoyer, tome II, 1926;
Calcul des orbites et des éphémérides, de Luc Picart, Octave Doin et Fils, Paris, 1913;
Théorie de la Lune (Scientia) (1), de H. Andoyer, C. Naud, Fevereiro de 1902,
Cours d'Astronomie de H. Andoyer, Première partie, Astronomie Théorique, J. Hermann, Paris, 1923
Traité de Mécanique Rationelle de Paul Appell, Gauthier Villars, Paris, tome I, 1902; tome II, 1904; tome III, 1903
Lezioni di Meccanica Razionale, de Tullio Levi Civita e Ugo Amaldi, [illegible] Zanichelli, Bologna, Volume I, 1922; Volume II, Parte 1a, 1926; Volume II, Parte 2a, 1927;
Sobre o movimento dos sistemas holónomos, Porto, [illegible], 1932;
Précis de Mécanique Rationnelle, de G. Bouligand, Vuibert, Paris, 1924;

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften
(Sechster Band)

Leipzig, B. G. Teubner, 1905-1923. Artigo II, de Fritz Cohn.
(Reduktion der astronomischen Beobachtungen) (Sphärische Astronomie im engeren Sinne)

Artigo IV Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, de G. Herglotz

Art° XII, Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen. de E. T. Whittaker

Art° XIII, Entwicklung der Störungsfunktion, de H. v. Zeipel

Art° XIV Theorie des Erdmondes, de Ernest W. Brown,

Art° XV, Theorie der Planeten, de Karl F. Sundman, ([illegible])

Art° XX, de J. Bauschinger, Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation der starren Erde.

Art° XXa Die Libration des Mondes, de F. Hayn.

Cours d'Analyse mathématique, de Édouard Goursat, Gauthier-Villars, Paris { tome I, 1924; tome II, 1925; tome III,

Traité d'Analyse, de Émile Picard, Gauthier-Villars, Paris { tome I, 1922; tome II, 1925; tome III, 1928

~~R. Courant~~ Differential- und Integralrechnung, de R. Courant, Band I, Julius Springer, Berlin, 1930;
Idem, Idem, Band II, Springer, Berlin, 1931

Methoden der Mathematischen Physik, de R. Courant & D. Hilbert, Band I, Julius Springer, Berlin, 1931;
Idem, Idem, Band II, Julius Springer, Berlin, 1937.

Géométrie Vectorielle, par G. Bouligand, Librairie Vuibert, Paris, 1924.

Ochématique (Calcul vectoriel), par Axel Egnell, Gauthier-Villars et Cie, Éditeurs, Paris, 1926.

Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, par E. Cartan, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928

Temps, Espace, Matière, H Weyl, Paris, Librairie Scientifique Albert Blanchard, 1922

Notas de Calculo Vectorial, Pasta, Almeida Costa, 1931

La Théorie de la Relativité, par M. von Laue, Tome I, Gauthier-Villars et Cie, Paris 1924
Idem, Idem, Tome II, Gauthier-Villars et Cie, Paris

Einführung in die theoretischen Physik, von G. Joos, Leipzig, 1934, Akademische Verlagsgesellschaft.

Theorie der Elektrizität, Band II, von R. Becker, B.G. Teubner, Berlin, 1933.

Introd. à Mecânica Celeste

Tomo I de Goursat: pgs 6, 9, 400 e seguintes

Parte 1ª

Memorial de Análise

Capítulo I

Séries

4) Séries absolutamente convergentes — Suponha que haja uma infinidade de termos positivos e uma infinidade de termos negativos. Vale, então, o teorema:

Uma série de termos quaisquer é convergente quando a série dos valores absolutos dos seus termos é convergente.

$$u_0+u_1+u_2+\dots+u_n+\dots = \text{série dada} \qquad (1)$$

$$U_0+U_1+U_2+\dots+U_n+\dots, \qquad U_i=|u_i|. \qquad (2)$$

É

$$|u_n+u_{n+1}+\dots+u_{n+p}| \le |u_n|+|u_{n+1}|+\dots+|u_{n+p}|$$
$$\le U_n+U_{n+1}+\dots+U_{n+p}.$$

Mas, por hipótese, $U_n+U_{n+1}+\dots+U_{n+p} \le \delta$

$n \ge N$, qualquer que seja p.

Logo vale o mesmo para $|u_n+u_{n+1}+\dots+u_{n+p}|$.

Posto isto recordemos o que se entende por "maior dos limites" dum conjunto (C) ≡ conjunto limitado, com uma infinidade de números. Os números positivos e negativos colocam-se em duas classes Δ, D em respeito a C, do modo seguinte:

Todo o número N, que tem uma infinidade de números de C que são superiores a N, pertence a Δ; no caso contrário pertence a D.

Ora há números das duas classes. Um número de Δ é mais pequeno que um número de D. O número L que separa as duas classes é o maior dos limites. Se for ε um número positivo qualquer $L-\varepsilon$ pertence a Δ; $L+\varepsilon$ pertence

em D. Há uma infinidade de números de $\underline{C}$ entre $L-\varepsilon$ e $L+\varepsilon$ mas só um número finito de termos maior que $L+\varepsilon$.

Seja agora a sucessão $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$

A definição de convergência é a seguinte: existe S tal que

$$|S - s_n| < \delta \qquad n \geq N.$$

Tem, agora, lugar o teorema:

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

$n \geq N$, qualquer que seja p,

é necessário e suficiente para a convergência de $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$

<u>É necessário:</u>

$$|S - s_n| < \frac{\delta}{2}$$

$$|s_{n+p} - S| < \frac{\delta}{2} \qquad n \geq N,$$

$$|s_{n+p} - s_n| = |s_{n+p} - S + S - s_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

$n \geq N$.

<u>É suficiente:</u> Por hipótese

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

$n \geq N$, qualquer que seja p. Logo, para todo o p, é

$s_n - \delta < s_{n+p} < s_n + \delta$. Há apenas um número <u>finito</u> de elementos da série que não estão compreendidos entre $s_n - \delta$ e $s_n + \delta$. Seja $\underline{S}$ o maior dos limites da sucessão $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ Há uma infinidade de elementos entre $S-\varepsilon$ e $S+\varepsilon$. Logo $S-\varepsilon$ e $S+\varepsilon$ estão entre $s_n - \delta$ e $s_n + \delta$, assim como S.

Assim $$|S - s_{n+p}| < 2\delta$$

$n \geq N$, qualquer que seja p.

O que acaba de ser demonstrado o teorema enunciado para as séries.

O teorema das séries acima enunciado pode ter uma demonstração mais informativa

$$u_n = (u_n + v_n) - v_n;$$

seja a série

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) + \dots \qquad (3)$$

As somas dos n primeiros termos de (1), (2) e (3) são

$$S_n, \; S'_n, \; S''_n \qquad \text{e}$$

$$S_n = S''_n - S'_n.$$

S'_n tende para um limite, S''_n idem, logo S_n tende para um limite.

A série considerada (1), de termos quaisquer, pode considerar-se sempre a diferença (termo a termo) de duas séries de termos positivos.

A ordem dos termos pode mudar-se numa série <u>absolutamente convergente</u>.

Comecemos por considerar uma série de termos positivos.

(U) S_n Suponhamos m e n tais que

(V) S'_m $S'_m < S_n < S$.

Assim S'_m converge para $S' \leq S$. Do mesmo modo $S \leq S'$. Logo $S = S'$, q.e.d.

Numa série de termos positivos podemos agrupar num termo a soma de vários termos e construir uma nova série. A soma desta última será igual à soma da primeira.

Agrupemos primeiramente termos consecutivos e façamos a demonstração, que é simples. Depois combinemos com o resultado anterior. Vem o que se quer.

Considerando uma série absolutamente convergente como a diferença de duas séries de termos positivos, vêm, para estas, as mesmas afirmações.

Tomo I do livro de Cálculo diferencial e integral de R. Courant, pgs. 294, 295, 296

2) Séries semi-convergentes. É condição necessária para que uma série convergente que o valor absoluto do termo geral tende para zero:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0.$$

Mas esta condição não é suficiente. Consideremos o exemplo

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \qquad (4)$$

É

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

A série (4) é divergente. O mesmo se diz da série harmónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Com efeito $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Não vale, pois, $|S_{n+p} - S_n| < \delta$ $\quad n > N$

A série harmónica é divergente.

Mas a série alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

é convergente. Com efeito

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

resultado que tem lugar quando $-1 < x \leq 1$. Fazendo $x = 1$ vem

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Temos, assim, a soma da série harmónica.

O teorema das séries alternadas diz que se o sinal dos termos da série é alternadamente positivo e negativo e o valor absoluto $|u_n|$ tende, de forma monótona, para zero, a série converge.

(8)

Seja a série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

nas condições da hipótese. Suponhamos $u_1 > 0$. Então escreveremos

$$v_1 - v_2 + v_3 - \dots$$

com os v_i positivos. Donde

$$(v_1 - v_2) + (v_3 - v_4) + (v_5 - v_6) + \dots$$

ou $v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \dots$, vê-se que

é, para as somas S_i parciais,

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > S_{2m+1} > \dots$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2m} < \dots$$

Por outro lado é: $S_{2n} < S_{2n+1}$

$$S_{2n} < S_{2n-1}$$

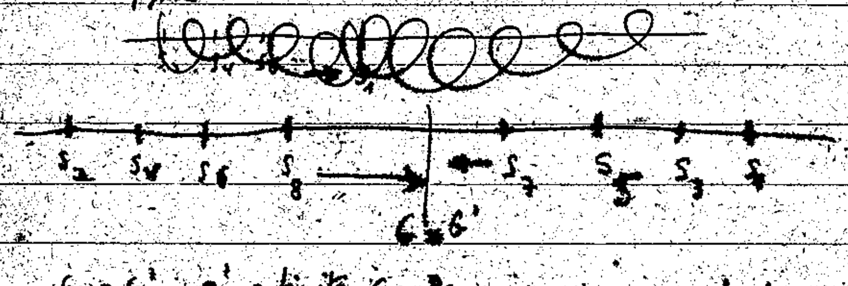
A sucessão $S_1, S_3, \dots$ diminui mas

$$S_1 > S_2;\ S_3 > S_2;\ S_5 > S_4 > S_2;\ S_7 > S_6 > S_2, \dots$$

A sucessão $S_2, S_4, S_6, \dots$ aumenta mas

$$S_2 < S_1;\ S_4 < S_3 < S_1;\ S_6 < S_5 < S_1, \dots$$

Temos a figura



onde $G = G'$ é o limite S das somas pares ou ímpares, e, portanto, a soma da série dada.

As séries convergentes que não são absolutamente convergentes dizem-se semi-convergentes.

Nas séries semi-convergentes não podemos mudar a ordem dos termos, como vamos ver.

"Duma maneira geral (Goursat, tomo I, pgs. 404), dada uma série semiconvergente, podemos ordenar os termos desta série numa ordem tal que a nova série seja convergente e tenha por soma um número qualquer A, dado antecipadamente".

S_M = soma dos M primeiros termos positivos da série;

S'_N = " " N " " negativos " " ;

a soma dos $M+N$ primeiros termos é $S_M - S'_N$. Quando M e N aumentam indefinidamente S_M e S'_N aumentam indefinidamente, pois, se assim não fosse, e se conservassem finitas, tenderiam para limites e a série proposta seria absolutamente convergente. Então dividamos o número suficiente de termos até que S_M, pela primeira vez, excede A. Se fôr $S_M = \sum_{\nu=1}^{M} p_\nu$ a diferença entre S_M e A é inferior a p_m, pois

$$S_{m-1} + p_m = S_m > A,$$

$$S_{m-1} < A,$$

$$S_{m-1} < A < S_{m-1} + p_m .$$

Depois adicionam-se ~~termos~~ negativos em número suficiente para que a soma $S_m - S'_n$ ~~fique~~ abaixo de A; depois outra vez números positivos para se voltar a tornar maior que A, etc. As somas são alternadamente maiores e menores que A e diferem de A de quantidades que tendem para zero.

Quanto a S_m se tira do visto

$$S_m - S_n < A, \text{ mas}$$

$$S_m - S_{n-1} > A ;$$

como $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} n_\nu$, vê-se que

$$S_m - S_{n-1} - n_n < A < S_m - S_{n-1}$$

Em resumo: uma série ou é convergente ou divergente, mas as séries convergentes ou são absolutamente convergentes ou semi-convergentes.

3) Séries de termos imaginários - A série

$$u_0+u_1+u_2+\dots+u_n+\cdots,$$

onde $u_0=a_0+b_0 i$; $u_1=a_1+b_1 i$, ..., $u_n=a_n+b_n i$, ... diz-se convergente se o fôr cada uma das séries

$$a_0+a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$$
$$b_0+b_1+b_2+\dots+b_n+\dots$$

Se a primeira tem o limite S e a segunda o limite S', a série proposta tem o limite $S+$ que é, de resto, o limite da soma dos seus n primeiros termos.

Quando a série

$$|u_0|+|u_1|+\dots+|u_n|+\cdots$$

é convergente as séries $\sum a_i$ e $\sum b_i$ são absolutamente convergentes, e a série proposta diz-se igualmente absolutamente convergente.

Para se fazer a comparação do estudo da convergência das séries de termos imaginários com o das séries de termos reais, anotemos, por exemplo, o critério seguinte:

Ponhamos $|u_i|=U_i$. Quando, a partir de certa ordem, $\frac{U_{n+1}}{U_n}<k<1$, sendo k um número fixo, a série proposta é absolutamente convergente.

Suponhamos ainda que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende para um limite l quando n aumenta indefinidamente. Se $|l|<1$ a série proposta é absolutamente convergente. Se $|l|>1$, a série proposta é divergente. Com efeito, neste último caso, a partir da ordem N conveniente

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1,$$

pelo que $|u_n|$ não tende para zero. Se $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ não tende para zero uma das quantidades $|a_n|$ e $|b_n|$ não tende para zero e uma das séries $\sum a_i$, $\sum b_i$, pelo menos, é divergente.

4) Multiplicação de séries (Demonstração de Mertens) - São dadas as séries

$$u_0+u_1+u_2+\cdots \quad \text{(absolutamente conv.)}$$
$$v_0+v_1+v_2+\cdots \quad \text{(" ou semi-convergente)}$$

O produto é

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\dots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\dots+u_nv_0)+\dots$$

que escreveremos

$$w_0+w_1+\dots+w_n+\cdots,$$

pondo $w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\dots+u_nv_0$.

$$|A_n + iB_n - (s + is')| \le \delta \quad (n \ge N(\delta))$$

$$\sqrt{(A_n - s)^2 + (B_n - s')^2} \le \delta$$

$$|A_n - s| \le \delta$$

$$|B_n - s'| \le \delta$$

(11)

A justificação do termo produto resulta de se provar que tendem para zero, quando n aumenta indefinidamente, as duas diferenças seguintes:

$$\delta = w_0 + w_1 + \cdots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

$$\Delta = w_0 + w_1 + \cdots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+1}) .$$

Compreendamos esta afirmação. São dadas as duas séries $\sum u_i$ e $\sum v_i$. Delas, por um certo processo deduz-se uma série $\sum w_i$. Trata-se de verificar que esta série $\sum w_i$ é convergente e tem por soma o produto SS' dos limites das séries propostas.

Estudemos, por exemplo, a primeira diferença δ:

$$\delta = u_0 (v_{n+1} + \cdots + v_{2n}) + u_1 (v_{n+1} + \cdots + v_{2n-1}) + \cdots + u_{n-1} v_{n+1} + \cdots + u_{2n} v_0 .$$

Sendo $U_i = |u_i|$ vê-se que a soma $\sum_{i=1}^{n} U_i < A$, qualquer que seja n, sendo A um número fixo conveniente. Também $|\sum v_i| < B$; sendo B um número conveniente.

Seja ε um número positivo arbitrário. Façamos que seja

$$U_{n+1} + \cdots + U_{n+p} < \frac{\varepsilon}{A+B}$$

$$|v_{n+1} + \cdots + v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A+B} \text{, qualquer que seja } p \text{, quando } n \geq m.$$

Então

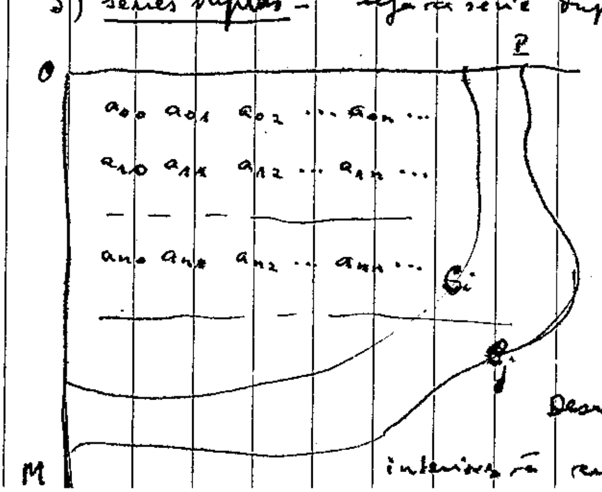
$$|\delta| < U_0 \frac{\varepsilon}{A+B} + U_1 \frac{\varepsilon}{A+B} + \cdots + U_{n-1} \frac{\varepsilon}{A+B} + \cdots + U_{2n} B$$

ou seja

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{A+B} (U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}) + B (U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{2n})$$

$$< \frac{\varepsilon A}{A+B} + \frac{\varepsilon B}{A+B} = \varepsilon, \qquad \text{q. e. d.}$$

5) <u>Séries duplas</u> – Seja a série dupla junta. As curvas C_i, C_j' são



exemplos de curvas duma sucessão $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$; curvas fechadas quando se lhe juntam os segmentos análogos a OP e OM e que se envolvem sucessivamente e tendem para o infinito.

Designemos com S_n a soma dos termos interiores à curva C_n.

Estudemos, primeiramente, êstes quadros de dupla entrada, contendo apenas números positivos. Se $\underline{S_n}$ tende para um limite S, êste S diz-se soma da série dupla e escreve-se

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}$$

O limite S é independente da forma das curvas. Para outra sucessão $C_1', C_2', \ldots$ de curvas, teríamos as somas sucessivas $S_1', S_2', \ldots$ Podemos arranjar que $S_m' < S_n$, a partir de certo $\underline{n}$; então S' existe e é $S' \leq S$. Do mesmo modo $S \leq S'$, pelo que $S = S'$.

Também podemos fazer a soma por linhas ou colunas, como vamos vêr.

Se $\underline{S}$ é a soma da série dupla considerada de têrmos positivos, cada série

$$a_{k0}+a_{k1}+a_{k2}+\cdots+a_{kn}+\cdots$$

é convergente. Sejam $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ as somas destas séries. A série

$$\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m+\cdots$$

é convergente, como vamos vêr. Consideremos a soma $\sum a_{ik}$ estendida a $\underline{p+1}$ linhas e $n+1$ colunas. Esta soma é inferior a S. Se conservarmos p e fizermos tender $\underline{n}$ para ∞, a soma tende para

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p$$

e é inferior a S. Assim $\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p \leq S$. Fazendo tender p para ∞, a soma

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p+\cdots$$

tenderá para um limite $\Sigma \leq S$.

Demonstrou-se, pois, até aqui, que, se o quadro é convergente e tem o limite S, a série

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_p+\cdots$$

é convergente e tem o limite $\Sigma \leq S$. Inversamente, se cada linha dá uma série convergente e se $\sum\sigma_i$ é convergente, e de soma Σ, a soma dum número qualquer de têrmos do quadro é inferior a Σ, será $S \leq \Sigma$, e, portanto, $S = \Sigma$.

Logo: um quadro de têrmos positivos, se convergente, soma-se por linhas ou colunas ou de qualquer maneira. Em particular, se se sabe que a soma por linhas leva a um certo resultado, sabe-se que a soma por colunas leva ao mesmo resultado.

Se um quadro é de têrmos inferiores a outro (ambos de têrmos positivos), e, se o segundo quadro é convergente, o primeiro é convergente.

Os quadros não convergentes dizem-se $\underline{\text{divergentes}}$.

Passemos ao estudo de quadros com uma infinidade de elementos positivos e uma infinidade de elementos negativos. Um tal quadro é T, de elementos a_{ik}. O quadro correspondente, de elementos $|a_{ik}|$, representa-se em T_1. Quando T_1 é convergente T diz-se <u>absolutamente convergente</u>. Então T tem todas as propriedades dos quadros convergentes de termos positivos.

Sejam T' e T'' os dois quadros auxiliares seguintes: T' tira-se de T pondo iguais a zero os termos negativos, T'' tira-se de T pondo iguais a zero os termos positivos e trocando o sinal aos negativos. Se T_1 é convergente, T' e T'' são convergentes.

Dada uma curva $\underline{C_n}$ a soma S_n correspondente a T é igual a $S'_n - S''_n$, somas correspondentes a T' e T''. Como S'_n e S''_n tendem para limites independentes da forma da curva, o mesmo sucede a $S_n = S'_n - S''_n$. Tem-se, assim, definida a <u>soma de T</u>.

Podemos agora completar o que dissemos sôbre o produto de duas séries e mostrar que a série produto só é absolutamente convergente se ambas as séries a multiplicar fôrem absolutamente convergentes. São dadas

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots.$$

Tem-se o quadro

$$\begin{array}{|llll}
\hline
u_0 v_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & \cdots \\
u_1 v_0 & u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots \\
u_2 v_0 & u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots \\
- & - & - &
\end{array}$$

Se êste quadro é absolutamente convergente, cada série linha o será; logo $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ deve ser absolutamente convergente; do mesmo modo para as colunas, e, portanto, para a série $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$. Então, a soma por diagonais é o produto anterior, que será, assim, absolutamente convergente. A inversa é verdadeira: o quadro é absolutamente convergente se o fôrem as duas séries dadas.

Para os quadros que não são absolutamente convergentes, podem dar-se os seguintes casos: quando uma curva tende para ∞ a soma tender para um limite mas êsse limite depender da maneira como a curva tende para ∞; ou então a soma aumentar indefinidamente ou a soma não tender para qualquer limite.

Quando um quadro de dupla entrada, é de termos imaginários, o seu estudo vem do estudo dos dois quadros formados pelos coeficientes de i, dum lado, e pelas partes reais, a outro lado. E o estudo dêstes resulta do estudo do quadro dos módulos do quadro proposto.

A passagem duma série dupla absolutamente convergente a uma série simples absolutamente convergente com a mesma soma pode fazer-se duma infinidade de maneiras. Uma maneira é a seguinte:

$$\underbrace{a_{00}}+\underbrace{a_{10}+a_{01}}+\underbrace{a_{20}+a_{11}+a_{02}}+\underbrace{a_{30}+a_{21}+a_{12}+a_{03}}+\dots$$

Em cada chave figuram termos para os quais a soma dos índices é a mesma.

É claro que, reciprocamente, se pode passar duma infinidade de maneiras duma série simples absolutamente convergente a uma série dupla absolutamente convergente.

6) <u>O uso do maior dos limites como critério de convergência</u>. Seja o termo geral duma série simples de termos positivos e escrevamos

$$U_1,\ U_2^{1/2},\ U_3^{1/3},\ \dots,\ U_n^{1/n},\ \dots$$

Se esta sucessão não é limitada superiormente, U_n não tende para zero e a série é divergente. Suponhamos, pelo contrário, que há um limite superior. Como há, certamente, um limite inferior, o conjunto supra é um conjunto limitado.

Seja ω o maior dos limites do conjunto. Então a série $\sum U_i$ é convergente se $\omega<1$ e divergente se $\omega>1$.

Se $\omega<1$ seja $1-\alpha$ um número compreendido entre ω e 1

$$\omega<1-\alpha<1.$$

Só há um número finito de elementos do conjunto que são superiores a $1-\alpha$. Pode, pois, encontrar-se um número p tal que $\sqrt[n]{U_n}<1-\alpha$, se $n>p$. A regra de Cauchy diz que a série é convergente.

Mas, se $\omega>1$, escolhamos α tal

$$\omega>1+\alpha>1.$$

Há uma infinidade de elementos do conjunto que são superiores a $1+\alpha$, e, por consequência, uma infinidade de valores de n tais que $\sqrt[n]{U_n}>1+\alpha$ e U_n não tende para zero. A série é divergente.

Para as séries duplas, há uma coisa análoga. Ponhamos $A_{pq} = |a_{pq}|$ e consideremos o conjunto $\sqrt[p+q]{A_{pq}}$. Se $\omega < 1$, a série é convergente:

$$\omega < 1-\alpha < 1$$

havendo apenas um número finito de termos $A_{pq} > (1-\alpha)^{p+q}$. Para os outros é $A_{pq} < l^{p+q}$, com $l<1$. Ora o quadro

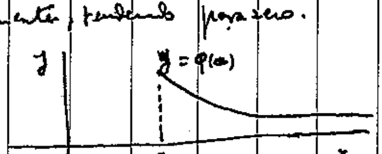
$$\begin{array}{lllll} 1 & l & l^2 & \ldots l^n & \ldots \\ l & l^2 & l^3 & \ldots l^{n+1} & \ldots \\ l^2 & l^3 & l^4 & \ldots l^{n+2} & \ldots \end{array}$$

é igual a $(1+l+l^2+\ldots)+l(1+l+l^2+\ldots)+l^2(1+l+l^2+\ldots)+\ldots =$

$$= (1+l+l^2+\ldots)(1+l+l^2+\ldots)$$ e, portanto convergente.

7) <u>Séries múltiplas</u> - É fácil estender as proposições relativas às séries duplas às séries de termo geral $a_{m_1 m_2 \ldots m_p}$, onde cada índice pode variar de <u>0 a</u> ou de $-\infty$ a $+\infty$, por valores inteiros, aliás. A noção de soma da série e de convergência absoluta são totalmente idênticas.

8) <u>Teoremas de Cauchy sôbre a convergência</u>. Seja $\varphi(x)$ uma função positiva de x, a partir dum valor fixo a da variável independente, e suponhamos que $\varphi(x)$ decresce constantemente, tendendo para zero.



Consideremos a série

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a+n) + \ldots$$

<u>Esta série é convergente se o integral $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ existe e diverge no caso contrário.</u>

(A propósito da existência do integral $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$, lembre-se o que deve entender-se por integral absolutamente convergente e por integral semiconvergente. Veja-se, por ex., [p.] 210 e 211 do tomo I de <u>Goursat</u>, edição de 1927)

Para demonstrar o nosso teorema, comecemos por supôr x compreendido entre $a+p-1$ e $a+p$

$$\varphi(a+p-1) > \varphi(x) > \varphi(a+p)$$

e, portanto,

$$\varphi(a+p-1) > \int_{a+p-1}^{a+p} \varphi(x)dx > \varphi(a+p).$$

Tira-se, sucessivamente:

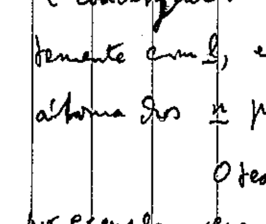
$$\varphi(a) > \int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx > \varphi(a+1)$$

$$\varphi(a+1) > \int_{a+1}^{a+2} \varphi(x)\,dx > \varphi(a+2)$$

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\dots+\varphi(a+n-1) > \int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx > \varphi(a+1)+\dots+\varphi(a+n)$$

Se o integral $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ tende para um limite A, quando l aumenta indefinidamente, a $\varphi(a)+\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\dots$, que cresce constantemente, fica inferior a $\varphi(a)+A$, e a série é convergente. Se, pelo contrário, o nosso integral não existe, como ele aumenta constantemente com l, é porque o seu valor aumenta indefinidamente. Ora, o mesmo sucede à soma dos n primeiros termos da série dada.

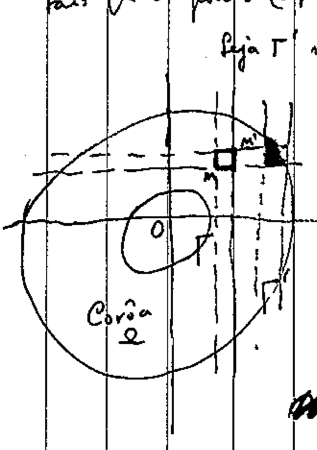
O teorema anterior pode generalizar-se ao caso de mais variáveis. Suponhamos, por exemplo, que a função $f(x,y)$, no exterior duma certa curva $C\Gamma$ é positiva e tende para zero quando nos afastamos indefinidamente em qualquer direcção no plano xy. A série dupla $\sum\limits_m\sum\limits_n f(m,n)$ é convergente ou divergente ao mesmo tempo que o integral duplo $\iint f(x,y)\,dx\,dy$.



Bem entendido que, na série considerada, m e n representam todos os números positivos e negativos tais que o ponto (m,n) é exterior à curva $C\Gamma$.

Seja Γ' uma segunda curva, exterior à primeira. Decomponhamos a coroa limitada por Γ e Γ' por meio das paralelas aos eixos de coordenadas de equações

$$\begin{cases} y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots; \\ x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots \end{cases}$$



Então a coroa fica decomposta em quadrados e em outras pequenas áreas limitadas, em parte pelas curvas Γ e Γ'.

Tomemos, em cada quadrado, o vértice M' mais afastado de ~~[illegible]~~. Então a soma $\sum\sum f(m$ correspondente é tal que

$$\sum\sum f(m,n) < \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy.$$

Esta desigualdade demonstra a primeira parte do teorema, ou seja: a série é convergente se o integral é convergente. Inversamente, se a série é convergente, o integral duplo que cresce constantemente, e se conserva inferior a um número fixo é igualmente convergente.

Veja-se, neste momento, o exposto a páginas 329 e 330 do tomo I de Goursat, quan[to] à noção de integral duplo absolutamente convergente e à do integral duplo semi-converg[ente].

9) Aplicações – Seja $\varphi(x) = \frac{1}{x^\mu}$, $\mu > 0$, $a = 1$. O integral a considerar é

$$\int_1^l \frac{dx}{x^\mu} = \left(\frac{x^{-\mu+1}}{-\mu+1}\right)_1^l = \frac{l^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{1}{1-\mu}$$

Vê-se que o integral é convergente se $\mu > 1$ e que é divergente se $\mu < 1$. Quando $\mu = 1$ o integ[ral] é igualmente divergente. Então a série $\sum n^{-\mu}$ é convergente quando $\mu > 1$ e diverge[nte] quando $\mu \leq 1$:

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots \qquad (\mu > 1,\ \text{conv.})$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad (\text{div.})$$

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots \qquad (\mu < 1,\ \text{div.})$$

Consideremos agora a série dupla cujo termo geral é $\frac{1}{(m^2+n^2)^\mu}$, on[de] $\underline{m}$ e $\underline{n}$ tomam todos os valores de $-\infty$ a $+\infty$, salvo $m = n = 0$ (simultaneamente).

O integral $I = \iint \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu}$ é o integral a estudar.

Pondo $\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}$ vem

$$I = \iint \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho^{2\mu}} = \int d\theta \int \frac{d\rho}{\rho^{2\mu-1}} = 2\pi \int_\varepsilon^l \frac{d\rho}{\rho^{2\mu-1}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho^{-2\mu+2}}{-2\mu+2}\right)_\varepsilon^l = \frac{2\pi}{2(1-\mu)}\left\{ l^{2(1-\mu)} - \ldots \right.$$

Se $\mu > 1$ o integral é convergente. Se $\mu < 1$ o integral é divergente. Quando $\mu = 1$ v[em]

$$I = \iint \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho^2}$$

e o integral é divergente.

Duma maneira mais geral, a série múltipla

$$\frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2)^\mu}, \text{ onde se exclui a possibilidade}$$

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_p = 0,$$

é convergente se $2\mu > p$. No caso de 3 variáveis, por ex., temos o integral

$$I = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\mu} = \iiint \frac{\rho^2 \,\mathrm{sen}\,\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\rho}{\rho^{2\mu}} = 4\pi \int \frac{d\rho}{\rho^{2\mu-2}}.$$

Deverá, pois, ser, efectivamente, $-2\mu+3 < 0$ ou $2\mu > 3$ para se assegurar a convergência.

10) <u>Séries múltiplas com termos variáveis</u> - Seja uma série múltipla com termos dependentes das variáveis $x, y, z \dots$, cujo domínio de variação $\underline{D}$ é conhecido. Se essa série absolutamente convergente no domínio, a sua <u>convergência uniforme</u> define-se como sem

A integração e a diferenciação, termo a termo, de tais séries tem lugar como caso duma série simples com termos dependentes duma única variável.

Capítulo II

Convergência — Produtos infinitos

11) Dado o produto infinito $\prod_{i=1}^{\infty}(1+u_i)$, é do estudo dos n primeiros factores, ou, melhor, do estudo do produto

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n),$$

que se tira a convergência ou a divergência.

É interessante observar que se um dos factores do produto infinito é nulo, P_n é nulo constantemente, a partir de certa ordem, e $\lim_{n\to\infty} P_n = P = 0$. Mas o limite P do produto infinito pode ser nulo sem que nenhum factor seja nulo.

Mas deixemos êste caso simples de $P=0$: se P_n tende para um limite P, diferente de zero, o produto infinito é convergente; se P_n não tende para limite, o produto é divergente. Quando P_n tem zero por limite, diz-se que o produto infinito é nulo.

12) <u>Teoremas diversos</u> Em primeiro lugar o estudo do produto infinito reduz-se ao estudo duma série: $(1+u_0)=P_0$, $(1+u_0)(1+u_1)=P_1$, $(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)$ etc. A série será

$$P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \dots = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

Mas não esqueçamos que é

$$v_n = P_n - P_{n-1} = (1+u_0)\dots(1+u_{n-1})(1+u_n-1) =$$
$$= (1+u_0)\dots(1+u_{n-1})\,u_n.$$

Quando a série $\sum v_n$ é convergente, o seu limite $\sum$ é igual ao produto P.

Uma condição necessária para a convergência dum produto infinito é que $\lim |u_n| = 0$. Com efeito, se P existe, $\lim |v_n| = \lim(|P_{n-1}|\,|u_n|) = 0$, donde se tira o enunciado, pois $\lim |P_{n-1}| \neq 0$