14

INSTITUTO PARA A ALTA CULTURA
CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS

SÔBRE OS ANÉIS SEMI-PRIMÁRIOS

POR

A. ALMEIDA COSTA

PÔRTO — 1945

PUBLICAÇÕES DO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS
DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PÔRTO

N.º 14

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO «INSTITUTO PARA A ALTA CULTURA»

A CONCESSÃO DE SUBSÍDIOS POR PARTE DO INSTITUTO PARA A ALTA CULTURA NÃO ENVOLVE JUÍZOS DE VALOR SÔBRE A DOUTRINA CONTIDA NAS PUBLICAÇÕES SUBSIDIADAS NEM APROVAÇÃO DA FORMA POR QUE ESSA DOUTRINA É EXPOSTA.

SÔBRE OS ANÉIS SEMI-PRIMÁRIOS

POR

A. ALMEIDA COSTA
PROF. EXT. DA UNIVERSIDADE DO PÔRTO

1945

Extracto do fasc. IV do tômo XXIX
dos
«Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto»

COMPOSTO E IMPRESSO NA IMPRENSA PORTUGUESA
108 — RUA FORMOSA, 116 — PÔRTO

SÔBRE OS ANÉIS SEMI-PRIMÁRIOS

Neste trabalho serão feitas algumas observações simples àcêrca da noção de radical (secção A), da teoria dos anéis semi-primários de KÖTHE (secção C) e dos resultados de HOPKINS sôbre os anéis com condição de mínimo para ideais direitos (secção D). Em B, referimos algumas propriedades dos idempotentes primitivos e especiais, a utilizar em C.

Eis aqui as abreviaturas das citações:

[1] — B. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II Teil, 1931;
[2] — G. KÖTHE, *Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist*, «Mathematische Zeitschrift», Band 32, 1930;
[3] — M. DEURING, *Algebren*, «Ergebnisse der Mathematik», IV Band, 1935;
[4] — C. HOPKINS, *Rings with minimal condition for left ideals*, «Annals of Mathematics», II series, vol. 40, 1939;
[5] — E. ARTIN, *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*, «Abhandlungen des mathematischen Seminars», Hamburg, Band V, págs. 251 a 260, 1927;
[6] — J. DIEUDONNÉ, *Sur les systèmes hypercomplexes*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 184, 1942;
[7] — ALMEIDA COSTA, *Sôbre os grupos abelianos*, «Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto», tômo XXVII, 1942;
[8] — E. NOETHER, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, «Mathematische Zeitschrift», Band 30, 1929;
[9] — J. LEVITZKI, *Über nilpotente Unterringe*, «Mathematische Annalen», Band 105, 1931;

[10] — J. LEVITZKI, *On rings which satisfy the minimum condition for the right-hand ideals*, «Compositio Mathematica», vol. 7, 1940.

[11] — J. LEVITZKI, *A characteristic condition for semi-primary rings*, «Duke Mathematical Journal», vol. 11, 1944.

Relativamente a notações, usaremos as regras seguintes:

$\mathfrak{S}$ representa um anel;

$\mathfrak{S}'$ um anel cociente, segundo um ideal bilateral a indicar;

$\mathfrak{r}$, afectado ou não de índice, um ideal direito de $\mathfrak{S}$;

$\mathfrak{r}'$ um ideal direito de $\mathfrak{S}'$, nas mesmas condições;

$\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$ um homomorfismo, no qual $a, b, c, \ldots \in \mathfrak{S}$ e $a', b', c' \ldots \in \mathfrak{S}'$ se correspondem;

$e, e_1, \ldots, E, E_1, \ldots, f, f_1, \ldots$ elementos idempotentes de $\mathfrak{S}$;

$e', e'_1, \ldots, E', E'_1, \ldots, f', f'_1, \ldots$ elementos idempotentes de $\mathfrak{S}'$;

u o elemento um de $\mathfrak{S}$;

u' o elemento um de $\mathfrak{S}'$.

Algumas vezes, nas demonstrações, entram em jôgo conjuntos (módulos, anéis, ideais) representados por letras góticas. As letras latinas correspondentes, se não fôr dito o contrário, representarão elementos pertencentes a êsses conjuntos.

A

1) **O radical** $\mathfrak{R}$ — Diz-se *radical* $\mathfrak{R}$ o ideal bilateral que é o conjunto unido dos ideais nilpotentes, ou o conjunto unido dos ideais bilaterais nilpotentes de $\mathfrak{S}$, [1, pág. 155]. $\mathfrak{R}$ pode reduzir-se ao ideal nulo. $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ pode conter ainda ideais nilpotentes.

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que* $\mathfrak{S}'$ *não tenha radical, que* $\mathfrak{R}$ *contenha* $\mathfrak{r}$, *sempre que contenha uma potência dêste.* Se não existe radical, suponhamos $\mathfrak{r}^{\sigma} \subseteqq \mathfrak{R}$. Estudando $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$, vê-se que $\mathfrak{r}'^{\sigma} = (o)$, ou seja $\mathfrak{r}' = (o)$. Logo é $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{R}$. Inversamente, se $\mathfrak{R}$ goza da propriedade indicada, suponhamos $\mathfrak{r}'^{\sigma} = (o)$. Como é $\mathfrak{r}^{\sigma} \subseteqq \mathfrak{R}$, é $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{R}$, e, portanto, $\mathfrak{r}' = (o)$. O teorema resulta agora do facto de $\mathfrak{S}'$ não poder ter ideal esquerdo nilpotente, quando não

tem ideal direito nilpotente, ou do facto de não ter ideal bilateral nilpotente.

COROLÁRIO: — *Se fôr* $\mathfrak{R}^{\sigma} = (o)$, $\mathfrak{S}'$ *não tem radical.* Tomemos $\mathfrak{r}$ e suponhamos $\mathfrak{r}^{\tau} \subseteqq \mathfrak{R}$. Será $\mathfrak{r}^{\tau\sigma} = (o)$, $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{R}$, q. e d.

TEOREMA: — *Se* $\mathfrak{P}$ *é um ideal bilateral de* $\mathfrak{S}$ *satisfazendo às condições* $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^{\tau} \mathfrak{R}^{\rho} = (o)$, *o radical de* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$ *é* $\mathfrak{R}/\mathfrak{P} = \mathfrak{R}'$. Em $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$, os ideais $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$ são correspondentes. O ideal $\mathfrak{r}'$, gerado por a', é um conjunto de elementos da forma $a' s' + m a'$ ($m =$ inteiro). O ideal $\mathfrak{r}$, gerado por a, é o conjunto de elementos $a s + m a$. $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r}'$ são correspondentes. Suponhamos $a' \in \mathfrak{R}'$. Será $\mathfrak{r}^{\sigma} = (o)$, $\mathfrak{r}'^{\sigma} = (o)$, donde se conclui que $\mathfrak{R}'$ pertence ao radical de $\mathfrak{S}'$. Inversamente, seja a' um elemento de tal radical. Gerará um ideal $\mathfrak{r}'$, tal que $\mathfrak{r}'^{\sigma} = (o)$. Então $\mathfrak{r}^{\sigma} \subseteqq \mathfrak{P}$. Ora, como $\mathfrak{P}^{\tau} \mathfrak{R}^{\rho} = (o)$, é também $(\mathfrak{r}^{\sigma})^{\tau} (\mathfrak{r}^{\sigma})^{\rho} = (o)$, o que dá $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}' \subseteqq \mathfrak{R}'$, q. e. d.

COROLÁRIO: — *Se* $\mathfrak{P}$ *é nilpotente,* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ *tem o radical* $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$. Em particular, verifica-se, mais uma vez, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tem radical, se $\mathfrak{R}$ é nilpotente. Admitindo ser $\mathfrak{R}^{\sigma} = (o)$, o radical de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{k}$ é $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^{k}$, se $k \gtreqless \sigma - 1$. Para $k = \sigma$ o resultado subsiste.

TEOREMA: — *É condição necessária e suficiente, para que o radical* $\mathfrak{R}$, *de* $\mathfrak{S}$, *seja nilpotente, que seja finita tôda a cadeia de ideais bilaterais* $\mathfrak{L}_i$, *de* $\mathfrak{S}$, *contidos em* $\mathfrak{R}$, *da forma* $\mathfrak{L}_o \supseteqq \mathfrak{L}_o \mathfrak{L}_1 \supseteqq \mathfrak{L}_o \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \supseteqq \ldots$ [11]. É imediato que a condição é necessária. Inversamente, supondo realizada a condição, tem-se

$$\mathfrak{R} \supseteqq \mathfrak{R}^2 \supseteqq \mathfrak{R}^3 \supseteqq \ldots, \qquad \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n+k},$$

onde n é um inteiro determinado e k um inteiro qualquer. Vamos ver que vale a igualdade $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{A} = (o)$. Se fôsse $\mathfrak{A} \neq (o)$, como seria $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^3 = \ldots$, existiria uma sucessão de elementos $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots \in \mathfrak{A}$ tais que o produto de qualquer número dêles consecutivos seria $\neq o$. Então, ter-se-ia (pondo $\mathfrak{A} b_{2+3k} \mathfrak{A} = \mathfrak{L}_k$), para cada r,

$\mathfrak{L}_o\mathfrak{L}_1\ldots\mathfrak{L}_r\supset(o)$. Por outro lado, existiria um inteiro q tal que

$$\mathfrak{L}_o\supseteqq\mathfrak{L}_o\mathfrak{L}_1\supseteqq\ldots\supseteqq\mathfrak{L}_o\ldots\mathfrak{L}_q=\mathfrak{L}=\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{q+1}.$$

Como $\mathfrak{L}_{q+1}$ estaria contido num ideal bilateral gerado por um elemento de $\mathfrak{R}$, seria nilpotente, e ter-se-ia o absurdo

$$(o)\subset\mathfrak{L}=\mathfrak{L}\,.\,\mathfrak{L}^{\sigma}_{q+1}=(o).$$

Consideremos um nilanel $\mathfrak{S}$ para o qual cada elemento gere um ideal bilateral nilpotente. Tem-se $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}$ e é válido o

COROLÁRIO 1.º: — *É condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja nilpotente, que seja finita tôda a cadeia de ideais bilaterais do anel como a do teorema.*

COROLARIO 2.º: — *Num anel com condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$, êste é nilpotente.*

2) **O radical** $\mathfrak{R}^*$ — É válida a proposição seguinte: *se* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}$ *é nilpotente e se* $\mathfrak{b}$ *pertence a um ideal bilateral nilpotente,* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *é nilpotente,* [3, pág. 11]. KÖTHE, [2, pág. 169], introduziu o *radical* $\mathfrak{R}^*$ como conjunto unido dos nilideais bilaterais (nilideal bilateral máximo), se tal conjunto contém os nilideais unilaterais. Esta noção é idêntica à do § anterior, no caso dos anéis comutativos.

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^*$ exista, que a soma dum número finito de nilideais direitos seja um nilideal direito.* Que a condição é necessária, resulta da proposição anterior. Inversamente, dado o nilideal esquerdo $\mathfrak{e}$, consideremos o ideal bilateral $(\mathfrak{e},\mathfrak{e}\mathfrak{S})$. Vamos ver que o ideal bilateral $\mathfrak{e}\mathfrak{S}$ é nilideal. Um elemento que lhe pertença é da forma $\Sigma a_i s_i$, com $a_i\in\mathfrak{e}$. Um elemento $a_i s_i$ é nilpotente, visto ser $s_i a_i$ nilpotente. Dêste modo $\Sigma a_i s_i$ pertence a uma soma $(a_1\mathfrak{S},\ldots,a_p\mathfrak{S})$ dum número finito de nilideais direitos. Por isso, $\Sigma a_i s_i$ é nilpotente e $\mathfrak{e}\mathfrak{S}$ é nilideal. Então, $(\mathfrak{e},\mathfrak{e}\mathfrak{S})$ é nilideal, e $\mathfrak{e}$ pertencerá ao nilideal bilateral máximo de $\mathfrak{S}$. Tratando-se dum nilideal $\mathfrak{r}$, o ideal bilateral $(\mathfrak{r},\mathfrak{S}\mathfrak{r})$ é também nilideal, pois que a soma $(\mathfrak{S}a_1,\ldots,\mathfrak{S}a_q)$, análoga a uma soma anterior, é um

nilideal, dada a circunstância de todos os nilideais esquerdos pertencerem a nilideais bilaterais. Daqui se conclui o teorema.

COROLÁRIO 1.º: — $\mathfrak{R}^*$ *existe se o nilideal máximo de $\mathfrak{S}$ contiver todos os nilideais direitos.*

COROLÁRIO 2.º: — *Seja $\mathfrak{S}$ um anel com radical $\mathfrak{R}^*$. Se $\mathfrak{S}_1$ é um sub-anel de $\mathfrak{S}$, se $\mathfrak{R}_1$ está contido em $\mathfrak{R}^*$ e se $\mathfrak{S}=(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{R}_1)$, o anel $\mathfrak{S}_1$ tem radical.* Partindo do nilideal $\mathfrak{r}_1$, de $\mathfrak{S}_1$, construamos $\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_1\mathfrak{S})=(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_1\mathfrak{R}_1)$. Como é $\mathfrak{r}_1\mathfrak{R}_1\subseteqq\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{r}$ é nilideal. $\mathfrak{r}_1$ está contido em $\mathfrak{R}^*$, de modo que a soma dum número finito de nilideais direitos de $\mathfrak{S}_1$ é um nilideal direito. Fica demonstrado ainda que o radical de $\mathfrak{S}_1$ é $[\mathfrak{S}_1,\mathfrak{R}^*]$, pois que êste último é nilideal bilateral de $\mathfrak{S}_1$.

LEMA: — *Se $\mathfrak{S}$ tem elemento* u *e se $(\mathfrak{r},\mathfrak{r}_1)=\mathfrak{S}$, onde $\mathfrak{r}_1$ é nilideal de $\mathfrak{S}$, tem-se $\mathfrak{r}=\mathfrak{S}$.* Ponhamos $r=u+r_1$. O elemento $u-r_1+r_1^2-\ldots=v$ é bem determinado e satisfaz à igualdade $(u+r_1)v=rv=u$. Assim, $u\in\mathfrak{r}$, o que demonstra o lema. O processo de demonstração leva a concluir-se também que é $\mathfrak{r}=\mathfrak{S}$, sempre que há um elemento $r\in\mathfrak{r}$ tal que $u-r$ é nilpotente.

$\mathfrak{S}$ diz-se *completamente primário* se tem u e se qualquer $\mathfrak{r}\neq\mathfrak{S}$ é nilideal, [5, pág. 256]. Tendo em conta que a soma de dois nilideais direitos não pode ter elemento idempotente, [2, pág. 170] (1), vê-se que $\mathfrak{R}^*$ existe.

Suponhamos que $\mathfrak{S}$ tem u e $\mathfrak{R}^*$. Vale o

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja completamente primário, que $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\,\mathfrak{R}^*$ seja um corpo,* [3, pág. 18]. Estudemos $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$. Dado $\mathfrak{r}'\neq(o)$, o ideal

(1) A demonstração desta propriedade não prova, contudo, que a diferença entre um idempotente e um nilpotente (pertencente ou não a um nilideal) seja «não nilpotente». O facto de e ser elemento um de $e\mathfrak{S}e$, combinado com o lema, permite, porém, enunciar o seguinte: *a diferença entre* e *e um elemento dum nilideal de* $e\mathfrak{S}e$ *é sempre «não nilpotente».*

$\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}^*$ é igual a $\mathfrak{S}$. Logo é $\mathfrak{r}' = \mathfrak{S}'$. Êste último, que tem u', só possui os ideais direitos nulo e unidade. É um corpo. Inversamente, se $\mathfrak{S}'$ é um corpo, ou é $\mathfrak{r}' = (o)$, ou $\mathfrak{r}' = \mathfrak{S}'$. Na 1.ª hipótese, é $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}^*$; na 2.ª, $\mathfrak{r} = \mathfrak{S}$. Se $\mathfrak{r}_1$ é um ideal de $\mathfrak{S}$ diferente do radical e do anel, tem-se $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{R}^*) = \mathfrak{R}^*$, pois que $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{R}^*) = \mathfrak{S}$ daria $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{S}$. O teorema está demonstrado.

Um anel $\mathfrak{S}$ com u e tal que todo o ideal bilateral $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ é nilideal diz-se *primário*, [5, pág. 256].

TEOREMA: — *Num anel primário, $\mathfrak{R}^*$ existe.* Provaremos que um nilideal $\mathfrak{r}$ está contido num nilideal bilateral. Dado $\mathfrak{r}$, tomemos o ideal bilateral que êle gera: $\mathfrak{a} = (\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\mathfrak{r})$. Vamos ver que $\mathfrak{a}$ é nilideal. Se o não fôsse, ter-se-ia $\mathfrak{S}\mathfrak{r} = \mathfrak{S}$ e existiria uma igualdade $\sum_1 s_i r_i = u$, $r_i \in \mathfrak{r}$, $s_i \in \mathfrak{S}$. Pondo $\sum_2 s_i r_i = a$, $s_1 r_1 = -b$, a relação $a = u + b$ mostraria que a teria inverso direito v. Escrevendo $\sum_2 s_i r_i v = \sum_2 s_i r'_i = u$, onde $r'_i \in \mathfrak{r}$, ver-se-ia, anàlogamente, que $\sum_3 s_i r'_i$ teria inverso direito. O processo levaria a concluir-se que um elemento nilpotente teria um inverso direito, o que é absurdo.

Para um anel $\mathfrak{S}$ com elemento u e radical $\mathfrak{R}^*$, vale o

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja primário, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ seja um anel simples,* [3, pág. 17]. Basta estudar $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ para se fazer a demonstração.

TEOREMA: — *Se $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral do anel primário $\mathfrak{S}$, o anel $\mathfrak{S}/\mathfrak{a} = \mathfrak{S}'$ é primário e tem o radical $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a} = \mathfrak{R}'^*$.* Tomemos o ideal bilateral $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{S}', (o)$ e seja $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ o ideal bilateral de $\mathfrak{S}$ tal que $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$. É, necessàriamente, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$. $\mathfrak{b}$ é nilideal e $\mathfrak{b}'$ é também nilideal. $\mathfrak{S}'$ tem elemento u' e radical $\mathfrak{R}'^*$. No raciocínio anterior supõe-se, é claro, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$. Então é $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{R}^*$, e tem-se $\mathfrak{R}'^* = \mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}$, como se pretende.

Contràriamente ao que sucede com o radical $\mathfrak{R}$, vale o

TEOREMA: — *Se $\mathfrak{R}^*$ existe, $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ não tem nilideal.* Reconhece-se ainda estudando $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$.

Acêrca das relações entre $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^*$, podemos enunciar o seguinte

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^*$ exista e seja $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tenha nilideal.* A demonstração é imediata.

Seja e um idempotente de $\mathfrak{S}$. Façamos a decomposição de PEIRCE, $\mathfrak{S} = e\mathfrak{A} + \mathfrak{B}e + \mathfrak{J} + e\mathfrak{S}e$, onde $\mathfrak{A}$ é o aniquilador esquerdo de e, $\mathfrak{B}$ o aniquilador direito e $\mathfrak{J} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. É válida a proposição seguinte: *se $\mathfrak{R}^*$ existe, $e\mathfrak{S}e$ tem o radical $e\mathfrak{R}^*e$ e $\mathfrak{J}$ tem o radical* $[\mathfrak{J}, \mathfrak{R}^*]$, [3, pág. 14].

Consideremos, por ex., um anel $\mathfrak{T}$ com elemento um $= U$ e o anel completo $\mathfrak{S}$ das matrizes quadradas de grau n com elementos de $\mathfrak{T}$. As n^2 matrizes e_{ik}, de $\mathfrak{S}$, verificam as relações seguintes:

1.ª) $e_{ik}\, e_{jl} = \delta_{kj}\, e_{il}$, $\begin{cases} \text{com } \delta_{kj} = o, & \text{se } k \neq j, \\ \delta_{kj} = U, & \text{se } k = j; \end{cases}$

2.ª) $u =$ elemento um de $\mathfrak{S} = e_{11} + \ldots + e_{nn}$.

Ponhamos $\mathfrak{S}_{ij} = e_{ii}\mathfrak{S}e_{jj} = e_i\mathfrak{S}e_j$. Vê-se imediatamente que se tem

$$\mathfrak{S} = \sum_i e_i \mathfrak{S}, \quad e_i\mathfrak{S} = \sum_j e_i \mathfrak{S} e_j, \quad \mathfrak{S} = \sum_{i,j} \mathfrak{S}_{ij},$$

onde os somatórios se referem a somas directas. Os sub-anéis $\mathfrak{S}_{ij}$ verificam as igualdades $\mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{kl} = \delta_{jk}\mathfrak{S}_{il}$, pois que, se $\alpha e_{il} \in \mathfrak{S}_{il}$, $(\alpha \in \mathfrak{T})$, pode escrever-se $\alpha e_{il} = \alpha e_{ij}.\, U e_{jl}$.

O conjunto dos elementos de $\mathfrak{S}$ que comutam com tôdas as matrizes e_{ik} é um anel $\mathfrak{W}$ formado de elementos a da forma

$$a = \sum_i e_{i1}\, x_{11}\, e_{1i}, \qquad (x_{11} \in \mathfrak{S}_{11}),$$

e apenas dêsses elementos, [7, § 16]. Sabemos que se tem $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{S}_{11}$. Daqui se conclui ser $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{T}$, pois

$$\mathfrak{T} \cong \mathfrak{T}u \cong \mathfrak{T}u.e_{11} = e_{11}.\mathfrak{T}u.e_{11} = e_{11}\mathfrak{S}e_{11}.$$

Se $\mathfrak{S}$ tem radical $\mathfrak{R}^*$; $\mathfrak{T}$ tem também radical, isomorfo de $e_{11}\mathfrak{R}^*e_{11}$, ou de $[\mathfrak{T}u, \mathfrak{R}^*]$. Para se verificar esta última isomorfia, tomemos um elemento w pertencente ao radical de $\mathfrak{T}u$. Tem-se $we_{11} \in e_{11}\mathfrak{R}^* e_{11}$. E, sendo $w = we_{11} + \dots + we_{nn}$, é também $w \in \Sigma e_{ii}\mathfrak{R}^* e_{ii} \subseteq \mathfrak{R}^*$, o que mostra ser $w \in [\mathfrak{T}u, \mathfrak{R}^*]$. Ora, inversamente, êste último é um nilideal de $\mathfrak{T}u$, pelo que está contido no respectivo radical.

Pode verificar-se ainda que $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ é o anel completo de matrizes com elementos do anel $\mathfrak{T}' = (\mathfrak{T}u, \mathfrak{R}^*)/\mathfrak{R}^*$. Na verdade, consideremos e_{ik} e e_{jm}. Se $i \neq j$, as igualdades $e_{ik} - e_{jm} = r \in \mathfrak{R}^*$, $e_{ki}(e_{ik} - e_{jm}) = e_{kk} = e_{ki}r$ mostram uma parte do que se deseja. Se $i = j$, pondo $(e_{ik} - e_{im})e_{ki} = e_{ii} = r e_{ki}$, a conclusão é a mesma, salvo se $m = k$, caso em que as duas matrizes unidades de que se partiria seriam idênticas. $\mathfrak{T}'$ é um anel sem radical, precisamente pelo facto de $\mathfrak{S}'$ não ter radical. De resto, pode observar-se que se tem

$$\mathfrak{T}' = (\mathfrak{T}u, \mathfrak{R}^*)/\mathfrak{R}^* \cong \mathfrak{T}u/[\mathfrak{T}u, \mathfrak{R}^*].$$

Os raciocínios que acabamos de fazer com o anel de matrizes estendem-se a um anel qualquer de $\mathfrak{S}$ com n^2 elementos e_{ki} (matrizes) satisfazendo às mencionadas condições 1.ª e 2.ª. Basta ver, com efeito, que o anel $\mathfrak{S}e_k\mathfrak{S}$ contém o elemento u, em virtude de conter todos os e_{ij}: $e_{ij} = e_{ik}\,e_{kk}\,e_{kj}$. Então é $\mathfrak{S}e_k\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$, pelo que são válidas as três condições dadas em [7, § 16], das quais a última é supérflua. O anel $\mathfrak{W}$ tem o radical $[\mathfrak{W}, \mathfrak{R}^*]$, pois êste último é nilideal bilateral daquele e um elemento w pertencente ao radical de $\mathfrak{W}$ é da forma

$$w = \Sigma\, e_{i1}\, x_{11}\, e_{1i}, \qquad x_{11} \in e_{11}\,\mathfrak{R}^*\, e_{11}.$$

Isto mostra que w pertence a $\mathfrak{R}^*$, como se quere.

Uma noção diferente de radical ($\mathfrak{R}^{**}$), que é ainda um ideal bilateral e tal que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$ não tem radical, encontra-se em J. Levitzki, *On the radical of a general ring*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 49, 1943. Propriedades de $\mathfrak{R}^{**}$ encontram-se no mesmo autor em *Semi-nilpotent ideals*, «Duke Mathematical Journal», vol. 10, 1943.

B

3) **Idempotentes primitivos** — Diz-se que e é um idempotente *primitivo*, se não existir $f \neq e$ tal que $ef = fe = f$,

[L. E. Dickson, *Algebras and their Arithmetics*, 1923, pág. 55].

É válida a proposição seguinte: *se um sub-anel* $\mathfrak{T}$, *de* $\mathfrak{S}$, *possui um elemento não nilpotente* $\mathrm{r} = \mathrm{b}_{10}$, *tal que* $\mathrm{r}^2 - \mathrm{r} = \mathrm{t}$, *com* $\mathrm{t}^{\mathrm{n}} = \mathrm{o}$, *o referido sub-anel possui um elemento idempotente*, [2, pág. 169].

Chamando *sub-anel regular* (e, anàlogamente, *ideal regular*) aquêle que possui elemento não nilpotente, demonstra-se, em seguida: *um sub-anel regular mínimo (ideal regular mínimo) tem idempotente*. Pode, então, enunciar-se o

Teorema: — *Todo o idempotente dum ideal regular mínimo* $\mathfrak{r}$ *é primitivo*. $\mathfrak{r}$ tem um idempotente e, sendo $e\mathfrak{S} = \mathfrak{r}$. Se existisse f nas condições anteriores, f pertenceria ao ideal, tendo-se $f\mathfrak{S} = e\mathfrak{S}$. Pondo $e = fs$, obter-se-ia $fe = fs = e = f$. O teorema está demonstrado.

Vamos tirar imediatamente algumas conseqüências.

1.ª — *Um anel semi-simples* $\mathfrak{S} \neq (\mathrm{o})$ *tem um elemento primitivo*. Tomemos em $\mathfrak{S}$ um ideal direito mínimo $\neq (o)$. Como êsse ideal não é nilpotente, terá elemento idempotente. O teorema garante que êsse idempotente é primitivo.

2.ª — *Um idempotente não primitivo*, e, *dum anel semi-simples* $\mathfrak{S}$, *é soma dum certo número de elementos primitivos ortogonais dois a dois*. Ponhamos $\mathfrak{S} = e\mathfrak{S} + \mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_r + \mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_q$, com $e\mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_r$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_q$. Tanto os $\mathfrak{r}_i$ como os $\mathfrak{s}_j$ são ideais direitos simples. Sabemos que é, para $u \in \mathfrak{S}$,

$$u = e + (u - e) = e_1 + \dots + e_r + f_1 + \dots + f_q,$$

com $u - e \in \mathfrak{s}$, $e_i \in \mathfrak{r}_i$, $f_j \in \mathfrak{s}_j$. A relação $e = e_1 + \dots + e_r$ demonstra o que se deseja.

3.ª — *Se* $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_r$ *são elementos primitivos do anel semi-simples* $\mathfrak{S}$ *verificando as condições* $\mathrm{e}_i\,\mathrm{e}_k = \mathrm{o}$, *se* $\mathrm{i} \neq \mathrm{k}$, *e se* $\mathrm{e} = \Sigma\,\mathrm{e}_i$ *não é o elemento* u, *então* u *pode decompor-se numa soma de mais do que* r *elementos primitivos (entre os quais os* r *dados) que se anulam dois a dois*. De facto, tem-se aqui $e\mathfrak{S} = e_1\mathfrak{S} + \dots + e_r\mathfrak{S}$, e, como anteriormente, $u = e + (u - e) = e_1 + \dots + e_r + f_1 + \dots + f_q$.

Teorema: — *Se* e_1 *é primitivo*, $\mathrm{e}_1\mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1$ *não admite sub-ideal com idempotente*. Suponhamos $e_2\mathfrak{S} \subset e_1\mathfrak{S}$. Façamos a decomposição direita de Peirce $\mathfrak{S} = e_2\mathfrak{S} + \mathfrak{B}_2$ e escrevamos $e_1\mathfrak{S} = e_2\mathfrak{S} + \mathfrak{C}_2$, $e_1 = e_2 e_1 + (e_1 - e_2 e_1)$.

Tendo em conta que é $e_2 = e_1 s$, conclui-se que $f = e_1 - e_2 e_1 \in \mathfrak{C}_2 \subset e_1 \mathfrak{S}$ é um idempotente satisfazendo a $f e_1 = f$, $e_1 f = e_1 - e_1 e_2 e_1 = e_1 - e_2 e_1 = f$, contra a hipótese, visto não poder admitir-se a relação $e_1 = e_2 e_1$. O teorema está provado.

Seja $\mathfrak{S}$ um anel com radical $\mathfrak{R}^*$. Pode enunciar-se o

TEOREMA: — *No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^* = \mathfrak{S}'$, a todo o elemento primitivo de $\mathfrak{S}$ corresponde um elemento primitivo de $\mathfrak{S}'$, e recìprocamente.* Dizer que e é primitivo equivale a dizer que $e \mathfrak{S} e$ apenas tem o idempotente principal [ALMEIDA COSTA, *Grupos abelianos e anéis e ideais não comutativos*, 1942, pág. 158]. Dado o idempotente primitivo e_1, se e'_1 não fôsse primitivo, existiria $f'_1 \in e'_1 \mathfrak{S}' e'_1$ tal que $e'_1 f'_1 = f'_1 e'_1 = f'_1$. Poderia encontrar-se, então, $f_1 \in e_1 \mathfrak{S} e_1$, pelo que seria $f_1 = e_1$, e, portanto, $f'_1 = e'_1$. Inversamente, se e'_1 é primitivo, construamos e_1. Se êste último não é primitivo, pondo $e_1 f_1 = f_1 e_1 = f_1$, vem $e'_1 = f'_1$, e, por conseqüência, $e_1 - f_1 = r \in \mathfrak{R}^*$. Ora, sendo $(e_1 - f_1)^2 = e_1 - f_1$, vem $e_1 = f_1$, o que prova o teorema.

TEOREMA: — *Em $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$ a um ideal regular mínimo corresponde um ideal mínimo idempotente, e, recìprocamente, todo o ideal mínimo de $\mathfrak{S}'$ é correspondente dum ideal regular mínimo de $\mathfrak{S}$.* Supondo $e_1 \mathfrak{S}$ regular mínimo, $e'_1 \mathfrak{S}'$, que não contém sub-nilideal, também não contém sub-ideal regular, visto serem incompatíveis as condições $\mathfrak{r}'_1 \subset e'_1 \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{r}_1 = e_1 \mathfrak{S}$. Recìprocamente, se $e'_1 \mathfrak{S}'$ é mínimo, $e_1 \mathfrak{S}$ é regular mínimo, visto que, se o ideal regular $\mathfrak{r}_2$ estivesse contido em $e_1 \mathfrak{S}$, seria $\mathfrak{r}'_2 = e'_1 \mathfrak{S}'$, e haveria idempotente em $\mathfrak{r}_2$, contra a hipótese de e_1 ser primitivo.

TEOREMA: — *Se os ideais regulares mínimos $e_1 \mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1$, $e_2 \mathfrak{S} = \mathfrak{r}_2$, têm correspondentes em $\mathfrak{S}'$ que sejam operatòriamente isomorfos, vale a igualdade $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$.* De facto, tem-se $\mathfrak{r}'_1 \mathfrak{r}'_2 = \mathfrak{r}'_1$, pois que o isomorfismo $\mathfrak{r}'_2 \cong \mathfrak{r}'_1$ determina as correspondências $e'_2 \to \rho'_1$, $e'^2_2 \to \rho'_1 e'_2 = \rho'_1$, o que mostra ser diferente de (o) o produto dois ideais. É válida a relação $\rho'_1 \mathfrak{r}'_2 = \mathfrak{r}'_1$. Supondo $\rho'_1 r'_2 = e'_1$, os elementos ρ_1 e r_2 são tais que $\rho_1 r_2$ não é nilpotente. Será $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \subseteqq \mathfrak{r}_1$ um ideal regular, valendo, assim, a igualdade do teorema.

TEOREMA: — *Dois ideais regulares mínimos como os do teorema anterior (de correspondentes operatòriamente isomorfos) são operatòriamente isomorfos.* Acabamos de ver que $\rho_1 r_2$ não é nilpotente. Será $\rho_1 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$, pois que o primeiro membro não é nilideal. Supondo $\rho_1 t_2 = e_1$, com t_2 pertencente a $\mathfrak{r}_2$, o facto de ser, para qualquer r_1, $\rho_1 t_2 r_1 = e_1 r_1 = r_1$ mostra que t_2 não é divisor de zero à esquerda de r_1. A igualdade $t_2 r_1 = o$ arrasta $r_1 = o$. Então tem-se o isomorfismo $\mathfrak{r}_1 \cong t_2 \mathfrak{r}_1$. Êste último ideal está contido em $\mathfrak{r}_2$, não podendo ter-se $t_2 \mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2$, visto que, de contrário, $t_2 \mathfrak{r}_1$ seria nilideal, estaria contido em $\mathfrak{R}^*$ e o mesmo sucederia a $\rho_1 t_2 \mathfrak{r}_1 = e_1 \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1$, o que é absurdo. Logo, como se queria, é $\mathfrak{r}_1 \cong t_2 \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$.

Suponhamos agora que $\mathfrak{S}'$ tem elemento u'. Vale a seguinte recíproca da proposição que acaba de demonstrar-se:

TEOREMA: — *Dois ideais regulares mínimos operatòriamente isomorfos de $\mathfrak{S}$ têm correspondentes operatòriamente isomorfos em $\mathfrak{S}'$.* Comecemos por uma observação. Dado o ideal regular mínimo $\mathfrak{r}_1 = e_1 \mathfrak{S}$, seja um elemento r_1 do mesmo, não pertencente ao radical do anel. O ideal direito $r'_1 \mathfrak{S}' \subseteqq e'_1 \mathfrak{S}'$ contém $r'_1 \neq o$. Será $r'_1 \mathfrak{S}' = e'_1 \mathfrak{S}'$, o que mostra haver em $r_1 \mathfrak{S}$ um elemento idempotente. Tem-se $r_1 \mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1$. Pôsto isto, supondo que se tem o isomorfismo $\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{r}_2$ entre dois ideais regulares mínimos, a um elemento do radical contido no primeiro corresponde um elemento do radical contido no segundo, e recìprocamente, visto que, supondo $r_1 \to r_2$, com $r_1 \notin \mathfrak{R}^*$ e $r_2 \in \mathfrak{R}^*$, será $r_1 \mathfrak{S} \to r_2 \mathfrak{S}$, $r_1 \mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1$, enquanto que $r_2 \mathfrak{S}$, como nilideal, é uma parte de $\mathfrak{r}_2$. Se agora considerarmos uma correspondência $r'_1 \to r'_2$, definida a partir da correspondência isomorfa dada $r_1 \to r_2$, vê-se que se tem um homomorfismo operatório. Em particular, de $e_1 \to \rho_2$, tira-se $e'_1 \to \rho'_2$, com $\rho'_2 e'_1 = \rho'_2$. Vamos ver que a hipótese $\rho'_2 s' = o$ arrasta $e'_1 s' = o$. Efectivamente, sendo $\rho_2 s \in \mathfrak{R}^*$, é $e_1 s \in \mathfrak{R}^*$, e, portanto, $e'_1 s' = o$. O teorema está demonstrado.

Continuando a supor que $\mathfrak{S}$ tem radical $\mathfrak{R}^*$ e que $\mathfrak{S}'$ tem elemento u', pode enunciar-se o seguinte

TEOREMA: — *É condição necessária e suficiente, para que dois ideais regulares mínimos $\mathfrak{r}_1$ e $\mathfrak{r}_2$ sejam operatòriamente isomorfos, que tenha lugar a relação $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$.*

Que a condição é necessária, resulta imediatamente da combinação do teorema anterior com o ante-penúltimo. Inversamente, se $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$, é $\mathfrak{r}'_1 \mathfrak{r}'_2 = \mathfrak{r}'_1$. Há um elemento b'_1, de $\mathfrak{r}'_1$, tal que $b'_1 \mathfrak{r}'_2 = \mathfrak{r}'_1$, visto que o produto de dois elementos dos ideais de $\mathfrak{S}'$ não é sempre nulo. Supondo $b'_1 r'_2 = e'_1$, a relação $b'_1 r'_2 r'_1 = e'_1 r'_1 = r'_1$ mostra que a hipótese $r'_2 r'_1 = o$ arrasta $r'_1 = o$. A correspondência $\mathfrak{r}'_1 \sim r'_2 \mathfrak{r}'_1$ é um isomorfismo. Por outro lado, sendo $r'_2 \mathfrak{r}'_1 \sqsubseteq \mathfrak{r}'_2$, valerá necessàriamente a igualdade, visto que $\mathfrak{r}'_2$ é mínimo. O teorema está provado.

Uma proposição importante que utilizaremos é a seguinte: *se se conhecem em* $\mathfrak{S}'$ *os elementos* e'_i $(i = 1, \ldots, n)$ *ortogonais dois a dois, podem construir-se elementos* e_i, *também ortogonais dois a dois,* [3, pág. 16]. Por meio dela podemos garantir a existência em $\mathfrak{S}$ de idempotentes que são somas de elementos primitivos ortogonais dois a dois, êstes últimos com correspondentes primitivos dados, ortogonais dois a dois. É claro, de resto, que a soma de idempotentes ortogonais não é um elemento primitivo.

Provaremos ainda duas proposições.

TEOREMA: — *Se* $\mathrm{e} \in \mathfrak{S}$, *os idempotentes primitivos de* $\mathrm{e}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\mathrm{e}$, $\mathrm{e}\mathfrak{S}\mathrm{e}$ *são-no também de* $\mathfrak{S}$. Tomemos $\mathfrak{S}e$, por ex. Se e_1 é primitivo em $\mathfrak{S}e$, não existe $f \in \mathfrak{S}$ tal que $e_1 f = f e_1 = f$, visto que, pondo $e_1 = s e$, seria $f = f s e$, ou seja $f \in \mathfrak{S} e$.

TEOREMA: — *Se um elemento* $\mathrm{e} \in \mathfrak{S}$ *se pode decompor numa soma de elementos* e_i *ortogonais dois a dois, os diferentes* e_i *pertencem a* $\mathrm{e}\mathfrak{S}\mathrm{e}$. Pondo $e = e_1 + \ldots + e_n$, tem-se, por ex.,

$$e e_1 = e_1, \quad e_1 e = e_1, \quad e e_1 e = e_1 e = e_1.$$

4) **Idempotentes especiais** — Diz-se que e é um idempotente *especial*, se não existir $f \neq o$ tal que $e f = f e = o$, [DICKSON, *loc. cit.*, pág. 49].

Se um anel tem elemento u, êste é sempre idempotente especial.

TEOREMA: — *Um anel semi-simples apenas tem* u *como idempotente especial.* Se e fôr idempotente especial, pondo $\mathfrak{S} = e\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$, tem-se $u = e + (u - e)$. O elemento $v = u - e$ é idempotente, valendo $e v = v e = o$, ou seja $v = o$, $e = u$.

TEOREMA: — *No homomorfismo* $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^* = \mathfrak{S}'$, *a todo o idempotente especial* e *correspondente um idempotente especial* e', *e recìprocamente.* A demonstração é imediata. Como conseqüência, tira-se que o anel $\mathfrak{S}$ tem idempotente especial, sempre que $\mathfrak{S}'$ tem elemento um.

Diz-se que em $\mathfrak{S}$ é válida a propriedade P quando se realiza a seguinte condição: se $e_1, \ldots, e_r$ são elementos primitivos de $\mathfrak{S}$ verificando as relações $e_i e_k = o$, se $i \neq k$, e se $e = \Sigma e_i$ não é um idempotente especial, existe em $\mathfrak{S}$ um idempotente que pode decompor-se numa soma de mais do que r elementos primitivos (entre os quais os r anteriores) que se anulam dois a dois.

Num anel semi-simples é válida a propriedade P. Tomando, de facto, a decomposição $e = \Sigma e_i$, que tem sempre lugar (1), se e não é primitivo, supor que e não é idempotente especial é supor $e \neq u$. Ora u decompõe-se em mais parcelas ortogonais que e, figurando em u as parcelas de e.

É imediato o seguinte

TEOREMA: — *Se a propriedade* P *é válida em* $\mathfrak{S}$ *e* $\mathfrak{R}^*$ *existe, a propriedade* P *é válida em* $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$, *e recìprocamente.*

Pôsto isto, consideremos um idempotente especial $e \in \mathfrak{S}$ e a decomposição $\mathfrak{S} = e\mathfrak{A} + \mathfrak{B}e + \mathfrak{J} + e\mathfrak{S}e$, na qual $\mathfrak{A} = e\mathfrak{A} + \mathfrak{J}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}e + \mathfrak{J}$, [ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 104]. Vale o

TEOREMA: — *É necessário e suficiente, para que* e *seja especial, que* $\mathfrak{B}$ *(ou* $\mathfrak{A}$*) não tenha idempotente.* Se $\mathfrak{B}$ não tem idempotente, $\mathfrak{J}$ não tem idempotente, e e é especial. Inversamente, a não existência de idempotente em $\mathfrak{J}$ arrasta a não existência em $\mathfrak{B}$, pelo seguinte: se existisse $f \in \mathfrak{B}$, ter-se-ia $f = fe + i$, $i = f - fe$, $i^2 = (f - fe)(f - fe) = f - fe = i$; e viria, assim, $i = o$, $f = fe$, $f^2 = f = fefe = o$, o que demonstra a afirmação.

C

5) **Primeiras propriedades dos anéis semi-primários** — $\mathfrak{S}$ diz-se *semi-primário* se tem radical $\mathfrak{R}^*$ e se $\mathfrak{S} =$

(1) Exclui-se o caso do anel se reduzir a um corpo.

$=\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*=\mathfrak{S}'$ é semi-simples, [3, pág. 13]. Como num anel semi-simples há idempotente primitivo e idempotente especial, o mesmo sucede em $\mathfrak{S}$. Para as decomposições de PEIRCE relativas a um idempotente especial e, vale o

TEOREMA: — *Os ideais $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ estão contidos no radical.* Consideremos $\mathfrak{B}$, por ex. Em $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$ corresponde-lhe $\mathfrak{B}'$. Visto que $\mathfrak{B}$ não tem idempotente, o mesmo sucede em $\mathfrak{B}'$. Será $\mathfrak{B}'=(o)$ e ter-se-á $\mathfrak{B}\subseteqq\mathfrak{R}^*$.

COROLÁRIO: — *Em $\mathfrak{S}'$ há apenas o idempotente especial $\mathfrak{u}'$.* Se e fôr um idempotente especial qualquer de $\mathfrak{S}$, tem-se $s=es+(s-es)$, com $s-es\in\mathfrak{B}$. Vem $s'=e's'$, e, portanto, $e'=u'$. É um resultado conhecido.

TEOREMA: — *Um elemento primitivo de $\mathfrak{S}$ determina um ideal regular mínimo.* No anel semi-simples $\mathfrak{S}'$, um idempotente primitivo e'_1 determina, com efeito, um ideal mínimo $e'_1\mathfrak{S}'$. O teorema resulta duma proposição demonstrada em *B*.

COROLÁRIO: — *Todo o ideal regular $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{S}$, tem um ideal regular mínimo.* Basta passar a $\mathfrak{r}'$, tomar neste um ideal mínimo não nulo $e'_1\mathfrak{S}'$ e considerar $e_1\mathfrak{S}$, com $e_1\in\mathfrak{r}$.

Em $\mathfrak{S}$, conforme os resultados da secção *B*, é válida a propriedade *P*. Podemos também afirmar que há sempre um idempotente especial que é soma de idempotentes primitivos ortogonais (¹). A êste respeito enuncia-se o

TEOREMA: — *O número de idempotentes primitivos ortogonais em que pode decompor-se um idempotente especial é um invariante.* Dado um idempotente especial e, para o qual $e=e_1+\ldots+e_n$ é uma decomposição como a referida no teorema, tem-se $\mathfrak{S}'=e'_1\mathfrak{S}'+\ldots+e'_n\mathfrak{S}'$. Os ideais $e'_i\mathfrak{S}'$ são mínimos. O seu número é bem determinado (²).

6) **Estrutura dos anéis semi-primários** (³) — Tomemos um idempotente especial e, susceptível de ser decom-

(¹) Exclui-se o caso de $\mathfrak{S}'$ ser um corpo.
(²) Para tudo quanto respeita aos anéis semi-simples, podem ver-se [1] e [8], assim como ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*
(³) Cfr. [2, pág. 182].

posto em idempotentes primitivos ortogonais: $e=e_1+\ldots$ $\ldots+e_n$. Ponhamos $\mathfrak{L}=e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_n\mathfrak{S}=e\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}=$ $=\mathfrak{L}+\mathfrak{B}=e\mathfrak{S}+\mathfrak{B}$. Podemos enunciar o seguinte

TEOREMA: — *Um anel semi-primário $\mathfrak{S}$ é soma dum número finito de ideais regulares mínimos e dum nilideal.* Na demonstração supôs-se que os e_i eram ortogonais. Essa hipótese garante o seguinte

ADITAMENTO: — *O número de ideais regulares da soma é bem determinado.*

Do exposto resulta que um anel semi-primário verifica as duas condições seguintes: α) todo o ideal regular tem um ideal regular mínimo; β) uma cadeia de ideais regulares mínimos $e_1\mathfrak{S}\subset e_1\mathfrak{S}+e_2\mathfrak{S}\subset\ldots$, onde $e_ie_k=o$, é finita (¹). Basta mesmo supor, em β), [2, pág. 166], que $i<k$. Então, com efeito, duma soma directa $e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_n\mathfrak{S}$ passa-se ainda a uma soma directa correspondente em $\mathfrak{S}'$. As propriedades α) e β), com $i<k$, são usadas em [2] como características dos anéis semi-primários. A equivalência desta definição à que é aqui adoptada é fácil de estabelecer, [2, págs. 167 e 171].

Escrevamos, a partir do idempotente especial e, as decomposições

$$\mathfrak{S}=e\mathfrak{S}+\mathfrak{B}=(e\mathfrak{S}e+e\mathfrak{A})+(\mathfrak{B}e+\mathfrak{Z})=e\mathfrak{S}e+ \\ +(e\mathfrak{A}+\mathfrak{B}e+\mathfrak{Z}). \tag{1}$$

As condições de máximo e de mínimo transportam-se de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ para $e\mathfrak{S}e/e\mathfrak{R}^*e$, [3, pág. 14]. Nessas condições, $e\mathfrak{S}e$ é semi-primário. Daqui o

TEOREMA: — *Um anel semi-primário $\mathfrak{S}$ é soma directa dum anel semi-primário $\mathfrak{S}_1$, com elemento um, e dum módulo*

(¹) A soma termina quando $e_1+\ldots+e_n$ é um idempotente especial.

$\mathfrak{M}_1$ *contido no radical. O radical* $\mathfrak{R}^*$ *é soma directa de* $\mathfrak{M}_1$ *e do radical de* $\mathfrak{S}_1$.

Um caso interessante é aquêle para o qual, em (1), se tem $e\mathfrak{A}=(o)$. Verifica-se, então, que $\mathfrak{S}_1=e\mathfrak{S}e$ é um ideal direito de $\mathfrak{S}$ e que todo o ideal direito de $\mathfrak{S}_1$ é ideal direito de $\mathfrak{S}$. Feita a decomposição de $\mathfrak{S}_1$ em ideais regulares mínimos com idempotentes ortogonais, fica feita a decomposição de $\mathfrak{S}$. É $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{B}$. Realizam-se estas condições se existe, por ex., uma unidade direita e.

Pôsto isto, tomemos em $\mathfrak{S}$ dois idempotentes primitivos e_1 e e_2, tais que $e'_1\mathfrak{S}'$ e $e'_2\mathfrak{S}'$ sejam operatòriamente isomorfos, e ponhamos

$$\mathfrak{r}_1=e_1\mathfrak{S},\quad \mathfrak{r}_2=e_2\mathfrak{S},\quad \mathfrak{e}_1=\mathfrak{S}e_1,\quad \mathfrak{e}_2=\mathfrak{S}e_2,$$
$$\mathfrak{S}_{12}=\mathfrak{r}_1\mathfrak{e}_2=e_1\mathfrak{S}.\mathfrak{S}e_2=e_1\mathfrak{S}e_2,\quad \mathfrak{S}_{21}=\mathfrak{r}_2\mathfrak{e}_1=e_2\mathfrak{S}e_1.$$

Tem lugar o seguinte

TEOREMA: — $\mathfrak{S}_{12}$ *possui um elemento regular* $\mathfrak{b}_{12}$, *ou seja um elemento verificando as relações* $\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{S}_{21}=\mathfrak{S}_{11}=\mathfrak{r}_1\mathfrak{e}_1=$ $=e_1\mathfrak{S}e_1$. Na verdade, tem-se $b_{12}\mathfrak{S}_{21}\subseteqq\mathfrak{S}_{11}$. Sendo, porém, $b_{12}\mathfrak{S}_{21}\mathfrak{S}_{11}=b_{12}\mathfrak{S}_{21}$, vê-se que $b_{12}\mathfrak{S}_{21}$ é ideal direito de $\mathfrak{S}_{11}$. O sinal $\subset$ não pode subsistir para todos os $b_{12}\in\mathfrak{S}_{12}$, como vamos ver. O anel $\mathfrak{S}_{11}$ é semi-primário, e, como e_1 é primitivo, é completamente primário. Sempre que o sinal $\subset$ subsistir, o ideal $b_{12}\mathfrak{S}_{21}$ é nilideal direito e está contido em $e_1\mathfrak{R}^*e_1$. Se, com todos os b_{12}, se obtivessem nilideais, como um teorema da secção B permitiria escrever $\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{21}=$ $=\mathfrak{S}_{11}$, êste último seria nilanel, o que é absurdo. O teorema está provado [1].

É claro que os teoremas dados na secção B, àcêrca de ideais regulares mínimos de $\mathfrak{S}$ e de ideais mínimos idempotentes de $\mathfrak{S}'$, são válidos aqui [2].

Regressemos ao estudo da decomposição

$$\mathfrak{S}=e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_n\mathfrak{S}+\mathfrak{B}, \tag{2}$$

(1) Basta que o anel $\mathfrak{S}$ tenha radical $\mathfrak{R}^*$ e que $\mathfrak{r}_1$ e $\mathfrak{r}_2$ sejam mínimos para a validade do teorema. Existindo, com efeito, como se viu na secção B, $\rho_1\in\mathfrak{r}_1$, tal que $\rho_1\mathfrak{r}_2=\mathfrak{r}_1$, tem-se $\rho_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{e}_1=$ $=\rho_1 e_2.\mathfrak{r}_2\mathfrak{e}_1=\mathfrak{r}_1\mathfrak{e}_1$, donde se conclui o que se deseja, pondo $b_{12}=\rho_1 e_2$.

dada no comêço do §. Suponhamos que os t primeiros ideais da decomposição têm os t ideais correspondentes de $\mathfrak{S}'$ operatòriamente isomorfos, não havendo outros ideais da decomposição nessas condições. Fazendo $i, k=1,\ldots,t$, representemos com x_{ik} um elemento de $\mathfrak{S}_{ik}=e_i\mathfrak{S}e_k$ e ponhamos $e_i=e_{ii}$. Em seguida, em cada $\mathfrak{S}_{i1}$, tomemos um elemento regular e_{i1}. Visto que $e_{i1}\mathfrak{S}_{1i}=\mathfrak{S}_{ii}$, tomemos em $\mathfrak{S}_{1i}$ o elemento e_{1i} tal que $e_{i1}e_{1i}=e_{ii}$. Verifica-se ser

$$(e_{1i}e_{i1})^2=e_{1i}e_{i1}e_{1i}e_{i1}=e_{1i}e_{ii}e_{i1}=e_{1i}e_{i1}.$$

Assim, $e_{1i}e_{i1}$ é um idempotente de $\mathfrak{S}_{11}$, valendo $e_{1i}e_{i1}=e_{11}$. Para prosseguirmos na construção de matrizes, poremos, por definição, $e_{ik}=e_{i1}e_{1k}$. Vê-se imediatamente que $e_{ik}\neq 0$. De facto é

$$e_{ik}e_{ki}=e_{i1}e_{1k}e_{k1}e_{1i}=e_{i1}e_{11}e_{1i}=e_{i1}e_{1i}=e_{ii}.$$

Em seguida, tem-se $e_{ik}e_{kf}=e_{if}$. As f^2 matrizes e_{ik} são matrizes unidades verificando as relações $e_{ik}e_{jf}=$ $=\delta_{kj}e_{if}$, onde $\delta_{kj}=o$, se $k\neq j$, e $\delta_{kj}=e_{11}+\ldots+e_{tt}$, se $k=j$, [5]. O idempotente $f_1=e_{11}+\ldots+e_{tt}$ é unidade esquerda de $e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_t\mathfrak{S}$ e são verificadas as condições

$$\mathfrak{S}_{ik}\mathfrak{S}_{km}=\mathfrak{S}_{im}.$$

Quando se faz a decomposição de PEIRCE relativa ao elemento f_1:

$$\mathfrak{S}=f_1\mathfrak{S}+\mathfrak{B}_1=(f_1\mathfrak{S}f_1+f_1\mathfrak{A}_1)+\mathfrak{B}_1,$$

tem-se $e_1\mathfrak{S}+\ldots+e_t\mathfrak{S}=f_1\mathfrak{S}=f_1\mathfrak{S}f_1+f_1\mathfrak{A}_1$. Fàcilmente se reconhece que as matrizes e_{ik}, assim como os $\mathfrak{S}_{ik}$, pertencem a $f_1\mathfrak{S}f_1$. Por ex.:

$$f_1e_{ik}f_1=e_{ik},\qquad \mathfrak{S}_{ik}=f_1\mathfrak{S}_{ik}f_1.$$

De resto, pelo que respeita aos e_{ii}, foi êste resultado estabelecido já no § 3. O anel $f_1\mathfrak{S}f_1$ tem radical $f_1\mathfrak{R}^*f_1$ e é anel de matrizes com elementos dum anel $\mathfrak{W}$ nêle contido e isomorfo dum anel completamente primário. Sendo $\mathfrak{X}=f_1\mathfrak{S}f_1/f_1\mathfrak{R}^*f_1$ um anel de matrizes com elementos de $\mathfrak{W}'=(\mathfrak{W},f_1\mathfrak{R}^*f_1)/f_1\mathfrak{R}^*f_1\cong\mathfrak{W}/[\mathfrak{W},f_1\mathfrak{R}^*f_1]$, conclui-se ser $f_1\mathfrak{S}f_1$ um anel primário, pois o último anel factor escrito é um corpo e $\mathfrak{X}$ é simples, [3, pág. 21]. A parcela $f_1 \mathfrak{A}_1$, de $f_1 \mathfrak{S}$, está contida no radical $\mathfrak{R}^*$, como se verifica tendo em conta ser f'_1 elemento um de $f'_1 \mathfrak{S}'$ (1).

Procedendo em (2) com tôdas as classes de ideais regulares mínimos operatòriamente isomorfos como acaba de fazer-se com uma delas, chega-se a

$$\mathfrak{S} = f_1 \mathfrak{S} f_1 + \ldots + f_p \mathfrak{S} f_p + (f_1 \mathfrak{A}_1 + \ldots + f_p \mathfrak{A}_p) + \mathfrak{B}.$$

Daqui o seguinte

TEOREMA: — *Um anel semi-primário $\mathfrak{S}$ é soma dum número finito de anéis primários* $f_i \mathfrak{S} f_i$ *e dum módulo $\mathfrak{M}$ contido no radical. O radical $\mathfrak{R}^*$ é soma directa de $\mathfrak{M}$ e dos radicais* $f_i \mathfrak{R}^* f_i$. Para se reconhecer a afirmação relativa ao radical, escrevamos, se $r \in \mathfrak{R}^*$,

$$r = f_1 s_1 f_1 + \ldots + f_p s_p f_p + m.$$

Tem-se

$$f_i r f_i = f_i s_i f_i + f_i m f_i \quad , \quad f_i s_i f_i = f_i (r - m) f_i,$$

$$r = \Sigma f_i (r - m) f_i + m,$$

como se deseja (2). Podemos observar incidentalmente que o aniquilador esquerdo $\mathfrak{A}$, de $e = f_1 + \ldots + f_p$, é dado por $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p]$, e que o anel $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ é soma directa dos anéis $f'_i \mathfrak{S}' f'_i$.

Para terminarmos as considerações dêste §, digamos ainda que podemos substituir as condições α) e β), características de anel semi-primário, pelas duas condições seguintes: α) *cada ideal regular tem um idempotente primitivo que gera um ideal regular mínimo;* β') *existe idempotente especial decomponível em idempotentes primitivos ortogonais.* A verificação é fácil de fazer.

---

(1) $f'_1 \mathfrak{S}'$ é um anel simples com elemento um. Constitui uma parcela da decomposição de $\mathfrak{S}'$ em anéis simples.

(2) É fácil de ver, recorrendo a $\mathfrak{S}'$, que, não apenas para os elementos do radical, mas para qualquer $s \in \mathfrak{S}$, se tem $s = \Sigma f_i (s - r) f_i + m$.

7) **Estudo de algumas circunstâncias particulares** — Se em $\mathfrak{S}$ existe u, designemos com e um idempotente especial qualquer e ponhamos

$$\mathfrak{S} = e \mathfrak{S} + \mathfrak{B} \quad , \quad u = e + (u - e).$$

Como $u - e$ pertence ao radical, escrevendo $e = u + r$, $r \in \mathfrak{R}^*$, vê-se que e tem inverso. Isto significa $e \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} = (0)$, $u = e$. Daqui o

TEOREMA: — *Num anel semi-primário com elemento* u, *apenas existe êste idempotente especial, o qual pode decompor-se em idempotentes primitivos ortogonais.* Supõe-se, bem entendido, que o anel não é completamente primário.

Dêste enunciado resulta que, num anel semi-primário, um idempotente não primitivo é soma de idempotentes ortogonais. Podemos precisar. Seja e um idempotente qualquer de $\mathfrak{S}$. Escrevendo $\mathfrak{S} = e \mathfrak{S} e + e \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, no anel semi-primário $e \mathfrak{S} e$, supondo e não primitivo em $\mathfrak{S}$, tem-se $e = e_1 + \ldots + e_n$, onde os $e_i \in e \mathfrak{S} e$ são ortogonais e primitivos neste último e em $\mathfrak{S}$. Enuncia-se, assim, o

TEOREMA: — *Num anel semi-primário, todo o idempotente não primitivo é soma de idempotentes primitivos ortogonais.*

Seja e um idempotente especial de $\mathfrak{S}$. Pelo facto de ser $\mathfrak{S} = e \mathfrak{S} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}^*$, sabemos (§ 2) que $e \mathfrak{S}$ tem o radical $[e \mathfrak{S}, \mathfrak{R}^*]$. É, de resto, $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{B} + [e \mathfrak{S}, \mathfrak{R}^*]$. A relação de isomorfismo

$$(e \mathfrak{S}, \mathfrak{R}^*)/\mathfrak{R}^* = \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^* \cong e \mathfrak{S}/[e \mathfrak{S}, \mathfrak{R}^*]$$

prova que $e \mathfrak{S}$ é semi-primário. O mesmo se diz de $\mathfrak{S} e$. Pode escrever-se

$$\mathfrak{S} = e \mathfrak{S} + \mathfrak{B} = e \mathfrak{S} e + e \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{R}^* = [e \mathfrak{S}, \mathfrak{R}^*] + \mathfrak{B} = [e \mathfrak{S} e, \mathfrak{R}^*] + e \mathfrak{A} + \mathfrak{B} =$$
$$= e \mathfrak{R}^* e + e \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Fixaremos, assim, o

TEOREMA: — *Se* e *é um idempotente especial dum anel semi-primário $\mathfrak{S}$,* e$\mathfrak{S}$ *é um anel semi-primário (assim como* $\mathfrak{S}e$). Podemos dizer, mais geralmente ainda:

TEOREMA: — *Se o anel semi-primário* $\mathfrak{S}=(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{N}_1)$ *é soma dum seu sub-anel* $\mathfrak{S}_1$ *e dum módulo* $\mathfrak{N}_1$ *contido no radical,* $\mathfrak{S}_1$ *é semi-primário.*

Suponhamos agora o caso especial de $\mathfrak{S}$ ser um anel com condição de mínimo para ideais regulares. Um tal anel é semi-primário, porque a soma de dois nilideais direitos é um nilideal direito e porque a correspondência $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'=$ $=\mathfrak{S}/\mathfrak{N}^*$ mostra ter lugar em $\mathfrak{S}'$ a condição de mínimo. Consideremos, então, a cadeia de ideais regulares direitos

$$\mathfrak{S}\supseteqq\mathfrak{S}^2\supseteqq\mathfrak{S}^3\supseteqq\ldots$$

e ponhamos $\mathfrak{S}^k=\mathfrak{S}^{k+1}$. Se e é um idempotente especial de $\mathfrak{S}$, $e^k=e$ é um idempotente especial de $\mathfrak{S}^k$. Escrevamos as decomposições correspondentes

$$\mathfrak{S}=e\mathfrak{S}e+e\mathfrak{A}+\mathfrak{B}e+\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{S}^k=e\mathfrak{S}^k e+e\mathfrak{a}+\mathfrak{b}e+\mathfrak{i}.$$

Tem-se $\qquad e\mathfrak{S}^k e=e\mathfrak{S}.\mathfrak{S}^{k-1}e=e\mathfrak{S}e,$

$$e\mathfrak{A}=e^k\mathfrak{A}=e.e^{k-1}\mathfrak{A}, \quad e^{k-1}\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{S}^k, \quad e^{k-1}\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{a},$$

$$e\mathfrak{A}=e\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{B}e=\mathfrak{b}e, \quad \mathfrak{S}=(\mathfrak{S}^k,\mathfrak{I}).$$

O teorema anterior garante ser $\mathfrak{S}^k$ um anel semi-primário. Podemos enunciar o seguinte

TEOREMA: — *Um anel com condição de mínimo para ideais regulares é soma dum anel semi-primário idempotente e dum sub-anel contido no radical.*

No caso de $\mathfrak{S}^k$ ter elemento um $=U$, não pode haver um idempotente especial $e\neq U$ no anel $\mathfrak{S}$, visto que os idempotentes dos dois anéis são os mesmos e da mesma natureza. valerá a igualdade $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^k+\mathfrak{I}$, pois $e\mathfrak{S}e=$ $=e\mathfrak{S}^k e=\mathfrak{S}^k$, $e\mathfrak{a}=\mathfrak{b}e=\mathfrak{i}=(o)$.

Embora a condição de mínimo para ideais regulares arraste a um anel o carácter de semi-primário, a inversa só é válida para os ideais regulares que contenham o radical.

Ainda como caso particular de anéis semi-primários, podem considerar-se os anéis semi-primários de radical nilpotente. Tem lugar o

TEOREMA: — *É condição necessária e suficiente, para que um anel* $\mathfrak{S}$ *seja semi-primário e de radical* $\mathfrak{N}^*$ *nilpotente, que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}=\mathfrak{S}'$ *seja semi-simples e* $\mathfrak{N}$ *seja nilpotente.* A condição é necessária, porque, dado $\mathfrak{S}$ nas condições do teorema, tem-se $\mathfrak{N}^*=\mathfrak{N}$. A condição é suficiente, porque, se $\mathfrak{S}'$ é semi-simples, $\mathfrak{N}^*$ existe e é igual a $\mathfrak{N}$.

É válida agora a seguinte proposição: *é condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ *seja semi-simples e* $\mathfrak{N}$ *seja nilpotente, que tenha lugar a condição de mínimo para ideais direitos contendo* $\mathfrak{N}$ *e que seja finita tôda a cadeia descendente de ideais bilaterais contidos em* $\mathfrak{N}$ *da forma* $\mathfrak{L}_0\supset\mathfrak{L}_0\mathfrak{L}_1\supset\ldots$. A demonstração é imediata, se se tiverem em conta resultados estabelecidos na secção *A*, § 1.º. Tira-se daqui o seguinte

COROLÁRIO: — *Um anel com condição de mínimo para ideais direitos é um anel semi-primário de radical nilpotente.*

D

8) **Os anéis com condição de mínimo** — Um anel $\mathfrak{S}$ com condição de mínimo para ideais direitos, ou *anel*-U, é um anel semi-primário, visto que, em particular, vale nêle a condição de mínimo para ideais regulares direitos, salvo se fôr nilanel. Tem lugar a importante proposição seguinte, já demonstrada no final da secção anterior de modo diferente.

TEOREMA: — *Um anel*-U *tem radical* $\mathfrak{N}^*=\mathfrak{N}$, *que é nilpotente* [4, pág. 714] e [10, pág. 220]. A demonstração dada em [4] é, no fundo, a que passamos a expor. A condição de mínimo garante a existência dum inteiro positivo k tal que $\mathfrak{N}^k=\mathfrak{N}^{k+1}=\ldots$. Mostraremos que a hipótese $\mathfrak{N}^\rho\supset(o)$ arrasta a existência de elementos de $\mathfrak{N}^\rho$ que não pertencem a $\mathfrak{N}^{\rho+1}$. O teorema resultará, então, imediatamente. Consideremos os elementos $a\in\mathfrak{N}$ tais que $a\mathfrak{N}^\rho=(o)$. O seu conjunto constitui um ideal bilateral $\mathfrak{A}_\rho$, de $\mathfrak{S}$. Em $\mathfrak{N}$ tomemos um ideal direito mínimo não nulo $\mathfrak{r}$, do $\mathfrak{S}$. Valerá a relação $\mathfrak{r}\,\mathfrak{R}^{\rho}=(o)$, [4, pág. 743] (1), de sorte que é $\mathfrak{A}_{\rho}\neq(o)$. Se $\mathfrak{R}^{\rho+1}=(o)$, o resultado desejado é trivial. Se $\mathfrak{R}^{\rho+1}\supset(o)$, ponhamos $\mathfrak{A}_{\rho+1}\mathfrak{R}^{\rho+1}=(o)$. Um teorema demonstrado em A, diz aqui que, pondo $\mathfrak{P}=\mathfrak{A}_{\rho}$, o radical de $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}_{\rho}=\mathfrak{S}'$ é $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}_{\rho}=\mathfrak{R}'$. No homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$, tem-se $\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}'\supset(o)$. Se fôr $\mathfrak{n}'\supset(o)$ o ideal bilateral de $\mathfrak{S}'$, contido em $\mathfrak{R}'$, tal que $\mathfrak{n}'\mathfrak{R}'=(o)$, e se $\mathfrak{n}\rightarrow\mathfrak{n}'$, o ideal $\mathfrak{n}\supset\mathfrak{A}_{\rho}$, de $\mathfrak{S}$, satisfaz a $\mathfrak{n}\subseteqq\mathfrak{R}$, $\mathfrak{n}\,\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{A}_{\rho}$, $\mathfrak{n}\,\mathfrak{R}^{\rho+1}=(o)$. Conclui-se daqui $\mathfrak{n}\subseteqq\mathfrak{A}_{\rho+1}$, $\mathfrak{A}_{\rho+1}\supset\mathfrak{A}_{\rho}$, $\mathfrak{R}^{\rho}\supset\mathfrak{R}^{\rho+1}$, como se quere. Podemos precisar que $\mathfrak{n}=$ $=\mathfrak{A}_{\rho+1}$. Tendo em conta as relações

$$\mathfrak{A}_{\rho+1}\subseteqq\mathfrak{R},\quad \mathfrak{A}_{\rho+1}\,\mathfrak{R}^{\rho+1}=\mathfrak{A}_{\rho+1}\,\mathfrak{R}.\mathfrak{R}^{\rho}=(o),$$

$$\mathfrak{A}_{\rho+1}\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{A}_{\rho},$$

vê-se que cada $x\in\mathfrak{A}_{\rho+1}$ tem, no homomorfismo em causa, um correspondente $x'\in\mathfrak{R}'$, para o qual $x'\mathfrak{R}'=(o)$. Será, portanto, $x'\in\mathfrak{n}'$, o que dá $x\in\mathfrak{n}$, ou seja $\mathfrak{n}=\mathfrak{A}_{\rho+1}$. Do que acaba de dizer-se, pode concluir-se ainda que, sendo, $\mathfrak{R}^{k}=(o)$, é $\mathfrak{R}.\mathfrak{R}^{k-1}=(o)$, $\mathfrak{A}_{k-1}=\mathfrak{R}$. E, se se tiver em conta que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tem nilideal, vê-se ser $\mathfrak{R}^{*}=\mathfrak{R}$.

Tem lugar, mesmo, uma afirmação mais geral: *todo o sub-nilanel dum anel com condição de mínimo é nilpotente* [4] e [9].

É válida a proposição seguinte: *um módulo* $\mathfrak{M}$ *relativo a um anel semi-simples* $\mathfrak{S}$, *se nêle tiver lugar a condição de mínimo para os seus sub-módulos admissíveis e se* $\mathfrak{u}\in\mathfrak{S}$ *fôr operador unitário, é completamente redutível* [K. ASANO, *Über Ringe mit Vielfachenkettensatz, Proceedings of the Imperial Academy,* Tokyo, vol. XV, 1939, pág. 290]. Esta proposição serve para provar que um anel-U com elemento um é um *anel*-O, ou seja um anel em que vale a condição de máximo (para ideais direitos). Em [4] é demonstrado o

(1) Aplica-se o teorema seguinte: *se* $\mathfrak{r}\neq(o)$ *é um ideal direito simples e* $\mathfrak{s}$ *é um nilideal direito, tem-se* $\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}=(o)$.

TEOREMA: — *Um anel*-U *que tenha uma unidade direita é um anel* O.

A demonstração é a mesma que para o caso em que existe u. Toma-se a série normal $\{\mathfrak{S}\supset\mathfrak{R}\supset\ldots\supset\mathfrak{R}^{k}=(o)\}$ e mostra-se que pode dilatar-se e tornar-se numa série de composição de $\mathfrak{S}$ (para ideais direitos). Estudemos, por ex., a parte $\{\mathfrak{R}^{\rho}\supset\mathfrak{R}^{\rho+1}\}$. Comecemos por observar que $\mathfrak{R}^{\rho}$ é um grupo abeliano com o domínio operatório $\mathfrak{S}$ e que o mesmo sucede com o seu sub-grupo admissível $\mathfrak{R}^{\rho+1}$. Dêsse modo, $\Delta=\mathfrak{R}^{\rho}/\mathfrak{R}^{\rho+1}$ é um grupo abeliano com o domínio operatório $\mathfrak{S}$. Os sub-grupos admissíveis de $\mathfrak{R}^{\rho}$ são os ideais direitos que contém. Como a todo o subgrupo de Δ corresponde um e um só de $\mathfrak{R}^{\rho}$ que contém $\mathfrak{R}^{\rho+1}$, o estudo dos subgrupos de Δ é o estudo dos ideais direitos de $\mathfrak{S}$ contidos em $\mathfrak{R}^{\rho}$ e que contêm $\mathfrak{R}^{\rho+1}$. Consideremos dois elementos $s, t\in\mathfrak{S}$ tais que $t\text{-}s\in\mathfrak{R}$. Tem-se, se $a_{\rho}\in\mathfrak{R}^{\rho}$,

$$(a_{\rho}+\mathfrak{R}^{\rho+1})s=a_{\rho}s+\mathfrak{R}^{\rho+1},$$

$$(a_{\rho}+\mathfrak{R}^{\rho+1})t=a_{\rho}s+a_{\rho}r+\mathfrak{R}^{\rho+1}=a_{\rho}s+\mathfrak{R}^{\rho+1}.$$

Isto significa que podemos, no estudo de Δ, substituir o domínio operatório $\mathfrak{S}$ pelo domínio $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$. A unidade direita de $\mathfrak{S}$ (ou o elemento um de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$) funciona de operador unitário. A proposição anteriormente enunciada, tendo em conta que vale em Δ a condição de mínimo para os sub-módulos admissíveis, diz que Δ é completamente redutível. A uma série de composição

$$\{\mathfrak{R}^{\rho}/\mathfrak{R}^{\rho+1}\supset\mathfrak{r}_1/\mathfrak{R}^{\rho+1}\supset\ldots\supset\mathfrak{R}^{\rho+1}/\mathfrak{R}^{\rho+1}=(o)\}$$

corresponde uma série normal

$$\{\mathfrak{R}^{\rho}\supset\mathfrak{r}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{R}^{\rho+1}\}.$$

Esta última, como a anterior, não pode ser dilatada, pelo que o teorema está demonstrado, tendo em conta que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ também possui série de composição.

9) Os ideais mínimos dum anel com condição de mínimo — O estudo da soma dos ideais mínimos dum anel-U

representa um facto importante em [4]. Em [6] associam-se, em separado, os ideais mínimos isomorfos dum dado ideal. Os raciocínios de [4] subsistem inteiramente. Se $\mathfrak{r}_1$ é um ideal mínimo de $\mathfrak{S}$, a soma $\mathfrak{M}_1$ de todos os ideais mínimos isomorfos de $\mathfrak{r}_1$ é um ideal bilateral (¹). No conjunto $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}'_1, \dots$ de tais ideais não é possível extrair uma infinidade numerável de ideais, de tal sorte que uma parte finita qualquer da soma dessa infinidade constitua uma soma directa, pois que, escrevendo $\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_1'+\mathfrak{r}_1''+\dots \supset \mathfrak{r}_1'+\mathfrak{r}_1''+\dots \supset \mathfrak{r}_1''+\dots$, contradizia-se a condição de mínimo. $\mathfrak{M}_1$ é, assim, uma soma directa dum número finito de ideais isomorfos de $\mathfrak{r}_1$: $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{r}_1^{(1)}+\dots+\mathfrak{r}_1^{(q_1)}$. Designando com $\mathfrak{N}_1\subseteq\mathfrak{M}_1$ a soma dos ideais isomorfos de $\mathfrak{r}_1$ de quadrado nulo, e pondo $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{N}_1$, onde $\mathfrak{L}_1$ é uma parte dos ideais idempotentes da decomposição indicada para $\mathfrak{M}_1$ (se tais ideais existem), escrevamos $\mathfrak{L}_1=E_1^{(1)}\mathfrak{S}+\dots+E_1^{(k)}\mathfrak{S}$. É fácil passar a uma expressão de $\mathfrak{L}_1$ da forma

$$\mathfrak{L}_1=e_1^{(1)}\mathfrak{S}+\dots+e_1^{(k)}\mathfrak{S},\quad \text{com } e_1^{(i)}e_1^{(j)}=o,\quad \text{se } i\neq j.$$

Para o ver, escreve-se $\mathfrak{S}=E_1^{(1)}\mathfrak{S}+\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{L}_1=E_1^{(1)}\mathfrak{S}+\mathfrak{b}_1$. Se êste último é ideal direito mínimo, será isomorfo de $E_1^{(1)}\mathfrak{S}$, sem que seja de quadrado nulo, pois não pode pertencer a $\mathfrak{N}_1$.

Tomando o idempotente $E_2\in\mathfrak{b}_1$, ter-se-á (com $e_1^{(1)}=E_1^{(1)}$),

$$\mathfrak{L}_1=e_1^{(1)}\mathfrak{S}+E_2\mathfrak{S},\quad e_1^{(1)}E_2=o.$$

Pondo

$$e_1^{(2)}=E_2-E_2e_1^{(1)}\in\mathfrak{b}_1,$$

será

$$e_1^{(2)2}=e_1^{(2)},\quad e_1^{(1)}e_1^{(2)}=o,\quad e_1^{(2)}e_1^{(1)}=o,\quad \mathfrak{L}_1=e_1^{(1)}\mathfrak{S}+e_1^{(2)}\mathfrak{S}.$$

Não sendo $\mathfrak{b}_1$ mínimo, tomaremos neste um ideal mínimo $\mathfrak{c}_1$, e, depois, um idempotente E_2 de tal ideal. Virá

$$\mathfrak{S}=E_2\mathfrak{S}+\mathfrak{B}_2,\quad \mathfrak{b}_1=E_2\mathfrak{S}+\mathfrak{b}_2,$$

(¹) Para se mostrar que $s\,m_1\in\mathfrak{M}_1$, basta estudar $\mathfrak{r}_1\sim s\,\mathfrak{r}_1$. Se não fôr $s\,\mathfrak{r}_1=(o)$, tem-se $s\,\mathfrak{r}_1\cong\mathfrak{r}_1$, e, por conseqüência, $s\,\mathfrak{r}_1$ é um ideal direito simples. O elemento $s\,m_1$ pertence, pois, a uma soma de ideais direitos simples isomorfos de $\mathfrak{r}_1$.

e far-se-á $e_1^{(2)}=E_2-E_2e_1^{(1)}$. Como $e_1^{(2)}$ pertencerá a $\mathfrak{c}_1$, tem lugar a igualdade $E_2\mathfrak{S}=e_1^{(2)}\mathfrak{S}$ e poderá escrever-se

$$\mathfrak{L}_1=e_1^{(1)}\mathfrak{S}+e_1^{(2)}\mathfrak{S}+\mathfrak{b}_2,$$

$$e_1^{(2)2}=e_1^{(2)},\quad e_1^{(1)}e_1^{2}=o,\quad e_1^{(2)}e_1^{(1)}=o.$$

O processo termina ou continua, conforme $\mathfrak{b}_2$ fôr mínimo ou não. Se fôr mínimo, toma-se um idempotente E_3, depois $e_1^{(3)}=E_3-E_3(e_1^{(1)}+e_1^{(2)})$, o que dará finalmente

$$\mathfrak{L}_1=e_1^{(1)}\mathfrak{S}+e_1^{(2)}\mathfrak{S}+e_1^{(3)}\mathfrak{S},$$

$$e_1^{(3)}e_1^{(3)}=e_1^{(3)},\quad e_1^{(1)}e_1^{(3)}=e_1^{(2)}e_1^{(3)}=o,$$

$$e_1^{(3)}e_1^{(1)}=e_1^{(3)}e_1^{(2)}=o.$$

Se não fôr mínimo, continua-se, como se disse. Sabemos que serão, por último, obtidas k parcelas, pois k é o comprimento duma série de composição do grupo $\mathfrak{L}_1$ com o domínio operatório $\mathfrak{S}$.

É válida a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathfrak{L}_1$	$\mathfrak{N}_1$
$\mathfrak{L}_1$	$\mathfrak{L}_1$	(o)
$\mathfrak{N}_1$	$\mathfrak{N}_1$	(o)

Para o verificar procede-se como em [4]. Pondo, na verdade, $E_1=e_1^{(1)}+\dots+e_1^{(k)}$,

$$\mathfrak{L}_1=E_1\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}=E_1\mathfrak{S}+\mathfrak{B}_1=E_1\mathfrak{S}E_1+E_1\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1,$$

vê-se que $E_1\mathfrak{A}_1=(o)$, [4, pág. 718] (¹). Nessas condições, tem-se

$$\mathfrak{L}_1=E_1\mathfrak{S}E_1,\quad \mathfrak{L}_1^2=E_1\mathfrak{S}E_1=\mathfrak{L}_1.$$

(¹) A demonstração de Hopkins é feita do modo a seguir. Começa-se por verificar ser $\mathfrak{B}_1E_1\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{N}_1$, e, portanto, $(\mathfrak{B}_1E_1\mathfrak{A}_1)^2=(o)$; depois vê-se que $E_1\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{S}_1E_1\mathfrak{A}_1=\Delta$, com $\Delta^4=(o)$. Sendo também $E_1\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{L}_1$, conclui-se que $E_1\mathfrak{A}_1$ está contido num ideal direito nilpotente, que é intersecção do ideal direito $\mathfrak{L}_1$ e do ideal bilateral nilpotente gerado por Δ.

Como o radical $\mathfrak{R}$, de $\mathfrak{S}$, verifica a relação $\mathfrak{L}_1\mathfrak{R}=(o)$, segue-se que é $E_1\mathfrak{R}=(o)$. O radical de $\mathfrak{L}_1$ é nulo. Visto que a condição de mínimo se transporta para $E_1\mathfrak{S}E_1$, conclui-se que $\mathfrak{L}_1$ é semi-simples. Os ideais direitos de $\mathfrak{L}_1$ são ideais direitos de $\mathfrak{S}$, como se verifica tendo èm conta ser $\mathfrak{B}_1$ o aniquilador direito de E_1. Por isso, $\mathfrak{L}_1$ é um anel simples. As igualdades $\mathfrak{L}_1\mathfrak{N}_1=(o)$, $\mathfrak{N}_1^2=(o)$ são imediatas. A relação $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1=\mathfrak{N}_1$ prova se, como em [6, pág. 181], do modo que vai ver-se. É $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1\subseteqq\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1E_1=$ $=\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1\subseteqq\mathfrak{N}_1E_1$, $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1\supseteqq\mathfrak{N}_1E_1$, e, portanto, $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1=$ $=\mathfrak{N}_1E_1$. Sejam $\mathfrak{r}_1$ e $\mathfrak{r}'_1$ dois ideais simples isomorfos, respectivamente pertencentes a $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{N}_1$. A correspondência $r_1\to r'_1$ dá $r_1E_1=r_1\to r'_1E_1=r'_1$. Daqui se conclui que E_1 é unidade direita de $\mathfrak{N}_1$ (e, portanto, de $\mathfrak{M}_1$), o que demonstra ser $\mathfrak{N}_1\mathfrak{L}_1=\mathfrak{N}_1$. Podemos enunciar o

TEOREMA: — *Um anel-*U *é soma directa do ideal direito $\mathfrak{L}_1$ (soma de ideais direitos mínimos isomorfos dum ideal mínimo), que é um anel simples, e do ideal direito $\mathfrak{B}_1$, êste último constituindo o aniquilador direito de $\mathfrak{L}_1$. O radical está contido em $\mathfrak{B}_1$, que é um ideal bilateral.* Observemos que se tem $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}_1=(o)$, de modo que o aniquilador direito de $\mathfrak{L}_1$ contém $\mathfrak{B}_1$. Como êsse aniquilador está contido no aniquilador de E_1, a afirmação correspondente do teorema é exacta. Como é $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_1=(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{B}_1)\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_1^2\subseteqq\mathfrak{B}_1$, vê-se que êste último é ideal bilateral de $\mathfrak{S}$. Finalmente, é imediato que o radical está contido em $\mathfrak{B}_1$.

COROLÁRIO: — *Se um anel-*U *é soma dos seus ideais direitos mínimos, supostos todos isomorfos, ou é igual ao seu radical, ou é simples, ou é soma directa dum anel simples e do seu radical. Êste último é de expoente 2,* [6, pág. 181]. Na verdade, é $\mathfrak{S}=\mathfrak{M}_1=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{N}_1$. Se não há radical, tem-se $\mathfrak{N}_1=(o)$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{L}_1$. Se $\mathfrak{R}\supset(o)$, notemos que, sendo $E_1\mathfrak{R}=(o)$, é $\mathfrak{N}_1\subseteqq\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{B}_1$. As igualdades $\mathfrak{S}=$ $=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{B}_1=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{N}_1$ dão $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{N}_1=\mathfrak{R}$. Se $\mathfrak{L}_1=(o)$, é $\mathfrak{S}=\mathfrak{R}$. De contrário, é $\mathfrak{S}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{R}$, o que demonstra o corolário. A tabela anterior é agora relativa às duas parcelas de $\mathfrak{S}$.

Os anéis referidos no corolário, ou *anéis quási-simples*, [6, pág. 179], consideram-se de estrutura conhecida, pelo menos no que respeita ao produto dos seus elementos.

Pôsto isto, consideremos os ideais mínimos não operatòriamente isomorfos, $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$. Escolhamos de entre êles, se fôr possível, uma infinidade numerável $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$. A soma dêstes é directa, visto que $\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2$ é soma directa e a prova por indução é imediata. Conclui-se daqui haver um número finito de classes de ideais mínimos isomorfos. A essas diferentes classes correspondem somas $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_q$ e $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_q$. Tanto $\mathfrak{M}=\Sigma\,\mathfrak{M}_i$ como $\mathfrak{N}=\Sigma\,\mathfrak{N}_i$ são somas directas. De facto, $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ está nessas condições, visto que a sua intersecção é um ideal direito de $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$, simultâneamente igual a uma soma de ideais direitos isomorfos dos que figuram em $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$. Por outro lado, a indução é fácil de estabelecer. É claro que os dois somatórios representam, respectivamente, a soma de todos os ideais direitos mínimos de $\mathfrak{S}$ e a de todos os ideais direitos mínimos nilpotentes. São imediatas as relações $\mathfrak{M}_i\,.\,\mathfrak{M}_j=(o)$, se $i\neq j$. Delas se deduzem outras. Têm também lugar várias tabelas análogas à dada anteriormente. Escrevendo $\mathfrak{L}=\Sigma\,\mathfrak{L}_i$, tem-se $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}+\mathfrak{N}$. Desde que se escolha uma base ortogonal de elementos idempotentes em cada $\mathfrak{L}_i$, obtém-se, pelo conjunto dessas bases, uma base ortogonal para $\mathfrak{L}$. É válida a tabela

	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{N}$
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}$	(o)
$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{N}$	(o)

Para se verificar a relação $\mathfrak{N}\,\mathfrak{L}=\mathfrak{N}$, basta escrever

$$\mathfrak{N}\,\mathfrak{L}=(\mathfrak{N}_1+\ldots+\mathfrak{N}_q)\,(\mathfrak{L}_1+\ldots+\mathfrak{L}_q)=$$
$$=\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{L}_1+\ldots+\mathfrak{N}_q\,\mathfrak{L}_q=\mathfrak{N}_1+\ldots+\mathfrak{N}_q=\mathfrak{N}.$$

Se representarmos com E a soma dos diferentes elementos *um* dos $\mathfrak{L}_i$, E é o elemento um de $\mathfrak{L}$ e é unidade direita de $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{L}$ é um anel semi-simples. Evidentemente que $\mathfrak{L}_i$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{L}$.

Vamos reconhecer ainda algumas circunstâncias. Pondo

$$\mathfrak{S}=(E_1+E_2)\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{B}_{12}(E_1+E_2)+\mathfrak{J}_{12}+$$
$$+(E_1+E_2)\mathfrak{S}(E_1+E_2),$$

mostram-se fàcilmente as relações

$$\mathfrak{A}_{12}=[\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2]=\mathfrak{J}_{12},\quad (E_1+E_2)\mathfrak{A}_{12}=(o),$$

$$(E_1+E_2)\mathfrak{S}(E_1+E_2)=(E_1+E_2)\mathfrak{S}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2,$$

$$\mathfrak{B}_{12}=[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2],\quad \mathfrak{S}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2+\mathfrak{B}_{12}.$$

Êstes resultados podem evidentemente generalizar-se ao caso de mais do que dois $\mathfrak{L}_i$.

Tem lugar o seguinte

TEOREMA: — *Um anel $\mathfrak{S}$ com condição de mínimo para ideais direitos é a soma directa do ideal direito $\mathfrak{L}$ (soma de ideais direitos mínimos), que é um anel semi-simples, e do ideal direito $\mathfrak{B}$, êste último constituindo o aniquilador direito de $\mathfrak{L}$. O radical está contido em $\mathfrak{B}$, que é um ideal bilateral.* E pode enunciar-se o

COROLÁRIO: — *Se um anel-$\mathfrak{U}$ é soma dos seus ideais direitos mínimos, ou é igual ao seu radical, ou é semi-simples, ou é soma directa dum anel semi-simples e do seu radical. Êste último é de expoente 2.* Um anel como o referido neste corolário pode chamar-se *quási-semi-simples*. A tabela anterior é, então, relativa às duas parcelas de $\mathfrak{S}$. O produto dos elementos de $\mathfrak{N}$ pelos elementos de $\mathfrak{L}$ esclarece-se, notando que é $\mathfrak{N}_i\mathfrak{L}_j=(o)$, se $i\neq j$.

Consideremos um anel quási-semi-simples, $\mathfrak{S}=\mathfrak{M}=\Sigma\mathfrak{M}_i$. Como um ideal direito de $\mathfrak{M}_i$ é ideal direito de $\mathfrak{S}$, podemos enunciar o

TEOREMA: — *Um anel quási-semi-simples é soma directa dum número finito de anéis quasi-simples que mùtuamente se anulam. O radical daquele é soma directa dos radicais dêstes últimos e o seu expoente é 2.* Êste teorema traduz também uma propriedade da soma $\mathfrak{M}$ dos ideais direitos mínimos dum anel qualquer.

Tôdas as propriedades demonstradas em [4, págs. 719 e 720], relativas a $\mathfrak{L},\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ são válidas para $\mathfrak{L}_1,\mathfrak{M}_1,\mathfrak{N}_1$. Assim, pode escrever-se $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{L}'_1+\mathfrak{N}_1$, onde $\mathfrak{L}'_1=(E_1+D_1)\mathfrak{L}_1$, com $D_1\in\mathfrak{N}_1$, valendo a recíproca que afirma ser $\mathfrak{L}'_1$ da forma indicada, sempre que $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{L}'_1+\mathfrak{N}_1$. Os ideais direitos $\mathfrak{L}'_1$ e os elementos $D_1\in\mathfrak{N}_1$ estão em correspondência biünívoca, há um isomorfismo operatório $\mathfrak{L}_1\cong\mathfrak{L}'_1$. o ideal bilateral $\mathfrak{B}_1$ verifica as igualdades $\mathfrak{S}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{B}_1=\mathfrak{L}'_1+\mathfrak{B}_1$, e vale a igualdade $\mathfrak{L}_1E_1=\mathfrak{L}_1(E_1+D_1)$.

10) **Os anéis com condição de máximo e de mínimo** — A existência de radical $\mathfrak{R}$, mesmo no caso fortemente restritivo de condição de cadeia descendente, complica extraordinàriamente o estudo da estrutura dum anel. Se êste fôr uma álgebra $\mathfrak{A}$, de corpo fundamental $\mathfrak{P}$, e se $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ se conserva semi-simples quando $\mathfrak{P}$ se substitui por uma ampliação algébrica qualquer $\Omega\supseteqq\mathfrak{P}$, tem lugar o seguinte teorema de WEDDERBURN-DICKSON: *a álgebra é soma directa duma sub-álgebra semi-simples, isomorfa de $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, e do radical* [3, pág. 23] (1). No § anterior demonstrou-se êste mesmo teorema para os anéis quási-semi-simples. Em [6] encontram-se investigações neste sentido. O que aqui nos propomos é de natureza diferente. Trata-se ùnicamente de dar demonstrações claras de duas proposições da teoria das álgebras, a segunda das quais está relacionada com a hipótese de $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ se conservar semi-simples quando $\mathfrak{P}$ se amplia algèbricamente. Na teoria das representações [1], [8] [3], enuncia-se o

TEOREMA: — *Dada uma álgebra de corpo fundamental $\mathfrak{P}$, existe sempre um corpo $\Omega\supseteqq\mathfrak{P}$, tal que o anel cociente $\mathfrak{S}'=\mathfrak{A}_\Omega/\mathfrak{R}_1$, da álgebra ampliada segundo o seu radical, é isomorfo duma soma directa de anéis completos de matrizes com elementos de Ω.* Seja Ω algèbricamente fechado. Escrevendo $\mathfrak{S}'=\mathfrak{A}_1+\ldots+\mathfrak{A}_s$, se e_1, por ex., fôr o elemento um do anel simples $\mathfrak{A}_1$, o corpo $e_1\Omega=\Omega'$ é isomorfo de Ω. Ω' taz parte do centro de $\mathfrak{A}_1$, pois que, para qualquer a_1 vale

$$(a_1\omega)=a_1\omega'=a_1e_1.\omega=e_1a_1.\omega=e_1\omega.a_1=\omega'a_1.$$

Vamos ver que o centro é precisamente Ω'. $\mathfrak{A}_1$ é módulo finito relativamente ao corpo $\mathfrak{K}_1\supseteqq\Omega'$ dos seus

(1) Cfr. E. CARTAN, *Les groupes bilinéaires*, «Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse», tome XII, 1898, em especial pág. 76.

elementos que comutam com um sistema de matrizes unidades e também módulo finito relativamente a Ω'. $\mathfrak{K}_1$ é, pois, módulo finito relativamente a Ω'. Ora o centro de $\mathfrak{A}_1$ está contido em $\mathfrak{K}_1$. Vamos precisar que é $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{Q}'$, o que demonstrará o teorema. Um elemento $x \in \mathfrak{K}_1$ satisfaz a uma equação algébrica com coeficiente de $\mathfrak{Q}'$:

$$x^r + x^{r-1}\omega'_{r-1} + \ldots + \omega'_o = o. \qquad (3)$$

Considerado o 1.º membro como polinómio em x, visto que Ω' é algèbricamente fechado, a equação anterior pode escrever-se

$$(x - \omega') \ldots (x - \omega^{(r)}) = o, \qquad (\omega^{(i)} \in \Omega').$$

Se agora x volta a ser um elemento de $\mathfrak{K}_1$, o facto de os $\omega^{(i)}$ comutarem com x permite afirmar que a última equação é a mesma que (3) e que x é igual a um $\omega^{(i)}$, como se queria.

TEOREMA: — *Se $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ se conserva semi-simples para qualquer ampliação algébrica Δ, de $\mathfrak{P}$, existe uma ampliação algébrica finita $\mathfrak{L}$, de $\mathfrak{P}$, tal que $\mathfrak{A}_\mathfrak{L}/\mathfrak{R}_2$ ($\mathfrak{R}_2$ = radical de $\mathfrak{A}_\mathfrak{L}$) é soma de anéis completos de matrizes com elementos de corpos isomorfos de $\mathfrak{L}$.* Em primeiro lugar, é $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_\mathfrak{L}$, visto que, dum modo geral, o estudo do homomorfismo $\mathfrak{A}_\Delta \sim \mathfrak{A}_\Delta/\mathfrak{R}_\Delta = (\mathfrak{A}/\mathfrak{R})_\Delta$ mostra estar cada ideal nilpotente de $\mathfrak{A}_\Delta$ contido no ideal bilateral nilpotente $\mathfrak{R}_\Delta$. Dando a Ω o mesmo significado que no teorema anterior, ponhamos

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s, \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \ldots + \mathfrak{Z}_s,$$

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{R})_\mathfrak{Q} = \mathfrak{a}_{1\mathfrak{Q}} + \ldots + \mathfrak{a}_{s\mathfrak{Q}}, \qquad \mathfrak{Z}_\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}_{1\mathfrak{Q}} + \ldots + \mathfrak{Z}_{s\mathfrak{Q}},$$

onde os $\mathfrak{a}_i$ são anéis simples e os $\mathfrak{Z}_i$ os seus centros. Cada $\mathfrak{a}_{i\mathfrak{Q}}$ decompõe-se, por hipótese, em anéis simples (por ex.):

$$\mathfrak{a}_{1\mathfrak{Q}} = \mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{Q}} + \ldots + \mathfrak{A}^{(p_1)}_{1\mathfrak{Q}}, \quad \mathfrak{Z}_{1\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Z}^{(1)}_{1\mathfrak{Q}} + \ldots + \mathfrak{Z}^{(p_1)}_{1\mathfrak{Q}}.$$

O número de parcelas destas somas é dado pela ordem da álgebra $\mathfrak{Z}_1$ relativamente a $\mathfrak{P}$. Viu-se, de facto, no teorema anterior, que $\mathfrak{Z}^{(1)}_{1\mathfrak{Q}}$ era álgebra de 1.ª ordem relativamente a Ω' (ou $\mathfrak{Q}$). Ora $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{Q}}$ dá uma representação irredutível de $\mathfrak{A}_\mathfrak{Q}$ num corpo isomorfo de Ω, e, portanto, neste último. Essa representação é uma representação absolutamente irredutível de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{Q}$. Tomando um ideal esquerdo de $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{Q}}$ como módulo de representação [1], os elementos $e_1, \ldots, e_n$, que constituem a base de $\mathfrak{A}$ (ou de $\mathfrak{A}_\mathfrak{Q}$) [2], têm como correspondentes matrizes nas quais figura um número finito de elementos de $\mathfrak{Q}$. Fazendo o mesmo raciocínio para as diferentes parcelas dos diferentes $\mathfrak{a}_{i\mathfrak{Q}}$, define-se uma ampliação algébrica finita $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}(\omega_1, \ldots, \omega_r)$, de $\mathfrak{P}$, que contém os elementos de tôdas as matrizes que correspondem aos elementos de $\mathfrak{A}$. As representações absolutamente irredutíveis de $\mathfrak{A}$ são, pois, representações irredutíveis distintas de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{L}$. Vamos ver que, inversamente, se obtêm assim tôdas as representações irredutíveis de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{L}$. Uma tal representação, ou representação irredutível de $\mathfrak{A}_\mathfrak{L}$, ou de $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{R})_\mathfrak{L}$, é obtida a partir de

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{R})_\mathfrak{L} = \mathfrak{a}_{1\mathfrak{L}} + \ldots + \mathfrak{a}_{s\mathfrak{L}},$$

decompondo os $\mathfrak{a}_{i\mathfrak{L}}$ em anéis simples. A decomposição de $\mathfrak{a}_{1\mathfrak{L}}$, por ex., não pode dar mais do que p_1 parcelas, pois, de contrário, também $\mathfrak{a}_{1\mathfrak{Q}}$ daria mais do que p_1 parcelas. O número p_1 é certamente atingido, tendo em conta o número de representações irredutíveis distintas de $\mathfrak{A}$, em $\mathfrak{L}$, o que já se sabe existirem. Será, assim,

$$\mathfrak{a}_{1\mathfrak{L}} = \mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}} + \ldots + \mathfrak{A}^{(p_1)}_{1\mathfrak{L}}.$$

---

(1) A teoria das representações das álgebras encontra-se, como se disse, em [8], [1] e [3]. Uma exposição sistemática, que inclui *todos* os resultados da teoria geral dos anéis não comutativos invocados neste trabalho, será publicada em breve na Colecção do *Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto*, sob a designação de «Sistemas hiper-complexos e representações».

(2) Os e_i não se confundem aqui com elementos idempotentes.

O grau n_1 das matrizes da representação de $\mathfrak{A}$, dada por $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}}$, quando os elementos das matrizes se tomam em $\mathfrak{L}$, é o mesmo que o das matrizes de $\mathfrak{A}$, dada por $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\Omega}$, quando os elementos das matrizes se tomam em Ω. Por outro lado, aquêle grau é o produto do grau m_1 das matrizes da representação de $\mathfrak{A}$, dada por $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}}$, quando o corpo de representação é o corpo endomórfico $\mathfrak{K}_1$ dum ideal esquerdo de $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}}$, pelo grau q_1 (ordem) da ampliação finita $\mathfrak{K}_1$ de $\mathfrak{L}$: $n_1 = m_1 q_1$. A ordem de $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}}$ relativamente a $\mathfrak{L}$ é $m_1^2 q_1 = n_1^2 =$ ordem de $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\Omega}$ relativamente a Ω. Tem-se, portanto, $q_1 = 1$. $\mathfrak{K}_1$ é de 1.ª ordem relativamente a $\mathfrak{L}$ (ou, melhor, relativamente ao corpo $E^{(1)}_1 \mathfrak{L}$, no qual $E^{(1)}_1$ é elemento um de $\mathfrak{A}^{(1)}_{1\mathfrak{L}}$). O teorema está demonstrado.

Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto,
Agôsto a Dezembro de 1944.

(ZUSAMMENFASSUNG)

— In Abschnitt A, § 1, handelt es sich um den Radikal $\mathfrak{R}$ (Vereinigungsmenge der zweiseitigen nilpotenten Ideale) eines Ringes $\mathfrak{S}$. Es wird festgestellt, dass $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ keinen Radikal hat, wenn $\mathfrak{R}$ jedes rechte Ideal enthält, von welchem es eine Potenz enthält; es wird gezeigt, dass bei gegebenem zweiseitigem Ideale $\mathfrak{P}$, falls $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^{\tau}\mathfrak{P}^{\rho} = (o)$, der Radikal von $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ gleich $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ ist; es wird ein kürzlich von LEVITZKI veröffentlichtes Resultat angeführt, das eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Nilpotenz von $\mathfrak{R}$ darstellt. In Abschnitt A, § 2, wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Exixtenz von Radikal $\mathfrak{R}^*$ (im KÖTHEschen Sinne) gegeben, es werden Beispiele angeführt, in denen $\mathfrak{R}^*$ existiert, und es wird festgestellt, dass $\mathfrak{R}^*$ existiert und gleich $\mathfrak{R}$ ist, falls $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ kein Nilideal besitzt.

— In Abschnitt B, § 3, sieht man, dass ein Idempotent eines minimalen, regulären Ideals primitiv ist, dass $e\mathfrak{S}$ (e primitiv) kein Unterideal mit Idempotent enthält; dass der Homomorphismus $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ primitive Idempotente auf Idempotenten derselben Art und jedes minimale, reguläre Ideal auf minimalem, idempotentem Ideal (und umgekehrt) abbildet; man stellt fest, dass zwei minimale, reguläre Ideal $\mathfrak{r}_1$ un $\mathfrak{r}_2$ der Gleichheit $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$ genügen; dass minimale, reguläre Ideale, deren Abbildungen in $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ isomorph sind, isomorph sind und dass, falls ein Einselement in $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ existirt, zwei isomorphe, minimale, reguläre Ideale, Abbildungen haben die isomorph sind. Demzufolge wird folgender Satz aufgestellt: dann und nur dann, sind zwei minimale, reguläre Ideale isomorph wenn die Beziehung $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$ gilt. In Abschnitt B, § 4, wird bewiesen: in dem Homomorphismus $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ bildet sich jedes spezielle Idempotent auf einem derselben Art ab und umgekehrt; wenn $e_1, \ldots, e_r$ primitive Idempotente von $\mathfrak{S}$ sind, die die Gleichheiten $e_i e_k = o$ erfüllen, und wenn $e = \Sigma e_i$ kein spezielles Idempotent ist, dann folgt aus der Hypothese der Existenz eines in mehr als r orthogonale primitive Elemente (unter denen sich jene $e_1, \ldots, e_r$ befinden) zerlegbares Idempotent dieselbe Eigenschaft für $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ und umgekehrt.

— In Abschnitt C, § 5, $\mathfrak{S}$ est ein halb-primärer Ring. Wenn e ein spezielles Idempotent ist, dann führen die Peirceschen Zerlegungen $\mathfrak{S} = e\,\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\,e + \mathfrak{A}$, zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{R}^*$. Ein primitives Element erzeugt ein minimales, reguläres Ideal, jedes reguläre Ideal besitzt ein reguläres, minimales Ideal und die Anzahl der orthogonalen, primitiven Idempotente einer Zerlegung eines speziellen Idempotentes ist invariant. In Abschnitt C, § 6, wird Köthes bekannte Theorie über halb-primäre Ringe abgewandelt. Man kann einen halb-primären Ring so charakterisieren: α) jedes reguläre Ideal besitzt ein primitives Idempotent, das ein minimales, reguläres Ideal erzeugt; β) es existiert ein spezielles Idempotent, das in orthogonale, primitive Idempotente zerlegbar ist. In Abschnitt C, § 7, sieht man, dass in einem halb-primären Ring jedes nicht primitive Idempotent eine Summe von orthogonalen, primitiven Idempotenten ist; dass $e\,\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\,e$ (e spezielles Idempotent) halb-primär sind; und dass ein Ring mit Minimalbedingung für reguläre Ideale eine Summe von einem halb-primären, idempotenten Ring und einem Unterring, in Radikal enthalten, ist. Es wird eine hinreichende und notwendige Bedingung festgestellt, damit ein beliebiger Ring halb-primär wird und einen nilpotenten Radikal hat, und folgender Satz Levitzkis angeführt: dann, und nur dann ist $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ halb-einfach und $\mathfrak{R}$ nilpotent, wenn der Vielfachenkettensatz für rechte in $\mathfrak{R}$ enthaltene Ideale gilt und jede Kette von zweiseitigen, in $\mathfrak{R}$ enthaltenen, Idealen, $\mathfrak{L}_o \supseteqq \mathfrak{L}_o\,\mathfrak{L}_1 \supseteqq \mathfrak{L}_o\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{L}_2 \supseteqq \ldots$, endlich ist. Insbesondere ist jeder Ring mit Minimalbedingung für rechte Ideale halb-primär und von nilpotentem Radikal.

— In Abschnitt D, § 8, 9, 10 werden die Ringe mit Minimalbedingung, nach Hopkins behandelt, es zeigt sich, dass die Darlegungen vollständig gelten, falls man die minimalen Ideale, die einem Ideal isomorph sind, in Betracht zieht (Dieudonné). Ausserdem liefert man zwei einfache Beweise für zwei bekannte Sätze der Algebrentheorie.

PUBLICAÇÕES

DO

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

N.º 1 — A. Almeida Costa, **Elementos da Teoria dos Grupos**, tômo 1.º, 1942, VIII + 160 pg. (planigrafado) . . . . esgotado

N.º 2 — M. Gonçalves Miranda, **Cálculo Tensorial**, 1942, 54 pg. . . . . 10$00

N.º 3 — A. Almeida Costa, **Grupos Abelianos e Anéis e Ideais não comutativos**, tômo 1.º, 1942, II + 180 pg. (planigrafado) . . . . . 35$00

N.º 4 — A. Almeida Costa, **Sôbre os Grupos Abelianos**, 1942, 40 pg. . . . 5$00

N.º 5 — Guido Beck, **Sur la possibilité d'une Cinématique Générale**, 1943, 12 pg. . . . . 3$00

N.º 6 — Ruy Luís Gomes, **Sur une Généralisation de l'opérateur de projection E (I)**, 1943, 6 pg. . . . 3$00

N.º 7 — A. Almeida Costa, **Elementos da Teoria dos Anéis**, 1943, II + 286 pg., (planigrafado) . . . . esgotado

N.º 8 – A. Monteiro e A. Pereira Gomes, **Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua**, 1944, XII + 152 pg. . . . . 50$00

N.º 9 — J. Gaspar Teixeira, **Sur une certaine classe de polynomes à coefficients complexes**, 1944, 12 pg. . . . . . . 5$00

N.º 10 — Sixto Rios, **Teoria do Prolongamento Analítico das Séries de Dirichlet**, 1944, 90 pg. . . . . . 25$00

N.º 11 — M. Gonçalves Miranda, **Ensaio sôbre as Multiplicações Vectoriais Associativas e Modulares** [Resumo em francês] 1944, XI + 160 pg. (planigrafado) . . . . 25$00

N.º 12 — Ruy Luís Gomes, **Sôbre uma Construção Algébrica da Noção de Integral**, [Resumo em francês] 1945, 28 pg. . . . . 7$50

N.º 13 — L. Neves Real, **Sôbre a Construção Algébrica da Medida à Borel**, [Resumo em francês] 1945, 22 pg. . . . . 5$00

N.º 14 — A. Almeida Costa, **Sôbre os Anéis Semi-primários** [Resumo em alemão] 1945, 38 pg. . . . . 7$50

N.º 15 — A. Pereira Gomes, **As Funcionais Semi-Contínuas e a Propriedade de Darboux** [Resumo em francês] 1945, 18 pg. . . . . 5$00

N.º 16 — A. Pereira Gomes, **Sôbre a Noção do Espaço compacto** [Resumo em francês] 1945 . . . . 7$50

PUBLICAÇÕES

DA

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

CADERNOS DE ANÁLISE GERAL — INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS MODERNAS CORRENTES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO.

ÁLGEBRA MODERNA — sob a direcção de *A. Almeida Costa*, Prof. da Faculdade de Ciências do Pôrto:

1 — **Grupos** (Definições. Regras de cálculo) por *José Morgado*;
2 — **Grupos** (Homomorfias) por *José Morgado*;
3 — **Anéis** (Definições. Regras de cálculo) por *J. Gaspar Teixeira*;
4 — **Grupos** (Séries de composição) por *Ruy Verdial*.

TOPOLOGIA GERAL — sob a direcção de *António Aniceto Monteiro*, Prof. da Universida de do Rio de Janeiro:

1 — **Espaços de Sierpinski** — por *A. Monteiro*;
2 — **Espaços acessíveis de Fréchet** — por *A. Monteiro*;
3 — **Funções contínuas** — por *A. Pereira Gomes*;
4 — **Relativização** — por *Maria Helena Ferreira*;
5 — **Bases e Vizinhanças** — por *A. Pereira Gomes*;
6 — **Conjuntos compactos** — por *A. Pereira Gomes*.

TEORIA GERAL DA MEDIDA — sob a direcção de *Ruy Luís Gomes*, Prof. da Faculdade de Ciências do Pôrto:

1 — **Introdução** — por *Laureano Barros*;
2 — **Medida à Jordan** — por *Laureano Barros*;
3 — **Medida à Borel** — por *L. Neves Real*;
4 — **Medida à Lebesgue** — por *L. Neves Real*.

GEOMETRIA DAS DISTÂNCIAS — sob a direcção de *A. de Mira Fernandes*, Prof. do Instituto Superior Técnico de Lisboa.

(a publicar brevemente)

—//—

Tôda a correspondência deve ser dirigida a

Dr. José Gaspar Teixeira

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS — FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PÔRTO