ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO

Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA

Extracto do tomo XXXV

Sobre ideais de contracção e aniquiladores na teoria geral dos módulos

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116

1950 - 1951

Extracto do fasc. II do tomo XXXV
dos
«Anais da Faculdade de Ciências do Porto»

SOBRE IDEAIS DE CONTRACÇÃO E ANIQUILADORES NA TEORIA GERAL DOS MÓDULOS (*)

1) **Introdução** — Como foi dito noutro lugar (1), fazemos sair também nestes *Anais* um artigo publicado na «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», 2.ª série, A — Ciências Matemáticas, vol. I, 1951, págs. 297 a 344. Esse original foi escrito em língua alemã e intitula-se precisamente *Über Kontraktions — und Vernichtungsideale in der allgemeinen Modulntheorie*, [14]. Na parte final daremos aqui maior número de detalhes e faremos uma ampliação, por forma a prosseguirmos, de modo ordenado, na exposição que vimos fazendo, há bastantes anos já, de alguns métodos da *Álgebra moderna*. A literatura utilizada na referida ampliação será essencialmente: [3] — T. NAKAYAMA, *Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge*, «Proceedings of the Imperial Academy», Tokyo, vol. XX, 1944, págs. 61 a 66; [4] — N. JACOBSON, *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*, «Transactions of the American Mathematical Society», vol. 57, 1945, págs. 228 a 245; [9] — T. NAKAYAMA e G. AZUMAYA, *On irreducible rings*, «Annals of Mathematics», vol. 48, 1947, págs. 949 a 965; [15] — A. ALMEIDA COSTA, *Sobre anéis de endomorfismos*, «Gazeta de Matemática», n.º 50, 1951, Lisboa. Os números [3], [4], [9], [14] e [15], indicados para as diferentes memórias, jogam com outros referidos em artigos nossos publicados anteriormente ou a publicar ainda, por forma a dar ao conjunto desses artigos a uniformidade requerida por um livro. É assim que teremos ainda: [10] — A. ALMEIDA COSTA, *Sobre os endomorfismos dos módulos*,

(*) Recebido, para publicação, em 5 de Junho de 1951.
(1) Referimo-nos à Conferência realizada no Congresso Luso-Espanhol que se efectuou em Lisboa em Outubro de 1950. O respectivo texto foi publicado nas Actas do Congresso.

nestes *Anais*, 1948, vol. XXXIII, págs. 5 a 32; [5] — N. JACOBSON, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, «American Journal of Mathematics», vol. 67, 1945, págs. 299 a 320; [8] — N. JACOBSON, *On the theory of primitive rings*, «Annals of Mathematics», vol. 48, 1947, págs. 8 a 21; e também: (I) — A. ALMEIDA COSTA, *Sistemas hiper-complexos e representações*, publicação n.º 19 do «Centro de Estudos Matemáticos da Faculdade de Ciências do Porto», 1948, 518 págs.; (II) — N. JACOBSON, *The theory of rings*, «Mathematical Surveys», 1943; (III) — J. LEVITZKI, *Über nilpotente Unterringe*, «Mathematische Annalen», tomo 105, 1931, págs. 620 a 627.

Os assuntos versados neste Capítulo, em relação mais ou menos imediata com o objectivo dos restantes, respeitam a questões da teoria geral dos módulos. Eles poderiam ser expostos quando a sua utilização se tornasse necessária, mas isso implicaria, por vezes, uma quebra de unidade nos raciocínios. Como se trata, por outro lado, de matéria importante em si, não hesitámos em consagrar-lhe um Capítulo especial. Isso nos permitirá ir bastante mais além do que se tornaria indispensável para os desenvolvimentos posteriores. Dum modo geral, retomamos as considerações feitas em [10], com o aspecto que se encontra em [14]. Embora não possamos considerar de excepcional importância os resultados obtidos, julgamos haver certos pontos que, ou pela sua originalidade, ou pela forma como se chega a resultados conhecidos, merecem interesse particular. Nos primeiros §§ insistimos em considerar o ideal esquerdo definido como conjunto dos endomorfismos dum módulo que aplicam o módulo num sub-módulo, ao mesmo tempo que introduziremos mais duas noções: I) a do sub-módulo que é aniquilado por um conjunto qualquer de endomorfismos; II) a do ideal direito que aniquila um dado sub-módulo. Nos raciocínios, bem entendido, supor-se-ão os símbolos dos endomorfismos colocados à direita. Teremos ocasião de verificar que a introdução de I) e II) permite se enunciem certos teorémas, em correspondência com outros respeitantes àqueles ideais esquerdos de endomorfismos.

2) Ideais de contracção em sub-módulos — $\mathfrak{M}$ é um módulo e $\mathfrak{A}$ o seu anel de endomorfismos. Ω é um sub-conjunto de $\mathfrak{A}$, de sorte que $\mathfrak{M}$ é módulo — Ω. O comutador de Ω, em $\mathfrak{A}$, será representado por $\overline{\Omega}$. Em seguida,

$\overline{\Omega}' \neq (o)$ representará um sub-anel de $\overline{\Omega}$, podendo ter-se $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$, ou, se Ω é vazio, $\overline{\Omega}' = \mathfrak{A}$. Um sub-módulo $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, pode ser entendido em vários sentidos, a saber: 1) como sub-módulo ordinário; 2) como sub-módulo — Ω; 3) como sub-módulo — $\overline{\Omega}'$; 4) como sub-módulo — $(\Omega, \overline{\Omega}')$. Qualquer que seja $\mathfrak{N}$, há um ideal esquerdo $\mathfrak{n}$, correspondente, composto dos endomorfismos — Ω, contidos em $\overline{\Omega}'$, que aplicam $\mathfrak{M}$ dentro de $\mathfrak{N}$, [10, § 2]. O referido ideal representado pela letra minúscula correspondente à maiúscula que representa o sub-módulo, designa-se por *ideal de contracções em* $\mathfrak{N}$. No que vai seguir-se estarão em causa, geralmente, sub-módulos — Ω; mas raciocinaremos muitas vezes com módulos quaisquer. Os elementos de $\overline{\Omega}$, particularmente os de $\overline{\Omega}'$, serão designados por $A, B, C, \ldots$

Seja $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ a intersecção de dois sub-módulos quaisquer. É imediato que se tem $\mathfrak{n} = [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2]$. Assim:

TEOREMA 1: — *O ideal de contracções em* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ *é* $\mathfrak{n} = [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2]$.

Seja $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ um sub-módulo gerado pelos dois sub-módulos quaisquer $\mathfrak{N}_1$ e $\mathfrak{N}_2$. É evidente que $\mathfrak{n} \supseteq (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. Inversamente, se tomarmos $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$, onde os $\mathfrak{n}_i$ são ideais esquerdos de $\overline{\Omega}'$, tem lugar a relação $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = (\mathfrak{M}\mathfrak{n}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{n}_2)$. Podemos dizer:

TEOREMA 2: — *Para a soma* $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ *de dois sub-módulos quaisquer, é* $\mathfrak{n} \supseteq (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. *Inversamente, dada a soma* $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$, *de dois ideais esquerdos de* $\overline{\Omega}'$, *tem-se* $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = (\mathfrak{M}\mathfrak{n}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{n}_2)$. Esta última relação é uma igualdade em que figuram sub-módulos — Ω.

É mais preciso o teorema a seguir, [10, § 2].

TEOREMA A (1): — *Se* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ *é uma soma directa de sub-módulos* — $\overline{\Omega}$ *e se* $\overline{\Omega}' = \Omega$, *tem-se* $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$, *tam-*

(1) Os teoremas e corolários indicados com letras não acentuadas têm correspondentes com letras acentuadas, os quais, seguindo [15], serão demonstrados no § 10.

bém como soma directa. Na verdade, suponhamos $\mathfrak{M}B \subseteq \mathfrak{N}$ e tomemos $m \in \mathfrak{M}$, $mB \in \mathfrak{N}$. Pondo $mB = n_1 + n_2$, com $n_i \in \mathfrak{N}_i$; $(i = 1, 2)$, a correspondência $m \to n_i$ é um endomorfismo — Ω, de $\mathfrak{M}$, que designaremos por A_i. Das relações $B = A_1 + A_2$, $\mathfrak{M}A_i \subseteq \mathfrak{N}_i$, conclui-se $B \in (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$, e, portanto, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. Esta soma é directa, pois que, pondo $A_1 + A_2 = o$, com $A_i \in \mathfrak{n}_i$, vê-se que $A_i = o$.

A cada $\mathfrak{N}$, como se disse, corresponde um ideal de contracções $\mathfrak{n}$, bem determinado. Pode haver, porém, vários sub-módulos com o mesmo correspondente. Se, com efeito, $A \in \mathfrak{n}$, consideremos o sub-módulo $\mathfrak{N}'$ gerado pelos sub-módulos $\mathfrak{M}A$. A $\mathfrak{N}'$ (que é sub-módulo — Ω, contràriamente a $\mathfrak{N}$, que é qualquer) corresponde ainda o ideal esquerdo $\mathfrak{n}$; é o menor sub-módulo nessas condições. Apenas podemos afirmar ser $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$. Conformes com uma notação muito usada, e já utilizada no teorema 2, escreveremos $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$, significando com o 2.º membro o conjunto de elementos de $\mathfrak{M}$ da forma ΣmA, onde o somatório é finito e $m \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{n}$. Quando $\mathfrak{N}$ é imagem homomorfa de $\mathfrak{M}$, tem-se $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$. Fixemos o

TEOREMA 3: — *Dado um sub-módulo qualquer $\mathfrak{N}$, existe sempre um sub-módulo — $\Omega = \mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, tal que o ideal de contracções em $\mathfrak{N}' (= \mathfrak{M}\mathfrak{n})$ é $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$.*

Inversamente, tomemos um conjunto $\mathfrak{C}$ de elementos de $\overline{\Omega}'$ e formemos o sub-módulo $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{N}$. O ideal $\mathfrak{n}$ contém $\mathfrak{C}$, pelo que $\mathfrak{M}\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{M}\mathfrak{C}$. Por ser $\mathfrak{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{C}$, conclui-se $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{M}\mathfrak{C}$. Assim:

TEOREMA 4: — *Dado um conjunto $\mathfrak{C}$ de elementos de $\overline{\Omega}'$, existe sempre um ideal esquerdo $\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{C}$, de $\overline{\Omega}'$, tal que $\mathfrak{n}$ é ideal de contracções em $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$.*

Um caso preciso em que $\mathfrak{n} = \mathfrak{C}$ é dado a seguir. Dum modo geral, sejam $\mathfrak{r}$ um ideal direito de $\overline{\Omega}'$ e $\mathfrak{e}$ o seu aniquilador esquerdo (ideal esquerdo em $\overline{\Omega}'$). Então, se tomarmos $\mathfrak{C} = \mathfrak{e}$, o ideal de contracções em $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{M}\mathfrak{e} = \mathfrak{N}$ é $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}$, pois que tendo-se $\mathfrak{e}\mathfrak{r} = (o)$ e $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{M}\mathfrak{e}$ é $\mathfrak{M}\mathfrak{n}\mathfrak{r} = (o)$, $\mathfrak{n}\mathfrak{r} = (o)$, $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{e}$. Aqui, $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$ é um ideal bilateral

nilpotente de $\mathfrak{r}$, composto de elementos de $\mathfrak{e}$ que induzem o endomorfismo nulo em $\mathfrak{M}\mathfrak{e}$. Podemos dizer:

TEOREMA 5: — *Todo o ideal direito $\mathfrak{r}$, de $\overline{\Omega}'$, tem um aniquilador esquerdo $\mathfrak{e}$, em $\overline{\Omega}'$, que é o ideal de contracções em $\mathfrak{M}\mathfrak{e}$. A intersecção $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$ é um ideal bilateral nilpotente de $\mathfrak{r}$ (de expoente 2), composto de todos os elementos de $\mathfrak{r}$ que aplicam $\mathfrak{M}$ dentro de $\mathfrak{M}\mathfrak{e}$. E se $\mathfrak{x}$ for o aniquilador direito de $\mathfrak{e}$, a intersecção $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{x}$ representa, simultâneamente, as totalidades dos elementos de $\mathfrak{e}$ e de $\mathfrak{x}$ que induzem, respectivamente, em $\mathfrak{M}\mathfrak{e}$ e em $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}\mathfrak{e}$ o endomorfismo nulo.*

Em geral, escolhido N (1), da aplicação dos elementos $A \in \overline{\Omega}'$ não resulta $\mathrm{N}A \subseteq \mathrm{N}$. Quando isso sucede, N é sub-módulo — $\overline{\Omega}'$ e o ideal $\mathfrak{n}$ é bilateral. A inversa não é, porém, verdadeira. Fixaremos o seguinte enunciado:

TEOREMA 6: — *Se N é sub-módulo — $\overline{\Omega}'$, o ideal $\mathfrak{n}$ é bilateral. E, se $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$ é imagem homomorfa — Ω, de M, é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{n}$ seja bilateral, que se tenha $\mathrm{N}\mathrm{T} \subseteq \mathrm{N}$, qualquer que seja $\mathrm{T} \in \overline{\Omega}'$.* Mais geralmente:

TEOREMA 7: — *Supondo N tal que $\mathrm{M}\mathfrak{n} = \mathrm{N}$, é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{n}$ seja bilateral, que N seja sub-módulo — $\overline{\Omega}'$.*

Exemplos de sub-módulos aos quais correspondem ideais bilaterais são dados por expressões de qualquer das formas $\mathrm{N}\overline{\Omega}'$, $\mathrm{N}\mathfrak{r}$, $m\mathfrak{r}$, onde N é um sub-módulo qualquer, $\mathfrak{r}$ é um ideal direito de $\overline{\Omega}'$ e $m \in \mathrm{M}$ é um elemento fixo. Nestes exemplos trata-se de sub-módulos — $\overline{\Omega}'$, mas, se supusermos N um sub-módulo — Ω, os dois primeiros são também sub-módulos — Ω.

---

(1) Dificuldades técnicas obrigam-nos a substituir, por vezes, as letras góticas, por letras latinas correspondentes, de tipo diferente do que é utilizado no texto. Assim: $\mathfrak{M}$ ou M, $\mathfrak{N}$ ou N, etc., têm neste trabalho o mesmo significado.

Estudemos $\mathbf{M}\mathfrak{r}=\mathbf{N}$. Então, $\mathfrak{n}$ é bilateral, tendo-se $\mathbf{M}\mathfrak{r}=\mathbf{M}\mathfrak{n}$ (teor. 4). Se $\mathfrak{r}$ for máximo em $\overline{\Omega}'$, ou se terá $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{n}=\overline{\Omega}'$. Pôrtanto:

TEOREMA 8: — *Se $\mathfrak{r}$ for um ideal direito máximo de $\overline{\Omega}'$, o sub-módulo — $(\Omega, \overline{\Omega}')=\mathbf{M}\mathfrak{r}=\mathbf{N}$ tem um ideal bilateral de contracções tal que, ou é $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$, ou $\mathfrak{n}=\overline{\Omega}'$. Na hipótese de $\mathfrak{r}$ não ser bilateral, é $\mathfrak{n}=\overline{\Omega}'$ e $\mathbf{M}\mathfrak{r}=\mathbf{M}\overline{\Omega}'$. No caso particular de se ter $\overline{\Omega}'=\Omega$, é $\mathbf{M}\mathfrak{r}=\mathbf{M}$, se $\mathfrak{r}$ não é bilateral.*

Façamos ainda algumas observações simples. Sejam $\mathbf{N}$ um sub-módulo e $\mathfrak{n}$ o ideal de contracções correspondente. Suponhamos $\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$. Se o sub-módulo $\mathbf{M}\mathfrak{n}$, como módulo ordinário, é máximo, tem-se $\mathbf{M}\mathfrak{n}=\mathbf{N}$. Este último é necessàriamente sub-módulo — Ω. Quando $\mathbf{N}$ é um sub--módulo — Ω ou ordinário máximo, não pode concluir-se $\mathbf{M}\mathfrak{n}=\mathbf{N}$, mas se a igualdade tiver lugar, então é $\mathbf{M}\mathfrak{n}'=\mathbf{M}$, para cada $\mathfrak{n}'\supset\mathfrak{n}$.

Se $\mathbf{M}$ e Ω' são tais que todo o sub-módulo — $\Omega=\mathbf{N}$ é imagem endomorfa de $\mathbf{M}$, por via de $B\in\Omega'$, podemos afirmar: 1) é $\mathbf{N}=\mathbf{M}\mathfrak{n}$; 2) para cada $\mathbf{N}_1\subset\mathbf{N}_2$, tem-se $\mathfrak{n}_1\subset\mathfrak{n}_2$. Resulta daqui que a condição de cadeia *ascendente* para os ideais esquerdos de Ω' arrasta a condição de cadeia *ascendente* para os sub-módulos — Ω, de $\mathbf{M}$.

Voltemos ao caso em que $\mathbf{N}$ é sub-módulo — $\overline{\Omega}'$. Formemos o grupo diferença $\mathbf{M}/\mathbf{N}$, que admite $\overline{\Omega}'$ como domínio operatório. Será, se $x\in\mathbf{M}$, $A\in\overline{\Omega}'$,

$$\overline{x}=x+\mathbf{N}\in\mathbf{M}/\mathbf{N}, \qquad (x+\mathbf{N})A=xA+\mathbf{N}.$$

$\overline{\Omega}'$ tem uma imagem homomorfa $\overline{\overline{\Omega}}'$ no anel dos endomórfismos de $\mathbf{M}/\mathbf{N}$. Se for $\overline{\overline{\Omega}}'\simeq\overline{\Omega}'/\mathfrak{a}'$, o ideal bilateral $\mathfrak{a}'$ compõe-se dos elementos $A\in\overline{\Omega}'$ tais que $xA\in\mathbf{N}$, qualquer que seja x. Vê-se que $\mathfrak{a}'=\mathfrak{n}$. Daqui o

TEOREMA 9: — *Quando $\mathbf{N}$ é sub-módulo — $\overline{\Omega}'$, o ideal bilateral de contracções $\mathfrak{n}$ é tal que $\overline{\Omega}'/\mathfrak{n}$ é isomorfo dum anel de*

endomorfismos $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ (precisamente o anel composto pelos endomorfismos distintos induzidos pelos elementos de $\overline{\Omega}'$).

No caso de $\mathbf{N}$ ser sub-módulo — $\overline{\Omega}'$ máximo, o grupo diferença $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ é irredutível — $\overline{\overline{\Omega}}'$. Supondo $\overline{\overline{\Omega}}'\neq(o)$, tem-se, para cada $\overline{x}\neq o$, $\overline{x}\,\overline{\overline{\Omega}}'=\mathbf{M}/\mathbf{N}$, como se viu no Cap. anterior, teorema 25, ou se pode ver em [5, § 8]. Assim:

TEOREMA 10: — *Se $\mathbf{N}$ é um sub-módulo — $\overline{\Omega}'$ máximo, em $\mathbf{M}$, tem-se $\mathbf{M}/\mathbf{N}=\overline{x}\,\overline{\overline{\Omega}}'$, para qualquer $\overline{x}\neq o$, supondo $\overline{\overline{\Omega}}'=\overline{\Omega}'/\mathfrak{n}\neq(o)$. Se $\overline{\overline{\Omega}}'=(o)$, é $\mathbf{M}\overline{\Omega}'\subseteq\mathbf{N}$.*

COROLÁRIO 1: — *Se $\mathbf{N}$ é um sub-módulo — $\overline{\Omega}'$ máximo, em $\mathbf{M}$, o radical — J, de $\overline{\Omega}'$ está contido em $\mathfrak{n}$.* (Cap. anterior, teor. 26, ou [5, § 8]).

3) **Aniquiladores dum sub-módulo** — Qualquer que seja o sub-módulo $\mathbf{N}$, ao lado do ideal de contracções em $\mathbf{N}$, consideremos o ideal direito $\mathfrak{s}$, de Ω', composto da totalidade dos elementos de Ω' que anulam $\mathbf{N}$. $\mathfrak{s}$ diz-se *ideal aniquilador de* $\mathbf{N}$. E, do mesmo modo que $\mathbf{M}\mathfrak{n}\subseteq\mathbf{N}$, aqui existe um sub-módulo — $\Omega=\mathbf{N}'\supseteq\mathbf{N}$, composto de todos os elementos de $\mathbf{M}$ que são aniquilados por $\mathfrak{s}$. $\mathbf{N}'$ diz-se o *aniquilador modular de* $\mathfrak{s}$. Há, então, um certo número de teoremas, em correspondência com os que foram estabelecidos no § anterior. Assim, seja $\mathbf{N}=(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ a soma de dois sub-módulos quaisquer. É válido o

TEOREMA 1': — *O ideal aniquilador da soma $\mathbf{N}=(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ é a intersecção $[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2]$ dos respectivos ideais aniquiladores.*

Se se tiver, em seguida, $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$, o ideal aniquilador $\mathfrak{s}$, de $\mathbf{N}$, verifica a relação $\mathfrak{s}\supseteq(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$. Inversamente, se tomarmos $\mathfrak{s}=(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$, onde os $\mathfrak{s}_i$ são ideais direitos quaisquer de Ω', tem lugar a relação $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$ entre os respectivos aniquiladores modulares. Podemos dizer:

TEOREMA 2': — *Para a intersecção $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$, de dois sub-módulos quaisquer, é $\mathfrak{s}\supseteq(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$. Inversamente, dada* *a soma* $\mathfrak{s}=(\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2)$, *os respectivos aniquiladores modulares verificam a igualdade* $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$.

Já dissemos que, dado $\mathbf{N}$ e considerado o seu ideal aniquilador $\mathfrak{s}$, o aniquilador modular $\mathbf{N}'$, de $\mathfrak{s}$, é um sub-módulo — Ω que contém $\mathbf{N}$. $\mathbf{N}'$ é, de facto, o maior sub-módulo aniquilado por $\mathfrak{s}$. O ideal aniquilador $\mathfrak{s}'$, de $\mathbf{N}'$, verifica a relação $\mathfrak{s}'\subseteq\mathfrak{s}$, pelo que $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}$. Tem-se o

TEOREMA 3': — *Dado um sub-módulo qualquer* $\mathbf{N}$, *existe sempre um sub-módulo* — $\Omega=\mathbf{N}'\supseteq\mathbf{N}$, *tal que o ideal aniquilador de* $\mathbf{N}'$ (= *aniquilador modular de* $\mathfrak{s}$) *é* $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}$.

Inversamente, tomemos um conjunto $\mathfrak{C}$ de elementos de $\overline{\Omega}'$ e consideremos o seu aniquilador modular $\mathbf{N}$. É claro que o ideal $\mathfrak{s}$, aniquilador de $\mathbf{N}$, contém $\mathfrak{C}$, pelo que o aniquilador modular $\mathbf{N}'$, de $\mathfrak{s}$, verifica a relação $\mathbf{N}'\subseteq\mathbf{N}$. Por ser $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}'$, conclui-se $\mathbf{N}=\mathbf{N}'$. Assim:

TEOREMA 4': — *Dado um conjunto* $\mathfrak{C}$ *de elementos de* $\overline{\Omega}'$, *existe sempre um ideal direito* $\mathfrak{s}\supseteq\mathfrak{C}$, *de* $\overline{\Omega}'$, *tal que* $\mathfrak{s}$ *é o ideal aniquilador do aniquilador modular* $\mathbf{N}$, *de* $\mathfrak{C}$; *além disso,* $\mathbf{N}$ *é o aniquilador modular de* $\mathfrak{s}$.

Um caso preciso em que $\mathfrak{s}=\mathfrak{C}$ é dado a seguir. Dum modo geral, sejam $\mathfrak{e}$ um ideal esquerdo de $\overline{\Omega}'$ e $\mathfrak{r}$ o seu aniquilador direito (ideal direito em $\overline{\Omega}'$). Então, se tomarmos $\mathfrak{C}=\mathfrak{r}$, o ideal aniquilador do aniquilador modular $\mathbf{N}$, de $\mathfrak{C}=\mathfrak{r}$, é $\mathfrak{s}=\mathfrak{r}$. De facto, por um lado, é $\mathfrak{s}\supseteq\mathfrak{r}$; por outro, porém, sendo $\mathbf{M}\mathfrak{e}\subseteq\mathbf{N}$, o ideal aniquilador de $\mathbf{M}\mathfrak{e}$, precisamente $\mathfrak{r}$, conterá $\mathfrak{s}$. Nestas condições, tem-se o

TEOREMA 5': — *Todo o ideal esquerdo* $\mathfrak{e}$, *de* $\overline{\Omega}'$, *tem um aniquilador direito* $\mathfrak{r}$, *em* $\overline{\Omega}'$, *que é o ideal aniquilador do aniquilador modular* $\mathbf{N}$, *de* $\mathfrak{r}$. *A intersecção* $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{e}$ *é um ideal bilateral nilpotente de* $\mathfrak{e}$ *(de expoente 2), composto de todos os elementos de* $\mathfrak{e}$ *que induzem em* $\mathbf{N}$ *o endomorfismo nulo. E, se* $\mathfrak{q}$ *for o aniquilador esquerdo de* $\mathfrak{r}$, *a intersecção* $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{q}$ *representa, simultâneamente, a totalidade dos elementos de* $\mathfrak{r}$ *que aplicam* $\mathbf{M}$ *dentro de* $\mathbf{N}$ *e a totalidade dos elementos de* $\mathfrak{q}$ *que induzem em* $\mathbf{N}$ *o endomorfismo nulo.*

São ainda proposições simples as seguintes:

TEOREMA 6': — *Se* $\mathbf{N}$ *é sub-módulo* — $\overline{\Omega}'$, *o seu ideal aniquilador é bilateral. E, se* $\mathbf{N}$ *é tal que existe um elemento* $A\in\overline{\Omega}'$ *do qual ele é aniquilador modular, é condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{s}$ *seja bilateral, que se tenha* $\mathbf{N}\,\mathrm{T}\subseteq\mathbf{N}$, *qualquer que seja* $\mathrm{T}\in\overline{\Omega}'$. A 2.ª parte do teorema pode demonstrar-se como vai ver-se. Se $\mathbf{N}$, além de sub-módulo — $\overline{\Omega}'$, é o aniquilador modular de A, sem dúvida que $\mathbf{N}\,T\subseteq\mathbf{N}$ e $\mathfrak{s}$ é bilateral. Inversamente, se $\mathbf{N}$ é a totalidade dos elementos de $\mathbf{M}$ que aniquilam A e $\mathfrak{s}$ é bilateral, tem-se $\mathbf{N}\,T\subseteq\mathbf{N}$, qualquer que seja T, visto que, sendo $A\in\mathfrak{s}$, é também $TA\in\mathfrak{s}$, $\mathbf{N}\,TA=(o)$, e, portanto, $\mathbf{N}\,T\subseteq\mathbf{N}$.

TEOREMA 7': — *Supondo* $\mathbf{N}$ *e* $\mathfrak{s}$ *aniquiladores recíprocos, é condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{s}$ *seja bilateral, que* $\mathbf{N}$ *seja sub-módulo* — $\overline{\Omega}'$. Já sabemos que a condição é suficiente. Supondo agora $\mathbf{N}$ e $\mathfrak{s}$ aniquiladores recíprocos e $\mathfrak{s}$ bilateral, tem-se $\mathbf{N}\,T\mathfrak{s}\subseteq\mathbf{N}\,\mathfrak{s}=(o)$, pelo que $\mathbf{N}\,T\subseteq\mathbf{N}$.

Os exemplos de sub-módulos — $\overline{\Omega}'$, dados no § anterior, da forma $\mathbf{N}\,\overline{\Omega}'$, $\mathbf{N}\mathfrak{r}$, $m\mathfrak{r}$ levam, como sabemos, a sub-módulos com um ideal aniquilador bilateral. Mas podemos, na ordem de ideias que estamos desenvolvendo, considerar o aniquilador modular dum ideal esquerdo $\mathfrak{e}$, de $\overline{\Omega}'$. Vale, então, o seguinte: se $\mathfrak{e}$ é um ideal esquerdo, o seu aniquilador modular $\mathbf{N}$ tem um ideal aniquilador bilateral. Basta ver que, sendo, na verdade, $\mathbf{N}\,\mathfrak{e}=(o)$, $\mathbf{N}\,T\mathfrak{e}\subseteq\mathbf{N}\cdot\mathfrak{e}=(o)$, se conclui $\mathbf{N}\,T\subseteq\mathbf{N}$. Deste modo, o aniquilador modular dum ideal esquerdo é um sub-módulo — $(\Omega,\overline{\Omega}')$.

TEOREMA 8': — *Se* $\mathfrak{e}$ *for um ideal esquerdo máximo de* $\overline{\Omega}'$, *o aniquilador modular* $\mathbf{N}$, *de* $\mathfrak{e}$, *tem um ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$ *que é bilateral e tal que, ou é* $\mathfrak{s}=\mathfrak{e}$ *ou* $\mathfrak{s}=\overline{\Omega}'$. *Na hipótese de* $\mathfrak{e}$ *não ser bilateral, é* $\mathfrak{s}=\overline{\Omega}'$ *e são também iguais os aniquiladores modulares de* $\mathfrak{e}$ *e de* $\overline{\Omega}'$. *No caso particular de se ter* $\overline{\Omega}'=\overline{\Omega}$, *é* $\mathbf{N}=(o)$, *se* $\mathfrak{e}$ *não é bilateral.*

Façamos ainda algumas observações simples. Sejam $\mathbf{N}\neq(o)$ um sub-módulo e $\mathfrak{s}$ o ideal aniquilador correspondente. Se o aniquilador modular $\mathbf{N}'$, de $\mathfrak{s}$, como módulo ordinário, é mínimo, tem-se $\mathbf{N}' = \mathbf{N}$. Este último é necessàriamente sub-módulo $-\mathfrak{Q}$. Quando $\mathbf{N}$ é um sub-módulo mínimo, não podemos concluir que o aniquilador modular $\mathbf{N}'$, do ideal aniquilador $\mathfrak{s}$, de $\mathbf{N}$, seja igual a $\mathbf{N}$ (o que, de resto, é válido em geral, como sabemos). Mas, se a igualdade tiver lugar, então, para cada $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{s}$, o aniquilador modular é nulo.

Se $\mathbf{M}$ e $\overline{\mathfrak{Q}'}$ são tais que todo o sub-módulo $-\mathfrak{Q} = \mathbf{N}$ é aniquilador modular dum elemento $A \in \overline{\mathfrak{Q}'}$, podemos afirmar: 1) $\mathbf{N}$ é aniquilador modular do seu ideal aniquilador; 2) para cada $\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_2$, tem-se $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{s}_2$. Resulta daqui que a condição de cadeia *ascendente* para os ideais direitos de $\overline{\mathfrak{Q}'}$ arrasta a condição de cadeia *descendente* para os sub-módulos $-\mathfrak{Q}$, de $\mathbf{M}$.

Voltemos ao caso que $\mathbf{N}$ é sub-módulo $-\overline{\mathfrak{Q}'}$. $\overline{\mathfrak{Q}'}$ tem uma imagem homomorfa $\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}}$ no anel dos endomorfismos de $\mathbf{N}$. Se for $\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}} \simeq \overline{\mathfrak{Q}'}/\mathfrak{a}'$, o ideal bilateral $\mathfrak{a}'$ compõe-se dos elementos $A \in \overline{\mathfrak{Q}'}$ tais que $xA = o$ para cada $x \in \mathbf{N}$. Vê-se que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{s} =$ ideal aniquilador de $\mathbf{N}$. Daqui o

TEOREMA 9': — *Quando* $\mathbf{N}$ *é sub-módulo* $-\overline{\mathfrak{Q}'}$, *o seu ideal aniquilador bilateral* $\mathfrak{s}$ *é tal que* $\overline{\mathfrak{Q}'}/\mathfrak{s}$ *é isomorfo dum anel de endomorfismos de* $\mathbf{N}$ *(precisamente o anel composto pelos endomorfismos distintos induzidos pelos elementos de* $\overline{\mathfrak{Q}'}$*).*

No caso de $\mathbf{N} \neq (o)$ ser sub-módulo $-\overline{\mathfrak{Q}'}$ mínimo, o grupo $\mathbf{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathbf{N}$ é, como $\mathbf{N}$, irredutível $-\overline{\mathfrak{Q}'}$. Admitindo que é $\mathfrak{n} \neq (o)$, será $\mathbf{M}\mathfrak{n} = \mathbf{N}$, e este é irredutível $-\overline{\mathfrak{Q}'}/\mathfrak{s} = \overline{\overline{\mathfrak{Q}'}}$. Supondo $\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}} \neq (o)$, tem-se, para cada $x \neq o$, pertencente a $\mathbf{M}\mathfrak{n}$, $x\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}} = \mathbf{M}\mathfrak{n}$. Assim:

TEOREMA 10': — *Se* $\mathbf{N}$, *com* $\mathfrak{n} \neq (o)$, *é um sub-módulo* $-\overline{\mathfrak{Q}'}$ *mínimo, em* $\mathbf{M}$, *tem-se* $\mathbf{M}\mathfrak{n} = \mathrm{x}\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}} = \mathbf{N}$, *para qualquer* $\mathrm{x} \neq o$, *pertencente a* $\mathbf{M}\mathfrak{n}$, *supondo* $\overline{\overline{\Omega'}} = \overline{\mathfrak{Q}'}/\mathfrak{s}$. *Se* $\overline{\overline{\mathfrak{Q}'}} = (o)$, *o aniquilador modular de* $\overline{\mathfrak{Q}'}$ *contém* $\mathbf{N}$.

COROLÁRIO 1': — *Se* $\mathbf{N}$, *com* $\mathfrak{n} \neq (o)$, *é um sub-módulo* $-\overline{\mathfrak{Q}'}$ *mínimo, em* $\mathbf{M}$, *o radical* $-\mathrm{J}$, *de* $\overline{\mathfrak{Q}'}$, *está contido no ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$, *de* $\mathbf{N}$.

4) **Aplicação aos módulos irredutíveis** — Embora o objectivo deste § seja o que se refere na epígrafe, vamos começar por dar uns enunciados onde se põem em jogo, simultâneamente, ideais de contracção e aniquiladores. Consideremos um ideal direito $\mathfrak{r}$ e designemos por $\mathfrak{P}$ o seu aniquilador modular. Completaremos o teorema 5 com os dois enunciados que vão seguir-se.

TEOREMA 11: — *O ideal de contracções no aniquilador modular* $\mathfrak{P}$, *de* $\mathfrak{r}$, *é o ideal esquerdo* $\mathfrak{e}$, *aniquilador de* $\mathfrak{r}$ *e do ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$, *de* $\mathfrak{P}$. *A intersecção* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$ *é um ideal bilateral de* $\mathfrak{e}$ *(de expoente 2), composto de todos os elementos de* $\mathfrak{e}$ *que induzem em* $\mathfrak{P}$ *o endomorfismo nulo.* Na verdade, sendo $\mathfrak{P}\mathfrak{r} = (o)$ e definindo $\mathfrak{e}$ pela igualdade $\mathfrak{e}\mathfrak{r} = (o)$, vê-se que a relação $\mathbf{M}\mathfrak{p}\mathfrak{r} = (o)$, dando $\mathfrak{p}\mathfrak{r} = (o)$, implica $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{e}$. Mas, sendo também $\mathbf{M}\mathfrak{e}\mathfrak{r} = (o)$, é $\mathbf{M}\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{p}$, de sorte que $\mathfrak{p} = \mathfrak{e}$. Em seguida, se $\mathfrak{s}$ é o ideal aniquilador de $\mathfrak{P}$, tem-se ainda $\mathfrak{e}\mathfrak{s} = (o)$ pelo seguinte: *se* $\mathfrak{r}$ *é um ideal direito,* $\mathfrak{P}$ *o seu aniquilador modular e* $\mathfrak{s}$ *o ideal aniquilador de* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{r}$ *e* $\mathfrak{s}$ *têm o mesmo ideal esquerdo aniquilador.* Aqui, é a intersecção $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$ que representa a totalidade dos elementos de $\mathfrak{e}$ que induzem em $\mathfrak{P}$ o endomorfismo nulo. Os ideais $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{x}$ (este último citado no teorema 5) estão na relação $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{x}$, mas todos eles têm o mesmo aniquilador esquerdo $\mathfrak{e}$.

TEOREMA 12: — *As intersecções* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$ *e* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$ *representam, respectivamente, as totalidades dos elementos de* $\mathfrak{r}$ *e de* $\mathfrak{s}$ *que induzem em* $\mathbf{M}/\mathfrak{P}$ *o endomorfismo nulo.*

Anàlogamente, completaremos o teorema 5' dando as duas proposições que vamos enunciar.

TEOREMA 11': — *O ideal aniquilador de* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ *é o ideal direito* $\mathfrak{r}$, *aniquilador de* $\mathfrak{e}$ *e do ideal de contracções* $\mathfrak{n}$, *em* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$. *A intersecção* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$ *é um ideal bilateral de* $\mathfrak{r}$ *(de expoente 2), composto de todos os elementos de* $\mathfrak{r}$ *que aplicam* $\mathbf{M}$ *dentro de* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$.

TEOREMA 12': — *As intersecções* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$ *e* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$ *representam, respectivamente, as totalidades dos elementos de* $\mathfrak{e}$ *de* $\mathfrak{n}$ *que induzem em* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ *o endomorfismo nulo.*

Façamos aplicações aos anéis irredutíveis. Se em vez de $\overline{\mathfrak{Q}'}$, suposto irredutível, tomarmos o seu ideal esquerdo $\mathfrak{e}$, a hipótese $x \neq o$, $(x \in \mathbf{M})$, implica $x\mathfrak{e} = \mathbf{M}\mathfrak{e}$. Basta observar que se tem $x\overline{\Omega'}\mathfrak{e} \subseteq x\mathfrak{e}$, $x\overline{\Omega'}\mathfrak{e} = \mathbf{M}\mathfrak{e}$, $\mathbf{M}\mathfrak{e} \subseteq x\mathfrak{e}$. Consideremos, em seguida, $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ e seja $\mathfrak{r}$ o aniquilador direito de $\mathfrak{e}$. Se tomarmos $o \neq x \in \mathbf{M}\mathfrak{e}$, é ainda $x\mathfrak{e} = \mathbf{M}\mathfrak{e}$. Isto significa que $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ é irredutível — $\mathfrak{e}$. Conforme o teorema 12′ é igualmente irredutível — $\mathfrak{e}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$. Podemos afirmar ainda que $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$ é o radical — J, de $\mathfrak{e}$, visto que $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$ é nilpotente. Portanto:

TEOREMA 13: — *Quando* $\mathbf{M}$ *é irredutível* — $\overline{\Omega'}$, *para cada ideal esquerdo* $\mathfrak{e}$, de $\overline{\Omega'}$, *é válida a igualdade* $\mathrm{x}\mathfrak{e} = \mathbf{M}\mathfrak{e}$, *sempre que* $\mathrm{o} \neq \mathrm{x} \in \mathbf{M}\mathfrak{e}$. *Considerados o sub-módulo* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ *e o ideal direito* $\mathfrak{r}$, *aniquilador de* $\mathfrak{e}$, *pode afirmar-se:* 1) $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ *é irredutível* — $\mathfrak{e}$ *ou irredutível* — $\mathfrak{e}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$; 2) *o radical* — J, *de* $\mathfrak{e}$, *é* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$, [8, § 2]. Dos teoremas 11′ e 12′ resulta ainda este

ADITAMENTO: — *Se* $\mathfrak{n}$ *for o ideal de contracções em* $\mathbf{M}\mathfrak{e}$, *pode afirmar-se:* 3) $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ *é irredutível* — $\mathfrak{n}$ *ou irredutível* — — $\mathfrak{n}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$; 4) *o radical* — J, *de* $\mathfrak{n}$, *é* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}$.

Tomemos agora o ideal direito $\mathfrak{r}$, do anel irredutível — $\overline{\Omega'}$. Sejam $\mathfrak{P}$ o aniquilador modular de $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{e}$ o ideal esquerdo aniquilador do mesmo ideal. Tomemos $x \notin \mathfrak{P}$, por forma que $\overline{x} = x + \mathfrak{P} \in \mathbf{M}/\mathfrak{P} = \overline{\mathbf{M}}$ seja $\neq o$. O módulo $x\mathfrak{r} \neq (o)$ verifica a igualdade $x\mathfrak{r} = \mathbf{M}$, e, portanto, é $\overline{x}\mathfrak{r} = \overline{\mathbf{M}}$. Isto significa que $\mathbf{M}/\mathfrak{P}$ é irredutível — $\mathfrak{r}$. Conforme o teorema 12, é igualmente irredutível — $\mathfrak{r}/\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$. Podemos afirmar ainda que $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$ é o radical — J, de $\mathfrak{r}$, visto que $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$ é nilpotente. Portanto:

TEOREMA 13′: — *Quando* $\mathbf{M}$ *é irredutível* — $\overline{\Omega'}$, *para cada ideal direito* $\mathfrak{r}$, *de* $\overline{\Omega'}$, *é válida a igualdade* $\overline{\mathrm{x}}\mathfrak{r} = \overline{\mathbf{M}}$, *sempre que* $o \neq \overline{\mathrm{x}} \in \overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/\mathfrak{P}$, *onde* $\mathfrak{P}$ *é o aniquilador modular de* $\mathfrak{r}$. *Considerando ainda* $\mathfrak{e}$, *ideal esquerdo aniquilador de* $\mathfrak{r}$, *pode afirmar-se:* 1′) $\mathbf{M}/\mathfrak{P}$ *é irredutível* — $\mathfrak{r}$ *ou irredutível* — $\mathfrak{r}/\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$; 2′) *o radical* — J, *de* $\mathfrak{r}$, *é* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$, [8, § 2]. Dos teoremas 11 e 12 resulta ainda este

ADITAMENTO: — *Se* $\mathfrak{s}$ *for o ideal aniquilador de* $\mathfrak{P}$, *pode afirmar-se:* 3′) $\mathbf{M}/\mathfrak{P}$ *é irredutível* — $\mathfrak{s}$ *ou irredutível* — — $\mathfrak{s}/\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$; 4′) *o radical* — J, *de* $\mathfrak{s}$, *é* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{s}$.

Um raciocínio imediato dá agora o seguinte:

TEOREMA 14: — *Seja* $\mathfrak{e}'$ *um ideal esquerdo do anel irredutível* — Ω'. *O seu aniquilador direito* $\mathfrak{r}$ *tem um aniquilador esquerdo* $\mathfrak{e}$, *nas condições seguintes:* 1) $\mathfrak{r}$ *e* $\mathfrak{e}$ *são aniquiladores recíprocos;* 2) $\mathfrak{r}$ *e* $\mathfrak{e}$ *têm o mesmo radical* — J, *que é* $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{r}$. Ou também:

TEOREMA 14′: — *Seja* $\mathfrak{r}'$ *um ideal direito do anel irredutível* — $\overline{\Omega'}$. *O seu aniquilador esquerdo* $\mathfrak{e}$ *tem um aniquilador direito* $\mathfrak{r}$, *nas condições seguintes:* 1′) $\mathfrak{e}$ *e* $\mathfrak{r}$ *são aniquiladores recíprocos;* 2′) $\mathfrak{e}$ *e* $\mathfrak{r}$ *têm o mesmo radical* — J, *que é* $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$.

5) **Nilideais como ideais de contracção e como aniquiladores** — Dado o sub-módulo $\mathbf{N}$, de $\mathbf{M}$, se $\mathfrak{n}$ é nilideal, pode chamar-se a $\mathbf{N}$ um *nilmódulo*. Em particular, haverá a considerar *módulos nilpotentes* e *semi-nilpotentes*.

TEOREMA B: — *A soma directa dum nilmódulo* — Ω *e dum nilmódulo* — Ω *ao qual corresponde um ideal bilateral de contracções é um nilmódulo* — Ω; *a soma directa de dois sub-módulos* — Ω *nilpotentes é nilpotente; e a soma directa de dois sub-módulos* — Ω *semi-nilpotentes é semi-nilpotente.* A demonstração assenta sobre o teorema A e os resultados expostos em (I), págs. 4 e 5.

TEOREMA 15: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo simples, ordinário ou* — Ω, *e* $\mathfrak{r} \subseteq \overline{\Omega'}$ *é um nilideal tal que* $\mathbf{N}\mathfrak{r} \subseteq \mathbf{N}$, *tem-se, necessàriamente,* $\mathbf{N}\mathfrak{r} = (\mathrm{o})$. Supondo $\mathbf{N}\mathfrak{r} \neq (o)$, é $\mathbf{N}\mathfrak{r} = \mathbf{N}$. Existem $n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathfrak{r}$ tais que $nA \neq o$. Então, $\mathbf{N}A$ é um sub-módulo não nulo contido em $\mathbf{N}$, o que dá $\mathbf{N}A = \mathbf{N}$. Daqui se tira $\mathbf{N} = \mathbf{N}A = \ldots = \mathbf{N}A^m = (o)$, se $A^m = o$. O absurdo provém de se admitir $\mathbf{N}\mathfrak{r} = \mathbf{N}$.

TEOREMA 15′: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo máximo e* $\mathfrak{e} \subseteq \overline{\Omega'}$ *é um nilideal para o qual* $\mathbf{N}\mathfrak{e} = (\mathrm{o})$, *tem-se* $\mathbf{M}\mathfrak{e} \subseteq \mathbf{N}$. Supondo $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ não contido em $\mathbf{N}$, existe $m \in \mathbf{M}$, $A \in \mathfrak{e}$, tal que $mA \notin \mathbf{N}$. Então, $\mathbf{M}A$ não está contido em $\mathbf{N}$, pelo que $(\mathbf{M}A, \mathbf{N}) = \mathbf{M}$. Admitindo ser $A^{\sigma-1} \neq o$, $A^{\sigma} = o$, vê-se que $(\mathbf{M}A^{\sigma}, \mathbf{N}A^{\sigma-1}) = \mathbf{M}A^{\sigma-1} = (o)$, o que acarretaria $A^{\sigma-1} = o$. O absurdo provém de se supor $\mathbf{M}\mathfrak{e}$ não contido em $\mathbf{N}$.

TEOREMA 16: — *Se* $\mathbf{N} \neq (o)$ *é um nilmódulo simples, ordinário ou* — Ω, *o ideal* $\mathfrak{n}$ *ou é nulo ou é* $\mathfrak{n}^2 = (o)$. Suponhamos, com efeito, $\mathfrak{n}^2 \neq (o)$. Se $o \neq A \in \mathfrak{n}$, é $\mathbf{M}A = \mathbf{N}$. Em seguida, é $\mathbf{M}A^2 = (o)$, porque, de contrário, ter-se-ia $\mathbf{N} = \mathbf{M}A = = \mathbf{M}A^2 = \ldots$ e A seria potente. Depois, se $T \in \mathfrak{n}$, vem $\mathbf{M}AT = \mathbf{N}T \subseteq \mathbf{N}$. Admitindo a igualdade $\mathbf{N}T = \mathbf{N}$, T seria potente. Logo, é $\mathbf{M}AT = (o)$, e $AT = o$, como afirma o teorema.

TEOREMA 16′: — *Se* $\mathbf{N} \neq (o)$ *é um sub-módulo máximo, ordinário ou* — Ω, *e se o seu ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$ *é nilideal, ou é* $\mathfrak{s} = (o)$ *ou* $\mathfrak{s}^2 = (o)$. Suponhamos, com efeito, $\mathfrak{s} \neq (o)$. Se $o \neq A \in \mathfrak{s}$, o aniquilador modular $\mathbf{N}'$, de A, é precisamente $\mathbf{N}$. Em seguida, o aniquilador modular de A^2 é o módulo $\mathbf{M}$, porque, de contrário, seriam iguais os aniquiladores modulares de A e A^2. Qualquer que fosse m, o aniquilador modular de A^m seria $\mathbf{N}$, o que não pode ter lugar quando $A^m = o$. Depois, se $T \in \mathfrak{s}$, tem-se $AT = o$, visto que $AT \neq o$ daria, supondo $A^m = o$, $A^{m-1} \neq o$, $\mathbf{M}A^m T = \mathbf{M}A^{m-1} . AT = (o)$, $\mathbf{M}A^{m-1} \subseteq \mathbf{N}$, $\mathbf{M}A^{m-1}T = = (o)$, $A^{m-1}T = o$, etc., até $AT = o$, contra a hipótese.

TEOREMA 17: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo qualquer para o qual existe* $\mathrm{A} \in \mathfrak{n}$, *de modo que, além de* $\mathbf{M}\mathrm{A} \subseteq \mathbf{N}$, *a diferença* $1 - A = A_1$, *onde* 1 *é o endomorfismo unidade, suposto pertencente a* $\overline{\Omega}'$, *seja nilpotente, é* $\mathbf{N} = \mathbf{M}$. Sabemos que se tem $\mathfrak{n} = \overline{\Omega}'$. [(I), págs. 7]. Nessas condições, $1 \in \mathfrak{n}$, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, e, portanto, $\mathbf{N} = \mathbf{M}$.

TEOREMA 17′: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo qualquer para o qual existe* $\mathrm{A} \in \mathfrak{s}$ *(este é o ideal aniquilador de* $\mathbf{N}$*) de sorte que, além de* $\mathbf{N}\mathrm{A} = (o)$, *a diferença* $1 - \mathrm{A} = \mathrm{A}_1$, *onde* 1 *é o endomorfismo unidade, suposto pertencente a* $\overline{\Omega}'$, *seja nilpotente, é* $\mathbf{N} = (o)$.

COROLÁRIO A: — *Para sub-módulos* — Ω *supondo* $\mathbf{N} + \mathbf{N}_1 = = \mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}_1$ *nilmódulo, tem-se, necessàriamente,* $\mathbf{N} = \mathbf{M}$, *se* $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}$.

6) **Projecções** — Um endomorfismo idempotente E, de $\mathbf{M}$, diz-se uma *projecção*. Pondo $1 = E + (1 - E)$, faz-se uma decomposição do endomorfismo idêntico em

idempotentes ortogonais. O módulo $\mathbf{M}$ admite a seguinte decomposição:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}E + \mathbf{M}(1 - E). \qquad (1)$$

Portanto:

TEOREMA 18: — *Se* E *é idempotente, tem-se a decomposição* (1), *valendo, para* $m \in \mathbf{M}E$. $mE = m$, *e, para* $m' \in \mathbf{M}(1 - E)$, $m'E = o$.

Consideremos o anel $\overline{\Omega}'$ habitual, designemos por $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{n}'$ os ideais de contracção de $\mathbf{M}$ nas duas parcelas de (1) e por $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s}'$ os respectivos ideais aniquiladores. Têm lugar os

TEOREMAS 19 e 19′: — *O ideal* $\mathfrak{n}$ *compõe-se de todos os elementos* $\mathrm{A} \in \overline{\Omega}'$ *para os quais* $\mathrm{A} = \mathrm{A}\,\mathrm{E}$ [*ou* $\mathrm{A}(1 - \mathrm{E}) = o$] *e o ideal* $\mathfrak{s}'$ *compõe-se de todos os elementos* $\mathrm{B} \in \overline{\Omega}'$ *para os quais* $\mathrm{B} = \mathrm{E}\mathrm{B}$ [*ou* $(1 - \mathrm{E})\,\mathrm{B} = o$].

Um idempotente primitivo dum anel, [(I), pág. 18], pode definir-se como aquele que não pode decompôr-se numa soma de idempotentes não nulos e ortogonais. Uma projecção de $\mathbf{M}$ diz-se *primitiva*, se o idempotente E correspondente é primitivo.

Se $\mathbf{M}$ é um módulo — Ω, diz-se que $\mathbf{M}$ é *indecomponível* — Ω, quando não pode escrever-se como soma directa de dois sub-módulos — Ω não nulos. Em $\overline{\Omega}$, o idempotente 1 será, então, primitivo. Não existe outro idempotente, além de 1, [(II), pág. 11].

Seja $E \in \overline{\Omega}$. Se E é primitivo, o sub-módulo — $\Omega = \mathbf{M}E$ é indecomponível. De facto, se pudesse ser $\mathbf{M}E = \mathbf{M}' + \mathbf{M}''$, onde as parcelas se supõem sub-módulos Ω, definiríamos dois idempotentes E' e E'' por meio das correspondências seguintes:

$$m \to mE \to n' = mE',$$

$$m \to mE \to n'' = mE'',$$

$$(m \in \mathbf{M},\ mE = n' + n'',\ n' \in \mathbf{M}',\ n'' \in \mathbf{M}'').$$

Seria $E=E'+E''$, verificando-se as relações $mE'E''= n'E''$, $n'E=n'=n'+o$, $n'E''=o=mE'E''$. Concluiríamos, portanto, $E'E''=o$, visto que m é qualquer. E seria anàlogamente $E''E'=o$, contra a hipótese de E ser primitivo.

TEOREMA 20: — *Se* E_1 *é primitivo em* $\overline{\Omega}$, *o sub-módulo* — Ω *indecomponível* $\mathbf{M}\mathrm{E}_1$ *não tem sub-módulo* — Ω *próprio que possa ser imagem homomorfa de* $\mathbf{M}$ *definida por idempotente* $\mathrm{E}_2\in\overline{\Omega}$, [10, § 3]. Se fosse $\mathbf{M}E_2\subset\mathbf{M}E_1$, escrevendo $\mathbf{M}=\mathbf{M}E_2+\mathbf{M}(1-E_2)$, $\mathbf{M}E_1=\mathbf{M}E_2+\mathbf{M}E_1\cap\mathbf{M}(1-E_2)$, a intersecção acabada de indicar não seria nula e chegar-se-ia assim a um absurdo.

TEOREMA 20': — *Se* E_1 *é primitivo em* $\overline{\Omega}$, *o seu aniquilador modular* $\mathbf{N}=\mathbf{M}(1-\mathrm{E}_1)$ *é tal que não pode existir sub-módulo* — $\Omega=\mathbf{M}'\supset\mathbf{M}(1-\mathrm{E}_1)$ *o qual seja aniquilador modular dum idempotente* $\mathrm{E}_2\in\overline{\Omega}$. Em primeiro lugar, duma maneira geral, o aniquilador modular dum idempotente E_1 é $\mathbf{M}(1-E_1)$, porque este conjunto faz parte daquele aniquilador, e, por outro lado, se $x\in\mathbf{M}$ é tal que $xE_1=o$, escrevendo $x=xE_1+x(1-E_1)$, vê-se que $x=x(1-E_1)\in\mathbf{M}(1-E_1)$. Admitamos, em seguida, ser $\mathbf{M}'=\mathbf{M}(1-E_2)\supset\mathbf{M}(1-E_1)$ de sorte que $\mathbf{M}(1-E_2)=\mathbf{M}(1-E_1)+\mathbf{M}(1-E_2)\cap\mathbf{M}E_1$. Ter-se-ia $(1-E_1).E_2=o$ e $E_1-E_2E_1=(1-E_2)E_1$ seria idempotente. Como $\mathbf{M}(1-E_2)E_1\subseteq\mathbf{M}E_1$, valeria uma das relações $(1-E_2).E_1=o$, $\mathbf{M}(1-E_2)E_1=\mathbf{M}E_1$. A primeira mostraria que seria nula a intersecção $\mathbf{M}(1-E_2)\cap\mathbf{M}E_1$ e levaria ao absurdo $\mathbf{M}(1-E_2)=\mathbf{M}(1-E_1)$; a segunda daria, tendo em conta a igualdade $E_2=E_1E_2$, $\mathbf{M}(1-E_2)E_1E_2=o=\mathbf{M}E_1E_2=\mathbf{M}E_2$, $E_2=o$.

TEOREMA 21: — *Dado o sub-módulo* $\mathbf{M}\mathrm{A}$, $(\mathrm{A}\in\overline{\Omega}')$, *admitida a existência dum endomorfismo* $\mathrm{S}\in\overline{\Omega}'$ *tal que* $\mathrm{ASA}=\mathrm{A}$, *existe idempotente* $\mathrm{E}\in\overline{\Omega}'$ *tal que* $\mathbf{M}\mathrm{A}=\mathbf{M}\mathrm{E}$, [10, § 3]. Com efeito, $SA=E$ é idempotente, pois $SA.SA=SA$. Mas, sendo $\mathbf{M}E=\mathbf{M}SA\subseteq\mathbf{M}A$, $\mathbf{M}A=\mathbf{M}AE\subseteq\mathbf{M}E$, conclui-se $\mathbf{M}A=\mathbf{M}E$.

TEOREMA 21': — *Se* $\mathbf{N}$ *é aniquilador modular de* $\mathrm{A}\in\overline{\Omega}'$, *admitindo a existência dum endomorfismo* $\mathrm{S}\in\overline{\Omega}'$, *tal que*

$\mathrm{ASA}=\mathrm{A}$, *existe idempotente* $\mathrm{E}\in\overline{\Omega}'$ *tal que* $\mathbf{N}$ *é o seu aniquilador modular*. Com efeito, $AS=E$ é idempotente, pois $AS.AS=AS$. Se $\mathbf{N}'$ é o aniquilador modular de E, das relações $\mathbf{N}E=\mathbf{N}AS=(o)$, concluímos $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}'$. Depois, das relações $\mathbf{N}'EA=(o)=\mathbf{N}'ASA=\mathbf{N}'A$, concluímos $\mathbf{N}'\subseteq\mathbf{N}$. Resulta assim o teorema.

TEOREMA C: — *Se* $\mathbf{N}_1$ *e* $\mathbf{N}_2$ *forem nilmódulos* — Ω *de* $\mathbf{M}$, *não há imagem homomorfa de* $\mathbf{M}$, *na soma* $\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2$, *suposta directa, que seja definida por idempotente*, [10, § 3]. Representando por $\mathbf{N}$ a soma directa, sabemos que $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$. Como os $\mathfrak{n}_i$ são nilideais, o teorema resulta de não poder haver idempotente na soma de dois nilideais, [(I), pág. 22].

Quando, para um sub-módulo simples $\mathbf{N}$, ordinário ou — Ω, é $\mathfrak{n}^2\neq(o)$, não pode o mesmo ser nilmódulo. Se se designar por *sub-módulo regular* aquele que contém aplicações homomorfas não nilpotentes de $\mathbf{M}$, podemos dar este enunciado:

TEOREMA 22: — *O sub-módulo simples* $\mathbf{N}$, *ordinário ou* — Ω, *para o qual é* $\mathfrak{n}\neq(o)$, *ou é nilpotente, e de expoente 2, ou é um sub-módulo regular.*

Quando, dado um sub-módulo máximo $\mathbf{N}\neq(o)$, ordinário ou — Ω, o seu ideal aniquilador $\mathfrak{s}$ é tal que $\mathfrak{s}^2\neq(o)$, não pode ser $\mathfrak{s}$ um nilideal. Assim:

TEOREMA 22': — *Se o sub-módulo máximo* $\mathbf{N}\neq(o)$, *ordinário ou* — Ω, *tem um ideal aniquilador* $\mathfrak{s}\neq(o)$, *então* $\mathfrak{s}$ *ou é nilpotente, e de expoente 2, ou é regular.*

TEOREMA 23: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo* — Ω *simples, regular relativamente a* $\overline{\Omega}$, *existe idempotente* $\mathrm{E}\in\mathfrak{n}$ *tal que* $\mathbf{M}\mathrm{E}=\mathbf{N}$. Ponhamos $\mathbf{N}=\mathbf{M}A$, onde o endomorfismo A se supõe não nilpotente. Será $\mathbf{N}A=\mathbf{N}$. Dado $m\in\mathbf{M}$, por meio de A, passa-se a $mA=n\in\mathbf{N}$; e, como $\mathbf{N}A=\mathbf{N}$ é um automorfismo, designemos por $n'\in\mathbf{N}$ o elemento tal que $n'A=n$. A correspondência $m\to n'$ é um endomorfismo B, de $\mathbf{M}$, para o qual, além de $\mathbf{M}B=\mathbf{N}$, se verifica a relação $BA=A$. Tira-se daqui $(B^2-B)A=o$. Se $B^2-B=o$, B será o idempotente procurado. Não sendo assim, tem-se $\mathbf{M}(B^2-B)A=(o)$, $\mathbf{M}(B^2-B)=$

$= \mathbf{N}$. Esta última igualdade é absurda, visto que ela dá $\mathbf{N}A = (o)$. Ao teorema responde-se, pois, com $B = E$.

Corolário 2: — *É condição necessária e suficiente, para que um sub-módulo* — Ω *simples* $\mathbf{N}$, *de* $\mathbf{M}$, *seja parcela duma soma directa igual a* $\mathbf{M}$, *que seja regular relativamente a* $\overline{\Omega}$.

Corolário 3: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo* — Ω *mínimo, de* $\mathbf{M}$, *e o ideal* $\mathfrak{n}$, *de* $\overline{\Omega}$, *não é nilpotente, para cada* $\mathrm{A} \in \mathfrak{n}$ *não nulo e tal que* $\mathrm{A}^2 \neq \mathrm{o}$, *o aniquilador modular é o mesmo que de* A^2 *e do idempotente* E. Viu-se, no teorema, que, para cada $A \in \mathfrak{n}$, nas condições do corolário, se tem $EA = A$. Então, $\mathbf{M}(1-E)A = \mathbf{M}(1-E)EA = (o)$, o que mostra ser $\mathbf{M}(1-E) \subseteq \mathbf{N}_1$, com $\mathbf{N}_1 A = (o)$. Da igualdade $\mathbf{M} = \mathbf{M}E + \mathbf{M}(1-E)$, tira-se $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{M}E + \mathbf{M}(1-E)$. Se fosse $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{M}E = \mathbf{M}E = \mathbf{N}$, viria $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}$, $A = o$, contra a hipótese. Logo é $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}(1-E)$. Como A se pode substituir por A^2, resulta o teorema completamente.

Observações: — Seja $C \in \mathfrak{n}$ um elemento qualquer não nulo. Tem-se $\mathbf{M}C = \mathbf{N} = \mathbf{M}E$, de sorte que $\mathbf{M}CE = \mathbf{M}E = \mathbf{M}C$. Vale, mesmo, $CE = C$, pois, pondo $mC = m'E$, vem $mCE = m'E = mC$, qualquer que seja $m \in \mathbf{M}$. Mas, se $C^2 = o$, já o produto EC é nulo, visto que $\mathbf{M}C^2 = \mathbf{M}CC = \mathbf{M}EC = (o)$. Finalmente, escrevendo $\mathbf{M} = \mathbf{M}E + \mathbf{M}(1-E)$, $\overline{\Omega} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$, $\overline{\Omega}E = (\mathfrak{n}E, \mathfrak{n}'E)$, o facto de ser $\mathfrak{n}'E = (o)$ mostra que $\overline{\Omega}E = \mathfrak{n}E = \mathfrak{n}$. Podemos enunciar o seguinte aditamento ao teorema 23:

Aditamento: — *O idempotente* E *do teorema 23 verifica a relação* $\mathrm{CE} = \mathrm{C}$, *para cada* $\mathrm{C} \in \mathfrak{n}$, *e a relação* $\mathrm{EC} = \mathrm{o}$, *se* $\mathrm{C}^2 = \mathrm{o}$. *Sendo* $\mathrm{C}^2 \neq \mathrm{o}$, *é* $\mathrm{EC} = \mathrm{C}$. *O ideal* $\mathfrak{n}$ *é da forma* $\mathfrak{n} = \overline{\Omega}\mathrm{E}$.

Teorema 23′: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo* — Ω *máximo e o seu ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$, *em* $\overline{\Omega}$, *não é nilpotente,* $\mathbf{N}$ *é precisamente o aniquilador modular dum idempotente* $\mathrm{E} \in \mathfrak{s}$. Suponhamos $A \in \mathfrak{s}$ tal que $A^2 \neq o$. Então, dado $m \notin \mathbf{N}$, não pode ter-se $mA \in \mathbf{N}$, visto que, de contrário, seria $mA^2 = o$ e A^2 aniquilaria $\mathbf{M}$, o que daria $A^2 = o$. Tem lugar a igualdade $\mathbf{M} = (\mathbf{M}A, \mathbf{N})$, que é, de resto, uma soma directa. De facto, se $x \in \mathbf{M}A$, $x \in \mathbf{N}$, pondo $x = mA = n$,

ter-se-á $xA = mA^2 = nA = o$. O elemento m pertencerá ao aniquilador modular de A^2, que é $\mathbf{N}$, pois $\mathbf{N}$ é aniquilador modular de todo o elemento $B \in \mathfrak{s}$ que não seja nulo. Por isso, $mA = o$, $x = o$. Escrevendo $\mathbf{M} = \mathbf{M}A + \mathbf{N}$, existem idempotentes ortogonais $E, E' \in \overline{\Omega}$ tais que $\mathbf{M}E = \mathbf{M}A$, $\mathbf{M}E' = \mathbf{N}$. Ao teorema responde-se precisamente com o idempotente $E = 1 - E'$.

Corolário 2′: — *É condição necessária e suficiente, para que um sub-módulo* — Ω *máximo* $\mathbf{N}$, *de* $\mathbf{M}$, *seja parcela duma soma directa igual a* $\mathbf{M}$, *que o seu ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$, *em* $\overline{\Omega}$, *não seja nilideal.*

Corolário 3′: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo* — Ω *máximo e o seu ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$ *não é nilpotente, para cada* $\mathrm{A} \in \mathfrak{s}$, *tal que* $\mathrm{A}^2 \neq \mathrm{o}$, *tem-se* $\mathbf{M}A \simeq \mathbf{M}A^2 = \mathbf{M}E$. Em primeiro lugar, da igualdade $\mathbf{M} = \mathbf{M}A^2 + \mathbf{N}$, tira-se $\mathbf{M}A = \mathbf{M}A^3$, e, portanto, $\mathbf{M}A = \mathbf{M}A^2$. Depois, do homomorfismo $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}A$, tira-se $\mathbf{M}A \simeq \mathbf{M}/\mathbf{N}_1$, onde $\mathbf{N}_1$ é o aniquilador de A. Tem-se $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}$, pelo que $\mathbf{M}A \simeq \mathbf{M}/\mathbf{N} \simeq \mathbf{M}A^2$.

Observações: — Do facto de se ter, no teorema, $\mathbf{M}E = \mathbf{M}A$, resulta imediatamente $AE = A$, quando $A^2 \neq o$, $A \in \mathfrak{s}$. Em todos os casos, se $o \neq C \in \mathfrak{s}$, o aniquilador modular de C é $\mathbf{N} = \mathbf{M}(1-E)$, pelo que, sendo $\mathbf{M}(1-E)C = (o)$, se conclui $C = EC$. Mas se $C^2 = o$, já o produto CE é nulo, pois $\mathbf{M}C^2 = \mathbf{M}CC = (o)$ dá $\mathbf{M}C \subseteq \mathbf{M}(1-E)$, $\mathbf{M}CE = (o)$. Finalmente, $\mathfrak{s}$ tem a forma $\mathfrak{s} = E\overline{\Omega}$, como é imediato. Podemos enunciar o seguinte aditamento ao teorema 23′:

Aditamento: — *O idempotente* E *do teorema 23′ verifica a relação* $\mathrm{C} = \mathrm{EC}$, *para cada* $\mathrm{C} \in \mathfrak{s}$, *e a relação* $\mathrm{CE} = \mathrm{o}$, *se* $\mathrm{C}^2 = \mathrm{o}$. *Sendo* $\mathrm{C}^2 \neq \mathrm{o}$, *é* $\mathrm{CE} = \mathrm{C}$. *O ideal* $\mathfrak{s}$ *é da forma* $\mathfrak{s} = \mathrm{E}\overline{\Omega}$.

Um sub-módulo $\mathbf{N}'$ diz-se *ínfimo*, se, para cada $\mathbf{N}'' \subset \mathbf{N}'$, o ideal de contracções $\mathfrak{n}''$ for nilideal. Um exemplo trivial é dado pelos sub-módulos regulares simples. Convém observar que, nesta definição, $\mathbf{N}'$ é sub-módulo — Ω e os sub-módulos $\mathbf{N}''$ em causa serão sub-módulos — Ω. Pode também observar-se que, qualquer que seja $A \in \mathfrak{n}'$ não nilpotente, é sempre $\mathbf{M}A = \mathbf{N}' = \mathbf{M}A^2 = \mathbf{N}'A$, pois $\mathbf{M}A \subset \mathbf{N}'$

ou $MA^2 \subset N'$ implicariam a nilpotência de A. Em seguida, considerando os aniquiladores modulares de A e de A^2, respectivamente N_1 e N_2, da circunstância de ser $M \sim MA = N' \simeq M/N_1$, $M \sim MA^2 = N' \simeq M/N_2$, conclui-se $M/N_1 \simeq M/N_2$.

Posto isto, distinguiremos, entre os sub-módulos ínfimos, aqueles que verificam a condição seguinte ou condição I): *há um $X \in \mathfrak{n}'$ tal que os aniquiladores modulares, N_1 e N_2, de X e X^2, são iguais.* Vale o

TEOREMA 24: — *Um sub-módulo ínfimo N', de M, verificando a condição* I), *é sempre imagem homomorfa de M definida por idempotente.* Suponhamos $A \in \mathfrak{n}'$ o endomorfismo não nilpotente da condição I). Em virtude de se ter, para cada $m \in M$, $mA = m'A^2$, com um certo $m' \in M$, vemos que $(m - m'A)A = o$, ou seja $m - m'A \in N_1$. A soma directa $M = N_1 + MA = N_1 + N'$, tem, assim, lugar. Daqui se conclui o teorema.

Distinguiremos ainda, entre os sub-módulos regulares ínfimos, aqueles que verificam a condição seguinte, ou condição II): *Há um endomorfismo X tal que $MX = N'$ e tal que $N' \simeq N'X = N'$.* O endomorfismo X determina em N' um automorfismo. Tratando-se de sub-módulos — Ω regulares simples, a condição II) tem sempre lugar.

O teorema 23 é susceptível da extensão seguinte:

TEOREMA 25: — *Um sub-módulo ínfimo N', de M, verificando a condição* II), *é sempre imagem homomorfa de M definida por idempotente.* Ponhamos $N' = MA$, onde A, não nilpotente, é o endomorfismo da condição II): $N' \simeq N'A = N'$. Como no referido teorema 23, supondo

$$m \to mA = n', \qquad n''A = n', \qquad (n', n'' \in N'),$$

a correspondência $m \to n''$ é um endomorfismo B, de M, verificando as relações $MB = N'$, $BA = A$, $(B^2 - B)A = o$. Se $B^2 - B = o$, B será o idempotente procurado. Tendo-se $B^2 - B = T \neq o$, T será nilpotente, pois que $MT \subset N'$, visto a igualdade $MT = N'$ acarretar $MTA = (o) = N'A = N'$. Um teorema conhecido afirma agora que, sendo $B \in \mathfrak{n}'$ não nilpotente e tendo se $B^2 - B = T$ nilpotente, existe um polinómio em B que é idempotente [(I), págs. 19]. Observe-se

que aqui, como no teorema anterior, N' é sub-módulo — Ω, como já se afirmou.

Um sub-módulo N', com ideal aniquilador não nilideal, diz-se *supremo*, se, para cada $N'' \supset N'$, o ideal aniquilador for nilideal. Convém observar que, nesta definição, N' é sub módulo — Ω e os sub-módulos N'' em causa serão sub-módulos — Ω. Pode também observar-se que, qualquer que seja $A \in \mathfrak{s}$ = aniquilador de N', A não nilpotente, o aniquilador modular de A ou de A^2 é precisamente N', visto que, definindo N'' pela relação $N''A = (o)$, a validade de $N'' \supset N'$ implicaria a nilpotência de A. Em seguida, considerando MA e MA^2, da circunstância de ser $M \sim MA \simeq M/N'$ $M \sim MA^2 \simeq M/N'$, conclui-se $MA \simeq MA^2$.

Posto isto, distinguiremos, entre os sub-módulos supremos, aqueles que verificam a condição seguinte ou condição I): *há um $X \in \mathfrak{s}$ tal que* $MX \simeq MX^2 = MX$. Vale o

TEOREMA 24': — *Um sub-módulo supremo N', de M, verificando a condição* I'), *é sempre aniquilador modular dum idempotente.* Suponhamos $A \in \mathfrak{s}$ o endomorfismo não nilpotente da condição I'). Em virtude de se ter, para cada $m \in M$, $mA = m'A^2$, com um certo $m' \in M$, vemos que $(m - m'A)A = o$, ou seja $m - mA \in N'$. A soma directa $M = MA + N'$, tem, assim, lugar. Daqui se conclui o teorema.

Distinguiremos ainda, entre os sub-módulos regulares supremos aqueles que verificam a condição seguinte ou condição II'): *há um endomorfismo $X \in \mathfrak{s}$ que determina um automorfismo em $\overline{M} = M/N'$ tal que $\overline{M} \simeq \overline{M}X = \overline{M}$.* Tratando-se de sub-módulos máximos com ideal aniquilador não nilideal, a condição II') tem sempre lugar. De facto, se, então, X for tal que $X^2 \neq o$, o grupo diferença $\overline{M} = M/N'$ será simples e $\overline{M}X = \overline{M}$, visto que $(m + N')X = o$ implica $mX \in N'$, $mX^2 = o$, e $m \in N'$. Também $\overline{M}X^2 = (\overline{M}X)X = \overline{M} \simeq \overline{M}X$. O teorema 23' é suceptível da extensão seguinte:

TEOREMA 25': — *Um sub-módulo N', de M, verificando a condição* II') *é sempre aniquilador modular dum idempotente.* Suponhamos $A \in \mathfrak{s}$, com A não nilpotente, o endomorfismo da condição II'). Então, dado $m \notin \mathrm{N}'$, não pode ter-se $mA \in \mathrm{N}'$, visto que, de contrário, seria $mA^2 = o$, $m \in \mathrm{N}'$. A soma $(\mathrm{M}A, \mathrm{N}') = \mathrm{M}A + \mathrm{N}'$ é directa. No homomorfismo $\mathrm{M} \sim \mathrm{M}/\mathrm{N}' = \overline{\mathrm{M}}$, o correspondente de $\mathrm{M}A + \mathrm{N}'$ é $(\mathrm{M}A + \mathrm{N}')/\mathrm{N}'$ ou seja o conjunto de elementos da forma $(m + \mathrm{N}')A = \overline{m}A$. Esse conjunto representa $\overline{\mathrm{M}}A = \overline{\mathrm{M}}$, de sorte que $\mathrm{M}A + \mathrm{N}' = \mathrm{M}$. Daqui se tira o teorema.

Vimos já que, supondo E primitivo, $\mathrm{M}E$ é indecomponível. Inversamente, se um sub-módulo — $\Omega = \mathrm{N}' = \mathrm{M}E$, com E idempotente, é indecomponível, E é primitivo, como se vê pela definição de projecção primitiva. Quando N' é um sub-módulo ínfimo, se admitirmos a igualdade $\mathrm{N}' = \mathrm{M}E$, E é igualmente primitivo. De facto, se fosse $E = E' + E''$ uma decomposição de E em idempotentes ortogonais, de $\mathrm{N}' = \mathrm{M}E = \mathrm{M}E' + \mathrm{M}E''$, concluiríamos ser $\mathrm{M}E''$ uma imagem homomorfa de M contida em N' e diferente deste sub-módulo, contra a hipótese de N' ser ínfimo. Assim:

TEOREMA 26: — *É primitivo o idempotente* E *da igualdade* $\mathrm{N}' = \mathrm{M}\,\mathrm{E}$, *se* N' *é sub-módulo ínfimo.*

Quando $\mathrm{N} \neq (o)$ é um sub-módulo supremo, os teoremas 24' e 25' ensinam que existe E, tendo precisamente N como aniquilador modular. O idempotente E é primitivo, pelo seguinte. Se pudesse ter-se $E = E' + E''$, com E' e E'' ortogonais, seria, para cada $n \in \mathrm{N}$, $nE' = nEE' = o$, $nE'' = nEE'' = o$, de sorte que os aniquiladores modulares N' e N'', de E' e E'', verificariam as relações $\mathrm{N}' \supseteq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}'' \supseteq \mathrm{N}$. Ora, não pode ter-se $\mathrm{N}' = \mathrm{N}''$, visto que, supondo $m \notin \mathrm{N}'$, é $mE' \neq o$, $mE'E' = mE' \neq o$, $mE'E'' = o$, e conclui-se ser $mE' \notin \mathrm{N}'$, $mE' \in \mathrm{N}''$. Nestas condições, por ex., será $\mathrm{N}' \supset \mathrm{N}$, contra a hipótese de supremo feita sobre N. Assim:

TEOREMA 26': — *É primitivo o idempotente* E *que tem como aniquilador modular um sub-módulo supremo.*

TEOREMA 27: — *Num módulo* M, *para o qual todo o sub-módulo regular possui imagem homomorfa de* M *definida por idempotente, a soma directa dum número finito de nilmódulos é um nilmódulo.* Conforme o teorema C, a referida soma não pode, aqui, levar a um sub-módulo regular.

M pode designar-se *módulo regular*, se, para cada endomorfismo A, existir S tal que $ASA = A$. Os teoremas 21 e 20 permitem dar os dois enunciados a seguir:

TEOREMA 28: — *Num módulo regular, toda a imagem endomorfa é definida por um idempotente.* Pode dizer-se, pois, que todo o sub-módulo que possua imagem endomorfa do módulo é sub-módulo regular.

TEOREMA 29: — *Se* E *é primitivo e* M *é regular,* $\mathrm{M}\,\mathrm{E}$ *não possui sub-módulo próprio que seja homomorfo de* M.

Também os teoremas 21' e 20' levam às duas proposições seguintes:

TEOREMA 28': — *Num módulo regular, todo o aniquilador modular dum elemento é aniquilador modular dum idempotente.*

TEOREMA 29': — *Se* E *é primitivo e* M *é regular, não existe aniquilador modular* N' *dum elemento* A, *que contenha pròpriamente o aniquilador modular* N, *de* E.

Substituindo a noção de ideal principal pela de sub-módulo endomorfo, estabelece-se o seguinte teorema, correspondente a outro relativo a anéis regulares [(I), págs. 33].

TEOREMA 30: — *Se* $\mathrm{M}\,\mathrm{E}$ *e* $\mathrm{M}\,\mathrm{E}'$ *são duas imagens endomorfas dum módulo regular* M, *existe idempotente* F *verificando as relações* $\mathrm{F}\mathrm{E} = \mathrm{F}\mathrm{E} = o$, $(\mathrm{M}\mathrm{E}, \mathrm{M}\mathrm{E}') = \mathrm{M}\mathrm{E} + \mathrm{M}\mathrm{F}$. Quando $\mathrm{M}E' \subseteq \mathrm{M}E$, basta tomar $F = o$. Não sendo assim, vamos ver que se tem $(\mathrm{M}E, \mathrm{M}E') = \mathrm{M}E + \mathrm{M}E'(1 - E)$. Um elemento do 2.º membro é da forma $mE + m'E'(1 - E) = (m - m'E')E + m'E'$, o que mostra pertencer ao primeiro. Inversamente, um elemento do 1.º membro é da forma $mE + m'E' = mE + m'E' - m'E'E + m'E'E = (m + m'E')E + m'E'(1 - E)$, pelo que pertence ao segundo. O referido 2.º membro é uma soma directa. Finalmente, como a segunda parcela não é nula, designemos por E_1 um idempotente tal que $\mathrm{M}E'(1 - E) = \mathrm{M}E_1$. Vê-se que $E_1E = o$. Pondo, então, $F = E_1 - EE_1$, vem imediatamente $FE = EF = o$, $FF = F$, $E_1F = E_1$, $FE_1 = F$,

$\mathrm{M}E_1=\mathrm{M}E_1F\subseteq\mathrm{M}F$, $\mathrm{M}F=\mathrm{M}FE_1\subseteq\mathrm{M}E_1$, e, portanto, $\mathrm{M}E_1=\mathrm{M}F$.

OBSERVAÇÃO: — No teorema anterior, a demonstração apenas exige que $\mathrm{M}E'(1-E)$ possa tomar a forma $\mathrm{M}E_1$.

COROLÁRIO 4: — *Num módulo regular tem-se* $(\mathrm{M}\mathrm{E}, \mathrm{M}\mathrm{E}')=\mathrm{M}\mathrm{E}''$. Basta somar $E''=E+F$, pois que $E+F$ é idempotente.

COROLÁRIO 5: — *Num módulo regular, se* N *e* N' *são os aniquiladores modulares de dois idempotentes,* E *e* E', *respectivamente, a soma* $(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ *é aniquilador modular dum idempotente.*

TEOREMA 30': — *Dado um módulo regular, se* N *e* N' *são os aniquiladores modulares de dois idempotentes* E *e* E', *existe idempotente* E *verificando as relações* $\mathrm{F}\mathrm{E}=\mathrm{E}\mathrm{F}=\mathrm{o}$ *e tal que* $\mathrm{N}\cap\mathrm{N}'=\mathrm{N}\cap\mathrm{N}''$, *onde* N'' *é o aniquilador modular de* F. Quando $\mathrm{N}'\supseteq\mathrm{N}$, é $\mathrm{N}\cap\mathrm{N}'=\mathrm{N}=\mathrm{N}\cap\mathrm{M}$, bastando tomar $F=o$. Não sendo assim, comecemos por observar que $\mathrm{N}\cap\mathrm{N}'=\mathrm{M}(1-E)\cap\mathrm{M}(1-E')=\mathrm{M}(1-E)\cap\mathrm{N}''$, onde N'' é o aniquilador modular de $(1-E)E'$. De facto, se $x=m(1-E)=m'(1-E')$, onde $m, m'\in\mathrm{M}$, tem-se $x(1-E)=x$, $x(1-E)E'=xE'=o$. Inversamente, se $x=m(1-E)$ e $x(1-E)E'=o$, obtendo-se $x(1-E)=x$; $xE'=o$, $x=m'(1-E')$. Nessas condições, designemos por E_1 o idempotente cujo aniquilador modular é $\mathrm{N}''=\mathrm{M}(1-E_1)$. Vê-se que $\mathrm{M}E(1-E)E'=(o)$, de sorte que $\mathrm{M}E\subseteq\mathrm{N}''$. Sendo $\mathrm{M}EE_1\subseteq\mathrm{N}''E_1=(o)$, conclui-se $EE_1=o$. Pondo, então, $F=E_1-E_1E$, vem imediatamente $FE=o$, $EF=o$, $E_1F=F$, $FE_1=E_1$, de sorte que N'' é igualmente aniquilador modular de F. O teorema está demonstrado.

OBSERVAÇÃO: — No teorema anterior, a demonstração apenas exige que o aniquilador modular de $(1-E)E'$ seja aniquilador modular dum idempotente.

COROLÁRIO 4': — *Num módulo regular, a intersecção* $\mathrm{N}\cap\mathrm{N}'$ *dos aniquiladores modulares de dois idempotentes* E *e* E' *é o aniquilador modular dum idempotente.*

COROLÁRIO 5': — *Dado um módulo regular, os sub-módulos* $\mathrm{M}\mathrm{E}$ *e* $\mathrm{M}\mathrm{E}'$, *definidos por dois idempotentes* E *e* E', *são tais que* $\mathrm{M}\mathrm{E}\cap\mathrm{M}\mathrm{E}'$ *é o aniquilador modular dum idempotente.*

7) **Os módulos com condição de cadeia descendente** — Este § destina-se, naturalmente, a precisar alguns resultados específicos, na hipótese de o módulo — Ω, em causa, satisfazer à condição descendente para os sub-módulos — Ω.

Qualquer que seja o endomorfismo — Ω, A por ex., é finita a cadeia $\mathrm{M}\supseteq\mathrm{M}A\supseteq\mathrm{M}A^2\supseteq\ldots$. Suponhamos $\mathrm{M}A^k=\mathrm{M}A^{k+1}$. Pode dar-se o caso de ser $k=o$, e, portanto, $\mathrm{M}=\mathrm{M}A$. Designemos por $\mathfrak{N}_A$ o aniquilador modular de A. Se for $\mathfrak{N}_A=(o)$, a correspondência $\mathrm{M}\sim\mathrm{M}A$ é um *meromorfismo*, ou seja uma aplicação isomorfa de M sobre uma parte de M. Extraímos de [(II), pág. 9] os dois teoremas que vão seguir-se.

TEOREMA 31: — *Num módulo* M *com condição de mínimo, todo o endomorfismo* A *tal que* $\mathfrak{N}_{\mathrm{A}}=(\mathrm{o})$ *arrasta a igualdade* $\mathrm{M}=\mathrm{M}\mathrm{A}$ *(é um automorfismo).* Imaginemos ter lugar a relação $\mathrm{M}\supset\mathrm{M}A$. Então, na correspondência meromorfa $\mathrm{M}\rightarrow\mathrm{M}A$, o correspondente de $\mathrm{M}A$ será $\mathrm{M}A^2\subset\mathrm{M}A$, o de $\mathrm{M}A^2$ será $\mathrm{M}A^3\subset\mathrm{M}A^2$, etc. Resultará daqui que a sucessão $\mathrm{M}\supset\mathrm{M}A\supset\mathrm{M}A^2\supset\ldots$ é infinita, o que não pode ter lugar. Será $\mathrm{M}=\mathrm{M}A$.

TEOREMA 32: — *Num módulo* M *com condição de mínimo, para todo o endomorfismo* A *existe um inteiro* r *satisfazendo à relação* $\mathrm{M}=(\mathrm{M}A^r, \mathfrak{N}_{A^r})$. Seja r um inteiro para o qual $\mathrm{M}A^r=\mathrm{M}A^{r+1}=\ldots=\mathrm{M}A^{2r}=\ldots$. Dado $m\in\mathrm{M}$, existe $n\in\mathrm{M}$ tal que $mA^r=nA^{2r}$. Tira-se daqui $(m-nA^r)A^r=o$, o que dá $m-nA^r\in\mathfrak{N}_{A^r}$. Portanto, qualquer que seja $m\in\mathrm{M}$, pode dar-se-lhe a forma $m=nA^r+(m-nA^r)=nA^r+q'$, com $q'\in\mathfrak{N}_{A^r}$, como se afirmou.

COROLÁRIO 6: — *Se* N *é um sub-módulo* (1) *de* M *com ideal aniquilador é nilpotente e se vale em* M *a condição de*

(1) Aqui o sub-módulo $\mathfrak{N}$ pode não ser sub-módulo — Ω. De futuro, porém, tanto neste § como nos dois seguintes, estarão em causa sub-módulos — Ω.

mínimo, o expoente dum elemento $A \in \mathfrak{Z}$ *é, quando muito, igual ao inteiro* r *que lhe corresponde.* Se pudesse ser $\mathfrak{Q}_{A^r} \neq \mathbf{M}$, o facto de se ter $\mathbf{M} = (\mathbf{M}A^r, \mathfrak{Q}_{A^r})$ daria $m = m' A^r + q$, com $q \in \mathfrak{Q}_{A^r}$, sendo $m \in \mathbf{M}$ um elemento não anulado por A^r. Concluía-se $m A^r = m' A^{2r} \neq o$, de modo que $m' \notin \mathfrak{Q}_{A^{2r}}$. Em seguida, $m' = m'' A^r + q'$ levaria a $m' A^{2r} = m'' A^{3r}$, etc., pelo que haveria elementos de $\mathbf{M}$ que não seriam anulados por uma potência de A, por maior que fosse o expoente, o que é absurdo.

TEOREMA 33: — *Um módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de mínimo é soma directa dum número finito de sub-módulos* — Ω *indecomponíveis.* Se $\mathbf{M}$ é indecomponível, o teorema considera-se provado. Se é decomponível, ponhamos $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$. No caso de $\mathbf{N}_1$ não ser indecomponível, escrevendo $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1' + \mathbf{N}_1''$, vem $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1' + \mathbf{N}_1'' + \mathbf{N}_2$. Tratando agora $\mathbf{N}_1'$, vai-se formando a cadeia $\mathbf{M} \supset \mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_1' \supset \ldots$ que é necessàriamente finita. Chega-se, por isso, a encontrar uma parcela $\mathfrak{P}_1$, de $\mathbf{M}$, que é indecomponível. Escrevendo $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{L}$, considera-se, depois, o sub-módulo $\mathfrak{L}$. Chega-se a $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{L}_1$, onde $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ são indecomponíveis. O processo continua sobre $\mathfrak{L}_1$. Ele termina necessàriamente, pelo facto de ser $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \ldots$ uma cadeia finita.

COROLÁRIO B: — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de mínimo, o endomorfismo um é soma dum número finito de idempotentes primitivos.*

TEOREMA 34: — *Um módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de mínimo, que seja gerado pelos seus sub-grupos mínimos, é completamente redutível.* Seja $\mathbf{N}_1$ um sub-módulo mínimo $\neq (o)$. Procuremos a soma $\mathbf{M}_1$ de todos os sub-módulos mínimos isomorfos de $\mathbf{N}_1$, sub-módulos que designaremos por $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1', \ldots$. Se $m_1 \in \mathbf{M}_1$, m_1 pertence a uma soma Δ_1 dum número finito de tais sub-módulos. Suponhamos possível extrair do conjunto dos sub-módulos em referência uma infinidade numerável cuja soma seja directa. Escrevendo

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1' + \mathbf{N}_1'' + \ldots \supset \mathbf{N}_1' + \mathbf{N}_1'' + \ldots \supset \mathbf{N}_1'' + \ldots \supset \ldots,$$

vê-se que se contradiz a condição de mínimo. Isto significa

que $\mathbf{M}_1$ é uma soma dum número finito de sub-módulos isomorfos de $\mathbf{N}_1$ da forma

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}_1^{(1)} \ldots + \mathbf{N}_1^{(r_1)}.$$

Posto isto, consideremos os sub-módulos mínimos não isomorfos $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, etc. Escolhamos, de entre eles, se for possível, uma infinidade numerável $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$ A soma destes é directa, visto que $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ é uma soma directa e a prova por indução é imediata. Conclui-se daqui haver um número finito de classes de sub-módulos isomorfos. A essas diferentes classes correspondem somas $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_q$. Então é, necessàriamente,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{M}_i, \qquad \mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^{r_i} \mathbf{N}_i^{(j)},$$

onde as somas são directas e os $\mathbf{N}_i^{(j)}$ são simples. O teorema está demonstrado.

TEOREMA 35: — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de mínimo, dado um sub-módulo* $\mathbf{N}$, *é geralmente (como sucede, de resto, num módulo qualquer)* $\mathbf{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathbf{N}$. *Existe, porém, um inteiro mínimo* k, *para o qual* $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k, = \mathbf{N}\mathfrak{n}^{k-1} = \mathbf{N}\mathfrak{n}^k = \ldots$

Suponhamos, com efeito, $\mathbf{N} \supset \mathbf{N}\mathfrak{n} \supset \ldots \supset \mathbf{N}\mathfrak{n}^{k-1} = \mathbf{N}\mathfrak{n}^k = \ldots$. Como se tem também $\mathbf{N}\mathfrak{n}^k \subseteq \mathbf{M}\mathfrak{n}^k \subseteq \mathbf{N}\mathfrak{n}^{k-1}$, vê-se que $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{N}\mathfrak{n}^{k-1}$. Em seguida, podem tirar-se ainda outras conclusões. Em primeiro lugar, é $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{M}\mathfrak{n}^{k+1} = \ldots$. Se pusermos $\mathbf{M}' = \mathbf{M}\mathfrak{n}^k$, é também $\mathbf{M}\mathfrak{m}' = \mathbf{M}'$. E, como $\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathfrak{n}^{2k}$, é $\mathbf{M}\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathbf{M}\mathfrak{n}^{2k} = \mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{M}'$, de sorte que $\mathbf{M}' = \mathbf{M}\mathfrak{m}' = \mathbf{M}\mathfrak{m}'^2 = \ldots$, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'\mathfrak{m}' = \mathbf{M}'\mathfrak{m}'^2 = \ldots$. Vale, assim, este

ADITAMENTO: — *Nas condições do teorema, se for* $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{M}'$, *é também* $\mathbf{M}\mathfrak{m}' = \mathbf{M}'$, *e, qualquer que seja o inteiro* $\rho > o$, *tem-se* $\mathbf{M}\mathfrak{m}'^\rho = \mathbf{M}' = \mathbf{M}'\mathfrak{m}'^\rho$.

TEOREMA 36: — *Nas condições do teorema anterior, continuando a pôr* $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{M}'$ *e admitindo* $\mathbf{M}' \supset (o)$, *existe um endomorfismo* R *tal que são válidas as relações* $(o) \subset \mathbf{M}\mathrm{R} = \mathbf{M}'\mathrm{R} \subseteq \mathbf{M}'$. *O sub-módulo* $\mathbf{M}\mathrm{R} = \mathbf{N}'$ *é mínimo entre os sub-módulos contidos em* $\mathbf{M}'$ *aos quais correspondem ideais de* *contracção* $\mathfrak{q}$ *por forma que* $\mathfrak{n}^k \mathfrak{q} \supset (o)$. Consideremos, na verdade, entre os sub-módulos contidos em $\mathbf{M}'$ o sub-módulo mínimo $\mathbf{N}'$, nas condições seguintes: $\mathbf{N}' \subseteqq \mathbf{M}'$, $\mathfrak{n}^k \mathfrak{n}' \supset (o)$. $\mathbf{N}'$ existe, pois a $\mathbf{M}'$ corresponde $\mathfrak{m}' \supseteqq \mathfrak{n}^k$ e é $\mathfrak{n}^k \mathfrak{m}' \supseteqq \mathfrak{n}^{2k} \supset \supset (o)$, em virtude de se ter $\mathbf{M}\mathfrak{n}^k = \mathbf{M}\mathfrak{n}^{2k}$. Então, seja $R \in \mathfrak{n}'$, de modo que $\mathfrak{n}^k R \supset (o)$. Vê-se que $\mathfrak{T} = \mathbf{M}\mathfrak{n}^k R \subseteqq \subseteqq \mathbf{N}' \subseteqq \mathbf{M}'$, $\mathfrak{t} \supseteqq \mathfrak{n}^k R \supset (o)$, $\mathfrak{n}^k \mathfrak{t} \supseteqq \mathfrak{n}^{2k} R \supset (o)$. Valerá necessàriamente a igualdade $\mathfrak{T} = \mathbf{N}'$, e, portanto, será $\mathbf{N}' = = \mathbf{M}\mathfrak{n}^k R = \mathbf{M}' R$. Como se tem, por outro lado, $\mathbf{M} R \subseteqq \subseteqq \mathbf{N}'$, chega-se à igualdade $\mathbf{M} R = \mathbf{M}' R$, que acaba de estabelecer o teorema.

COROLÁRIO 7: — *Se o sub-módulo* $\mathbf{N}$ *do teorema 35 for nilmódulo, tem-se* $\mathbf{N} \supset \mathbf{N}'$, *onde* $\mathbf{N}'$ *é o sub-módulo mínimo do teorema 36.* Na verdade, a relação $\mathbf{N} = \mathbf{N}'$ levaria a $\mathbf{N}' = \mathbf{M}'$ ou $\mathbf{M}' R = \mathbf{M}'$. O endomorfismo $R \in \mathfrak{n}$ seria potente, o que não pode ter lugar.

O nilmódulo $\mathbf{N}'$, tratado como $\mathbf{N}$, ou levaria a $\mathbf{M}\mathfrak{n}'^r = \mathbf{M}'' = (o)$, ou - permitiria continuar a cadeia $\mathbf{N} \supset \mathbf{N}'$, de modo a formar $\mathbf{N} \supset \mathbf{N}' \supset \mathbf{N}''$. A condição de mínimo leva-nos a estabelecer a existência de sub-nilmódulo nilpotente contido em $\mathbf{N}$. Este facto resulta imedìatamente da referida condição de mínimo e da circunstância de $\mathbf{N}$ ser nilmódulo. Aqui deixa-se, porém, a possibilidade de o sub-módulo nilpotente não ser mínimo. Fixemos o

TEOREMA 37: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição de cadeia descendente e* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo* $-\Omega$ *com um ideal de contracções nilideal, existe um sub-módulo* $\dot{-}\,\Omega = \mathfrak{Q} \subseteqq \mathbf{N}$ *cujo ideal de contracções é nilpotente.*

TEOREMA 38: — *Se* $\mathfrak{L}$ *é um sub-módulo não nilpotente dum módulo com condição de cadeia descendente, o sub-módulo mínimo não nilpotente* $\mathfrak{L}_1 \subseteqq \mathfrak{L}$ *é tal que existe um endomorfismo* S *satisfazendo às condições seguintes:* 1) $\mathfrak{L}_1 \mathrm{S} = \mathbf{M}\mathrm{S}$; 2) *o sub-módulo* $\mathbf{M}\mathrm{S} = \mathbf{N}_1$ *é mínimo entre os sub-módulos* $\mathbf{N}$, *contidos em* $\mathfrak{L}_1$, *aos quais correspondem ideais* $\mathfrak{n}$ *por forma que* $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (o)$. Partamos de $\mathfrak{L}$ e tomemos $\mathfrak{L}_1$. É claro que se tem $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1 \subseteqq \mathbf{M}\mathfrak{l}_1 \subseteqq \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{M}\mathfrak{l}_1^2 \subseteqq \mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1'$. O ideal $\mathfrak{l}_1'$ contém $\mathfrak{l}_1^2$, e, assim, $\mathfrak{l}_1'$ não é nilpotente. Isso acarreta as igualdades $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1 = \mathbf{M}\mathfrak{l}_1$. Posto isto, consideremos o conjunto dos sub-módulos $\mathbf{N}$ nas condições seguintes: $\mathbf{N} \subseteqq$

$\subseteqq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (o)$. Nesse conjunto não vazio, representemos por $\mathbf{N}_1$ o sub-módulo mínimo: $\mathbf{N}_1 \subseteqq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1 \supset (o)$. Se for $S \in \mathfrak{n}_1$ um endomorfismo tal que $\mathfrak{l}_1 S \supset (o)$, tem-se $(o) \subset \subset \mathbf{M}\mathfrak{l}_1 S = \mathfrak{L}_1 S \subseteqq \mathfrak{L}_1$, $(\mathfrak{L}_1 S = \mathfrak{L}_1'')$, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_1'' \supseteqq \mathfrak{l}_1^2 S \supset (o)$, visto que $\mathbf{M}\mathfrak{l}_1 S = \mathbf{M}\mathfrak{l}_1^2 S \supset (o)$. Conclui-se a igualdade $\mathfrak{L}_1 S = = \mathbf{N}_1$. E, como $\mathfrak{L}_1 S \supseteqq \mathbf{M} S \subseteqq \mathbf{N}_1$, vem também, como afirma o teorema, $\mathfrak{L}_1 S = \mathbf{M} S \supset (o)$.

OBSERVAÇÃO: — O facto de se ter $\mathfrak{L}_1 = \mathbf{M}\mathfrak{l}_1$ permite identificar os sub-módulos $\mathbf{N} \subseteqq \mathfrak{L}_1$ tais que $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{n} \supset (o)$ com os sub-módulos $\mathbf{N} \subseteqq \mathfrak{L}_1$ tais que $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{n} \supset (o)$.

8) **Os módulos com condição de cadeia ascendente** — Se for válida em $\mathbf{M}$ a condição de cadeia ascendente, ou condição de máximo, qualquer que seja o endomorfismo $-\Omega$, A por ex., é finita a cadeia $(o) \subseteqq \mathfrak{Q}_A \subseteqq \mathfrak{Q}_{A^2} \subseteqq \ldots$. Suponhamos $\mathfrak{Q}_{A^k} = \mathfrak{Q}_{A^{k+1}}$. Pode dar-se o caso de ser $k = o$, e, portanto, $(o) = \mathfrak{Q}_A$. Consideremos $\mathbf{M} A$. Se for $\mathbf{M} A = \mathbf{M}$, a correspondência $\mathbf{M} \sim \mathbf{M} A$ é um homomorfismo. Extraímos de [(II), págs. 8 e 9] os dois teoremas que vão seguir-se.

TEOREMA 31': — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, todo o endomorfismo* A *tal que* $\mathbf{M}\mathrm{A} = \mathbf{M}$ *arrasta a igualdade* $(o) = \mathfrak{Q}_A$ *(é um automorfismo).*

Imaginemos ter lugar a relação $(o) \subset \mathfrak{Q}_A$. Vamos ver que a sucessão $(o) \subset \mathfrak{Q}_A \subset \mathfrak{Q}_{A^2} \subset \ldots$ é infinita. Comecemos por provar que $\mathfrak{Q}_A \supset (o)$ arrasta $\mathfrak{Q}_{A^2} \supset \mathfrak{Q}_A$. Suponhamos $\mathfrak{Q}_{A^2} = \mathfrak{Q}_A$. Então, seja $x \neq o$ tal que $x A = o$. Escrevendo $x = y A$, $(y \in \mathbf{M})$, obtém-se $x A = y A^2 = o$. Conclui-se $y \in \mathfrak{Q}_{A^2}$, e, portanto, $y \in \mathfrak{Q}_A$, ou seja $y A = x = o$, contra a hipótese. Dum modo geral, admitindo ser $\mathfrak{Q}_{A^k} \supset \mathfrak{Q}_{A^{k-1}}$, vamos provar $\mathfrak{Q}_{A^{k+1}} \supset \mathfrak{Q}_{A^k}$. Se a igualdade destes últimos módulos tivesse lugar, supondo $x \notin \mathfrak{Q}_{A^{k-1}}$, mas $x A^k = o$, pondo $x = y A$, viria $x^{A^k} = y A^{k+1} = o$, ou seja $y \in \mathfrak{Q}_{A^{k+1}}$, e, portanto, $y \in \mathfrak{Q}_{A^k}$. Ter-se-ia $o = y A^k = = x A^{k-1}$, donde se concluiria $x \in \mathfrak{Q}_{A^{k-1}}$, contra a hipótese. A sucessão acima referida é, pois, infinita, o que não pode ter lugar. Será $(o) = \mathfrak{Q}_A$.

Teorema 32′: — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, para todo o endomorfismo* A *existe um inteiro* s *satisfazendo à relação* $\mathfrak{A}_{\mathrm{A}^s} \cap \mathbf{M}\,\mathrm{A}^s = (\mathrm{o})$. Ponhamos $\mathfrak{A}_{A^s} = \mathfrak{A}_{A^{s+1}}$. O sinal $=$ tem então sempre lugar a partir de $\mathfrak{A}_{A^s}$. Se x pertence à intersecção referida no teorema, ter-se-á $x A^s = o$, $x = y A^s$, $(y \in \mathbf{M})$. Daqui tira-se $x A^s = y A^{2s} = o$, $y \in \mathfrak{A}_{A^{2s}} = \mathfrak{A}_{A^s}$. Será $y A^s = x = o$. O teorema está provado.

Corolário 6′: — *Se* $\mathbf{N}$ *é um nilmódulo* (1) *dum módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, o expoente dum elemento* $\mathrm{A} \in \mathfrak{n}$ *é, quando muito, igual ao inteiro* s *que lhe corresponde.* Se pudesse ser $\mathbf{M} A^s \neq (o)$, o facto de ser $= (o)$ o conjunto dos elementos de $\mathbf{M} A^s$ que são anulados por A levaria à sucessão infinita de meromorfismos $\mathbf{M} A^s \simeq \mathbf{M} A^{s+1} \simeq \mathbf{M} A^{s+2} \simeq \ldots$, contra a hipótese de A ser nilpotente.

Teorema 33′: — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, o sub-módulo* (o) *é intersecção dum número finito de sub-módulos* — Ω *diferentes entre si e diferentes de* $\mathbf{M}$*, cada um dos quais não é intersecção de dois sub-módulos* — Ω *diferentes e diferentes de* $\mathbf{M}$. Em primeiro lugar, suponhamos que (o) não é intersecção de dois sub-módulos — Ω diferentes entre si e diferentes de $\mathbf{M}$, então $(o) = (o)$ prova o teorema. Em seguida, suponhamos $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$. Se $\mathbf{N}_1 \supset (o)$ toma a forma $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1' \cap \mathbf{N}_1''$, concluímos $(o) = \mathbf{N}_1' \cap \mathbf{N}_1'' \cap \mathbf{N}_2$. Agora consideramos $\mathbf{N}_1' \supset \mathbf{N}_1$. Visto que a cadeia $(o) \subset \mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}_1' \subset \ldots$ é finita, chegaremos a encontrar $\mathbf{N} = \mathfrak{P}_1$ que não é intersecção de dois sub-módulos — Ω diferentes entre si e diferentes de $\mathbf{M}$. Escrevendo $(o) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{L}$, consideramos depois o sub-módulo $\mathfrak{L}$. Chega-se a $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{L}_1$, $(o) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{L}_1$, onde $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ satisfazem ao teorema, O processo continua sobre $\mathfrak{L}_1$. Ele termina, porque $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \subset \ldots$ é uma cadeia finita.-

Teorema 34′: — *Se, num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, é* $(\mathrm{o}) = \Pi \mathbf{N}_\alpha'$*, onde os* $\mathbf{N}_\alpha'$ *são sub-módulos máximos, então é ainda* $(\mathrm{o}) = \Pi \mathbf{N}_\alpha$*, onde os* $\mathbf{N}_\alpha$ *são máximos e*

(1) Veja-se a nota feita ao corolário 6.

formam uma cadeia finita. Excluamos em $\Pi \mathbf{N}_\alpha'$ aqueles sub-módulos — Ω $\mathbf{N}_\beta'$ que não têm influência na intersecção. Obtém-se assim $\Pi \mathbf{N}_\alpha = (o)$. Suponhamos que os $\mathbf{N}_\alpha$ constituem ainda um conjunto infinito. Será $(o) = \Pi \mathbf{N}_\alpha \subset \prod_{\alpha \neq \beta_1} \mathbf{N}_\alpha$, se se suprime $\mathbf{N}_{\beta_1}$. Depois, virá também $\prod_{\alpha \neq \beta_1} \mathbf{N}_\alpha \subset \prod_{\alpha \neq \beta_1, \beta_2} \mathbf{N}_\alpha$, porque a validade do sinal $=$ entre as duas últimas intersecções arrastaria as relações $(o) = \mathbf{N}_{\beta_1} . \prod_{\alpha \neq \beta_1} \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_{\beta_1} . \prod_{\alpha \neq \beta_1, \beta_2} \mathbf{N}_\alpha$, o que representaria uma contradição com a hipótese admitida sobre os $\mathbf{N}_\alpha$. Deste modo, o processo é ilimitado, contra a condição de máximo. Os $\mathbf{N}_\alpha$, por consequência, serão em número finito.

Teorema 35′: — *Num módulo* $\mathbf{M}$ *com condição de máximo, dado um sub-módulo* $\mathbf{N}$*, de ideal aniquilador* $\mathfrak{z}$*, o aniquilador modular* $\mathbf{N}_1$*, de* $\mathfrak{z}$*, verifica a condição* $\mathbf{N}_1 \supseteq \mathbf{N}$ *(o que, de resto, sucede num módulo qualquer). Existe, porém, um inteiro* k *tal que os aniquiladores modulares* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}-1}$, $\mathbf{N}_{\mathrm{k}}$, *de* $\mathfrak{z}^{\mathrm{k}-1}$ *e* $\mathfrak{z}^{\mathrm{k}}$, *são iguais.* A demonstração é imediata. Podemos, em seguida, tirar outras conclusões. Se $\mathfrak{z}'$ for o ideal aniquilador de $\mathbf{N}_{k-1} = \mathbf{N}_k = \mathbf{N}_{k+1} = \ldots$, então $\mathbf{N}_{k-1} = \mathbf{N}'$ e $\mathfrak{z}'$, além de aniquiladores recíprocos, são tais que o aniquilador modular de $\mathfrak{z}'^m$, qualquer que seja o inteiro m, é ainda $\mathbf{N}_{k-1}$. Vale, assim, este

Aditamento: — *Nas condições do teorema, se* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}-1}$ *e* $\mathfrak{z}'$ *forem aniquiladores recíprocos,* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}-1}$ *é ainda o aniquilador modular de* $\mathfrak{z}'^{\mathrm{m}}$*, qualquer que seja o inteiro* m.

Teorema 36′: — *Nas condições do teorema anterior, continuando a pôr* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}} = \mathbf{N}'$ *e admitindo* $\mathbf{N}' \subset \mathbf{M}$*, existe um endomorfismo* R *cujo aniquilador modular* $\mathbf{N}''$ *verifica as relações* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}} \subseteq \mathbf{N}'' \subset \mathbf{M}$ *e é igual ao aniquilador modular de* $\mathrm{R}\,\mathfrak{z}^{\mathrm{k}}$. $\mathbf{N}''$ *é máximo nos sub-módulos contendo* $\mathbf{N}_{\mathrm{k}}$ *e com ideais aniquiladores* $\mathfrak{z}''$ *tais que* $\mathfrak{z}''\,\mathfrak{z}^{\mathrm{k}} \supset (\mathrm{o})$. Consideremos, na verdade, entre os sub-módulos que contêm $\mathbf{N}_k$, o sub-módulo máximo $\mathbf{N}''$, nas condições seguintes: $\mathbf{N}'' \supseteq \mathbf{N}_k$, $\mathfrak{z}''\,\mathfrak{z}^k \supset (o)$, sendo $\mathfrak{z}''$ o ideal aniquilador de $\mathbf{N}''$. $\mathbf{N}''$ existe, pois a $\mathbf{N}_k$ corresponde $\mathfrak{z}' \supseteq \mathfrak{z}^k$ e é $\mathfrak{z}'\,\mathfrak{z}^k \supseteq \mathfrak{z}^{2k} \supset (o)$, em virtude de o aniquilador modular de $\mathfrak{s}^{2k}$ ser $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{M}$. Então, seja $R \in \mathfrak{s}''$ tal que $R\,\mathfrak{s}^k \supset (o)$. Vê-se que o aniquilador modular $\mathfrak{T}$, de $R\,\mathfrak{s}^k$, verifica as relações $\mathfrak{T} \supseteqq \mathbf{N}'' \supseteqq \mathbf{N}_k$ e que o seu ideal aniquilador $\mathfrak{z}$ é tal que $\mathfrak{z} \supseteqq R\,\mathfrak{s}^k \supset (o)$, $\mathfrak{z}\,\mathfrak{s}^k \supseteqq R\,\mathfrak{s}^{2k} \supset (o)$, pois $R\,\mathfrak{s}^{2k} = (o)$ daria $\mathbf{M}\,R\,\mathfrak{s}^{2k} = (o)$, $\mathbf{M}\,R \subseteqq \mathbf{N}_k$, $\mathbf{M}\,R\,\mathfrak{s}^k = (o)$. Valerá a igualdade $\mathfrak{T} = \mathbf{N}''$, e, portanto será $\mathbf{N}''$ o aniquilador modular de $R\,\mathfrak{s}^k$. Como o aniquilador modular de R é $\mathbf{N}''' \supseteqq \mathbf{N}''$, conclui-se $\mathbf{N}'' = \mathbf{N}'''$.

COROLÁRIO 7′: — *Se o sub-módulo* $\mathbf{N}$ *do teorema 35′ for tal que* $\mathfrak{s} \neq (o)$ *é nilideal, tem-se necessàriamente, nas condições do teorema 36′,* $\mathbf{N}'' \supset \mathbf{N}$. Se pudesse ser $\mathbf{N}'' = \mathbf{N}$, concluiríamos $\mathbf{N}'' = \mathbf{N}_k$, de modo que $\mathbf{N}_k$ seria o aniquilador modular de R e $R\,\mathfrak{s}^k$. Definindo $\mathfrak{P}$ pela relação $\mathfrak{P}\,R^2 = (o)$, teríamos $\mathfrak{P}\,R \subseteqq \mathbf{N}_k$, $\mathfrak{P}\,R\,\mathfrak{s}^k = (o)$, o que daria $\mathfrak{P} \subseteqq \mathbf{N}_k$, e, portanto, $\mathfrak{P} = \mathbf{N}_k$. Dum modo geral, $\mathbf{N}_k$ seria o aniquilador modular duma potência qualquer de $R \in \mathfrak{s}'' \subset \mathfrak{s}$, o que não pode ter lugar, por ser $\mathfrak{s}$ nilideal.

O módulo $\mathbf{N}'' \neq \mathbf{M}$, referido no corolário anterior, tratado como $\mathbf{N}$, levaria a $\mathbf{N}''_r \supseteqq \mathbf{N}''$, depois, de $\mathbf{N}''_r = \mathbf{N}'''$ a $\mathbf{N}^{(IV)} \subset \mathbf{M}$, se $\mathbf{N}''' \subset \mathbf{M}$. O processo continuará, enquanto se não obtiver $\mathbf{N}^{(2t)} = \mathbf{M}$. Nesse momento, sabe-se que, tendo partido de $\mathbf{N}^{(2t-2)}$, se obteve $\mathbf{N}^{(2t-2)}_s = \mathbf{N}^{(2t-1)} = \mathbf{M}$. Então, sendo $\mathfrak{z}$ o ideal aniquilador de $\mathbf{N}^{(2t-2)}$, é $\mathfrak{z}^{s-1} = (o)$. Assim:

TEOREMA 37′: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição de cadeia ascendente e* $\mathbf{N}$ *é um sub-módulo —* Ω *com um ideal aniquilador nilideal, existe um sub-módulo —* $\Omega = \mathfrak{Q} \supset \mathbf{N}$ *cujo ideal aniquilador é nilpotente.* Este facto resulta imediatamente da referida condição de máximo e do facto de $\mathbf{N}$ ter ideal aniquilador nilideal. Aqui deixa-se, porém, a possibilidade de o sub-módulo $\mathbf{N}$ não ser máximo.

TEOREMA 38′: — *Se* $\mathfrak{L}$ *é um sub-módulo com um ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$ *não nilpotente, dum módulo com condição de cadeia ascendente, o sub-módulo máximo* $\mathfrak{L}_1 \supseteqq \mathfrak{L}$, *com ideal aniquilador* $\mathfrak{s}_1 \subseteqq \mathfrak{s}$ *não nilpotente, está nas condições seguintes:* 1) *existe um endomorfismo* $S \in \mathfrak{s}_1$ *cujo aniquilador modular* $\mathbf{N}_1$ *é aniquilador modular de* $S\,\mathfrak{s}_1$; 2) $\mathbf{N}_1$ *é máximo entre os sub-módulos* $\mathbf{N}$, *contendo* $\mathfrak{L}_1$, *aos quais correspondem aniquiladores* $\mathfrak{z}$ *por forma que* $\mathfrak{z}\,\mathfrak{s}_1 \neq (o)$. Partamos de $\mathfrak{L}_1$.

Então, $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{s}_1$ são aniquiladores recíprocos. Vê-se, mesmo, que os aniquiladores modulares de $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1^2, \ldots$ são todos iguais. Posto isto, consideremos o conjunto dos sub-módulos $\mathbf{N}$ tais que: $\mathbf{N} \supseteqq \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{z}\,\mathfrak{s}_1 \neq (o)$, onde $\mathfrak{z}$ é o ideal aniquilador de $\mathbf{N}$. Nesse conjunto não vazio, representemos por $\mathbf{N}_1$ o sub-módulo máximo. Se for $S \in \mathfrak{z}_1$ tal que $S\,\mathfrak{s}_1 \neq (o)$, o aniquilador modular $\mathfrak{L}''_1$, de S, está nas condições seguintes: $\mathbf{M} \supset \mathfrak{L}''_1 \supseteqq \mathbf{N}_1$; o seu ideal aniquilador $\mathfrak{z}''_1$ verifica-se a relação $\mathfrak{z}''_1\,\mathfrak{s}_1 \neq (o)$. Por isso, $\mathfrak{L}''_1 = \mathbf{N}_1$, tendo-se $\mathfrak{L}''_1\,S\,\mathfrak{s}_1 = (o)$. Por outro lado, definindo $\mathfrak{Q}$ pela relação $\mathfrak{Q}\,S\,\mathfrak{s}_1 = (o)$, é $\mathbf{M} \supset \mathfrak{Q} \supseteqq \mathfrak{L}'''_1$, $S\,\mathfrak{s}_1 . \mathfrak{s}_1 = S\,\mathfrak{s}_1^2 \supset (o)$, visto que $\mathbf{M}\,S\,\mathfrak{s}_1^2 = (o)$ daria $\mathbf{M}\,S \subseteqq \mathfrak{L}_1$, $\mathbf{M}\,S\,\mathfrak{s}_1 = (o)$, $S\,\mathfrak{s}_1 = (o)$. O teorema está demonstrado, pelo facto de ser $\mathfrak{Q} = \mathfrak{L}''_1$.

9) **Os módulos com as duas condições de cadeia** — Quando são válidas as condições de mínimo e de máximo, em $\mathbf{M}$, diz-se, mais simplesmente, que é válida a *condição dupla de cadeia*. Extraímos de [(II), pág. 9] o teorema seguinte, bem como os dois primeiros corolários.

TEOREMAS 39 e 39′: — *Num módulo com condição dupla de cadeia, tem-se* $\mathrm{r} = \mathrm{s}$, *para cada endomorfismo* A *satisfazendo às condições* $\mathbf{M} \supset \mathbf{M}\,\mathrm{A} \supset \ldots \supset \mathbf{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = \mathbf{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}+1} = \ldots, (o) \subset \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}} \subset \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^2} \subset \ldots \subset \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{s}}} = \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{s}+1}} = \ldots$ O teorema 32′ garante-nos que A define um meromorfismo em $\mathbf{M}\,A^s = \mathbf{N}$. Será $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}\,A \simeq \mathbf{N}\,A^2 \simeq \ldots$. Como estamos admitindo ser $\mathbf{M}\,A^s \neq (o)$ [de contrário seria imediata a igualdade $r = s$], a condição de mínimo garante não poder ter-se indefinidamente $\mathbf{N} \supset \mathbf{N}\,A \supset \mathbf{N}\,A^2 \supset \ldots$, de sorte que existirá um inteiro ρ para o qual $\mathbf{N}\,A^{\rho} = \mathbf{N}\,A^{\rho+1}$. Daqui conclui-se $\mathbf{N}\,A^{\rho-1} = \mathbf{N}\,A^{\rho}$, e, por fim, $\mathbf{N} = \mathbf{N}\,A$, ou $\mathbf{M}\,A^s = \mathbf{M}\,A^{s+1}$. Assim, será $r \leqq s$. Por outro lado, em virtude de ser $\mathfrak{P} = \mathbf{M}\,A^r = \mathbf{M}\,A^{r+1}$, tem-se $\mathfrak{P}\,A = \mathfrak{P}$. Visto que em $\mathfrak{P}$ é válida a condição de máximo, A determina em $\mathfrak{P}$ um automorfismo. Assim, tem-se $\mathbf{M}\,A^r \cap \mathfrak{Q}_A = (o)$. Admitindo ser $x\,A^{r+1} = (x\,A^r)\,A = o$, será também $x\,A^r = o$. Portanto, $\mathfrak{Q}_{A^{r+1}} \subseteqq \mathfrak{Q}_{A^r}$, pelo que valerá o sinal $=$. Isto acarreta $r \geqq s$. É, assim, $r = s$, como afirma o teorema.

CorolÁrios 8 e $8'$: — *Num módulo* M *com condição dupla de cadeia, tem-se* $\mathrm{M} = (\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}}, \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}})$, $\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}} = (\mathrm{o})$, *onde* $\mathrm{r} = \mathrm{s}$ *é o número do teorema. Para cada* $\mathrm{x} \in \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}}$ *é* $\mathrm{x}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = o$, *de sorte que* A *determina um endomorfismo nilpotente em* $\mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}}$; *e, sendo* $\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = \mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}+1}$, A *determina em* $\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}}$ *um automorfismo.*

CorolÁrio 9: — *Para cada endomorfismo* A *dum grupo indecomponível* M, *com condição dupla de cadeia, ou é* $\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = \mathrm{M}\,\mathrm{A}$, *com* $\mathfrak{Q}_{\mathrm{A}} = (\mathrm{o})$, *pelo que* A *é um automorfismo, ou é* $\mathrm{M} = \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}}$, *com* $\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = (\mathrm{o})$, *pelo que* A *é um endomorfismo nilpotente.*

CorolÁrio $9'$: — *Se* M *é um módulo com condição dupla de cadeia no qual* (o) *não é intersecção de dois sub-módulos* $\neq (\mathrm{o})$, *ou é* $\mathfrak{Q}_{\mathrm{A}^{\mathrm{r}}} = \mathfrak{Q}_{\mathrm{A}} = (\mathrm{o})$, *pelo que* A *é um automorfismo, ou é* $\mathrm{M}\,\mathrm{A}^{\mathrm{r}} = (\mathrm{o})$, *pelo que* A *é um endomorfismo nilpotente.* Sem dúvida que M é, então, indecomponível, e o corolário é válido (como 9). A verdade, porém, é que podemos demonstrar $9'$, partindo ùnicamente do resultado $\mathrm{M}\,A^{r} \cap \mathfrak{Q}_{A^{r}} = (o)$, indicado em $8'$.

CorolÁrios 10 e $10'$: — *Supondo-nos nos casos de 9 ou de* $9'$, *se* A *é um automorfismo,* $\mathrm{A} - \mathrm{A}^2$, *suposto* $\neq \mathrm{o}$, *é igualmente um automorfismo.* Sabemos, com efeito, que $A - A^2$ não pode ser nilpotente, pois, de contrário, existiria um idempotente não nulo, que seria um polinómio em A, consequentemente existiria uma decomposição para o módulo.

Seguindo sempre Almeida Costa, [10] e [14], vamos dar agora um conjunto de teoremas interessantes sobre os módulos com condição dupla de cadeia. Os raciocínios utilizados nos teoremas 40 e 41 foram dados por Levitzki, [(III)], em questões sobre anéis.

Teorema 40: — *Dado um sub-módulo* N, *de comprimento* $\leqq \mathrm{c}$, *dum módulo* M *com condição dupla de cadeia, se* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_c$ *são endomorfismos de* M *tais que* $\mathrm{N}\,\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_c \supset (o)$ *e* $\mathrm{N}\,\mathrm{A}_i \subseteqq \mathrm{N}$, *existe um sub-módulo* N_1 *verificando as relações seguintes:* $(\mathrm{o}) \subset \mathrm{N}_1 \subseteqq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}_1 = (\mathrm{N}_1\,\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{N}_1\,\mathrm{A}_c)$. Ponhamos $\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' = (\mathrm{N}\,A_1, \ldots, \mathrm{N}\,A_c)$. O sub-módulo N' é $\neq (o)$, visto que $\mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N}\,A_1 \supset (o)$. Ponhamos, depois, $\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N}'' = (\mathrm{N}'\,A_1, \ldots, \mathrm{N}'\,A_c)$, com $\mathrm{N}'\,A_i \subseteqq \mathrm{N}\,A_i$. O sub-módulo N'' é $\neq (o)$, visto que $\mathrm{N}'' \supseteqq \mathrm{N}'\,A_2 \supseteqq \mathrm{N}\,A_1\,A_2 \supset (o)$. Podemos prosseguir e estabelecer a série normal $\{\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N}'' \supseteqq \ldots \supseteqq \mathrm{N}^{(c)} \supset (o)\}$, com $\mathrm{N}^{(c)} \supseteqq \mathrm{N}\,A_1 \ldots A_c \supset (o)$. Como o comprimento desta série normal é $c + 1$ e o comprimento de N é $\leqq c$, haverá repetições. Pondo $\mathrm{N}^{(i+1)} = (\mathrm{N}^{(i)} A_1, \ldots, \mathrm{N}^{(i)} A_c) = \mathrm{N}^{(i)}$, fica demonstrado o teorema.

Teorema $40'$: — *Dado um sub-módulo* $\mathfrak{N}$, *dum módulo com condição dupla de cadeia, se* $\mathfrak{z}$ *for o ideal aniquilador de* $\mathfrak{N}$ *e se* $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ *tiver um comprimento* $\leqq \mathrm{c}$, *então, se* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_c$ *forem endomorfismos de* $\mathfrak{M}$ *tais que* $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_c\,\mathfrak{z} \supset (o)$ *e* $\mathrm{A}_i\,\mathfrak{z} \subseteqq \mathfrak{z}$, *existe um ideal* $\mathfrak{z}_1 \subseteqq \mathfrak{z}$, *de aniquilador modular* $\mathfrak{N}_1$, *verificando as relações seguintes:* 1) $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}$; 2) $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_c$, *onde os* $\mathfrak{Q}_j$ *significam os aniquiladores modulares de* $\mathrm{A}_j\,\mathfrak{z}_1$. Ponhamos $\mathfrak{z} \supseteqq \mathfrak{z}' = (A_1\,\mathfrak{z}, \ldots, A_c\,\mathfrak{z}) \supset (o)$ e designemos por $\mathfrak{N}'$ o aniquilador modular de $\mathfrak{z}'$. Será $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}$. Em seguida, ponhamos $\mathfrak{z} \supseteqq \mathfrak{z}' \supseteqq \mathfrak{z}'' = (A_1\,\mathfrak{z}', \ldots, A_c\,\mathfrak{z}') \supseteqq A_{c-1}\,A_c\,\mathfrak{z} \supset (o)$ e designemos por $\mathfrak{N}''$ o aniquilador modular de $\mathfrak{z}''$. Tem-se $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}' \subseteqq \mathfrak{N}'' \subseteqq \subset \mathfrak{M}$. Podemos prosseguir e estabelecer a série normal $\{\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}' \subseteqq \mathfrak{N}'' \subseteqq \ldots \subseteqq \mathfrak{N}^{(c)} \subset \mathfrak{M}\}$, de comprimento $c + 1$, da qual se deduz uma série normal do mesmo comprimento da forma $\{\mathfrak{M}/\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^{(c)}/\mathfrak{N} \supseteqq \ldots \supseteqq \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = (o)\}$, o que não pode ter lugar sem repetições. Supondo $\mathfrak{N}^{(i+1)} = \mathfrak{N}^{(i)}$, este sub-módulo será aniquilador modular de $\mathfrak{z}^{(i)}$ e de $\mathfrak{z}^{(i+1)} = (A_1\,\mathfrak{z}^{(i)}, \ldots A_c\,\mathfrak{z}^{(i)})$. O teorema $2'$ dá agora $\mathfrak{N}^{(i)} = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_c$, onde $\mathfrak{Q}_j$ é o aniquilador modular de $A_j\,\mathfrak{z}^{(i)}$, o que demonstra o teorema, pondo $\mathfrak{N}^{(i)} = \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{z}^{(i)} = \mathfrak{z}_1$.

Teorema 41: — *Dado um sub-módulo* $\mathrm{N} \supset (\mathrm{o})$, *de comprimento* $\leqq \mathrm{c}$, *dum módulo com condição dupla de cadeia, se* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_c$ *são endomorfismos de* M *tais que* $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_c \neq \mathrm{o}$ *e* $\mathrm{N} = (\mathrm{N}\,\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{N}\,\mathrm{A}_c)$, *existe um endomorfismo não nilpotente de* M *que é um produto de potências dos* A_i. Destaquemos, dentre os $\mathrm{N}\,A_i$, todos os que podem ser desprezados, sem que a soma dos demais deixe de ser N. Será, por ex., $\mathrm{N} = (\mathrm{N}\,B_1, \ldots, \mathrm{N}\,B_d)$, com $d \leqq c$, e onde os B_j são elementos A_i. Se fosse $d = 1$, a relação $\mathrm{N} = \mathrm{N}\,B_1$ daria $\mathrm{N}\,B_1^m = \mathrm{N} \supset (o)$, e B_1 seria um endomorfismo nas condições do teorema. Supondo $d > 1$, observemos que se tem $(o) \subset \mathrm{N} \supset \mathrm{N}\,B_d = (\mathrm{N}\,B_1\,B_d, \ldots, \mathrm{N}\,B_d\,B_d) \supset (o)$. Escrevendo $B_d = B_{m_1}$, designemos por B_{m_2} um elemento B_j tal que $(o) \subset \mathrm{N}\, B_{m_2} B_{m_1} = (\mathrm{N}\, B_1 B_{m_2} B_1, \ldots, \mathrm{N}\, B_d B_{m_2} B_{m_1})$. Vê-se existir uma sucessão $B_{m_1}, B_{m_2}, \ldots$ tal que $\mathrm{N}\, B_{m_{c2}} \ldots \ldots B_{m_1} \supset (o)$, qualquer que seja o inteiro positivo c referido no teorema. Vamos verificar a existência dum sub-módulo N' e de endomorfismos $A'_1, \ldots, A'_c$, formados por produtos dos A_j, satisfazendo as condições

$$\mathrm{N} \supset \mathrm{N}' \supset (o), \quad A'_1 \ldots A'_c \neq o, \quad \mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \ldots, \mathrm{N}' A'_c).$$

Distinguiremos dois casos. No primeiro, admitiremos que há um produto de c dos B_{m_k}, consecutivos em $B_{m_{c2}}, \ldots, B_{m_1}$, o qual não contém $B_{m_1} = B_d$. No segundo, faremos a hipótese contrária. Se se dá o primeiro, suponhamos $A'_1 \ldots A'_c$ o produto em causa. Tem-se $\mathrm{N}\, A'_1 \ldots A'_c \supset (o)$, $\mathrm{N}\, A'_i \subseteq \mathrm{N}$, e, conforme o teorema 40, $(o) \subset \mathrm{N}' \subseteq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \ldots, \mathrm{N}' A'_c)$. Como em $A'_1, \ldots, A'_c$ não figura B_d, será $(\mathrm{N}\, A'_1, \ldots, \mathrm{N}\, A'_c) \subset \mathrm{N}$, e, portanto, $\mathrm{N}' \subset \mathrm{N}$. Se, a partir de N' e dos A'_i, se pode formar o endomorfismo não nilpotente em causa, o teorema fica demonstrado. Não sendo assim, o raciocínio continua. Supondo, nos termos do 2.º caso, que cada c factores consecutivos do produto $P = B_{m_{c2}} \ldots B_{m_1}$ contém $B_{m_1} = B_d$, podemos escrever, por ex., $P = P_l B_{m_1} . P_{l-1} B_{m_1} \ldots P_1 B_{m_1}$, onde $P_1, P_2, \ldots$ são produtos dos A_i pela ordem porque figuram em P, contendo cada P_j menos de c factores. A decomposição de P contém c factores, pelo menos, de modo que existe sempre uma parte de P, $P' = A'_{i_1} \ldots A'_{i_c}$, $A'_{i_j} = P_{i_j} B_{m_1}$, onde os A'_i são consecutivos em P. Como no 1.º caso, tem-se agora $\mathrm{N}\, P' \supset (o)$, $\mathrm{N}\, A'_{i_j} \subseteq \mathrm{N}$, de sorte que existe N', nos termos do teorema 40, satisfazendo a $(o) \subset \mathrm{N}' \subseteq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \ldots, \mathrm{N}' A'_c)$. Para se ver que $\mathrm{N}' \subset \mathrm{N}$, basta ter em conta que $\mathrm{N}\, A'_{i_j} = \mathrm{N}\, P_{i_j} B_{m_1} \subseteq \mathrm{N}\, B_{m_1}$.

Em resumo: quando $d > 1$, há sempre um sub-módulo N' nas condições seguintes: $(o) \subset \mathrm{N}' \subseteq \mathrm{N}$; $\mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \ldots, \mathrm{N}' A'_c)$, $A'_1 \ldots A'_c \neq o$, onde os A'_i são produtos dos A_j. Partindo de N', o raciocínio repete-se. Obtém-se a sucessão de sub-módulos $\mathrm{N} \supset \mathrm{N}' \supset \mathrm{N}'' \supset \ldots$, que prossegue enquanto não for possível chegar a $(o) \subset \mathrm{N}^{(t)} \subset \mathrm{N}^{(t-1)}$, $\mathrm{N}^{(t)} B = \mathrm{N}^{(t)}$, onde B é um produto dos A_j. A condição descendente limita aquela sucessão, e da igualdade escrita em último lugar tira-se o teorema. B é o endomorfismo procurado.

Vamos agora provar uma consequência importante, que se encontra, por ex., em [(II), pág. 59], mas que é ali justificada de modo completamente diferente.

COROLÁRIO 11: — *Se $\mathfrak{L}$ é um conjunto de endomorfismos nilpotentes, dum módulo com condição dupla de cadeia, e se o conjunto é fechado relativamente ao produto, então, supondo $\mathfrak{M}$ de comprimento* n, *o produto de* n *elementos de $\mathfrak{L}$ é nulo.* Sejam $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{L}$ e $A_1 \ldots A_n \neq o$. O módulo $\mathfrak{M}$ verificará as seguintes condições: $\mathfrak{M} A_1 \ldots A_n \neq (o)$, $\mathfrak{M} A_i \subseteq \mathfrak{M}$. Existirá, nos termos do teorema 40, $\mathfrak{N}_1$ tal que $(o) \subset \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 = (\mathfrak{N}_1 A_1, \ldots, \mathfrak{N}_1 A_n)$. Depois, pelo teorema 41, existirá um endomorfismo não nilpotente de $\mathfrak{M}$ que é um produto dos A_i. Este resultado é absurdo, visto que um tal produto pertence a $\mathfrak{L}$. Deverá ter-se $A_1 \ldots A_n = o$.

COROLÁRIO 12: — *Num módulo de comprimento* n, *é condição necessária e suficiente, para que o sub-módulo $\mathfrak{N}$ seja nilmódulo, que se tenha* $\mathfrak{n}^{\mathrm{n}} = (\mathrm{o})$.

COROLÁRIO 13: — *Se $\mathfrak{M}$ é um módulo com condição dupla de cadeia, o radical do seu anel de endomorfismos é nilpotente. O expoente é, quando muito, igual ao comprimento do módulo.*

TEOREMAS D e D': — *Se $\mathfrak{M}$ é um módulo indecomponível com condição dupla de cadeia, o radical do seu anel de endomorfismos é o conjunto dos seus endomorfismos nilpotentes.* Em primeiro lugar, todo o elemento do radical é nilpotente. Em seguida, se A é nilpotente, suponhamos $A^{r-1} \neq o$, $A^r = o$, e consideremos o ideal direito gerado por A, que é da forma $A\overline{\Omega}$. Vamos ver que este ideal é nilpotente. Todos os seus elementos são nilpotentes, pois que, se $A S$, com $S \in \overline{\Omega}$, o não fosse, seria um automorfismo H. De $A S = H$. De $A S = H$, tirar-se-ia $A^r S = A^{r-1} H = o$, que é um absurdo. Do facto de $A\overline{\Omega}$ ser nilideal se tira agora, pelo corolário 11, a sua nilpotência. O teorema está provado.

Observação (1): — No enunciado do teorema $40'$ deveríamos, de preferência, admitir dado o ideal $\mathfrak{s}$, ser $\mathbf{N}$ o seu aniquilador modular, e, depois, mediante as condições indicadas, frisar a determinação do ideal $\mathfrak{s}_1$, com aniquilador modular $\mathbf{N}_1$, satisfazendo ao seguinte: 1) $(o)\subset\mathfrak{s}_1\subseteqq\mathfrak{s}$; 2) $\mathbf{N}\subseteqq\mathbf{N}_1\subset\mathbf{M}$; 3) $\mathfrak{s}_1\supseteqq(A_1\mathfrak{s}_1,\ldots,A_c\mathfrak{s}_1)$; 4) $\mathbf{N}_1=\mathfrak{Q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_c$.

Teorema $41'$: — *Dado* $\mathfrak{s}\supset(o)$, *se* $\mathbf{N}$ *for o seu aniquilador modular, supondo válida em* $\mathbf{M}$ *a condição dupla de cadeia e* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *de comprimento* $\overline{\overline{<}}c$ *então, se* $A_1,\ldots,A_c$ *são endomorfismos de* $\mathbf{M}$ *tais que* $A_1\ldots A_c\neq o$, $(A_1\mathfrak{s},\ldots,A_c\mathfrak{s})\subseteqq\mathfrak{s}$, $\mathbf{N}=\mathfrak{Q}_{a_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_{a_c}$, *onde* $\mathfrak{Q}_{a_i}$ *significa aniquilador modular de* $A_i\mathfrak{s}$, *existe um endomorfismo não nilpotente de* $\mathbf{M}$ *que é um produto de potências dos* A_i.
Destaquemos, de entre os $\mathfrak{Q}_{a_j}$, todos os que podem ser desprezados, sem que a intersecção dos demais deixe de ser $\mathbf{N}$. Será, por ex., $\mathbf{N}=\mathfrak{Q}_{b_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_{b_d}$, onde $d\overline{\overline{<}}c$ e onde os $\mathfrak{Q}_{b_j}$ são os aniquiladores dos ideais $B_j\mathfrak{s}$, nos quais os B_j são elementos A_i.

Se fosse $d=1$, a relação $\mathbf{N}=\mathfrak{Q}_{b_1}$ mostraria que $\mathbf{N}$ era o aniquilador modular de $B_1\mathfrak{s}$; tendo em conta ser $B_1\mathfrak{s}\subseteqq\mathfrak{s}$, fàcilmente se concluiria que $\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$ era também aniquilador modular de $B_1^m\mathfrak{s}$, qualquer que fosse m. Então, B_1 seria o endomorfismo referido no teorema. Supondo $d>1$, vamos ver que se tem $\mathbf{M}\supset\mathbf{N}\subset\mathfrak{Q}_{b_d}=\mathfrak{Q}_{b_d b_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_{b_d b_d}$, onde $\mathfrak{Q}_{b_d b_i}$ é o aniquilador modular de $B_d B_i\mathfrak{s}$. Na verdade, é $(B_1\mathfrak{s},\ldots,B_d\mathfrak{s})\subseteqq\mathfrak{s}$. Portanto, tem-se $(B_d B_1\mathfrak{s},\ldots,B_d B_d\mathfrak{s})\subseteqq B_d\mathfrak{s}$. Se supusermos agora $x\in\mathbf{M}$ um elemento aniquilado pelo 1.º membro, será $xB_dB_i\mathfrak{s}=(o)$, $xB_d\in\mathfrak{Q}_{b_i}$, $(i=1,\ldots,d)$, $xB_d\in\mathbf{N}$, $xB_d\mathfrak{s}=(o)$, de sorte que o aniquilador modular do 1.º membro é exactamente $\mathfrak{Q}_{b_d}$, como acima afirmámos. Não esqueçamos que é $\mathfrak{Q}_{b_d}=\mathfrak{Q}_{b_{m_1}}\subset\mathbf{M}$. Então, seja B_{m_2} um B_j tal que $\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}}\subset\mathbf{M}$. Se observarmos ser

(1) Com o enunciado anterior do teorema $40'$, esta observação e o enunciado e demonstração que vão seguir-se, do teorema $41'$, corrigem-se alguns lapsos cometidos nos teoremas que, com os mesmos números, se publicaram na nossa memória em língua alemã, citada na Introdução, e designada [14].
Os corolários $11'$ e $12'$ sofrem as modificações correspondentes.

$(B_{m_1}B_{m_2}B_1\mathfrak{s},\ldots,B_{m_1}B_{m_2}B_d\mathfrak{s})\subseteqq B_{m_1}B_{m_2}\mathfrak{s}$, vê-se, como anteriormente, que, para cada $x\in\mathbf{M}$, aniquilado pelo 1.º membro, será $xB_{m_1}B_{m_2}B_i\mathfrak{s}=(o)$, qualquer que seja i, o que dá $xB_{m_1}B_{m_2}\in\mathbf{N}$, $xB_{m_1}B_{m_2}\mathfrak{s}=(o)$, portanto, $x\in\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}}$. Os aniquiladores modulares dos dois membros são iguais. Pode afirmar-se, pois, existir uma sucessão $B_{m_1}, B_{m_2},\ldots$ tal que $\mathfrak{Q}_{b_{m_1}b_{m_2}\ldots b_{m_{c^2}}}\subset\mathbf{M}$, qualquer que seja o inteiro c do teorema. Vamos verificar a existência dum ideal $\mathfrak{s}'$, de aniquilador modular $\mathbf{N}'$, e de endomorfismos $A_1',\ldots,A_c'$, formados por produtos A_j, satisfazendo às seguintes condições: 1) $(o)\subset\mathfrak{s}'\subseteqq\mathfrak{s}$; 2) $\mathbf{N}\subset\mathbf{N}'\subset\mathbf{M}$; 3) $A_1'\ldots A_c'\neq o$; 4) $(A_1'\mathfrak{s}',\ldots,A_c'\mathfrak{s}')\subseteqq\mathfrak{s}'$; 5) $\mathbf{N}'=\mathfrak{Q}_{a_1'}\cap\ldots\mathfrak{Q}_{a_c'}$ onde $\mathfrak{Q}_{a_j'}$ é o aniquilador modular de $A_j'\mathfrak{s}'$. Distinguiremos dois casos. No primeiro, admitiremos que há um produto de c dos B_{m_h}, consecutivos em $B_{m_1}, B_{m_2},\ldots,B_{m_{c^2}}$, o qual não contém $B_{m_1}=B_d$. No segundo, faremos a hipótese contrária. Se se dá o primeiro, suponhamos $A_1'\ldots A_c'$ o produto em causa. Tem-se $A_1'\ldots A_c'\mathfrak{s}\supset(o)$, pois que, se fosse $A_1'\ldots A_c'\mathfrak{s}=(o)$, viria, por ex., $B_{m_1}\ldots B_{m_\alpha}A_1'\ldots A_c'B_\beta\ldots B_{m_{c^2}}\mathfrak{s}\subseteqq B_{m_1}\ldots\ldots A_1'\ldots A_c'\mathfrak{s}=(o)$, o que não pode ter lugar, visto que o aniquilador modular da primeira expressão escrita é $\subset\mathbf{M}$. As duas circunstâncias $A_1'\ldots A_c'\mathfrak{s}\supset(o)$, $A_i'\mathfrak{s}\subseteqq\mathfrak{s}$ levam, conforme a observação feita ao teorema $40'$, à existência de $\mathfrak{s}'$ e correspondente $\mathbf{N}'$ tais que: 1') $(o)\subset\mathfrak{s}'\subseteqq\mathfrak{s}$; 2') $\mathbf{N}\subseteqq\mathbf{N}'\subset\mathbf{M}$; 3') $\mathfrak{s}'\supseteqq(A_1'\mathfrak{s}',\ldots,A_c'\mathfrak{s}')$; 4') $\mathbf{N}'=\mathfrak{Q}_{a_1'}\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_{a_c'}$. Como se dá o caso de B_d não figurar entre os A_i' e de se ter $A_1'\mathfrak{s}'\subseteqq A_1'\mathfrak{s}$ será $\mathbf{N}'\supset\mathbf{N}$, e assim realizam-se as condições 1), 2), 3), 4) e 5) acima referidas. Se, a partir de $\mathbf{N}'$ e dos A_i', se pode formar o endomorfismo não nilpotente pedido, o teorema fica demonstrado. Não sendo assim, o raciocínio continua. Supondo, nos termos do 2.º caso, que cada c factores consecutivos do produto $P=B_{m_1}\ldots B_{m_{c^2}}$ contém $B_{m_1}=B_d$, podemos escrever, por ex., $P=B_{m_1}P_1\ldots B_{m_1}P_{l-1}.B_{m_1}P_l$, onde $P_1, P_2,\ldots,P_l$ são produtos dos A_i pela ordem pela qual figuram em P, contendo cada P_j menos de c factores. A decomposição de P contém c factores, pelo menos, de modo que existe sempre uma parte de P, $P'=A_{i_1}'\ldots A_{i_c}'$, $A_{i_j}'=B_{m_1}P_{i_j}$, onde os A_i' são consecutivos em P. Como no

1.° caso, tem-se agora $P' \mathfrak{z} \supset (o)$, $A_i' \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}$, de sorte que existem $\mathfrak{z}'$ e $\mathbf{N}'$ como no 1.° caso. Para se ver que $\mathbf{N}' \supset \mathbf{N}$, basta ter em conta que $A_{i_j}' \mathfrak{z} = B_{m_1} P_{i_j} \mathfrak{z} \subseteq B_{m_1} \mathfrak{z}$ e que $\mathfrak{z}' \subseteq \mathfrak{z}$. Em resumo: quando $d > 1$, verificam-se as condições 1), 2), 3), 4) e 5), atrás aludidas. Pode, por isso, partir-se de $\mathbf{N}'$ e repetir os raciocínios. Obtém-se a sucessão de sub-módulos $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}' \subset \mathbf{N}'' \subset \ldots$, que prossegue enquanto não for possível chegar ao caso equivalente a $d = 1$, isto é, a $\mathbf{N}^{(t-1)} \subset \mathbf{N}^{(t)} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{N}^{(t)} = \mathfrak{Q}_a$, com $\mathfrak{Q}_a =$ aniquilador modular de $\mathfrak{z}^{(t)}$ e dum ideal $Q \mathfrak{z}^{(t)}$, em que Q é um produto de elementos A_i. Será $\mathbf{N}^{(t)}$ aniquilador modular de $Q^m \mathfrak{z}^{(t)}$, pelo que Q é um endomorfismo não nilpotente.

Corolário 11′: — *Se $\mathfrak{L}$ é um conjunto de endomorfismos nilpotentes, dum módulo com condição dupla de cadeia, e se o conjunto é fechado relativamente ao produto, então, supondo* $\mathbf{M}$ *de comprimento* n, *o produto de* n *elementos de $\mathfrak{L}$ é nulo.* O enunciado deste corolário é precisamente o mesmo que o do corolário 11. A demonstração assentará aqui, porém, sobre os teoremas 40′ e 41′, este último acabado de provar. Sejam $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{L}$ e $A_1 \ldots A_n \neq o$. O anel $\overline{\Omega}$ verifica as seguintes condições: 1) o aniquilador modular de $\overline{\Omega}$ é (o); 2) o comprimento de $\mathbf{M}/(o)$ é $\leqq n$; 3) $A_1 \ldots A_n \overline{\Omega} \supset \supset (o)$ e $A_i \overline{\Omega} \subseteq \overline{\Omega}$. Então, pelo teorema 40′, existem um ideal $\mathfrak{z}_1$, de aniquilador modular $\mathbf{N}_1$, nas condições que lhes são precisadas pela observação feita ao referido teorema. Depois, pelo teorema 41′, existirá um endomorfismo não nilpotente que é um produto dos A_i. Este resultado é absurdo, pois um tal produto pertence a $\mathfrak{L}$. Será $A_1 \ldots \ldots A_n = o$, como se afirmou.

Corolário 12′: — *Num módulo de comprimento* n, *é condição necessária e suficiente, para que um ideal $\mathfrak{z}$, de $\overline{\Omega}$, seja nilideal, que se tenha $\mathfrak{z}^{n} = (o)$.*

10) **Sobre certas questões conexas com o teorema de Krull** — No § 2 demonstrámos o teorema A, que não teve o seu correspondente A′. Na verdade, vale, supondo tratar-se de sub-módulos — Ω, o

Teorema A′: — *Se $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ e $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \mathbf{M}$, os respectivos ideais aniquiladores, supondo $\overline{\Omega'} = \overline{\Omega}$, verificam a*

igualdade $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$, como soma directa. Sabemos que $\mathfrak{z} \supseteq (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Dado $B \in \mathfrak{z}$, tomemos $m \in \mathbf{M}$. Decompondo m de duas maneiras distintas, sob as formas $m = n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$, $(n_1, n_1' \in \mathbf{N}_1;\ n_2, n_2' \in \mathbf{N}_2)$, vê-se que $n_1 - n_1' = n_2' - n_2 \in \mathbf{N}$, de modo que se tem $n_1 B = n_1' B$, $n_2 B = n_2' B$. Conclui-se, deste modo, que, dado $m \in \mathbf{M}$, se obtêm endomorfismos — Ω, de $\mathbf{M}$, por via das seguintes correspondências: $m \to n_1 B = m A_2'$, $m \to n_2 B = m A_1'$. Supondo $m = n_1 = n_1 + o \in \mathbf{N}_1$, vê-se que $n_1 \to n_1 A_1' = o \cdot B = o$, pelo que $\mathbf{N}_1 A_1' = (o)$, $A_1' \in \mathfrak{z}_1$. É, anàlogamente, $A_2' \in \mathfrak{z}_2$. E, sendo $m = n_1 + n_2$, $m B = n_1 B + n_2 B = m A_2' + m A_1' = m (A_1' + A_2')$, conclui-se $B = A_1' + A_2'$. Por isso, tem-se $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Ora esta soma é directa, pelo facto de ser $\mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 = (o)$, como resulta do teorema 1′.

Corolário C′: — *Supondo $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ e $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \mathbf{M}$, tem-se, admitindo ainda $\overline{\Omega'} = \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$.*

Corolário D′: — *Nos termos do corolário anterior, fazendo a decomposição $1 = \mathrm{E}_1' + \mathrm{E}_2'$, $(\mathrm{E}_i' \in \mathfrak{z}_i)$, em idempotentes ortogonais, vê-se que $\mathbf{N}_1$ e $\mathfrak{z}_1$ são aniquiladores recíprocos, de sorte que $\mathbf{N}_1$ é aniquilador modular de E_1'.* Representando por $\mathfrak{P}_i \supseteq \mathbf{N}_i$ o aniquilador modular de $\mathfrak{z}_i$, $(i = 1, 2)$, sabemos que $(o) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, (teor. 2′). Suponhamos $x \in \mathfrak{P}_1$, $x \notin \mathbf{N}_1$ e escrevamos $x = n_1 + n_2$. Será $x E_1' = n_1 E_1' + n_2 E_1' = o = n_2 E_1'$, de sorte que $n_2 \neq o$ e $n_2 \in \mathfrak{P}_1$. Assim não será nula a intersecção dos $\mathfrak{P}_i$, o que é absurdo. Conclui-se $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathbf{N}_1$, e, portanto, $\mathfrak{P}_1 = \mathbf{N}_1$. Como $\mathfrak{z}_1$ e E_1' têm o mesmo aniquilador modular, segue-se o resto do corolário.

Antes de passàrmos às questões que mais particularmente nos interessam neste §, anotemos agora a validade do teorema B′, do corolário A′ e do teorema C′, que vamos enunciar, e que devem ser comparados ao teorema B, do § 5; ao corolário A, do § 5; e ao teorema C, do § 6. Todo o conteúdo da exposição que aqui fazemos é extraído da nossa publicação [15]. Ficará sempre subentendido que se toma $\overline{\Omega'} = \overline{\Omega}$ e bem assim que estarão sempre em causa sub-módulos — Ω.

Teorema B′: — *Se* $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$, $(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)=\mathbf{M}$, *e se se admite que* $\mathfrak{s}_1$ *é nilideal e que* $\mathfrak{s}_2$ *é nilideal bilateral,* $\mathfrak{s}$ *é nilideal; se* $\mathfrak{s}_1$ *e* $\mathfrak{s}_2$ *são nilpotentes,* $\mathfrak{s}$ *é nilpotente; e, se* $\mathfrak{s}_1$ *e* $\mathfrak{s}_2$ *são semi-nilpotentes,* $\mathfrak{s}$ *é semi-nilpotente.*

Corolário A′: — *Supondo* $(o)=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$ *e* $(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)=\mathbf{M}$, *então admitindo que* $\mathfrak{s}_1$ *é nilideal e que* $\overline{\Omega'}=\overline{\Omega}$, *tem-se* $\mathbf{N}_2=(o)$, $\mathbf{N}_1=\mathbf{M}$, *consequentemente* $\mathfrak{s}_1=(o)$. Este corolário só merece enunciado pela unidade que dá aos nossos raciocínios. Ele resulta, é certo, do teorema 17′, do § 5, mas traduz também propriedades evidentes da soma directa.

Teorema C′: — *Se* $\mathbf{N}_1$ *e* $\mathbf{N}_2$ *tiverem nilideais aniquiladores* $\mathfrak{s}_1$ *e* $\mathfrak{s}_2$, *então, supondo* $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\cap\mathbf{N}_2$, $\mathbf{M}=(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)$, *não existe um sub-módulo* $\mathfrak{P}\supseteq\mathbf{N}$ *que possa ser aniquilador modular dum idempotente.* De facto, supondo $\mathfrak{P}\supseteq\mathbf{N}$, o ideal aniquilador de $\mathfrak{P}$ será $\mathfrak{x}\subseteq\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1+\mathfrak{s}_2$. Sabemos que não há em $\mathfrak{s}$ elemento idempotente. Por isso o não haverá em $\mathfrak{x}$.

Em [(II), pág. 35], encontra-se o enunciado que vai seguir-se, no qual, como aliás sucederá no resto do §, estão em causa sub-módulos — Ω:

Teorema 42: — *Seja* $\mathbf{M}$ *um módulo* — Ω *da forma* $\mathbf{M}=(\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_h)$ *e suponhamos que esta soma é directa, isto é, que têm lugar as relações seguintes:* $\mathbf{M}_i\cap(\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_{i-1},\mathbf{M}_{i+1},\ldots,\mathbf{M}_h)=(o)$, $(i=1,2,\ldots,h)$. *Então, pondo* $\mathbf{N}_i=(\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_{i-1},\mathbf{M}_{i+1},\ldots,\mathbf{M}_h)$, *conclui-se:* 1) $\mathbf{N}_i\cap\mathbf{M}_i=(o)$; 2) $(\mathbf{N}_i,\mathbf{M}_i)=\mathbf{M}$; 3) $\mathbf{N}_1\cap\ldots\cap\mathbf{N}_{i-1}\cap\mathbf{N}_{i+1}\cap\ldots\cap\mathbf{N}_h=\mathbf{M}_i$; 4) $\mathbf{N}_1\cap\ldots\cap\mathbf{N}_h=(o)$. Dispensamo-nos de fazer a demonstração, a qual resulta fàcilmente das conhecidas propriedades da soma directa, sem qualquer intervenção de idempotentes. É conveniente, todavia, observar que se tem $\mathbf{M}=\mathbf{M}_{i_1}+\ldots+\mathbf{M}_{i_k}+\mathbf{N}_{i_1}\cap\ldots\cap\mathbf{N}_{i_k}$, onde os i_k, todos diferentes, são tomados em $1,\ldots,n$.

É agora válido este

Teorema 43: — *Nas condições do teorema 42, existem idempotentes* $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_h$ *tais que:* 5) $\mathbf{M}_i=\mathbf{M}\mathrm{E}_i$ *e* $\mathfrak{m}_i=\overline{\Omega}\mathrm{E}_i$; 6) $1=\mathrm{E}_1+\ldots+\mathrm{E}_h$ *e* $\mathrm{E}_i\mathrm{E}_j=o$, *se* $i\neq j$; 7) $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}\mathrm{E}_1+\ldots+\overline{\Omega}\mathrm{E}_h$; 8) *o ideal aniquilador de* $\mathbf{M}_i$ *é* $\mathfrak{s}_i=\mathrm{E}_1\overline{\Omega}+\ldots+\mathrm{E}_{i-1}\overline{\Omega}+\mathrm{E}_{i+1}\overline{\Omega}+\ldots+\mathrm{E}_h\overline{\Omega}$; 9) $\mathfrak{n}_i=\overline{\Omega}\mathrm{E}_1+\ldots+\overline{\Omega}\mathrm{E}_{i-1}+\overline{\Omega}\mathrm{E}_{i+1}+\ldots+\overline{\Omega}\mathrm{E}_h$; 10) *o ideal direito aniquilador de* $\mathbf{N}_i$ *é* $\mathfrak{x}_i=\mathrm{E}_i\overline{\Omega}$. A demonstração é consequência simples de propriedades elementares da teoria geral dos anéis e das considerações dos §§ 2), 3) e 6).

Com o objectivo de ser demonstrado o teorema de Krull, vamos tratar certas proposições preliminares, algumas das quais se encontram em [(II), págs. 11 e 12].

Teorema E: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo* — Ω *indecomponível, com condição dupla de cadeia, e se* A *e* B *são dois endomorfismos* — Ω *tais que* $\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$, *um daqueles endomorfismos é um automorfismo.* Nos termos do corolário 9, se A e B não são automorfismos, são nilpotentes. Tendo-se $A^2+AB=A^2+BA=A$, vê-se que $AB=BA$. A fórmula do binómio é aplicável ao desenvolvimento de $(A+B)^m=1$, qualquer que seja o inteiro m. Admitindo que é $A^r=o$, $B^s=o$ e pondo $m=r+s$, chega-se ao absurdo $(A+B)^m=o$.

Teorema 44: — *Seja* $\mathbf{M}$ *um módulo* — Ω *no qual tem lugar a condição dupla de cadeia e admitamos realizarem-se as condições dos teoremas 42 e 43, com duas decomposições* $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\ldots+\mathbf{M}_h$, $\mathbf{M}=\mathfrak{P}_1+\ldots+\mathfrak{P}_k$, *sob a restrição, apenas, de* $\mathbf{M}_i$ *e os* $\mathfrak{P}_j$ *serem indecomponíveis; então, se as decomposições correspondentes de 1 forem* $1=\mathrm{E}_1+\ldots+\mathrm{E}_h$, $1=\mathrm{F}_1+\ldots\mathrm{F}_k$, *existe um* F_j *tal que* $\mathrm{F}_j\mathrm{E}_1$ *define um automorfismo de* $\mathbf{M}_1$. É claro que, da aplicação de F_jE_1 a $\mathbf{M}_1$ resulta um endomorfismo de $\mathbf{M}_1$. Neste sentido, tendo-se $(F_1+\ldots+F_k)E_1=F_1E_1+\ldots+F_kE_1=E_1$, define-se o automorfismo um de $\mathbf{M}_1$ como um somatório de endomorfismos F_jE_1. Em virtude do teorema E, se F_1E_1 não é um automorfismo de $\mathbf{M}_1$, sê-lo-á $F_2E_1+\ldots+F_kE_1=P$. Ter-se-á $F_2E_1P^{-1}+\ldots+F_kE_1P^{-1}=1\,(=E_1)$, de sorte que, não sendo $F_2E_1P^{-1}$ um automorfismo, sê-lo-á $F_3E_1P^{-1}+\ldots+F_kE_1P^{-1}=Q$. Em seguida, ou $F_3E_1P^{-1}Q^{-1}$ ou $F_4E_1P^{-1}Q^{-1}+\ldots+F_kE_1P^{-1}Q^{-1}$ representam um automorfismo de $\mathbf{M}_1$. Chega-se forçosamente a um automorfismo de $\mathbf{M}_1$ da forma $F_jE_1P^{-1}Q^{-1}\ldots S^{-1}$, o que exige seja um automorfismo de $\mathbf{M}_1$ o produto F_jE_1, como se afirmou.

Uma vez determinado o automorfismo $F_j E_1$, dispúnhamos dos $\mathfrak{P}_i$ por forma a colocar $\mathfrak{P}_j$ em 1.º lugar. Podemos imaginar, assim, que $F_1 E_1$ é o automorfismo em questão. Tem lugar o seguinte:

COROLÁRIO 14: — *O endomorfismo* F_1 *determina o isomorfismo* $\mathbf{M}_1 \simeq \mathbf{M}_1 \mathrm{F}_1 = \mathfrak{P}_1$ *e o endomorfismo* E_1 *determina o isomorfismo* $\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{P}_1 \mathrm{E}_1 = \mathbf{M}_1$. Em primeiro lugar, F_1 determina um isomorfismo $\mathbf{M}_1 \simeq \mathbf{M}_1 F_1 \subseteq \mathfrak{P}_1$. Dado $p_1 \in \mathfrak{P}_1$, formemos $p_1 E_1 \in \mathbf{M}_1$. Como $\mathbf{M}_1 F_1 E_1 = \mathbf{M}_1$, vêmos que existe $m_1 \in \mathbf{M}_1$ tal que $p_1 E_1 = m_1 F_1 E_1$. Então, $(p_1 - m_1 F_1) E_1 = o$, sendo $p_1 - m_1 F_1 \in \mathfrak{P}_1$. Daqui resulta $p_1 = (p_1 - m_1 F_1) + m_1 F_1$ e $\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{z}_1, \mathbf{M}_1 F_1)$, onde $\mathfrak{z}_1$ é o conjunto dos elementos $z_1 \in \mathfrak{P}_1$ tais que $z_1 E_1 = o$. A soma anterior é directa, visto que $z_1 = m_1 F_1$ acarreta $z_1 E_1 = m_1 F_1 E_1 = o$, $m_1 = o$, $z_1 = o$. Em face da indecomponibilidade de $\mathfrak{P}_1$, terá de ser $\mathfrak{P}_1 = \mathbf{M}_1 F_1$, visto que $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{z}_1$ levaria a $\mathfrak{P}_1 E_1 = \mathbf{M}_1 F_1 E_1 = (o)$. Demonstrada a 1.ª parte do corolário, basta atentar em que $\mathfrak{P}_1 E_1 = \mathbf{M}_1 F_1 E_1 = \mathbf{M}_1$ e em que só elemento nulo de $\mathfrak{P}_1$ é anulado por E_1 para se concluir a 2.ª parte.

TEOREMA 45: — *Pondo, nos termos do teorema 44 (com* $\mathrm{F}_j = \mathrm{F}_1$), $\mathrm{G}_1 = \mathrm{E}_1 \mathrm{F}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_h$, *define-se um automorfismo de* $\mathbf{M}$. *São também automorfismos de* $\mathbf{M}$ *os seguintes endomorfismos:* $\mathrm{H}_1 = \mathrm{F}_1 \mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_k$, $\mathrm{K}_1 = \mathrm{E}_1 \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_k$, $\mathrm{L}_1 = \mathrm{F}_1 \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_h$.

Se tivermos em conta o teorema 31, do § 7, verifica-se que G_1 é um automorfismo, provando que a igualdade $x G_1 = o$ implica $x = o$. O corolário 14 mostra-nos que, se for $p_1 \in \mathfrak{P}_1$ tal que $p_1 E_1 = o$, é $p_1 = o$. Assim $\mathfrak{P}_1 \cap (\mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_h) = (o)$, de sorte que é directa a soma $\mathfrak{P}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_h$. Supondo, então, $x = m_1 + \ldots + m_h$, $x G_1 = m_1 F_1 + m_2 + \ldots + m_h = o$, conclui-se $m_2 = \ldots = m_h = o$, $m_1 F_1 = o$, e, portanto, ainda conforme o corolário 14, $m_1 = o$, $x = o$. Deste modo é $\mathbf{M} G_1 = \mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_k$. Passemos a H_1. Interessa-nos verificar que $\mathbf{M}_1 \cap (\mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_k) = (o)$. Na verdade, representando, como geralmente fazemos, um elemento dum sub-grupo pela letra minúscula latina correspondente à que representa o referido sub-grupo, ponhamos $m_1 = p_2 + \ldots + p_k$. Então $m_1 F_1 = o$, pelo que $m_1 = o$. Supondo agora $x = p_1 + \ldots + p_k$, $x H_1 = p_1 E_1 + p_2 + \ldots + p_k$, da relação $x H_1 = o$, como a soma $\mathbf{M}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_k$ é directa, conclui-se $p_2 = \ldots = p_k = o$ e $p_1 E_1 = o$. Assim, é $p_1 = o$ e $x = o$.

E vê se que $\mathbf{M} H_1 = \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_k$. Relativamente a K_1, de $x K_1 = x E_1 F_1 + x F_2 + \ldots + x F_k = o$ tira-se $x F_2 = \ldots = x F_k = o$, $x = p_1$, $p_1 E_1 F_1 = o$ e $p_1 = o$. Raciocínio análogo se faz para L_1.

Convém fixar aqui que, da combinação dos teoremas 31 e 31′, resulta o

TEOREMA 46: — *Valendo em* $\mathbf{M}$ *a condição dupla de cadeia, é condição necessária e suficiente, para que se tenha* $\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathrm{A}$, *que o endomorfismo* A *tenha um aniquilador* $\mathfrak{Q}_{\mathrm{A}} = (\mathrm{o})$.

TEOREMA 47: — *Se, nos termos dos teoremas 44 e 45, tivermos realizado as condições seguintes:* 1) *para* $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \rho$, *é* $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_i + \mathbf{M}_{i+1} + \ldots + \mathbf{M}_h$, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_{i-1} + \mathbf{M}_i + \mathfrak{P}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{P}_k$; 2) $\mathrm{G}_i = \mathrm{E}_1 \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{E}_i \mathrm{F}_i + \mathrm{E}_{i+1} + \ldots + \mathrm{E}_h$ *e* $\mathrm{H}_i = \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{F}_{i-1} + \mathrm{F}_i \mathrm{E}_i + \mathrm{F}_{i+1} + \ldots + \mathrm{F}_k$ *são automorfismos;* 3) *mediante* G_i *tem-se* $\mathbf{M}_1 \mathrm{G}_i = \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathbf{M}_i \mathrm{G}_i = \mathfrak{P}_i$, *e, mediante,* H_i, *tem-se,* $\mathfrak{P}_1 \mathrm{H}_i = \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_i \mathrm{H}_i = \mathbf{M}_i$; *então, é possível construir* $\mathrm{G}_{\rho+1}$ *e* $\mathrm{H}_{\rho+1}$ *tais que:* α) $\mathrm{G}_{\rho+1} = \mathrm{E}_1 \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{E}_{\rho+1} \mathrm{F}_{\rho+1} + \mathrm{E}_{\rho+2} + \ldots + \mathrm{E}_h$, $\mathrm{H}_{\rho+1} = \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{F}_\rho + \mathrm{F}_{\rho+1} \mathrm{E}_{\rho+1} + \mathrm{F}_{\rho+2} + \ldots + \mathrm{F}_k$ *são automorfismos;* β) $\mathbf{M}_{\rho+1} \mathrm{G}_{\rho+1} = \mathfrak{P}_{\rho+1}$, $\mathfrak{P}_{\rho+1} \mathrm{H}_{\rho+1} = \mathbf{M}_{\rho+1}$; γ) $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_{\rho+1} + \mathbf{M}_{\rho+2} + \ldots + \mathbf{M}_h$, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_\rho + \mathbf{M}_{\rho+1} + \mathfrak{P}_{\rho+2} + \ldots + \mathfrak{P}_k$. Ponhamos $\mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_\rho = \Delta$. Tem-se $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/\Delta = \overline{\mathbf{M}}_{\rho+1} + \ldots + \overline{\mathbf{M}}_h = \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} + \ldots + \overline{\mathfrak{P}}_k$, onde $\overline{\mathbf{M}}_j = (\mathbf{M}_j, \Delta)/\Delta$, $\overline{\mathfrak{P}}_t = (\mathfrak{P}_t, \Delta)/\Delta$. Dum modo geral, no que vai seguir-se, um elemento pertencente a um sub-módulo representado por uma letra gótica maiúscula, tracejada ou não superiormente, será representado pela letra latina minúscula correspondente. Dado $\overline{m}_{\rho+1} = o$, será $m_{\rho+1} = p_1 + \ldots + p_\rho$, o que exige $m_{\rho+1} = p_1 = \ldots = p_h = o$. Há isomorfismo entre os $\mathbf{M}_i$ e os $\overline{\mathbf{M}}_i$, $(i = \rho + 1, \ldots, h)$, assim como entre os $\mathfrak{P}_j$ e os $\overline{\mathfrak{P}}_j$, $(j = \rho + 1, \ldots, k)$. Por isso, escrevendo as duas decomposições supra de $\overline{\mathbf{M}}$, obtemos duas somas directas de sub-grupos indecomponíveis iguais a $\overline{\mathbf{M}}$. O corolário 14 e o teorema 45 garantem a escolha de $\overline{F}_{\rho+1}$ de modo que se tenha: *a)* $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}_{\rho+1} + \ldots + \overline{\mathbf{M}}_h = \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} + \overline{\mathbf{M}}_{\rho+2} + \ldots + \overline{\mathbf{M}}_h = \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} + \ldots + \overline{\mathfrak{P}}_k = \overline{\mathbf{M}}_{\rho+1} + \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+2} + \ldots + \overline{\mathfrak{P}}_k$; *b)* $\overline{\mathbf{M}}_{\rho+1} \simeq \overline{\mathbf{M}}_{\rho+1} \overline{F}_{\rho+1} = \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1}$, $\overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} \simeq \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} \overline{E}_{\rho+1} = \overline{\mathbf{M}}_{\rho+1}$. Posto isto, vejamos que a soma $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\rho+1}, \mathbf{M}_{\rho+2}, \ldots, \mathbf{M}_h)$ é directa. De facto, supondo $x \in (\mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_{\rho+1}) \cap (\mathbf{M}_{\rho+2} + \ldots + \mathbf{M}_h)$, será $\overline{x} = x + \Delta \in \overline{\mathfrak{P}}_{\rho+1} \cap (\overline{\mathbf{M}}_{\rho+2} + \ldots + \overline{\mathbf{M}}_h)$. Portanto, tem-se $\overline{x} = o$, $x = p_1 + \ldots + p_\rho = m_{\rho+2} + \ldots + m_h$, o que leva a $x = o$. Também nos interessa estudar a intersecção $(\mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_\rho + \mathbf{M}_{\rho+1}) \cap (\mathfrak{P}_{\rho+2} + \ldots + \mathfrak{P}_k)$. Supondo que y lhe pertence, tem-se $y = p_1 + \ldots + p_\rho + m_{\rho+1}$, com $y F_1 = o, \ldots, y F_{\rho+1} = o$. Deste modo será $p_1 + m_{\rho+1} F_1 = o, \ldots, p_\rho + m_{\rho+1} F_\rho = o$, $m_{\rho+1} F_{\rho+1} = o$. A fim de continuarmos, precisemos a definição de $\overline{F}_{\rho+1}$: para se encontrar $\overline{m}\,\overline{F}_{\rho+1}$, procura-se um elemento m que tenha $\overline{m}$ como correspondente no homomorfismo $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}/\Delta$, acha-se $m F_{\rho+1}$, e, em seguida, põe-se $\overline{m F_{\rho+1}} = \overline{m}\,\overline{F}_{\rho+1}$. Nestas condições sendo $m_{\rho+1} F_{\rho+1} = o$, é $\overline{m_{\rho+1} F_{\rho+1}} = \overline{m}_{\rho+1} \overline{F}_{\rho+1} = o$, consequentemente $\overline{m}_{\rho+1} = o$, $m_{\rho+1} = o$. Então vê-se que é $y = o$ e que é directa a soma $\mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_\rho + \mathbf{M}_{\rho+1} + \mathfrak{P}_{\rho+2} + \ldots + \mathfrak{P}_k$. Consideremos, em seguida, $G_{\rho+1}$ e $H_{\rho+1}$ e mostremos que se trata de automorfismos. Seja $m = m_1 + \ldots + m_\rho + m_{\rho+1} + \ldots + m_h$ e admitamos $m G_{\rho+1} = o$. Como $m G_{\rho+1} = (m_1 + \ldots + m_\rho)(E_1 F_1 + \ldots + E_\rho F_\rho + E_{\rho+1} F_{\rho+1} + \ldots + E_h) + m_{\rho+1} F_{\rho+1} + m_{\rho+2} + \ldots + m_h = o$, será nula cada parcela. Portanto, $m_{\rho+2} = \ldots = m_h = o$, $m_{\rho+1} F_{\rho+1} = o$ (o que implica $m_{\rho+1} = o$), $(m_1 + \ldots + m_\rho) G_\rho = o$, esta última relação, levando a $m_1 = \ldots = m_\rho = o$. Tem-se $m = o$, como se deseja. Quanto a $H_{\rho+1}$, ponhamos $m = p_1 + \ldots + p_k$, de modo que $m H_{\rho+1} = p_1 + \ldots + p_\rho + p_{\rho+1} E_{\rho+1} + \ldots + p_k$. Se $m H_{\rho+1} = o$, o facto de ser directa a soma referida em último lugar mostra que cada parcela de $m H_{\rho+1}$ é nula. Assim $p_{\rho+1} E_{\rho+1} = o$ (o que implica $p_{\rho+1} = o$) e os restantes p_i são nulos. Conclui-se $m = o$, como se deseja. Do exposto, resulta ainda $\mathbf{M} G_{\rho+1} = \mathbf{M}$, com $\mathbf{M}_i G_{\rho+1} = \mathbf{M}_i G_\rho = \mathfrak{P}_i$, $(i = 1, \ldots, \rho)$, $\mathbf{M}_{\rho+1} G_{\rho+1} = \mathfrak{P}_{\rho+1}$, e, portanto, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_{\rho+1} + \mathbf{M}_{\rho+2} + \ldots + \mathbf{M}_h$; assim como resulta $\mathbf{M} H_{\rho+1} = \mathbf{M}$, com $\mathfrak{P}_i H_{\rho+1} = \mathfrak{P}_i$, $(i \neq \rho + 1)$, $\mathfrak{P}_{\rho+1} \cdot H_{\rho+1} = \mathbf{M}_{\rho+1}$, e, portanto, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_\rho + \mathbf{M}_{\rho+1} + \mathfrak{P}_{\rho+2} + \ldots + \mathfrak{P}_k$.

Podem fazer-se ainda as seguintes observações: *a)* $K_{\rho+1} = F_1 + \ldots + F_\rho + E_{\rho+1} F_{\rho+1} + F_{\rho+2} + \ldots + F_k$ e $L_{\rho+1} = E_1 + \ldots + E_\rho + F_{\rho+1} E_{\rho+1} + E_{\rho+2} + \ldots + E_h$ são automorfismos; *b)* pode escrever-se $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_i + \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Como resultado das considerações anteriores, formularemos agora a seguinte proposição de KRULL, que se encontra demonstrada:

TEOREMA 48: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um grupo com condição dupla de cadeia e se* $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_h$, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_k$ *são duas decomposições directas de* $\mathbf{M}$ *em sub-grupos indecomponíveis, tem-se necessàriamente* $\mathrm{h} = \mathrm{k}$ *e podem ordenar-se os* $\mathfrak{P}_i$ *por forma que:* 1) $\mathrm{G} = \mathrm{E}_1 \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{E}_h \mathrm{F}_h$ *e* $\mathrm{H} = \mathrm{F}_1 \mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{F}_h \mathrm{E}_h$ *são automorfismos;* 2) *valem as igualdades* $\mathbf{M}_\rho \mathrm{G} = \mathfrak{P}_\rho$, $\mathfrak{P}_\rho \mathrm{H} = \mathbf{M}_\rho$, *para cada* $\mathfrak{P} = 1, 2, \ldots, h$.

Em [(II), pág. 35] encontra-se também este outro enunciado:

TEOREMA 42′: — *Seja* $\mathbf{M}$ *um módulo* — Ω *e suponhamos* $(\mathrm{o}) = \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_h$, *com* $(\mathbf{N}_i, (\mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathbf{N}_h)) = \mathbf{M}$, $(i = 1, 2, \ldots, h)$. *Então, pondo* $\mathbf{M}_i = \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{i-1} \cap \mathbf{N}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathbf{N}_h$, *conclui-se:* 1′) $(\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i) = \mathbf{M}$; 2′) $\mathbf{M}_i \cap \mathbf{N}_i = (\mathrm{o})$; 3′) $(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_{i-1}, \mathbf{M}_{i+1}, \ldots, \mathbf{M}_h) = \mathbf{N}_i$; 4′) $(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_h) = \mathbf{M}$.

Da demonstração, que é simples, vamos dar apenas a parte que prova 3′). Sem dúvida que $\mathbf{M}_j \subseteq \mathbf{N}_i$, se $j \neq i$. Resta mostrar que cada $n_i \in \mathbf{N}_i$ pode sempre ser escrito sob a forma $n_i = m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_{i+1} + \ldots + m_h$, $(m_j \in \mathbf{M}_j)$. Dado n_i, se este elemento pertence a todos os $\mathbf{N}_j$, então $n_i = o$ tem a forma indicada. Supondo, de contrário, que, por ex., é $\mathbf{N}_{k_1}$, o primeiro $\mathbf{N}_j$ que não contém n_i, podemos escrever $n_i = n_{k_1} + m_{k_1}$, $(i \neq k_1)$. Vê-se que $n_{k_1} \in \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{k_1}$. Em seguida, seja $\mathbf{N}_{k_1}$, $(i \neq k_2 > k_1)$, o primeiro $\mathbf{N}_j$ que não contém n_{k_1}. Podemos escrever $n_{k_1} = n_{k_2} + m_{k_2}$, com $n_{k_2} \in \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{k_2}$, e também $n_i = n_{k_2} + + m_{k_2} + m_{k_1}$. O raciocínio prossegue, até se chegar a um n_{k_l}, com $i \neq k_l$, pertencente a todos os $\mathbf{N}_j$. Nesse momento é $n_{k_l} = o$ e $n_i = m_{k_1} + \ldots + m_{k_l}$, como se afirmou.

Observemos ainda que se tem $(o) = (\mathbf{N}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{i_k}) \cap \cap (\mathbf{M}_{i_1}, \ldots, \mathbf{M}_{i_k})$. [Comparar esta afirmação com o teorema seguinte].

É agora válido este

TEOREMA 43′: — *Nas condições do teorema 42′ existem idempotentes* $\mathrm{E}'_1, \ldots, \mathrm{E}'_h$, *tais que:* 5′) $\mathbf{N}_i$ *é o aniquilador modular de* E'_i *e o ideal direito aniquilador de* $\mathbf{N}_i$ *é* $\mathfrak{s}'_i = \mathrm{E}'_i \overline{\Omega}$; 6′) $1 = \mathrm{E}'_1 + \ldots + \mathrm{E}'_h$ *e* $\mathrm{E}'_i \mathrm{E}'_j = o$, *se* $i \neq j$; 7′) $\overline{\Omega} = \mathrm{E}'_1 \overline{\Omega} + + \ldots + \mathrm{E}'_h \overline{\Omega}$; 8′) *o ideal de contracções em* $\mathbf{N}_i$ *é* $\mathfrak{n}_i = \overline{\Omega} \mathrm{E}'_1 + + \ldots + \overline{\Omega} \mathrm{E}'_{i-1} + \overline{\Omega} \mathrm{E}'_{i+1} + \ldots + \overline{\Omega} \mathrm{E}'_h$; 9′) *o ideal direito aniquilador de* $\mathbf{M}_i$ *é* $\mathrm{E}'_1 \overline{\Omega} + \ldots + \mathrm{E}'_{i-1} \overline{\Omega} + \mathrm{E}'_{i+1} \overline{\Omega} + \ldots + + \mathrm{E}'_k \overline{\Omega}$; 10′) *o ideal de contracções em* $\mathbf{M}_i$ *é* $\mathfrak{m}_i = \overline{\Omega} \mathrm{E}'_i$.
A afirmação 5′) resulta imediatamente do corolário D′. Em seguida, escrevamos, para $x \in \mathbf{M}$, $x = m_1 + \ldots + m_h$, com $m_i \in \mathbf{M}_i$. O corolário D′ garante-nos também ser $\mathbf{M}_i$ o aniquilador modular de $1 - E'_i$. Por isso, sendo $m_i = m_i E'_i + + m_i (1 - E'_i)$, tem-se $m_i = m_i E'_i$. Nessas condições, por via de 3′), é $x E'_i = m_i E'_i = m_i$, de sorte que $x (E'_1 + \ldots + + E'_h) = x E'_1 + \ldots + x E'_h = m_1 + \ldots + m_h = x$. Por outro lado $x E'_i E'_j = m_i E'_j = o$, se $i \neq j$, pelo que 6′) fica provado. 7′) traduz uma propriedade elementar da teoria dos anéis; 8′), 9′) e 10′) encontram-se como consequências dos teoremas A (§ 2), 19 e 19′ (§ 6).

Com o objectivo de ser demonstrado o teorema correspondente ao de KRULL, vamos tratar certas proposições preliminares, algumas das quais também se encontram em [(II), págs. 11 e 12].

TEOREMA 44′: — *Seja* $\mathbf{M}$ *um módulo* — Ω *no qual tem lugar a condição dupla de cadeia e admitamos realizarem-se as condições dos teoremas 42′ e 43′, com duas representações* $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \cap \ldots \cap \mathbf{N}_h$, $(o) = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_k$, *sob a restrição, apenas, de os grupos diferenças* $\mathbf{M}/\mathbf{N}_i$ e $\mathbf{M}/\mathfrak{Q}_j$ *serem indecomponíveis; então, se as decomposições correspondentes de* 1 *forem* $1 = \mathrm{E}'_1 + + \ldots \mathrm{E}'_h$, $1 = \mathrm{F}'_1 + \ldots + \mathrm{F}'_k$, *existe um* F'_j *tal que* $\mathrm{F}'_j \mathrm{E}'_k$ *define um automorfismo de* $\mathbf{M}_1$. Estudemos o isomorfismo $\mathbf{M}/\mathbf{N}_1 \simeq \simeq \mathbf{M}_1$. Dado o elemento $m + \mathbf{N}_1$, supondo $m = m_1 + n_1 =$

$= m E'_1 + m (1 - E'_1)$, o isomorfismo em questão determina a correspondência $m + \mathbf{N}_1 \rightarrow m E'_1$. Por via de $F'_j E'_1$ define-se um endomorfismo de $\mathbf{M}_1$: $m E'_1 \rightarrow m E'_1 F'_j E'_1$. Este último elemento é correspondente de $m E'_1 F'_j + \mathbf{N}_1$ no isomorfismo anterior. Assim, ao endomorfismo $F'_j E'_1$ corresponde um endomorfismo de $\mathbf{M}/\mathbf{N}_1$, segundo o qual $m + + \mathbf{N}_1 \rightarrow m E'_1 F'_j + \mathbf{N}_1$. Nestas condições, $(F'_1 + \ldots + + F'_k) E'_1 = E'_1 = F'_1 E'_1 + \ldots + F'_k E'_1$ tem este outro endomorfismo de $\mathbf{M}/\mathbf{N}_1$ como correspondente: $m + \mathbf{N}_1 \rightarrow \rightarrow m (E'_1 F'_1 + \ldots + E'_1 F'_k) + \mathbf{N}_1 = m E'_1 + \mathbf{N}_1$. Visto ser $(m - m E'_1) E'_1 = o$, segue-se que o endomorfismo anterior é o automorfismo idêntico. Como no teorema 44, existe um $F'_j E'_1$ que é um automorfismo de $\mathbf{M}_1$ e tal que a correspondência $m + \mathbf{N}_1 \rightarrow m E'_1 F'_j + \mathbf{N}_1$ é um automorfismo do grupo diferença em causa. Ele resulta da aplicação habitual de $E'_1 F'_j$ ao mesmo grupo. Segue-se daqui o seguinte

ADITAMENTO: — $\mathbf{N}_1$ *é precisamente o aniquilador modular de* $\mathrm{E}'_1 \mathrm{F}'_j$. De facto, o raciocínio anterior mostra que o referido aniquilador não pode ser $\mathfrak{L} \supset \mathbf{N}_1$, visto que, supondo $x \in \mathfrak{L}$, $x \notin \mathbf{N}_1$, será $x + \mathbf{N}_1 \neq o$ e $(x + \mathbf{N}_1) E'_1 F'_j = x E'_1 F'_j + + \mathbf{N}_1 = o$, o que é absurdo.

Uma vez determinado o automorfismo $F'_j E'_1$, dispúnhamos dos $\mathfrak{Q}_i$ por forma a colocar $\mathfrak{Q}_j$ em primeiro lugar. Podemos imaginar, assim, que $F'_1 E'_1$ é o automorfismo em questão. Tem lugar o seguinte:

COROLÁRIO 14′: — *O endomorfismo* F'_1 *determina o isomorfismo* $\mathbf{M}_1 \simeq \mathbf{M}_1 \mathrm{F}'_1 = \mathfrak{P}_1$, *e o endomorfismo* E'_1 *define o isomorfismo* $\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{P}_1 \mathrm{E}'_1 = \mathbf{M}_1$. Bem entendido que, neste enunciado, $\mathfrak{P}_1$ é um dos sub-grupos $\mathfrak{P}_i$ definidos pelas relações $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_{i-1} \cap \mathfrak{Q}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_k$, $(i = = 1, 2, \ldots, k)$. Então, não distinguiremos entre este corolário e o corolário 14, visto que, como de resto já se encontra implícito em raciocínios anteriores, fàcilmente se vê ter-se $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_h$, $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_k$, como somas directas.

ADITAMENTO: — *$\mathfrak{Q}_1$ é precisamente o aniquilador modular de* $F'_1E'_1$. De facto, dado o elemento $m+\mathfrak{Q}_1$, se pusermos $m=p_1+q_1$, tem-se $p_1=mF'_1$. O isomorfismo $\mathbf{M}/\mathfrak{Q}_1 \simeq \mathfrak{P}_1$ determina a correspondência $m+\mathfrak{Q}_1 \to mF'_1$. Por via de $E'_1F'_1$ define-se um automorfismo de $\mathfrak{P}_1$: $mF'_1 \to mF'_1E'_1F'_1$. O elemento de $\mathbf{M}/\mathfrak{Q}_1$ que tem este último elemento como correspondente é $mF'_1E'_1+\mathfrak{Q}_1$. Deste modo, $F'_1E'_1$ é um automorfismo do grupo diferença. Não pode agora o aniquilador modular de $F'_1E'_1$ ser $\mathfrak{R}\supset\mathfrak{Q}_1$, como se sabe.

TEOREMA 45′: — *Pondo, nos termos do teorema 44′ (com* $F'_j=F'_1$), $G'_1=E'_1F'_1+E'_2+\dots+E'_h$, *define-se um automorfismo de* $\mathbf{M}$. *São também automorfismos de* $\mathbf{M}$ *os seguintes endomorfismos:* $H'_1=F'_1E'_1+F'_2+\dots+F_k$, $K'_1=E'_1F'_1+F'_2+\dots+F'_k$, $L'_1=F'_1E'_1+E'_2+\dots+E'_h$. Temos de verificar que o aniquilador modular de G'_1 é nulo. Supondo $xG'_1=xE'_1F'_1+xE'_2+\dots+xE'_h=o$, a ortogonalidade dos E'_i dá $xE'_1F'_1E'_1=o$. Conclui-se $xE'_1F'_1 \in \mathbf{N}_1$, $xE'_1 \in \mathfrak{Q}_1$. Será, portanto, $xE'_1F'_1=o$, $x\in\mathbf{N}_1$. Em seguida, tendo em conta a relação $xE'_2+\dots+xE'_h=o$, conclui-se $x\in\mathbf{N}_2\cap\dots\cap\mathbf{N}_k$. Nestes termos é $x=o$ e G'_1 é automorfismo (teor. 31, § 7). Anàlogamente, admitamos $xH'_1=xF'_1E'_1+xF'_2+\dots+xF'_k=o$. Tem-se $xF'_1E'_1F'_1=o$, $xF'_1\in\mathbf{N}_1$, $xF'_1E'_1=o$, $x\in\mathfrak{Q}_1$. Depois, é também $x\in\mathfrak{Q}_2\cap\dots\cap\mathfrak{Q}_k$, de sorte que $x=o$, como se deseja. Quanto a K'_1, de $xK'_1=xE'_1F'_1+xF'_2+\dots+xF'_k=o$, tira-se $x\in\mathbf{N}_1$, $x\in\mathfrak{Q}_2\cap\dots\cap\mathfrak{Q}_k$. Ora é fácil de ver que $\mathbf{N}_1\cap\mathfrak{Q}_2\cap\dots\cap\mathfrak{Q}_k=\mathbf{N}_1\cap\mathfrak{P}_1=(o)$. Na verdade, para y pertencente à intersecção, tem-se $yF'_1=y$, $yF'_1E'_1=yE'_1=o$, $y\in\mathfrak{Q}_1$, e, portanto, $y=o$. Finalmente, a consideração de L'_1 levar-nos-ia a mostrar que se trata dum automorfismo e que $\mathfrak{Q}_1\cap\mathbf{N}_2\cap\dots\cap\mathbf{N}_h=(o)$.

NOTAÇÕES: — No que vai seguir-se, para simplicidade de escrita, poremos $\mathfrak{P}_1+\dots+\mathfrak{P}_i=\Delta_i$, $\mathfrak{Q}_1\cap\dots\cap\mathfrak{Q}_i=\nabla_i$, $\mathbf{N}_1\cap\dots\cap\mathbf{N}_i=V_i$.

É válido o seguinte aditamento ao teorema anterior:

ADITAMENTO: — *Mantendo as condições do teorema 45′, pode substituir-se, em* V_h, $\mathbf{N}_1$ *por* $\mathfrak{Q}_1$, *e, em* ∇_k, $\mathfrak{Q}_1$ *por* $\mathbf{N}_1$, *de modo que* $\mathfrak{Q}_1\cap\mathbf{N}_2\cap\dots\cap\mathbf{N}_k=(o)=\mathbf{N}_1\cap\mathfrak{Q}_2\cap\dots\cap\mathfrak{Q}_k$. *Além disso, tem-se* $\mathbf{N}_1G'_1=\mathbf{N}_1$, $\mathfrak{Q}_1H'_1=\mathfrak{Q}_1$, $\mathbf{N}_1K'_1=\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_1L'_1=\mathbf{N}_1$. Quanto à última parte, limitemo-nos a provar, por ex., as igualdades $\mathfrak{Q}_1H'_1=\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_1L'_1=\mathbf{N}_1$. Tem-se imediatamente $\mathfrak{Q}_1H'_1=\mathfrak{Q}_1(F'_1E'_1+F'_2+\dots+F'_k)=\mathfrak{Q}_1(F'_2+\dots+F'_k)=\mathfrak{Q}_1(1-F'_1)=\mathfrak{Q}_1$. Depois, tendo em conta que $\mathbf{M}=\mathbf{M}H'_1=(\mathfrak{P}_1,\mathfrak{Q}_1)H'_1=(\mathfrak{P}_1E'_1,\mathfrak{Q}_1)=(\mathbf{M}_1,\mathfrak{Q}_1)=\mathbf{M}_1+\mathfrak{Q}_1$, e que $\mathfrak{Q}_1L'_1=\mathfrak{Q}_1(F'_1E'_1+E'_2+\dots+E'_h)=\mathfrak{Q}_1(E'_2+\dots+E'_h)$, $\mathfrak{Q}_1L'_1E'_1=\mathfrak{Q}_1F'_1E'_1=(o)$, $\mathfrak{Q}_1L'_1\subseteq\mathbf{N}_1$, obtém-se $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\mathfrak{Q}_1=\mathbf{M}L'_1=\mathbf{M}_1L'_1+\mathfrak{Q}_1L'_1=\mathbf{M}_1+\mathfrak{Q}_1L'_1$, $\mathbf{N}_1=\mathfrak{Q}_1L'_1+\mathbf{N}_1\cap\mathbf{M}_1=\mathfrak{Q}_1L'_1$.

Há um teorema 46′, a saber:

TEOREMA 46′: — *Valendo em* $\mathbf{M}$ *a condição dupla de cadeia, é condição necessária e suficiente, para que tenha* $\mathfrak{Q}_A=(o)$, *que o endomorfismo* A *verifique a igualdade* $\mathbf{M}=\mathbf{M}A$.

TEOREMA 47′: — *Se, nos termos dos teoremas 44′ e 45′, tivermos realizado as condições seguintes: 1′) para* $i=1,2,\dots,\rho$ *é* $\mathbf{M}=\Delta_i+\mathbf{M}_{i+1}+\dots+\mathbf{M}_h$, $\mathbf{M}=\Delta_{i+1}+\mathbf{M}_i+\mathfrak{P}_{i+1}+\dots+\mathfrak{P}_h$; *2′)* $G'_i=E'_1F'_1+\dots+E'_iF'_i+E'_{i+1}+\dots+E'_h$, $H'_i=F'_1+\dots+F'_{i-1}+F'_iE'_i+F'_{i+1}+\dots+F'_k$, $K'_i=F'_1+\dots+F'_{i-1}+E'_iF'_i+F'_{i+1}+\dots+F'_k$, $L'_i=E'_1+\dots+E'_{i-1}+F'_iE'_i+E'_{i+1}+\dots+E'_h$ *são automorfismos; 3′) mediante* G'_i *tem-se* $\mathbf{M}_1G'_i=\mathfrak{P}_1,\dots,\mathbf{M}_iG'_i=\mathfrak{P}$, *e, mediante* H'_i, *tem-se* $\mathfrak{P}_1H'_i=\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_iH'_i=\mathbf{M}_i$; *então, é possível construir* $G'_{\rho+1}$, $H'_{\rho+1}$, $K'_{\rho+1}$ *e* $L'_{\rho+1}$, *dando a* i *o valor* $\rho+1$, *tais que: α′) as referidas expressões representam automorfismos; β′)* $\mathbf{M}_{\rho+1}G'_{\rho+1}=\mathfrak{P}_{\rho+1}$, $\mathfrak{P}_{\rho+1}H'_{\rho+1}=\mathbf{M}_{\rho+1}$; *γ′)* $\mathbf{M}=\Delta_{\rho+1}+\mathbf{M}_{\rho+2}+\dots\mathbf{M}_h$, $\mathbf{M}=\Delta_\rho+\mathbf{M}_{\rho+1}+\mathfrak{P}_{\rho+2}+\dots+\mathfrak{P}_k$. Este teorema não é mais do que o teorema 47.

*

ADITAMENTO AO TEOREMA 47′: — *Supondo, nos termos dos teoremas 44′ e 45′ e seus aditamentos, que se realizaram as condições seguintes: 1″) para cada* $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \rho$ é V_{i} *o aniquilador modular de* $E_1' F_1' + \ldots + E_{\mathrm{i}}' F_{\mathrm{i}}'$, 2″) ∇_{i} *é o aniquilador de* $F_1' E_1' + \ldots + F_{\mathrm{i}}' E_{\mathrm{i}}'$; 3″) $\mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{\mathrm{i}-1} \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{i}} \cap \cap \mathbf{N}_{\mathrm{i}+1} \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{\mathrm{h}} = (o)$, $\mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{i}-1} \cap \mathbf{N}_{\mathrm{i}} \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{i}+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{k}} = (o)$; *então, as mesmas propriedades têm lugar pondo* $\mathrm{i} = \rho + 1$. *Além disso, tem-se* $V_{\rho+1} G'_{\rho+1} = V_{\rho+1}$, $\nabla_{\rho+1} H'_{\rho+1} = \nabla_{\rho+1}$, $(\mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1}) K'_{\rho+1} \subseteq \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_{\rho+1}$ *e* $(\mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_\rho \cap \mathfrak{Q}_{\rho+1}) L'_{\rho+1} \subseteq \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{\rho+1}$. De facto, se $x(E_1' F_1' + \ldots + E'_{\rho+1} F'_{\rho+1}) = o$, tem-se $x(E_1' F_1' + \ldots + E_\rho' F_\rho') = o$, $x E'_{\rho+1} F'_{\rho+1} = o$, portanto $x \in V_\rho$ e $x E'_{\rho+1} F'_{\rho+1} = o$. Depois, escrevendo $x = m_{\rho+1} + n_{\rho+1}$, vê-se que $x E'_{\rho+1} F'_{\rho+1} = m_{\rho+1} F'_{\rho+1} = o'$. Os raciocínios do teorema 47 levam a $m_{\ +1} = o$, pelo que $x \in \mathbf{N}_{\rho+1}$, ou seja $x \in V_{\rho+1}$. Inversamente, um elemento de $V_{\rho+1}$ é anulado por $E_1' F_1' + \ldots + E'_{\rho+1} F'_{\rho+1}$. Passando a 2″), imaginemos $x(F_1' E_1' + \ldots + F'_{\rho+1} E'_{\ +1}) = o$, e, portanto, $x \in \nabla_\rho$, $x F'_{\rho+1} E'_{\rho+1} = o$. Pondo também $x = p_{\rho+1} + q_{\rho+1}$, vê-se que $p_{\rho+1} E'_{\rho+1} = o$. Como no teorema 47, conclui-se daqui $\bar{p}_{\rho+1} \bar{E}'_{\rho+1} = o$, $\bar{p}_{\rho+1} = o$, $p_{\rho+1} = o$, e, portanto, $x \in \mathfrak{Q}_{\rho+1}$, $x \in \nabla_{\rho+1}$. No que toca a 3″), faz-se a demonstração observando que $L'_{\rho+1}$ e $K'_{\rho+1}$ são automorfismos. Finalmente, tem-se por ex., $(\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1}) K'_{\rho+1} = (\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1})(F_1' + \ldots + F_\rho' + E'_{\rho+1} F'_{\rho+1} + \ldots + F_k') = (\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1})(F'_{\rho+2} + \ldots + F_k')$, de sorte que $(\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1}) K'_{\rho+1} F_1' = \ldots = (\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1}) K'_{\rho+1} F'_{\rho+1} = (o)$, e, portanto, $(\nabla_\rho \cap \mathbf{N}_{\rho+1}) K'_{\rho+1} \subseteq \nabla_{\rho+1}$.

OBSERVAÇÃO: — Do facto de se ter $\mathbf{M} = \mathfrak{P}_1 + \ldots + \mathfrak{P}_{\rho+1} + \mathbf{M}_{\rho+2} + \ldots + \mathbf{M}_h$, conclui-se que é $\mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{\rho+1} \cap \mathfrak{Q}_{\rho+2} \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_k = (o)$.

Como resultado das considerações anteriores, formularemos agora a seguinte proposição, correspondente

à de KRULL, sempre sob as hipóteses dos teoremas 42′ e 44′:

TEOREMA 48′: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um grupo com condição dupla de cadeia e se* $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{\mathrm{h}}$, $(o) = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_{\mathrm{k}}$ *são duas representações de* (o), *sob a hipótese de os grupos diferenças* $\mathbf{M}/\mathbf{N}_{\mathrm{i}}$, $\mathbf{M}/\mathfrak{Q}_{\mathrm{j}}$ *serem indecomponíveis, tem-se necessàriamente* $\mathrm{h} = \mathrm{k}$ *e podem ordenar-se os* $\mathfrak{Q}_{\mathrm{i}}$ *por forma que:* 1′) $G' = E_1' F_1' + \ldots + E_{\mathrm{h}}' F_{\mathrm{h}}'$ *e* $H' = F_1' E_1' + \ldots + F_{\mathrm{h}}' E_{\mathrm{h}}'$ *são automorfismos;* 2′) *valem as igualdades* $\mathbf{M}_\rho G' = \mathfrak{P}_\rho$, $\mathfrak{P}_\rho H' = \mathbf{M}_\rho$, *para cada* $\rho = 1, 2, \ldots, \mathrm{h}$. Podemos acrescentar que os grupos diferenças $\mathbf{M}/\mathbf{N}_i$ e $\mathbf{M}/\mathfrak{Q}_i$ são, então, isomorfos. E também vale o seguinte

ADITAMENTO: — *Nas condições do teorema 48′, tem-se, para cada* $\rho = 1, 2, \ldots, \mathrm{h}$, $\mathbf{N}_\rho G' = \mathfrak{Q}_\rho$, $\mathfrak{Q}_\rho H' = \mathbf{N}_\rho$.

11) **Somas directas completas e discretas** — Seja M um conjunto qualquer de elementos $\mu, \nu, \ldots$ e associemos a cada $\mu \in M$ um módulo $\mathfrak{m}_\mu$. Em seguida, definamos um conjunto $\mathfrak{L}$ do modo seguinte: $X \in \mathfrak{L}$ significa um conjunto de elementos $x_\mu \in \mathfrak{m}_\mu$, obtido tomando um elemento em cada $\mathfrak{m}_\mu$; $\mathfrak{L}$ compõe-se de todos os possíveis $X, Y, \ldots$. Dados $X, Y \in \mathfrak{L}$, diz-se *soma* $X + Y$ o conjunto dos elementos $x_\mu + y_\mu$, nos quais os y_μ entraram na definição de Y. O conjunto $\mathfrak{L}$ é um módulo, chamado *soma directa completa dos módulos* $\mathfrak{m}_\mu$, escrevendo-se $\mathfrak{L} = \mathbf{M} = S(\mathfrak{m}_\mu, \mu \in M)$.

Consideremos, em particular, aqueles elementos $X \in \mathbf{M}$ obtidos tomando apenas um número finito de elementos x_μ não nulos. A soma $X + Y$ de dois elementos dessa forma é ainda um elemento dessa forma. A totalidade $\mathbf{M}_o$ de tais elementos diz-se *soma directa discreta dos módulos* $\mathfrak{m}_\mu$, escrevendo-se $\mathbf{M}_o = \sum_{\mu \in M} \mathfrak{m}_\mu$. Mais restritamente ainda, podemos considerar aqueles elementos $X_o = X \in \mathbf{M}$, $(X_o \in \mathbf{M}_o)$, para os quais só um elemento x_μ é diferente de zero. Fixando μ e tomando a totalidade dos X_o correspondentes, obtém-se um conjunto $\bar{\mathfrak{m}}_\mu$, isomorfo de $\mathfrak{m}_\mu$. Na verdade, então, tem-se $\mathbf{M}_o = \Sigma\, \bar{\mathfrak{m}}_\mu$, mas nós imaginaremos os $\bar{\mathfrak{m}}_\mu$ substituídos pelos módulos isomorfos $\mathfrak{m}_\mu$ e escreveremos como acima se fez. Neste sentido, tem-se $\mathfrak{m}_\mu \subseteq \mathbf{M}_o$.

Podem dar-se definições semelhantes para sistemas de anéis. É o que faremos em Capítulo posterior, especialmente consagrado à teoria das somas sub-directas e dos anéis semi-simples (JACOBSON, [5], e também: [16] — BAYLEY BROWN e NEAL H. McCOY, *Radicals and Subdirect Sums*, «American Journal of Mathematics, vol. LXIX, 1947, págs. 46 a 58).

12) **Um exemplo de soma directa discreta** — Tomemos um módulo $\mathbf{M}$ e consideremos o anel $\mathfrak{A}$ dos seus endomorfismos. Extraiamos de $\mathfrak{A}$ um conjunto $\{A_\sigma\}$. O referido conjunto diz-se *somável* (NAKAYAMA-AZUMAYA, [9]), se, para cada $x \in \mathbf{M}$, se tiver $x A_\sigma = o$, salvo para um número finito de $A_\sigma A_\sigma$. Pode, então, dar-se sentido à soma ΣA_σ, que definirá o endomorfismo $x \to x \,.\, \Sigma A_\sigma$. Se $B \in \mathfrak{A}$, fàcilmente se concluem as relações distributivas

$$(\Sigma A_\sigma) B = \Sigma A_\sigma B, \qquad B(\Sigma A_\sigma) = \Sigma B A_\sigma.$$

Havendo, para $\mathbf{M}$, um domínio operatório anular $\mathfrak{R}$, consideremos, em vez desse domínio, a sua imagem-anular $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{A}$. Depois, utilizemos o anel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}_1} = \overline{\mathfrak{R}}$ dos endomorfismos — $\mathfrak{R}$, de $\mathbf{M}$, [Cfr. (I), pág. 231]. É claro que se tem $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = \mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}} \supseteq \mathfrak{R}_1$. Quando for $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = \mathfrak{R}_1$, diz-se que $\mathfrak{R}$ é um *domínio fechado* relativamente a $\mathbf{M}$.

Posto isto, sejam $\mathfrak{m}$ um módulo — $\mathfrak{R}$ e M um conjunto de elementos μ. Façamos corresponder a cada $\mu \in M$ um módulo — $\mathfrak{R}$, que designaremos por $\mathfrak{m}_\mu$ e *suporemos isomorfo de* $\mathfrak{m}$. A soma directa discreta $\mathbf{M} = \sum_{\mu \in M} \mathfrak{m}_\mu$ constitui um módulo — $\mathfrak{R}$, do qual vamos estudar o anel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$, para provarmos o seguinte

TEOREMA 49: — *Dada a soma directa* $\mathbf{M} = \sum_{\mu \in M} \mathfrak{m}_\mu$, *de módulos* — $\mathfrak{R}$, *isomorfos* — $\mathfrak{R}$ *dum módulo* $\mathfrak{m}$, *o anel* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}$, *dos endomorfismos* — $\mathfrak{R}$, de $\mathbf{M}$, *é isomorfo do anel de todas as matrizes (transfinitas), com* M *dimensões, formadas de linhas somáveis de endomorfismos* — $\mathfrak{R}$ *pertencentes ao comutador* $\mathfrak{K}$, *de* $\mathfrak{R}$, *no anel dos endomorfismos de* $\mathfrak{m}$, [9].

Esta proposição, que generaliza a que foi dada em [(I), pág. 228], demonstra-se por um processo análogo, tomadas que sejam algumas precauções. Em primeiro lugar, representaremos por $\alpha\alpha$ (ou $\beta\beta$) os elementos de $\mathfrak{K}$, de sorte que $\alpha_{\mu\nu}$, onde $\mu, \nu \in M$, será o elemento geral duma matriz quadrada com M dimensões e com elementos de $\mathfrak{K}$. A soma de duas tais matrizes de linhas somáveis é ainda uma matriz de linhas somáveis. Vamos mostrar que o produto das mesmas duas matrizes é ainda uma matriz de linhas somáveis. Um elemento da matriz produto é da forma

$$\gamma_{\mu\nu} = \sum_{\rho \in M} \alpha_{\mu\rho} \beta_{\rho\nu}, \qquad (\mu, \nu \text{ fixos}).$$

É bem definido, pois que, tomando $x \in \mathbf{M}$, na linha μ há apenas um número finito de valores de ρ tais que $x \alpha_{\mu\rho} \neq o$. Então, só se torna necessário utilizar também um número finito de $\beta_{\rho\nu}$, ficando bem determinada a aplicação de $\gamma_{\mu\nu}$ ao elemento x. Estudemos, em seguida, a linha μ do produto. Trata-se de ver que tem sentido falar do endomorfismo

$$\sum_{\nu \in M} \Big(\sum_{\rho \in M} \alpha_{\mu\rho} \beta_{\rho\nu} \Big), \qquad (\nu \in M, \ \mu \text{ fixo}).$$

Voltemos a tomar $x \in \mathbf{M}$. A cada $\nu \in M$, como já se disse, corresponde uma soma

$$\alpha_{\mu a} \beta_{a\nu} + \dots + \alpha_{\mu q} \beta_{q\nu}, \qquad (a, \dots, q \in M, \text{ fixos}). \tag{2}$$

Importa verificar que, fazendo variar ν, das somas anteriores apenas um número finito delas não leva a zero, quando aplicadas a x. Escrevamos as diferentes somas (4):

$$\begin{array}{l} \alpha_{\mu a} \beta_{a\lambda} + \alpha_{\mu b} \beta_{b\lambda} + \dots + \alpha_{\mu q} \beta_{q\lambda}\,; \\ \alpha_{\mu a} \beta_{a\sigma} + \alpha_{\mu b} \beta_{b\sigma} + \dots + \alpha_{\mu q} \beta_{q\sigma}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{3}$$

Considerado o elemento $x\,\alpha_{\mu a} \in \mathbf{M}$, apenas um número finito de elementos $\beta_{a\lambda}, \beta_{a\sigma}, \ldots$ pode levar a $x\,\alpha_{\mu a}\,\beta_{a\lambda} \neq o, \ldots$; o mesmo se diz de $x\,\alpha_{\mu b}$ e de $\beta_{b\lambda}, \beta_{b\sigma}, \ldots$, etc.; de sorte que só um número finito de somas (3) está nas condições em causa.

Postas estas considerações, a construção do anel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ faz-se como em [(I), pág. 226] ou em Almeida Costa, [10]. Ponhamos, de facto, $\mathbf{M} = \sum\limits_{\mu} \mathfrak{m}_\mu$. Dado $x \in \mathbf{M}$, devemos escrever $x = m_\lambda + \ldots + m_\nu$, com um número finito de parcelas e com $m_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$, etc. A correspondência $x \to m_\lambda$ é um endomorfismo $E_\lambda = E_{\lambda\lambda} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}$. Cada endomorfismo E_μ é idempotente e os produtos $E_\mu E_\nu$ são nulos. O endomorfismo idêntico $1 \in \overline{\mathfrak{R}}$ tem a decomposição $1 = \sum\limits_{\rho \in M} E_\rho$. Na verdade, tomemos $x = m_\lambda + \ldots + m_\nu$. Da soma ΣE_ρ, apenas se tem $x E_\rho \neq o$ quando $\rho = \lambda, \mu, \ldots, \nu$. E, então, $x(E_\lambda + \ldots + E_\nu) = m_\lambda + \ldots + m_\nu = x$. Para a construção das restantes matrizes unidades, procede-se do modo que vai ver-se. Representemos por φ_λ o isomorfismo $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{m}\varphi_\lambda$. O isomorfismo $\mathfrak{m}_\lambda \simeq \mathfrak{m}_\sigma$ resultará tendo em conta as relações

$$\mathfrak{m}_\lambda \varphi_\lambda^{-1} = \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}\varphi_\sigma = \mathfrak{m}_\sigma = \mathfrak{m}_\lambda \varphi_\lambda^{-1} \varphi_\sigma .$$

Poremos, deste modo, $\Delta_{\lambda\sigma} = \varphi_\lambda^{-1}\varphi_\sigma$, para representar o isomorfismo, bem determinado, que leva de $\mathfrak{m}_\lambda$ a $\mathfrak{m}_\sigma$. Em seguida, será $E_\lambda \Delta_{\lambda\sigma} = E_{\lambda\sigma}$. Vê-se imediatamente que $x E_{\lambda\sigma} E_{\sigma\rho} = m_\lambda \Delta_{\lambda\sigma} E_\sigma \Delta_{\sigma\rho} = m_\gamma \varphi_\lambda^{-1} \varphi_\sigma \varphi_\sigma^{-1} \varphi_\rho = m_\lambda \Delta_{\lambda\rho} = x E_\lambda \Delta_{\lambda\rho} = x E_{\lambda\rho}$, pelo que

$$E_{\lambda\sigma} E_{\sigma\rho} = E_{\lambda\rho}, \quad \text{e também} \quad E_{\lambda\sigma} E_{\tau\rho} = o, \quad \text{se} \quad \sigma \neq \tau.$$

Quando se tomam dois módulos $\mathfrak{m}_\alpha$ e $\mathfrak{m}_\beta$, além do isomorfismo $\Delta_{\alpha\beta}$, já considerado, há homomorfias $-\mathfrak{R} = \Sigma_{\alpha\beta}$: $\mathfrak{m}_\alpha \sim \mathfrak{m}'_\beta \subseteq \mathfrak{m}_\beta$. Também essas homomorfias se prolongam e

tornam em endomorfismos $-\mathfrak{R}$, de $\mathbf{M}$, considerando os símbolos $E_\alpha \Sigma_{\alpha\beta} = E_\alpha \Sigma_{\alpha\beta} E_\alpha = S_{\alpha\beta}$.

Seja agora um endomorfismo arbitrário $S \in \overline{\mathfrak{R}}$. Dado $x \in \mathbf{M}$, ponhamos, por ex.,

$$\begin{aligned} x &= m_\lambda + \ldots + m_\sigma = x E_\lambda + \ldots + x E_\sigma, \\ x S &= x E_\lambda S + \ldots + x E_\sigma S, \\ x E_\lambda S &= x E_\lambda S E_\alpha + \ldots + x E_\lambda S E_\gamma, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x E_\sigma S &= x E_\sigma S E_\mu + \ldots + x E_\sigma S E_\tau, \end{aligned}$$

e observemos poder escrever-se, também por ex., $E_\lambda S E_\alpha = E_\lambda \cdot E_\lambda S E_\alpha \cdot E_\alpha = E_\lambda \Sigma_{\lambda\alpha} E_\alpha = S_{\lambda\alpha}$, onde $\Sigma_{\lambda\alpha}$ representa a homomorfia $\mathfrak{m}_\lambda \sim \mathfrak{m}_\alpha$, que se define aplicando $E_\lambda S E_\alpha$ aos elementos de $\mathfrak{m}_\lambda$. Vê-se que, para cada x, há apenas um número finito de endomorfismos $S_{\lambda\mu} = E_\lambda S E_\mu$ que levam a um resultado diferente de zero, o que permite dar a S a forma

$$S = \sum_{\lambda,\,\mu \in M} S_{\lambda\mu}$$

e considerar o 2.º membro como um quadrado geométrico somável. Reciprocamente, tomando um sistema somável $\{S_{\lambda\mu}\}$, define-se $S = \Sigma S_{\lambda\mu}$ como um endomorfismo $-\mathfrak{R}$.

A demonstração do teorema 49 vai terminar como em [(I), pág. 227 e seguintes] ou em Almeida Costa, ([10], págs. 23 e 24). Para isso, daremos o seguinte

Lema 1: — *Dada a soma* $\mathbf{M} = \Sigma\,\mathfrak{m}_\mu$, *referida no teorema 49, supondo* $1 = \Sigma\,\mathrm{E}_\rho$, *o anel* $\overline{\mathfrak{R}}_{\alpha\alpha} = \mathrm{E}_\alpha \overline{\mathfrak{R}}\,\mathrm{E}_\alpha$ *é isomorfo do anel dos endomorfismos* $-\mathfrak{R}$ *do sub-módulo* $\mathfrak{m}_\alpha$.

Com efeito, se forem $S_{\alpha\alpha} = E_\alpha S E_\alpha$, $T_{\alpha\alpha} = E_\alpha T E_\alpha$, $(S, T \in \overline{\mathfrak{R}})$, elementos de $\overline{\mathfrak{R}}_{\alpha\alpha}$, vamos ver que há endomorfismos $-\mathfrak{R}$, de $\mathfrak{m}_\alpha$, representados por $\Sigma_{\alpha\alpha}, \theta_{\alpha\alpha}$, em correspondência biunívoca com aqueles, correspondência que é, depois disso, anular isomorfa. Podemos escrever

$$S_{\alpha\alpha} = E_\alpha S E_\alpha = E_\alpha \cdot E_\alpha S E_\alpha = E_\alpha \Sigma_{\alpha\alpha},$$

o que determina $\Sigma_{\alpha\alpha}$.

Por outro lado,

$$S_{\alpha\alpha}+T_{\alpha\alpha}=E_\alpha\,.\,E_\alpha(S+T)\,E_\alpha=E_\alpha(E_\alpha SE_\alpha+E_\alpha TE_\alpha)=$$
$$=E_\alpha(\Sigma_{\alpha\alpha}+\theta_{\alpha\alpha}),$$
$$S_{\alpha\alpha}\,T_{\alpha\alpha}=E_\alpha\,.\,E_\alpha SE_\alpha\cdot E_\alpha TE_\alpha=E_\alpha\Sigma_{\alpha\alpha}\theta_{\alpha\alpha},$$

sendo $S_{\alpha\alpha}=o$, se $\Sigma_{\alpha\alpha}=o$, e apenas nesse caso.

Demonstrado o lema, vamos provar as igualdades

$$S=\sum_{\mu,\,\nu\in M}E_{\mu\nu}S'_{\mu\nu}, \qquad S'_{\mu\nu}=\sum_{\chi\in M}E_{\chi\mu}SE_{\nu\chi}.$$

E imediato que $S'_{\mu\nu}$ tem sentido com a definição supra. O somatório que figura na expressão de S tem igualmente sentido, pois

$$E_{\mu\nu}S'_{\mu\nu}=\sum_{\chi\in M}E_{\mu\nu}E_{\chi\mu}SE_{\nu\chi}=E_{\mu\mu}SE_{\nu\nu}=S_{\mu\nu}.$$

As igualdades indicadas são válidas. Mostremos, em seguida, que o conjunto dos elementos $S'_{\mu\nu}$ constitui um anel isomorfo de $\mathfrak{R}$ ou de $E_\alpha\overline{\mathfrak{N}}E_\alpha$. Procede-se como em [(I), págs. 37 e 38]. A cada elemento $A\in E_\alpha\overline{\mathfrak{N}}E_\alpha$ faz-se corresponder $\sum_\chi E_{\chi\alpha}AE_{\alpha\chi}=A'$, o que leva a um anel $\mathfrak{A}'$, de elementos A', que é imagem anular isomorfa de $E_\alpha\overline{\mathfrak{N}}E_\alpha$. Depois verifica-se que o conjunto dos $S'_{\mu\nu}$ forma exactamente o anel $\mathfrak{A}'$. [Observe-se que $S'_{\mu\nu}=\sum_\chi E_{\chi\mu}\,.\,E_{\alpha\mu}SE_{\nu\alpha}\,.\,E_{\alpha\chi}$, $E_{\alpha\mu}SE_{\nu\alpha}\in E_\alpha\overline{\mathfrak{N}}E_\alpha$].

Resta demonstrar que, para cada elemento $m_\alpha\in\mathfrak{m}_\alpha$, apenas um número finito de expressões $E_{\alpha\mu}SE_{\nu\alpha}$ leva a um resultado diferente de zero, quando μ se fixa e ν é qualquer. E isso porque as referidas expressões dão os correspondentes dos $S'_{\mu\nu}$ no isomorfismo $\mathfrak{A}'\simeq E_\alpha\overline{\mathfrak{N}}E_\alpha$. Ora, visto que m_α está fixado, $m_\alpha E_{\alpha\mu}S$ é determinado. Se pusermos $m_\alpha E_{\alpha\mu}S=m'_\rho+\ldots+m'_\sigma$, só pode ser $\nu=\rho,\ldots,\sigma$, como se deseja.

Uma vez construídos $\overline{\mathfrak{N}}$ e $\mathfrak{R}$, os módulos $\mathbf{M}$ e $\mathfrak{m}$ admitem, respectivamente, aqueles anéis como domínios operatórios fechados. Tem lugar a importante proposição a seguir.

TEOREMA 50: — *O anel dos endomorfismos* — $\overline{\mathfrak{N}}$, *de* $\mathbf{M}$, *é isomorfo do anel dos endomorfismos* — $\mathfrak{R}$, *de* $\mathfrak{m}$. Se θ é um endomorfismo — $\overline{\mathfrak{N}}$, de $\mathbf{M}$, estudemos a sua aplicação a $\mathfrak{m}_\mu$. Deverá ter-se

$$m_\mu\to m_\mu\theta,$$
$$m_\mu=m_\mu E_{\mu\mu}\to m_\mu E_{\mu\mu}\theta=m_\mu\theta\,E_{\mu\mu}=m_\mu\theta\in\mathfrak{m}_\mu,$$

pois que θ comuta, em particular, com todos os $E_{\mu\nu}$. Assim, θ aplica $\mathfrak{m}_\mu$ dentro de $\mathfrak{m}_\mu$. A essa aplicação corresponde um endomorfismo determinado de $\mathfrak{m}$, obtido por intermédio do isomorfismo $\mathfrak{m}_\mu\simeq\mathfrak{m}$. Se, neste último, se tiver $m_\mu\to m$, $m_\mu\theta\to m'$, o endomorfismo em questão é precisamente $m\to m'$. Reconhece-se que é um endomorfismo — $\mathfrak{R}$ do modo seguinte: dentro de $\mathfrak{m}_\mu$, θ opera de modo que

$$m_\mu\to m_\mu\theta,$$
$$m_\mu E_\mu SE_\mu\to(m_\mu E_\mu SE_\mu)\theta=(m_\mu\theta)E_\mu SE_\mu;$$

pelo lema 1, $E_\mu\overline{\mathfrak{N}}E_\mu$ é isomorfo de $\mathfrak{R}$, e, assim, se $K\in\mathfrak{R}$ corresponder a $E_\mu SE_\mu$ neste último isomorfismo, vê-se que o endomorfismo de $\mathfrak{m}$ em estudo determina $m\to m'$, $mK\to m'K$. Para sermos completos, vamos observar ainda que a este mesmo endomorfismo se chega, partindo da aplicação de θ a $\mathfrak{m}_\nu$, com $\nu\neq\mu$. Basta, para isso, verificar que os correspondentes de m_μ e de $m_\mu\theta$, por via de $\mathfrak{m}_\mu\simeq\mathfrak{m}_\nu$, são os mesmos que os correspondentes de m e m', por via de $\mathfrak{m}\simeq\mathfrak{m}_\nu$. Ora isto é imediato, visto que

$$m_\mu\to(m_\mu\varphi_\mu^{-1})\varphi_\nu=m\varphi_\nu=m_\nu\in\mathfrak{m}_\nu,$$
$$m_\mu\theta\to(m_\mu\theta)\varphi_\mu^{-1}\varphi_\nu=m'\varphi_\nu\in\mathfrak{m}_\nu.$$

De resto, se tivermos em conta que θ comuta, em particular, com o endomorfismo — $\mathfrak{R}$, de $\mathbf{M}$, o qual faz corresponder aos elementos de $\mathfrak{m}_\mu$ os elementos de $\mathfrak{m}_\nu$ determinados pelo isomorfismo $\mathfrak{m}_\mu \simeq \mathfrak{m}_\nu$ e a cada elemento de $\mathfrak{m}_\alpha$, $(\alpha \neq \mu)$, o elemento zero, tem-se

$$(m_\mu \varphi_\mu^{-1} \varphi_\nu)\,\theta = m_\nu\,\theta = (m_\mu\,\theta)\,\varphi_\mu^{-1}\varphi_\nu = m'\,\varphi_\nu,$$

de sorte que é $m'\varphi_\nu = m_\nu \theta$. É clara, deste modo, a correspondência biunívoca entre os endomorfismos — $\mathfrak{R}$, de $\mathbf{M}$, e os endomorfismos — $\mathfrak{K}$, de $\mathfrak{m}$. Também o isomorfismo ânular indicado no teorema é agora imediato.

13) **Sobre os módulos infinitos relativos a anéis de divisão** — Nas considerações que vamos fazer neste §, limitamo-nos a demonstrar um resultado que será utilizado neste Capítulo e nos que se seguirão, aproveitando as indicações sugeridas em [(II), Cap. 2, § 1] e em [4, § 1]. $\mathbf{M}$ é um módulo sobre um anel de divisão $\mathfrak{D}$, nenhuma hipótese se fazendo quanto à sua dimensionalidade. Supomos que os elementos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \mathfrak{D}$ induzem transformações lineares distintas em $\mathbf{M}$ e que o elemento $1 \in \mathfrak{D}$ induz a transformação idêntica. O resultado em questão formula-se no seguinte

TEOREMA 51: — *Se $\mathbf{N}$ é um sub-módulo — $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, existe um segundo sub-módulo — $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{M}$, que designaremos por $\mathbf{N}'$, tal que $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{N}'$ como soma directa.* Os raciocínios assentam no axioma de ZERMELO ou *axioma da escolha*, para o qual pode consultar-se VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, I Teil, 1930, pág. 194 e seguintes. Imaginemos, conforme uma consequência do axioma invocado, que o conjunto $\mathbf{M}$ se encontra bem ordenado. Em seguida, façamos corresponder a cada $y \in \mathbf{M}$ o sub-módulo — $\mathfrak{D}$, representado por $\mathbf{N}_y$ e definido como o sub-módulo mínimo contendo $\mathbf{N}$ e os elementos de $\mathbf{M}$ que precedem y. Se $y \in \mathbf{N}_y$ não nos interessará; se $y \notin \mathbf{N}_y$, tomaremos y como um dos elementos base de $\mathbf{N}'$. Então, dados dois conjuntos finitos $x_1, \ldots, x_t \in \mathbf{N}$ e $y_1, \ldots, y_s \in \mathbf{N}'$, estes últimos com a propriedade negativa referida para y e

aqueles independentes — $\mathfrak{D}$, não pode haver uma relação

$$x_1\alpha_1 + \ldots + x_t\alpha_t + y_1\beta_1 + \ldots + y_s\beta_s = o, \quad (\alpha_i, \beta_j \in \mathfrak{D}),$$

com coeficientes não todos nulos. Se uma tal relação existisse, um dos β_j seria $\neq o$. Admitindo ser $\beta_s \neq o$ e y_s um elemento precedido pelos restantes y_j, concluía-se

$$y_s = -(x_1\alpha_1 + \ldots + x_t\alpha_t)\,\beta_s^{-1} - (y_1\beta_1 + \ldots + \\ + y_{s-1}\beta_{s-1})\,\beta_s^{-1},$$

e ter-se-ia $y_s \in \mathbf{N}_{y_s}$, contra a hipótese. Posto isto, dado qualquer $x \in \mathbf{M}$, vamos ver que se tem sempre $x = y + y'$, $(y \in \mathbf{N}, y' \in \mathbf{N}')$. A demonstração faz-se por indução transfinita, [VAN DER WAERDEN, *loc. cit.*, pág. 196 e seguintes]. Consideremos o primeiro elemento, x_o, de $\mathbf{M}$. Se é $x_o \in \mathbf{N}_{x_o}$, tem se $x_o \in \mathbf{N}\,(=\mathbf{N}_{x_o})$, e a decomposição é válida para x_o; se $x_o \notin \mathbf{N}_{x_o}$, é $x_o \in \mathbf{N}'$, e a decomposição tem igualmente lugar. Admitindo agora que a decomposição se pode fazer para cada x, que precede y, vamos ver que tem lugar para y. Se $y \notin \mathbf{N}_y$, a afirmação é trivial; se $y \in \mathbf{N}_y$, ponhamos $y = x_1\alpha_1 + \ldots + x_q\alpha_q + y_1\beta_1 + \ldots + y_r\beta_r$, onde os x_i pertencem a $\mathbf{N}$ e os y_j precedem y. Então, para cada y_j, a decomposição é válida, por hipótese. Deduz-se em seguida, uma decomposição para y. O teorema está provado.

14) **Aplicações** — Suponhamos que o módulo $\mathfrak{m}$, do § 12, é finito relativamente a $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{m} = u_1\mathfrak{R} + \ldots + u_n\mathfrak{R}. \tag{4}$$

Quando se diz que um conjunto de endomorfismos — $\mathfrak{R}$, pertencente ao anel $\mathfrak{K}$ de endomorfismos — $\mathfrak{R}$, é somável? Admitamos que os u_i pertencem a $\mathfrak{m}$. Então, apenas um número finito de elementos daquele conjunto, aplicado a u_1, pode levar a um resultado $\neq o$. O mesmo se diz da aplicação a u_2, etc., de modo que só um número finito de endomorfismos do conjunto aplicado a $u_1, \dots, u_n$ (e, portanto, a $\mathfrak{m}$) leva a um resultado $\neq o$. O conjunto será somável se contiver apenas um número finito de endomorfismos não nulos, e inversamente. A somabilidade reduz-se à noção de soma finita.

Passando, em seguida, como no § 12, a uma matriz com M dimensões, formada por elementos de $\mathfrak{K}$, a referida matriz será de linhas somáveis, se cada linha tiver apenas um número finito de elementos não nulos.

No caso mais particular de $\mathfrak{R}$ ter elemento um, que seja operador unitário, o anel $\mathfrak{K}$, relativo a (4), é anti-isomorfo do anel completo de matrizes de ordem n com elementos de $\mathfrak{R}$, [(I), págs. 238 e 239]. Por isso é válido o

COROLÁRIO 15: — *Se $\mathfrak{R}$ é um anel com elemento um e $\mathfrak{R}'$ é anti-isomorfo de $\mathfrak{R}$, dada a soma directa discreta $\mathbf{M} = \sum_{\mu \in M} \mathfrak{m}_\mu$, de módulos — $\mathfrak{R}'$ finitos isomorfos, para os quais o elemento um de $\mathfrak{R}'$ é operador unitário, o anel $\overline{\mathfrak{R}'}$ dos endomorfismos — $\mathfrak{R}'$, de $\mathbf{M}$, é isomorfo do anel de todas as super-matrizes com M dimensões, formadas por elementos que são matrizes de ordem n (ordem dos $\mathfrak{m}_\mu$) com elementos de $\mathfrak{R}$, de tal modo que cada linha da super-matriz tenha um número finito de matrizes não nulas de ordem n.*

Mais restritamente ainda, suponhamos que, nas condições do corolário anterior, $\mathfrak{m}_\mu = u_\mu \mathfrak{R}'$ tem uma só dimensão. Tem lugar o

COROLÁRIO 16: — *Dada a soma directa discreta $\mathbf{M} = \sum_{\mu \in M} u_\mu \mathfrak{R}'$, o anel $\overline{\mathfrak{R}'}$ reduz-se ao anel das matrizes com M dimensões, formadas com elementos de $\mathfrak{R}$, de tal modo que cada linha tenha um número finito de elementos não nulos. Aqui, o anel dos endomorfismos — $\overline{\mathfrak{R}'}$, de $\mathbf{M}$, é isomorfo de $\mathfrak{R}$.*

Seja agora $\mathbf{M}$ um módulo sem operadores e tal que, sendo $\mathfrak{A}$ o seu anel de endomorfismos, $\mathbf{M}$ é irredutível — $\mathfrak{A}$. Neste caso, o comutador $\overline{\mathfrak{A}}$, de $\mathfrak{A}$, reduz-se a

um anel de divisão $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$, que é um corpo comutativo, por ser formado de elementos comutáveis. É evidente que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{D}$ são comutadores recíprocos, de sorte que $\mathfrak{A}$ é fechado. Passando a considerar $\mathbf{M}$ como módulo sobre $\mathfrak{D}$, da forma $\mathbf{M} = \sum_{\mu} u_\mu \mathfrak{D}$, concluímos o seguinte

TEOREMA 52: — *Se $\mathbf{M}$ é um módulo irredutível relativamente ao absoluto $\mathfrak{A}$ dos seus endomorfismos, o centro de $\mathfrak{A}$ é um corpo comutativo $\mathfrak{D}$. Além disso, $\mathfrak{A}$ reduz-se a um anel completo de matrizes (de M dimensões) com elementos pertencentes a um corpo isomorfo de $\mathfrak{D}$, sob a condição de as linhas de cada matriz terem apenas um número finito de elementos não nulos.*

TEOREMA 53: — *Na soma $\mathbf{M} = \sum \mathfrak{m}_\mu$, de módulos isomorfos, a que se refere o teorema 49, há uma correspondência biunívoca completa entre os sub-módulos — $\overline{\mathfrak{R}}$, de $\mathbf{M}$, e os sub-módulos — $\mathfrak{K}$, de $\mathfrak{m}$.* Claramente que, se $\mathbf{N}$ é um sub-módulo — $\overline{\mathfrak{R}}$, de $\mathbf{M}$, é um sub-módulo contendo nS, se $S \in \overline{\mathfrak{R}}$, isto é, contendo, com cada n, os elementos deduzidos de n por todos os endomorfismos — $\mathfrak{R}$. Tomando $\mathbf{N}$, consideremos, no homomorfismo $\mathbf{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$ (ou $\mathbf{M} \sim \mathfrak{m}$), os grupos $\mathfrak{n}_\mu$ (ou $\mathfrak{n}$), correspondentes de $\mathbf{N}$. É evidente que $\mathfrak{n}_\mu = \mathfrak{n}\varphi_\mu$. Posto isto, dado $n \in \mathbf{N}$, imaginemos que tem lugar a decomposição

$$n = n_\alpha + n_\beta + \dots + n_\lambda.$$

Vamos ver que $n_\alpha \in \mathbf{N}$. Apliquemos, em particular, ao elemento n o endomorfismo $E_\alpha \in \overline{\mathfrak{R}}$. Vem $n E_\alpha = n_\alpha \in \mathbf{N}$. Por isso, é $\mathfrak{n}_\alpha \subseteq \mathbf{N}$, de sorte que $\sum \mathfrak{n}_\alpha \subseteq \mathbf{N}$. Por outro lado, $\mathbf{N} \subseteq \sum \mathfrak{n}_\alpha$, e, assim $\mathbf{N} = \sum \mathfrak{n}_\alpha$, como soma directa discreta. Mostremos, em seguida, que $\mathfrak{n}$ é sub-grupo — $\mathfrak{K}$, ou que $\mathfrak{n}_\alpha$ contém todos os elementos obtidos aplicando a $\mathfrak{n}_\alpha$ um endomorfismo pertencente a $E_\alpha \overline{\mathfrak{R}} E_\alpha$. De facto, é $\mathfrak{n}_\alpha S \subseteq \mathbf{N}$, $\mathfrak{n}_\alpha S E_\alpha \subseteq \mathfrak{n}_\alpha$, e, portanto, $\mathfrak{n}_\alpha E_\alpha S E_\alpha \subseteq \mathfrak{n}_\alpha$, como se deseja.

TEOREMA 55: — *As transformações lineares finitas do anel completo* $\mathfrak{A}$ *dos endomorfismos* — $\mathfrak{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *formam um anel denso de endomorfismos* — $\mathfrak{D}$ *do mesmo módulo.* Sabemos que, dados $x_i \in \mathbf{M}$ independentes — $\mathfrak{D}$ e $y_i \in \mathbf{M}$ arbitrários, há sempre $A \in \mathfrak{A}$ definido nas condições seguintes: 1) aplica os x_i nos y_i; 2) aplica um sub-espaço — $\mathfrak{D}$, que contenha os x_i e os y_i, dentro de si mesmo; 3) se $\mathbf{N}$ é o sub-espaço anterior, escrevendo $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{N}'$, a aplicação de A aos elementos de $\mathbf{N}'$ leva a zero. Visto que $\mathbf{N}$ é suposto finito, a transformação linear A é finita, de sorte que $\mathfrak{F}$ tem a propriedade característica dos anéis densos dos endomorfismos — $\mathfrak{D}$.

Ficou visto, como já se havia anteriormente afirmado, que uma parte de $\mathfrak{A}$ pode ser ainda um anel denso. A este respeito é válido o

TEOREMA 56: — *Se* $\mathfrak{B}$ *é um anel denso, qualquer, de endomorfismos* — $\mathfrak{D}$, *de* $\mathbf{M}$, *todo o ideal bilateral* $\bar{\mathfrak{a}}$, *de* $\mathfrak{B}$, *que contenha transformações lineares finitas diferentes de zero, é ainda um anel denso de endomorfismos* — $\mathfrak{D}$, *de* $\mathbf{M}$, [4, § 1]. O raciocínio utilizado na demonstração é o seguinte: toma-se um sub-espaço finito arbitrário $\mathbf{N}$, de $\mathbf{M}$, considera-se uma decomposição $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{N}'$ e verifica-se que existe $A \in \bar{\mathfrak{a}}$ capaz de coincidir com um endomorfismo arbitrário dado, de $\mathbf{N}$, e que aplicado a $\mathbf{N}'$ leva a (o).

Imaginemos que existe uma projecção $E \in \bar{\mathfrak{a}}$, de $\mathbf{M}$ sobre $\mathbf{N}$. Pondo $\mathbf{M} = \mathbf{M}E + \mathbf{M}(1 - E)$, tem-se $\mathbf{N} = \mathbf{M}E$ e põe-se $\mathbf{N}' = \mathbf{M}(1 - E)$. Então, seja B um endomorfismo — $\mathfrak{D}$ arbitrário de $\mathbf{N}$. Dados os elementos-base independentes $x_i \in \mathbf{N}$, será $x_i B = y_i \in \mathbf{N}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tomando $A_1 \in \mathfrak{B}$ tal que $x_i A_1 = y_i$, tem-se

$$x_i E A_1 = x_i A_1 = y_i, \quad x' E A_1 = o, \quad (x' \in \mathbf{N}').$$

Nestas condições, $A = E A_1 \in \bar{\mathfrak{a}}$ coincide com B, em $\mathbf{N}$, como se deseja.

Vamos demonstrar, portanto, o seguinte

LEMA 2: — *Nas condições do teorema 56,* $\bar{\mathfrak{a}}$ *contém uma projecção* E, *de* $\mathbf{M}$ *sobre* $\mathbf{N}$. Comecemos por supor $\mathbf{N} = [x]$ um sub-espaço — $\mathfrak{D}$ com uma única dimensão.

Se for $o \neq B \in \bar{\mathfrak{a}}$ e $\mathbf{M}B = [y_1, \ldots, y_r]$ um espaço finito com a base formada pelos elementos y_i, supostos independentes — $\mathfrak{D}$, admitamos:

$$z_1 \in \mathbf{M}, \quad z_1 B = y_1, \quad A_1 \in \mathfrak{B}, \quad y_1 A_1 = z_1,$$
$$y_i A_1 = o, \text{ se } i \neq 1.$$

Vê-se que

$$\mathbf{M} B A_1 = [y_1, \ldots, y_r] A_1 = [z_1],$$
$$z_1 B A_1 = y_1 A_1 = z_1,$$

de sorte que $E_1 = B A_1 \in \bar{\mathfrak{a}}$ é idempotente. Para se construir o idempotente $E \in \bar{\mathfrak{a}}$ tal que $\mathbf{M}E = [x]$, admitamos ser $A_2, A_3 \in \mathfrak{B}$, $z_1 A_2 = x$, $x A_3 = z_1$. Então verifica-se que

$$\mathbf{M} A_3 E_1 A_2 \subseteq [z_1] A_2 = [x], \quad x A_3 E_1 A_2 = x,$$

de modo que $A_3 E_1 A_2 = E$ é precisamente o idempotente procurado.

Passando ao caso em que $\mathbf{N} = [x_1, \ldots, x_n]$, imaginemos construídos idempotentes E_i', $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tais que

$$[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{M}E_1' + \ldots + \mathbf{M}E_n',$$
$$\mathbf{M}E_i' = [x_i], \quad E_i' \in \bar{\mathfrak{a}}.$$

É fácil construir um idempotente $F \in \bar{\mathfrak{a}}$ nas condições seguintes:

$$\mathbf{M}E_1' + \mathbf{M}E_2' = \mathbf{M}E_1' + \mathbf{M}F, \quad E_1' F = F E_1' = o.$$

Não temos mais do que reproduzir o raciocínio feito no § 6, a propósito do teorema 30. Na verdade, vê-se que $\mathbf{M}E_1' + \mathbf{M}E_2' = \mathbf{M}E_1' + \mathbf{M}E_2'(1 - E_1')$, e, depois aplica-se a observação feita naquele lugar, visto que $\mathbf{M}E_2'(1 - E_1')$ tem apenas uma dimensão, existindo idempotente $E_1'' \in \bar{\mathfrak{a}}$

*

tal que $\mathbf{M}E'_2(1-E'_1)=\mathbf{M}E''_1$. O idempotente F é definido pondo $F=E''_1-E'_1E''_1$. Em seguida, o idempotente $E_1=E'_1+F$ é tal que $[x_1,x_2]=\mathbf{M}E_1$. O processo continua, pondo $\mathbf{M}E'_1+\mathbf{M}E'_2+\mathbf{M}E'_3=\mathbf{M}E_1+\mathbf{M}E'_3$. Chegamos a encontrar o idempotente G, nas condições seguintes:

$$G\in\overline{\mathfrak{a}},\quad GE_1=E_1G=o,\quad \mathbf{M}E_1+\mathbf{M}E'_3=\mathbf{M}E_1+\mathbf{M}G,$$
$$\mathbf{M}E'_1+\mathbf{M}E'_2+\mathbf{M}E'_3=\mathbf{M}E'_1+\mathbf{M}F+\mathbf{M}G.$$

Vamos ver que os três idempotentes E'_1, F, G são ortogonais. De facto:

$$\begin{cases}E_1E'_1=E'_1,\\ E'_1E_1=E'_1,\end{cases}\quad \begin{cases}GE_1E'_1=o=GE'_1,\\ E'_1E_1G=o=E'_1G,\end{cases}\quad \begin{cases}E_1F=F,\\ FE_1=F,\end{cases}$$
$$\begin{cases}GE_1F=o=GF,\\ FE_1G=o=FG.\end{cases}$$

Temos, portanto, $[x_1,x_2,x_3]=\mathbf{M}E_1+\mathbf{M}G=\mathbf{M}E_2$, $E_2=E_1+G=E'_1+F+G$. O raciocínio prossegue até à demonstração do lema. Este permite ainda o seguinte

Aditamento: — A projecção $E\in\overline{\mathfrak{a}}$ decompõe-se em projecções ortogonais e_i, todas pertencentes a $\overline{\mathfrak{a}}$, de tal modo que

$$[x_1,\ldots,x_n]=\mathbf{M}E=\mathbf{M}e_1+\ldots+\mathbf{M}e_n,$$
$$[x_1,\ldots,x_k]=\mathbf{M}e_1+\ldots+\mathbf{M}e_k,$$
$$\begin{cases}e_ie_k=o,\quad \text{se}\quad i\neq k,\\ k\lesseqgtr n.\end{cases}$$

Corolário 17: — *Um anel denso de transformações lineares finitas é simples.* Se $\overline{\mathfrak{a}}\neq(o)$ é um ideal bilateral do anel, acabamos de ver que, para cada $A\in\overline{\mathfrak{B}}$, existe $E\in\overline{\mathfrak{a}}$ tal que $\mathbf{M}A=\mathbf{M}E$. Será, então, $\mathbf{M}AE=\mathbf{M}A$, valendo, para cada $m\in\mathbf{M}$, $mAE=mA$. Portanto, tem-se $A=AE\in\overline{\mathfrak{a}}$, q. e. d.

16) **A densidade dos anéis irredutíveis** — O objectivo deste § é demonstrar a importante proposição seguinte, que designaremos por

Teorema 57 (de Chevalley-Jacobson): — *Seja $\overline{\mathfrak{A}}$ um anel denso arbitrário em $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$. $\overline{\mathfrak{A}}$ é anel irredutível e $\mathfrak{D}$ é o seu comutador. Inversamente, se $\overline{\mathfrak{A}}$ é irredutível e $\mathfrak{D}$ é o seu comutador, então $\overline{\mathfrak{A}}$ é denso em $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$*, [4, pág. 232] e [3, pág. 65]. Partamos do anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$ e suponhamos $(\mathbf{M}/\mathfrak{D})=1$, isto é, $\mathbf{M}$ de 1.ª ordem, sobre $\mathfrak{D}$. Então, pois que $\mathbf{M}$ é finito, o anel denso $\overline{\mathfrak{A}}$ é a *totalidade* dos endomorfismos — $\mathfrak{D}$, pelo que é o comutador de $\mathfrak{D}$. Podemos afirmar que $\overline{\mathfrak{A}}$ é anti-isomorfo de $\mathfrak{D}$. Escrevendo $\mathbf{M}=x\overline{\mathfrak{A}}$, $(x\neq o)$, pois que $\overline{\mathfrak{A}}$, por ser denso, é irredutível, procuremos também o comutador de $\overline{\mathfrak{A}}$. Como $\overline{\mathfrak{A}}$ é anel de divisão, o seu comutador é anel de divisão $\mathfrak{D}'$, que contém $\mathfrak{D}$, e é anti-isomorfo de $\overline{\mathfrak{A}}$. Seja $d'\in\mathfrak{D}'$. Por se ter $xd'=xd$, para um certo $d\in\mathfrak{D}$, vem, se $d'\neq d$, $x(d'-d)=o$, $x(d'-d)(d'-d)^{-1}=x=o$, o que é absurdo. Assim, $d'=d$, $d'\in\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}$. $\overline{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{D}$ são, portanto, comutadores recíprocos, no caso de $\mathbf{M}$ ter uma só dimensão. Inversamente, se $\overline{\mathfrak{A}}$ é irredutível e $\mathfrak{D}$ o seu comutador, na hipótese $(\mathbf{M}/\mathfrak{D})=1$, $\overline{\mathfrak{A}}$ é denso em $\mathbf{M}$, sobre $\mathfrak{D}$, sendo $\overline{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{D}$ comutadores recíprocos. O teorema encontra-se completamente demonstrado, no caso de $\mathbf{M}$ ter uma só dimensão. Voltemos agora ao anel $\overline{\mathfrak{A}}$, suposto, pelo menos, duas vezes transitivo. Admitindo que B pertence ao comutador de $\overline{\mathfrak{A}}$, trata-se de provar que $B=\beta\in\mathfrak{D}$. Seja $o\neq x\in\mathbf{M}$. Em primeiro lugar, x e xB são dependentes — $\mathfrak{D}$, visto que, de contrário, poderíamos encontrar $C\in\overline{\mathfrak{A}}$ nas condições seguintes: $xC=o$, $xBC\neq o$, $xBC=xCB=o$, o que é absurdo. Pondo $xB=x\beta_x$, onde $\beta_x\in\mathfrak{D}$, vamos provar que, para $y\in\mathbf{M}$ e qualquer, é também $yB=y\beta_x$. De facto, escolhamos $A\in\overline{\mathfrak{A}}$ de modo que seja $xA=y$. Então: $xAB=xBA=yB=x\beta_xA=xA\beta_x=y\beta_x$, como se quer. Demonstrado que β_x é independente de x, poremos $xB=x\beta$, o que prova a afirmação, pois, se $x=o$, $o\cdot B=o\cdot\beta=o$. A parte directa do teorema encontra-se, assim, completamente demonstrada. A parte inversa será provada deste modo: pois que $\mathbf{M}$ não é de 1.ª ordem relativamente a $\mathfrak{D}$, começaremos por mostrar que, dados $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbf{M}$ e independentes — $\mathfrak{D}$, é possível encontrar endomorfismos $B_1, \ldots, B_n, B_{n+1} \in \overline{\mathfrak{A}}$, para os quais $x_i B_i = x_i$, $x_j B_i = o$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$, contanto — que se admita existirem n endomorfismos A_i para os quais

$$x_1 A_1 = x_1, \ldots, x_n A_n = x_n, \quad (x_i A_j = o;\ i \neq j);$$

depois, tendo em conta a irredutibilidade de $\overline{\mathfrak{A}}$ e a existência dos A_i, procuram-se $C_1, \ldots, C_n \in \overline{\mathfrak{A}}$ realizando as igualdades $x_1 C_1 = y_1, \ldots, x_n C_n = y_n$, onde os y_i são quaisquer elementos de $\mathbf{M}$. O endomorfismo $C = \Sigma A_i C_i \in \overline{\mathfrak{A}}$ será tal que $x_1 C = y_1, \ldots, x_n C = y_n$, e a densidade de $\overline{\mathfrak{A}}$ ficará estabelecida.

Demonstração: — Encontrados os A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, designemos por $\overline{\mathfrak{I}}_{[x_1, \ldots, x_n]} = \overline{\mathfrak{I}}$ o ideal direito aniquilador do sub-espaço $[x_1, \ldots, x_n]$. Para cada $x_o \notin [x_1, \ldots, x_n]$, vamos ver que é $x_o \overline{\mathfrak{I}} \neq (o)$. Se for $x_o \overline{\mathfrak{I}} = (o)$, comecemos por fixar i e consideremos B tal que $x_i B = o$. Então, sendo $x_i A_i B = x_i B = o$ e $x_j A_i B = o$, concluímos $A_i B \in \overline{\mathfrak{I}}$ e $x_o A_i B = o$. A correspondência

$$x_i A \to x_o A_i A, \quad (A \in \overline{\mathfrak{A}} \text{ e qualquer}),$$

por ser $x_i \overline{\mathfrak{A}} = \mathbf{M}$, é um endomorfismo de $\mathbf{M}$, visto que, se se admitir $x_i A = x_i C$, é $x_i(A - C) = o$, e, pela observação acabada de fazer quanto a B, é também $x_o A_i (A - C) = o$, o que dá $x_o A_i A = x_o A_i C$. O nosso endomorfismo é um endomorfismo — $\overline{\mathfrak{A}}$, que representaremos por $\alpha_i \in \mathfrak{D}$. Ele dá

$$x_i A \to x_i A \alpha_i = x_o A_i A;\ x_i = x_i A_i \to x_i A_i \alpha_i = x_o A_i A_i;$$

e, como $x_i (A_i^2 - A_i) = o$, é $A_i^2 - A_i \in \overline{\mathfrak{I}}$, $x_o (A_i^2 - A_i) = o$, $x_o A_i A_i = x_o A_i$. Posto isto, tomemos $D = \Sigma A_i$. Vale

$$x_j (A - DA) = x_j A - x_j A = o,\ x_o (A - DA) = (x_o - x_o D) A = o.$$

E, como A é qualquer, tem-se $x_o - x_o D = o$, $x_o = x_o D = x_o \Sigma A_i$. Os endomorfismos — $\overline{\mathfrak{A}}$, representados por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{D}$, dão, assim,

$$x_o = x_o \Sigma A_i = x_o \Sigma A_i A_i = \Sigma x_i A_i \alpha_i = \Sigma x_i \alpha_i \in [x_1, \ldots, x_n],$$

contra a hipótese $x_o \notin [x_1, \ldots, x_n]$. Estabelecido que $x_o \overline{\mathfrak{I}} \neq (o)$, tem-se $x_o \overline{\mathfrak{I}}\,\overline{\mathfrak{A}} = \mathbf{M}$, e, portanto, $x_o \overline{\mathfrak{I}} = \mathbf{M}$. Existe $A_o \in \overline{\mathfrak{I}}$ para o qual $x_o A_o = x_o$. Também existem $A_i' \in \overline{\mathfrak{I}}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, para os quais $x_o A_i = x_o A_i'$. Pondo, então, $x_o = x_{n+1}$, $A_o = B_{n+1}$, $B_i = A_i - A_i'$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, vê-se que $x_{n+1} B_{n+1} = x_{n+1}$, $x_i B_{n+1} = x_i A_o = o$, $x_i B_i = x_i A_i - x_i A_i' = x_i$, $x_j B_i = x_j A_i - x_j A_i' = o$, $(j \neq i)$. A demonstração está feita.

17) **Somas directas finitas** — Estudámos em [(I), pág. 226 e seguintes] o anel dos endomorfismos dum módulo $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \ldots + \mathbf{N}_t$, suposto uma soma directa finita. As notações e os raciocínios aí introduzidos vão ser um tanto modificados, deixando-lhe o aspecto que lhe foi dado em [10, pág. 21 e seguintes], o qual está mais conforme com o § 12.

Seja, então, a referida soma directa. Dado $m \in \mathbf{M}$, escrevamos $m = n_1 + \ldots + n_t$, com $n_i \in \mathbf{N}_i$. Também suporemos aqui que os $\mathbf{N}_i$ são sub-módulos — $\mathfrak{R}$ e que o anel dos endomorfismos — $\mathfrak{R}$ se representa por $\overline{\mathfrak{R}}$. A correspondência $m \to n_i$ é um endomorfismo idempotente $E_i \in \overline{\mathfrak{R}}$, sendo $E_i E_j = o$, se $i \neq j$. O endomorfismo $1 \in \overline{\mathfrak{R}}$ tem a decomposição $1 = E_1 + \ldots + E_t$ e $\overline{\mathfrak{R}}$ pode escrever-se $\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}} E_1 + \ldots + \overline{\mathfrak{R}} E_t = E_1 \overline{\mathfrak{R}} + \ldots + E_t \overline{\mathfrak{R}}$. Uma homomorfia $\mathbf{N}_i \sim \mathbf{N}_j$, representada por Σ_{ij} prolonga-se e torna-se num endomorfismo de $\mathbf{M}$, considerando o símbolo $E_i \Sigma_{ij} = E_i \Sigma_{ij} E_j = S_{ij}$. Um endomorfismo $S \in \overline{\mathfrak{R}}$ determina sempre t^2 endomorfismos S_{ij}, pois que se tem $S = (E_1 + \ldots + E_t) . S . (E_1 + \ldots + E_t) = \sum_{i,j} E_i S E_j = \sum_{i,j} E_i . E_i S E_j . E_j = \sum_{i,j} E_i \Sigma_{ij} E_j = \sum_{i,j} S_{ij}$.

Inversamente, este último somatório representa um endomorfismo de $\mathbf{M}$, e, assim, escrevendo $S = \sum_{i,j} S_{ij}$, tem-se uma representação biunívoca dos elementos $S \in \overline{\mathfrak{R}}$. É claro que $S_{ij} = E_i S E_j \in E_i \overline{\mathfrak{R}} E_j = \overline{\mathfrak{R}}_{ij}$, sendo, de resto, $\overline{\mathfrak{R}} = \sum_i E_i \overline{\mathfrak{R}} = \sum_{i,j} E_i \overline{\mathfrak{R}} E_j = \sum_{i,j} \overline{\mathfrak{R}}_{ij}$, $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} \overline{\mathfrak{R}}_{jl} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}_{il}$, $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} \overline{\mathfrak{R}}_{hl} = (o)$, se $j \neq h$. Observe-se também que, pondo $T = \sum_{i,j} T_{ij}$, valem as igualdades $S + T = \sum_{i,j} (S_{ij} + T_{ij})$, $R = ST = \sum_{i,j,h,l} S_{ij} T_{hl} = \sum_{i,j,h,l} E_i S E_j E_h T E_l = \sum_{i,j,l} E_i S E_j . E_j T E_l = \sum_{i,l} R_{il}$, com $R_{il} = \sum_j S_{ij} T_{jl}$. Embora haja uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\overline{\mathfrak{R}}_{ij}$ e as homomorfias Σ_{ij}, não podemos dizer que $\overline{\mathfrak{R}}_{ij}$ é o anel das homomorfias $\mathbf{N}_i \sim \mathbf{N}_j$, pela razão de não ter sentido falar do produto de duas tais homomorfias. Consideremos, porém, o anel $\overline{\mathfrak{R}}_{ii}$. A sua interpretação como anel dos endomorfismos de $\mathbf{N}_i$ resulta da biunivocidade já referida e dos raciocínios a seguir. Em primeiro lugar, tem sentido falar do produto de dois endomorfismos; depois disso, vamos ver que a soma e o produto de dois elementos de $\overline{\mathfrak{R}}_{ii}$ definem, respectivamente, a soma e o produto dos endomorfismos correspondentes. De facto, se forem $S_{ii} = E_i S E_i$, $T_{ii} = E_i T E_i$, tem-se, sucessivamente: $S_{ii} + T_{ii} = E_i . E_i S E_i + E_i . E_i T E_i = E_i \Sigma_{ii} + E_i \theta_{ii} = E_i (\Sigma_{ii} + \theta_{ii})$, $S_{ii} T_{ii} = E_i \Sigma_{ii} . E_i \theta_{ii} = E_i . \Sigma_{ii} \theta_{ii}$. É válido o seguinte

TEOREMA 58: — *Dada a decomposição* $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \ldots + \mathbf{N}_t$, *supondo* $1 = \mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{E}_t$, *o anel* $\overline{\mathfrak{R}}_{ii} = \mathrm{E}_i \overline{\mathfrak{R}} \mathrm{E}_i$ *é isomorfo do anel dos endomorfismos do sub-módulo* $\mathbf{N}_i$.

Imaginemos que, na decomposição acima referida de $\mathbf{M}$, os $\mathbf{N}_i$ são todos isomorfos. Tem lugar o seguinte

TEOREMA 59: — *O anel* $\overline{\mathfrak{R}}$ *dos endomorfismos dum módulo, soma directa de* t *sub-módulos isomorfos, é um anel completo de matrizes do grau* t, *com elementos dum sub-anel* Z, *de* $\overline{\mathfrak{R}}$. *O anel* Z *é isomorfo de* $\overline{\mathfrak{R}}_{11}$ *e os seus elementos são da forma*

$\theta = \sum_i \mathrm{E}_{i1} \mathrm{T} \mathrm{E}_{1i}$, $(\mathrm{T} \in \overline{\mathfrak{R}})$. Embora este teorema resulte das considerações do § 12, o leitor encontra a demonstração directa em [(I), pág. 228]. Neste caso tem-se $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} \overline{\mathfrak{R}}_{jl} = E_i \overline{\mathfrak{R}} \mathrm{E}_j \overline{\mathfrak{R}} E_l = E_i \overline{\mathfrak{R}} E_l = \overline{\mathfrak{R}}_{il}$, em virtude de ser $\overline{\mathfrak{R}} E_j \overline{\mathfrak{R}}$ um ideal bilateral de $\overline{\mathfrak{R}}$ que contém os elementos da forma $E_{ij} E_{jj} E_{j\mathrm{k}} = E_{ik}$, e que contém, portanto, o endomorfismo idêntico. Então, para cada S, pode escrever-se $S = \sum_{i,j} S_{ij} = \sum_{i,j} E_{ij} \theta_{ij}$, $\theta_{ij} = \sum_k E_{ki} S E_{jk} \in \mathbf{Z}$, pois que, efectivamente, $\theta_{ij} \in \mathbf{Z}$, $E_{ij}\, \theta_{ij} = E_{ij} E_{ji} S E_{jj} = E_i S E_j$.

Vamos passar, em seguida, a um estudo pormenorizado do radical $\mathfrak{B}$, de $\overline{\mathfrak{R}}$, na hipótese de ser válida em $\mathbf{M}$ a condição dupla de cadeia. Imaginemos $\mathbf{M}$ decomposto em sub-módulos indecomponíveis: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_n$. Dado $B \in \overline{\mathfrak{R}}$, sabemos que é $B = \sum B_{ij}$, onde $B_{ij} \in \overline{\mathfrak{R}}_{ij} = E_i \overline{\mathfrak{R}} E_j$. Ao formar-se B, podem dar-se duas hipóteses: 1.ª — nenhum B_{ij} determina um isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$; 2.ª — há um B_{ij}, pelo menos, que define um tal isomorfismo. Tratemos a segunda hipótese. Seja B_{kl} o B_{ij} em questão. Existe, então, um $C_{lk} \in \overline{\mathfrak{R}}_{lk}$ tal que $B_{kl} C_{lk} = B_k$ satisfaz a $\mathbf{M}_k B_k = \mathbf{M}_k$, com $m_k B_k = m_k$, $(m_k \in \mathbf{M}_k)$. É fácil de ver que $B \notin \mathfrak{B}$. De facto, $B C_{lk} = \sum_i B_{il} C_{lk} = B_k + \sum_{i \neq k} B_{il} C_{lk}$, $B_k B C_{lk} = B_k^2 + \sum_{i \neq k} B_k B_{il} C_{lk}$. Este último somatório é nulo. Se fosse $B \in \mathfrak{B}$, seria também $B_k^2 \in \mathfrak{B}$, o que é absurdo, visto que B_k^2 não é nilpotente. Só podem pertencer a $\mathfrak{B}$, portanto, os elementos $B = \sum B_{ij}$, nas condições da 1.ª hipótese. Demonstraremos o seguinte

TEOREMA 60: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição dupla de cadeia, o radical nilpotente* $\mathfrak{B}$, *de* $\overline{\mathfrak{R}}$, *compõe-se de todos os elementos* $\mathrm{B} = \sum \mathrm{B}_{ij}$ *onde nenhum* B_{ij} *define um isomorfismo* $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$, [(II), pág. 60], [10, pág. 26]. O radical $\mathfrak{B}$ é aqui o radical de KÖTHE, que existe e é igual ao radical usual. A nilpotência de $\mathfrak{B}$ foi demonstrada no § 9, pelo processo indicado em [10, págs. 20 e 21], para o qual voltamos a chamar a atenção. Comecemos por considerar o conjunto dos endomorfismos da forma $B_{ij} A_{kl}$, onde B_{ij} é fixo e $A_{kl} \in \overline{\mathfrak{R}}_{kl}$. O referido conjunto é fechado relativamente ao produto, pois: $B_{ij} A_{kl} = o$, se $k \neq j$;

$$B_{ij} A_{jl} \,.\, B_{ij} C_{jk} = \begin{cases} o, \text{ se } l \neq i; \\ B_{ij} \,.\, A_{ji} B_{ij} C_{jk} = B_{ij} D_{jk}, \text{ se } l = i. \end{cases}$$

Mostremos, em seguida, que $B_{ij} D_{jk}$ é nilpotente. Para isso, observemos que

$$B_{ij} D_{jk} \,.\, B_{ij} D_{jk} = \begin{cases} o, \text{ se } k \neq i; \\ B_{ij} D_{ji} \,.\, B_{ij} D_{ji}, \text{ se } k = i. \end{cases}$$

Relativamente ao produto $B_{ij} D_{ji} = C_{ii}$, a nilpotência resulta como vai seguir-se. O endomorfismo do grupo indecomponível $\mathbf{M}_i$, definido por C_{ii}, não é automorfismo, porque, se o fosse, ter-se-ia $\mathbf{M}_i B_{ij} D_{ji} = \mathbf{M}'_j D_{ji} = \mathbf{M}_i$, onde $\mathbf{M}'_j \subseteq \mathbf{M}_j$ seria a imagem de $\mathbf{M}_i$ definida por B_{ij}. É claro que haveria um primeiro isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}'_j$, depois um segundo $\mathbf{M}'_j \cong \mathbf{M}_i$, este definido por D_{ji}. O primeiro isomorfismo, por hipótese, levaria a $\mathbf{M}'_j \subset \mathbf{M}_j$. Da aplicação de D_{ji} a $\mathbf{M}_j$ resultaria haver vários elementos $m_j \in \mathbf{M}_j$ levando ao mesmo $m_i \in \mathbf{M}_i$. Se $\mathbf{M}''_j$ representasse o conjunto dos m_j para os quais $m_j D_{ji} = o$, teria lugar a soma directa $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}'_j + \mathbf{M}''_j$, pois, dado m_i, suponhamos realizarem-se as correspondências

$$m_j \to m_i, \quad m'_j \to m_i, \quad m_j - m'_j \to o, \quad (m'_j \in \mathbf{M}'_j),$$

e ser, portanto,

$$m_j - m'_j = m''_j, \quad m_j = m'_j + m''_j, \quad (m''_j \in \mathbf{M}''_j).$$

Então, se $m'_j + m''_j = o$, como $m'_j \to m_i$, $m''_j \to o$, será $m_i = o$; $m'_j = - m''_j = o$, o que justifica a afirmação. A circunstância de $\mathbf{M}_j$ ser indecomponível levaria a $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}'_j$, e B_{ij} definiria um isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$, contra a hipótese.

Conclui-se, assim, que um produto de factores $B_{ij} A_{kl}$ é nulo, se o seu número for igual ao comprimento

de $\mathbf{M}$, (Corolário 11). Nessas condições, formemos o ideal direito gerado por B_{ij}. Os seus elementos são da forma $B_{ij} \,.\, \sum_{k,l} A_{kl} = \sum_{l} B_{ij} A_{jl}$. Ora acabamos de ver que o produto dum certo número destes elementos é nulo. O ideal direito em questão é nilpotente e $B_{ij} \in \mathfrak{B}$. Também $B \in \mathfrak{B}$, se estiver nas condições do teorema, o qual fica demonstrado.

TEOREMA 61: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição dupla de cadeia, dada a decomposição* $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \ldots + \mathbf{M}^{(r)}$, *onde cada* $\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{M}\,\mathrm{E}^{(i)}$ *se decompõe numa soma de sub-módulos indecomponíveis isomorfos, não isomorfos dos sub-módulos da decomposição de* $\mathbf{M}^{(j)}$, $(i \neq j)$, *o radical* $\mathfrak{B}$, *do anel* $\overline{\mathfrak{R}}$ *dos endomorfismos de* $\mathbf{M}$, *pode escrever-se sob a forma* $\mathfrak{B} = \sum_{i \neq j} \mathrm{E}^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} \mathrm{E}^{(j)} + \sum_{i} \mathrm{E}^{(i)} \mathfrak{B} \mathrm{E}^{(i)}$. Nos termos do teorema anterior, podemos afirmar que $E^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} E^{(j)} \subseteq \mathfrak{B}$, se $i \neq j$. Assim, todo o elemento da expressão dada para $\mathfrak{B}$ pertence a $\mathfrak{B}$. A inversa é verdadeira, porque, para cada $R \in \mathfrak{B}$, se tem $R = \sum_{i,j} E^{(i)} R E^{(j)}$.

Vamos precisar ainda que $E^{(i)} \mathfrak{B} E^{(i)} = E^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} E^{(i)} \cap \mathfrak{B}$ é o radical de $E^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} E^{(i)}$. É claro que um elemento do 1.º membro pertence ao segundo; por outro lado, dado $R' \in \mathfrak{B}$ da forma $E^{(i)} S E^{(i)}$, tem-se também $R' = E^{(i)} R' E^{(i)}$, de sorte que um elemento do 2.º membro pertence ao primeiro. Provada a igualdade, observemos que todo o nilideal de $\overline{\mathfrak{R}}$ é nilpotente e que, por isso, o radical de KÖTHE coincide com $\mathfrak{B}$. Então, o radical de KÖTHE de $E^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} E^{(i)}$ é $E^{(i)} \mathfrak{B} E^{(i)}$; e, como $E^{(i)} \overline{\mathfrak{R}} E^{(i)}$ é isomorfo do anel dos endomorfismos de $\mathbf{M}^{(i)}$ também o radical deste último anel coincide com o radical de KÖTHE, o que aliás é evidente.

Passemos ao estudo da estrutura de $\overline{\mathfrak{R}}$, no caso especial de o módulo $\mathbf{M}$, com condição dupla de cadeia, ser uma soma directa de sub-módulos indecomponíveis isomorfos. $\mathbf{M}$ diz-se, então, *homogéneo*, [(II), pág. 61]. Vale o

TEOREMA 62: — *O anel* $\overline{\mathfrak{R}}$ *dos endomorfismos dum módulo homogéneo é primário, por ter radical e ser anel completo de* *matrizes com elementos dum anel completamente primário* [cfr. (I), págs. 69 e 73]. Por hipótese, em $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+ + \ldots + \mathbf{M}_r$, os $\mathbf{M}_i$ são isomorfos. $\overline{\mathfrak{R}}$ é um anel completo de matrizes do grau r com elementos dum anel Z, nas condições seguintes: $Z \simeq E_1 \overline{\mathfrak{R}} E_1 = \overline{\mathfrak{R}}_{11} = \overline{\mathfrak{R}}_{11} E_1$, $\overline{\mathfrak{R}} = = Z_r$. Como $\mathbf{M}_1$ é indecomponível, o anel $\mathfrak{R}_1$ dos seus endomorfismos, isomorfo de $\overline{\mathfrak{R}}_{11}$, é completamente primário. Efectivamente, tomemos um ideal direito $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{R}_1$. Se um automorfismo $H_1 \in \mathfrak{r}$, também o endomorfismo um pertence a $\mathfrak{r}$ e tem-se $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_1$. Por consequência, $\mathfrak{R}_1$ goza das propriedades seguintes, características de anel completamente primário: tem elemento um e todo o ideal direito $\neq \mathfrak{R}_1$ é nilideal (aqui, ideal nilpotente). Finalmente, o teorema está provado, porque a existência de radical de KÖTHE está assegurada para $\mathfrak{R}$, [(I), pág. 73].

Precisemos outros resultados. Têm lugar aqui as relações $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} \overline{\mathfrak{R}}_{jl} = \overline{\mathfrak{R}}_{il}$. De resto, pode ver-se que $\overline{\mathfrak{R}} E_k \overline{\mathfrak{R}} = = \overline{\mathfrak{R}}$, notando tratar-se de um ideal bilateral, não nilideal, [(I), pág. 70]. Como $\mathbf{M}_i \cong \mathbf{M}_k$, existe S_{ik} tal que $\mathbf{M}_i S_{ik} = \mathbf{M}_k$. Se for T_{ki} o endomorfismo que determina o isomorfismo $\mathbf{M}_k \cong \mathbf{M}_i$, é claro que $S_{ik} T_{ki} = E_i$, visto ser, para $m \in \mathbf{M}$, $m S_{ik} T_{ki} = m E_i S_{ik} T_{ki} = m_i S_{ik} T_{ki} = = m_i = m E_i$. Como $S_{ik} \overline{\mathfrak{R}}_{ki} . \overline{\mathfrak{R}}_{ii} = S_{ik} \overline{\mathfrak{R}}_{ki}$, conclui-se ser $S_{ik} \overline{\mathfrak{R}}_{ki}$ ideal direito de $\overline{\mathfrak{R}}_{ii}$. O ideal contém E_i, e, portanto, contém $E_i \overline{\mathfrak{R}}_{ii} = \overline{\mathfrak{R}}_{ii}$. Assim, $S_{ik} \overline{\mathfrak{R}}_{ki} = \overline{\mathfrak{R}}_{ii}$, $T_{ki} \overline{\mathfrak{R}}_{ik} = \overline{\mathfrak{R}}_{kk}$. A existência de elemento regular S_{ik}, isto é, de elemento verificando a condição $S_{ik} \overline{\mathfrak{R}}_{ki} = \overline{\mathfrak{R}}_{ii}$, constitui um facto conhecido da teoria dos anéis primários, que aqui se demonstra duma maneira mais simples, [(I), pág. 71].

COROLÁRIO 18: — *O anel $\overline{\mathfrak{R}}$ dos endomorfismos dum módulo completamente redutível, soma directa de* r *sub-módulos isomorfos, é um anel completo de matrizes de grau* r *com elementos dum corpo isomorfo do corpo dos endomorfismos de cada sub-módulo.*

Suponhamos ainda que a decomposição de $\mathbf{M}$ em sub-módulos indecomponíveis tem o aspecto $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \ldots$

$\ldots + \mathbf{N}_h + \mathbf{N}_{h+1} + \ldots + \mathbf{N}_{h+m} + \ldots$, onde os $\mathbf{N}_i$ são simples, nas condições seguintes: os h primeiros são isomorfos, os m imediatos são também isomorfos, mas não isomorfos dos anteriores, etc.. Pondo $\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}_1 + \ldots \ldots + \mathbf{N}_h$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{N}_{h+1} + \ldots + \mathbf{N}_{h+m}, \ldots$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_r$, aparece o anel $\overline{\mathfrak{R}}$ com o aspecto $\overline{\mathfrak{R}} = \sum_{i,j} \overline{\mathfrak{R}}_{ij}$, $(\overline{\mathfrak{R}}_{ij} = E_i \overline{\mathfrak{R}} E_j$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{M} E_i)$. Vamos ver que é $\overline{\mathfrak{R}}_{ij} = (o)$, se $i \neq j$. Uma homomorfia $\mathbf{M}_i \sim \mathbf{M}_j$, leva de $\mathbf{M}_i$ a $\mathbf{M}_j' \subseteq \mathbf{M}_j$. Como $\mathbf{M}$ é completamente redutível, tem-se $\mathbf{M}_j' = \mathbf{M}_1'' + \ldots + \mathbf{M}_\rho'' \cong \mathbf{M}_i / \mathbf{N}$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{N} + + \mathbf{M}_1' + \ldots + \mathbf{M}_\sigma'$, $\mathbf{M}_i / \mathbf{N} \cong \mathbf{M}_1' + \ldots + \mathbf{M}_\sigma'$, onde os $\mathbf{M}''$ e $\mathbf{M}'$ são simples. Conclui-se $\mathbf{M}_1'' + \ldots + \mathbf{M}_\rho'' \cong \mathbf{M}_1' + \ldots \ldots + \mathbf{M}_\sigma'$. Este resultado só pode subsistir se os dois membros forem nulos. Portanto, é $\mathbf{M}_i \sim \mathbf{M}_j' = (o)$, como se afirmou. O anel $\overline{\mathfrak{R}}$ reduz-se a $\overline{\mathfrak{R}} = \sum \overline{\mathfrak{R}}_{ii}$, $(\overline{\mathfrak{R}}_{ii} = = E_i \overline{\mathfrak{R}} E_i)$. Assim, tendo em conta que $\overline{\mathfrak{R}}_{ii}$ é isomorfo do anel dos endomorfismos de $\mathbf{M}_i$, pode enunciar-se o seguinte

TEOREMA 63: — *O anel $\overline{\mathfrak{R}}$ dos endomorfismos dum módulo* $\mathbf{M}$ *completamente redutível é uma soma de anéis completos de matrizes que se anulam mùtuamente. O número de parcelas é o número de sistemas de sub-módulos isomorfos em que se decompõe* $\mathbf{M}$, *pressupondo que em cada sistema figuram todos os sub-módulos isomorfos, e os graus das diferentes matrizes são dados pelos números de sub-módulos de cada sistema. Finalmente, os elementos das matrizes dum anel parcela pertencem a corpos isomorfos dos corpos endomórficos de cada sub-módulo simples a que corresponde a referida parcela.* Mais simplesmente: $\overline{\mathfrak{R}}$ *é um anel semi-simples,* no sentido de E. NOETHER.

Pertencem também à teoria dos módulos completamente redutíveis as considerações que vamos fazer. Seja $\mathbf{M}$ um módulo que verifica a condição de cadeia descendente e tal que o radical $\mathfrak{B}$ do seu anel de endomorfismos é nulo. Um tal módulo será designado abreviadamente por *módulo semi-simples*, se a cada sub-módulo simples $\mathfrak{P} \neq (o)$ corresponder um ideal de contracções $\mathfrak{p} \neq (o)$. Vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA 64: — *Um módulo semi-simples* $\mathbf{M}$ *é completamente redutível.* Tomemos, em $\mathbf{M}$, um sub-módulo mínimo $\mathbf{M}_1 \neq (o)$. O ideal $\mathfrak{m}_1$ não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, isto é, seria $\mathfrak{m}_1^2 = (o)$ e haveria radical $\mathfrak{B} \neq (o)$. Pelo facto de $\mathbf{M}_1$ ser sub-módulo regular mínimo, há, em $\mathbf{M}_1$, imagem homomorfa de $\mathbf{M}$ definida por um idempotente E_1. Supondo, assim, $\mathbf{M} E_1 = \mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M}(1 - E_1) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}'$, vale, para cada $m' \in \mathbf{M}'$, $m' E_1 = o$. Se $\mathbf{M}'$ não é simples, procuremos um sub-módulo de $\mathbf{M}'$ que seja mínimo. Esse sub-módulo $\mathbf{M}_2$ é simples. Pondo $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} E_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_2 + \mathbf{M}(1 - E_2) = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}''$, vê-se que $\mathbf{M} E_2 E_1 = (o)$, pelo facto de ser $\mathbf{M} E_2 \subseteq \mathbf{M}'$. Para os elementos de $\mathbf{M}''$ vale $m'' E_2 = o$. Em particular é $\mathbf{M}' = \mathbf{M} E_2 + \mathbf{M}'' \cap \mathbf{M}' = \mathbf{M} E_2 + \mathbf{N}_1$, de modo que $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2 + \mathbf{N}_1$. Se $\mathbf{N}_1 \neq (o)$ não é simples, o processo continua. Obtém-se $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_3 + \mathbf{M}'''$, com $\mathbf{M} E_3 E_1 = \mathbf{M} E_3 E_2 = (o)$, pelo facto de ser $\mathbf{M} E_3 \subseteq \mathbf{N}_1$ um sub-módulo contido em $\mathbf{N}'$ e $\mathbf{M}''$. Em particular, é $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M} E_3 + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{M}'''$, e, portanto, $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2 + \mathbf{M} E_3 + \mathbf{N}_2$, $(\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{M}''')$. A cadeia $\mathbf{M} \supset \mathbf{M}' \supset \mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_2 \supset \ldots$ é finita, de sorte que se chega a uma relação $\mathbf{N}_{n-2} = \mathbf{M} E_n + \mathbf{N}_{n-1}$, com $\mathbf{N}_{n-1} = (o)$, e, consequentemente, a uma decomposição $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2 + \ldots + \mathbf{M} E_n$, em sub-módulos simples. O teorema está provado. Como o teorema inverso é imediato, vale o

TEOREMA 65: — *É condição necessária e suficiente, para que um módulo seja completamente redutível, que seja semi-simples.*

Pomos termo às extensas considerações deste Capítulo com os dois teoremas que vão seguir-se.

TEOREMA 64': — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo* $-\Omega$ *com condição de cadeia ascendente e se* $\overline{\Omega}$ *não tem radical; então, admitindo que, para cada sub-módulo máximo* $\mathfrak{P} \neq \mathbf{M}$, *é diferente de zero o ideal aniquilador* $\mathfrak{z}$, *podemos afirmar que* (o) *é intersecção dum certo número de sub-módulos máximos e que* $\mathbf{M}$ *é completamente redutível,* [15]. Neste enunciado só oferece

interesse o caso em que $\mathbf{M}$ não é irredutível $-\Omega$. Tomemos, em $\mathbf{M}$, um sub-módulo máximo $\mathbf{N}_1 \neq \mathbf{M}$. O ideal $\mathfrak{z}_1$ não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, [teor. 16'], e $\overline{\Omega}$ teria radical. Por esse facto, $\mathbf{N}_1$ é precisamente aniquilador modular dum idempotente $E_1 \in \mathfrak{z}_1$, [teor. 23'], tendo-se $\mathbf{N}_1 E_1 = (o)$, $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{M} E_1 = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}'$, se $\mathbf{N}' = \mathbf{M} E_1$. E vê-se que $n_1 E_1 = o$, $n' E_1 = n'$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1$, sem esquecermos a relação $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}(1 - E_1)$. Se $\mathbf{N}'$ for máximo, o teorema está demonstrado, pois que ambas as parcelas de $\mathbf{M}$ serão também sub-módulos simples. Se $\mathbf{N}'$ não é máximo, tomemos $\mathbf{N}_2 \supset \mathbf{N}'$ e máximo. É, então, $\mathbf{N}_2 E_2 = (o)$, $(o) = \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{M} E_2 = \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}''$, $\mathbf{N}'' = \mathbf{M} E_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}'' + \mathbf{N}_2$, como anteriormente. E vê-se que o aniquilador modular de $E_1 E_2$ é $= \mathbf{M}$, pois $\mathbf{M} E_1 E_2 = \mathbf{N}' E_2 \subseteq \mathbf{N}_2 E_2 = (o)$. É válida a igualdade $\mathbf{N}' = \mathbf{N}_2 \cap (\mathbf{N}', \mathbf{N}'') = \mathbf{N}_2 \cap \mathfrak{Q}_1$, com $\mathfrak{Q}_1 = (\mathbf{N}', \mathbf{N}'')$, como vamos provar. Sem dúvida que $\mathbf{N}'$ está contido no 2.º membro. Se, agora, $n_2 = n' + n''$ for um elemento do 2.º membro, do facto de ser $n_2 E_2 = o = o + n''$, concluímos $n_2 = n' \in \mathbf{N}'$, como se deseja. E tem-se $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathfrak{Q}_1$, ao mesmo tempo que, sendo $\mathbf{M} = \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1$, é $\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}'' + \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \mathfrak{Q}_1 + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$, $\mathfrak{Q}_1 = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2$. Se $\mathfrak{Q}_1 \neq \mathbf{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, pois que, então, $\mathbf{N}''$, $\mathbf{N}'$ e $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ são simples. Se $\mathfrak{Q}_1$ não é máximo, o processo continua. Obtém-se $(o) = \mathbf{N}_3 \cap \mathbf{M} E_3 = \mathbf{N}_3 \cap \mathbf{N}'''$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}'''$, $\mathbf{M} E_1 E_3 = \mathbf{M} E_2 E_3 = (o)$, pois que $\mathbf{N}_3 \supset \mathfrak{Q}_1 = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2$. São válidas as igualdades $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}'' + \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}_3$, $\mathbf{M} = \mathbf{N}''' + \mathbf{N}'' + \mathbf{N}' + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}_3 = \mathfrak{Q}_2 + \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}_3$, $\mathfrak{Q}_2 = \mathbf{M} E_1 + \mathbf{M} E_2 + \mathbf{M} E_3$. Se $\mathfrak{Q}_2 \neq \mathbf{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, com $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{N}_3 \cap \mathfrak{Q}_2$ e com a decomposição anterior para $\mathbf{M}$. A cadeia $(o) \subset \mathbf{N}' \subset \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \subset \ldots$ é finita, de sorte que se chega a encontrar $\mathfrak{Q}_{n-2}$ máximo e tal que $(o) = \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{n-1} \cap \mathfrak{Q}_{n-2}$, $\mathbf{M} = \mathfrak{Q}_{n-2} + \mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{n-1}$, $\mathfrak{Q}_{n-2} = \mathbf{M} E_1 + \ldots + \mathbf{M} E_{n-1}$. Nesse momento o sub-módulo simples $\mathbf{N}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{N}_{n-1}$ tem a forma $\mathbf{M} E_n$, vindo $\mathbf{M} = \mathbf{M} E_1 + \ldots + \mathbf{M} E_n$. Os idempotentes E_i verificam as relações $E_i E_j = o$, $(i < j;\ i = 1, \ldots, n-1;\ j = 1, \ldots, n)$.

Inversamente, se $\mathbf{M}$ é um módulo completamente redutível, a condição de cadeia ascendente é válida, o radical do seu anel de endomorfismos é nulo, e para cada sub--módulo máximo o ideal aniquilador é $\neq (o)$. Portanto:

TEOREMA 65': — *As condições enunciadas no teorema 64' são necessárias e suficientes, para que* $\mathbf{N}$ *seja completamente redutível.*

E conclui-se também a equivalência entre as condições expressas nos teoremas 64 e 64'.

Instituto para a Alta Cultura, Centro de Estudos
Matemáticos da Faculdade de Ciências do Porto,
Publicação n.º 25.

25

ANAIS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO

Fundados por F. GOMES TEIXEIRA
e continuados sob a direcção de A. MENDES CORRÊA

Extracto do tomo XXXV

Sobre ideais de contracção e aniquiladores na teoria geral dos módulos

POR

A. ALMEIDA COSTA

PORTO
Imprensa Portuguesa
108, Rua Formosa, 116

1950 - 1951