

Sobre anéis de endomorfismos^(*)

por A. Almeida Costa
da Universidade do Porto

Introdução. No que vai seguir-se, \mathfrak{M} é um módulo e Ω um domínio operatório do mesmo, formado por endomorfismos de \mathfrak{M} . $\bar{\Omega}$ é o anel dos endomorfismos- Ω , de \mathfrak{M} , e $\bar{\Omega}' \subseteq \bar{\Omega}$ um anel contido em $\bar{\Omega}$. \mathfrak{N} será um sub-módulo- Ω , de \mathfrak{M} , podendo \mathfrak{N} afectar-se de um índice, sem perder esse significado. O conjunto dos endomorfismos pertencentes a $\bar{\Omega}'$, que aniquilam \mathfrak{N} , constitui um ideal direito, representado por \mathfrak{s} e chamado *ideal aniquilador*. A \mathfrak{N}_i corresponderá \mathfrak{s}_i , no mesmo sentido. Por *ideal de contracções* em \mathfrak{N} , designaremos o conjunto \mathfrak{n} dos endomorfismos de $\bar{\Omega}'$ que aplicam \mathfrak{M} dentro de \mathfrak{N} . A \mathfrak{N}_i corresponderá \mathfrak{n}_i , no mesmo sentido.

O § 2 destina-se a completar, em certos pontos, as investigações de que demos larga conta em dois trabalhos anteriores: [10] — «Sobre os endomorfismos dos módulos», *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, 1948, vol. xxxiii, págs. 5 a 32; [14] — «Über Kontraktions- und Vernichtungs Ideale in der allgemeinen Modultheorie», *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, 2.ª série, A—Ciências Matemáticas, vol. 1, 1951, págs. 297 a 344. Em particular, demonstraremos um teorema A' e algumas consequências do mesmo, em correspondência com o teorema A e certas consequências que se encontram em [14]. O teorema $42'$ encontra-se enunciado a págs. 35 do importante livro de N. JACOBSON, «*Theory of rings*», 1943, livro que adiante será indicado por (II). Depois de darmos uma demonstração, completamo-lo com o enunciado do teorema $43'$. Quanto aos teoremas $64'$ e $65'$, que caracterizam os módulos completamente relativos, deverão comparar-se com os teoremas 36 e 37 de [10, págs. 31 e 32], os quais constituem uma outra caracterização dos mesmos módulos. As notações, a terminologia e a numeração dos teoremas farão corpo comum aqui, em [14] e num artigo em publicação nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, tomo xxxv, 1950-1951.

Esse Capítulo formará o Cap. xv da nossa obra «*Sistemas hiper-complexos*», da qual os doze primeiros Capítulos se encontram em volume, já desde 1948, e os Capítulos xiii e xiv constituem o texto duma conferência realizada no *Congresso Luso-Espanhol*, levado a efeito em Lisboa, em Outubro de 1950. O leitor encontrará nas *Actas* do referido Congresso, vol. 1, a reprodução integral dessa conferência. Julgamos ser úteis neste momento, repetindo que os interessados poderão actualizar facilmente os seus conhecimentos no domínio da *Teoria dos Anéis e Ideais não comutativos*, se, depois de adquirirem as noções mais elementares da *Teoria dos Grupos* e da *Teoria dos Anéis*, quizerem ler os quatro primeiros Capítulos do citado livro «*Sistemas hiper-complexos*», e, em seguida, precisamente os referidos Capítulos xiii, xiv e xv. O conjunto constitui uma exposição perfeitamente ordenada e acessível. Ele deverá ser seguido, de resto, de três Capítulos mais, cuja publicação fica diferida para mais tarde.

No § 3, tratando especialmente do caso em que Ω é um anel de divisão, limitamo-nos a dar uma demonstração, em parte modificada, de um teorema que se encontra em N. JACOBSON, «*Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 57, 1945, págs. 228 a 245. Esse teorema refere-se a *anéis densos*, que aquele algebrista americano define do modo seguinte: dado \mathfrak{M} e suposto Ω um anel de divisão, diz-se que $\bar{\Omega}'$ é denso em $\bar{\mathfrak{M}}$, sobre Ω , se, considerados x_1, \dots, x_n e \mathfrak{M} , independentes- Ω , e também y_1, \dots, y_n e $\bar{\mathfrak{M}}$, independentes- Ω ou não, existir um endomorfismo A de $\bar{\Omega}'$ tal que $x_i A = y_i$, ($i=1, 2, \dots, n$). As referências a esta memória de JACOBSON serão feitas por [4].

No § 4, em face dum artigo de T. NAKAYAMA, «*Über einfache distributive Systeme endlicher Ränge*», *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, vol. xx, 1944, págs. 61 a 66, veremos como um método de demonstração de C. CHEVALLEY leva a estabelecer um teorema

(*) Recebido em Maio de 1951.

que também se encontra em [4], embora provado aí por forma completamente diferente. Esse teorema refere-se a anéis irreduzíveis, que podem definir-se como vai ver-se. Imaginemos \mathfrak{M} e o anel de divisão Ω . $\bar{\Omega}$ diz-se irreduzível em \mathfrak{M} , sobre Ω , se não existir sub-módulo de \mathfrak{M} que seja admissível- $\bar{\Omega}$. As referências ao trabalho citado de NAKAYAMA serão feitas por [3]. Os números das diferentes referências jogam também com os que se utilizam nos Capítulos XIII a XVIII, de que atrás falámos.

2. Sobre algumas proposições gerais. Em [14, § 2], demonstrámos um teorema A , que não teve o seu correspondente em [14, § 3]. Todavia, vale para sub-módulos- Ω , o

TEOREMA A': Se $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ e $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, os respectivos ideais aniquiladores, supondo $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$, verificam a igualdade $\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$, como soma directa. Sabemos que $\bar{s} \supseteq (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, [14, teor. 2']. Dado $B \in \bar{s}$, tomemos $m \in \mathfrak{M}$. Decompondo m de duas maneiras distintas, sob as formas $m = n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$, ($n_1, n'_1 \in \mathfrak{N}_1$; $n_2, n'_2 \in \mathfrak{N}_2$), vê-se que $n_1 - n'_1 = n'_2 - n_2 \in \mathfrak{N}$, de modo que se tem $n_1 B = n'_1 B$, $n_2 B = n'_2 B$. Conclui-se, assim, que, dado $m \in \mathfrak{M}$, se obtêm endomorfismos- Ω , de \mathfrak{M} , por via das seguintes correspondências: $m \rightarrow n_1 B = m A'_1$, $m \rightarrow n_2 B = m A'_2$. Supondo $m = n_1 = n_1 + 0 \in \mathfrak{N}_1$, vê-se que $n_1 \rightarrow n_1 A'_1 = 0 \cdot B = 0$, pelo que $\mathfrak{N}_1 A'_1 = (0)$, $A'_1 \in \bar{s}_1$. É, análogamente, $A'_2 \in \bar{s}_2$. E, sendo $m = n_1 + n_2$, $m B = n_1 B + n_2 B = m A'_1 + m A'_2 = m (A'_1 + A'_2)$, conclui-se $B = A'_1 + A'_2$. Por isso, tem-se $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$. Ora esta soma é directa, pelo facto de ser $\bar{s}_1 \cap \bar{s}_2 = (0)$, como resulta de [14, teor. 1'].

Em todo este § admitiremos sempre $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$ e utilizaremos a noção de aniquilador modular, para significar sub-módulo- Ω que é aniquilado por um dado conjunto de endomorfismos. Também fixaremos a regra geral de que um elemento dum conjunto representado por uma letra gótica maiúscula se indicará pela letra latina minúscula correspondente.

COROLÁRIO C': Supondo $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, tem-se $\bar{\Omega} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$.

COROLÁRIO D': Nos termos do corolário anterior, fazendo a decomposição $1 = E'_1 + E'_2$, ($E'_i \in \bar{s}_i$), em idempotentes ortogonais, vê-se que \mathfrak{N}_1 e \bar{s}_1 são aniquiladores recíprocos, de sorte que \mathfrak{N}_1 é aniquilador modular de E'_1 .

Representando por $\mathfrak{P}_i \supseteq \mathfrak{N}_i$ o aniquilador modular de \bar{s}_i , ($i=1, 2$), sabemos que $(0) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, [14, teor. 2']. Suponhamos $x \in \mathfrak{P}_1$, $x \notin \mathfrak{P}_2$ e escrevamos $x = n_1 + n_2$.

Será $x E'_1 = n_1 E'_1 + n_2 E'_1 = 0 = n_2 E'_1$, de sorte que $n_2 \neq 0$ e $n_2 \in \mathfrak{P}_1$. Assim, não será nula a intersecção dos \mathfrak{P}_i , o que é absurdo. Conclui-se $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2$, e, portanto, $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$. Como \bar{s}_1 e E'_1 têm o mesmo aniquilador, modular segue-se o resto do corolário.

O teorema A' arrasta a possibilidade de se enunciar o teorema B' , em correspondência com o teorema B , de [14, § 5]. Tem-se:

TEOREMA B': Se $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, e se se admite que \bar{s}_1 é nilideal e que \bar{s}_2 é nilideal bilateral, \bar{s} é nilideal; se \bar{s}_1 e \bar{s}_2 são nilpotentes, \bar{s} é nilpotente; e, se \bar{s}_1 e \bar{s}_2 são semi-nilpotentes, \bar{s} é semi-nilpotente.

Ainda sobre o conteúdo de [14, § 5] daremos o

COROLÁRIO A': Supondo $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, então, admitindo que \bar{s}_1 é nilideal, tem-se $\mathfrak{N}_2 = (0)$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$, consequentemente, $\bar{s}_1 = (0)$. Este corolário só merece enunciado pela unidade que dá aos nossos raciocínios. Ele resulta, é certo, do teorema 17' de [14, § 5] mas traduz também propriedades imediatas da soma directa.

Passando a [14, § 6], podemos enunciar o

TEOREMA C': Se \mathfrak{N}_1 e \mathfrak{N}_2 tiverem nilideais aniquiladores \bar{s}_1 e \bar{s}_2 , então, supondo $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, não existe sub-módulo $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{N}$ que possa ser aniquilador modular dum idempotente. De facto, supondo $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{N}$, o ideal aniquilador de \mathfrak{P} será $\mathfrak{C} \subseteq \bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$. Sabemos que não há em \bar{s} elemento idempotente, pelo que o não haverá em \mathfrak{C} .

Em [(II), pgs. 35], encontra-se o enunciado que vai seguir-se:

TEOREMA 42': Seja \mathfrak{M} um módulo- Ω e suponhamos $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_h$, com $(\mathfrak{N}_i, (\mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \dots \cap \mathfrak{N}_h)) = \mathfrak{M}$, ($i=1, 2, \dots, h$). Então, pondo $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \dots \cap \mathfrak{N}_h$, conclui-se: 1') $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{M}$; 2') $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}_i = (0)$; 3') $(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{i-1}, \mathfrak{M}_{i+1}, \dots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{N}_i$; 4') $(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{M}$. Da demonstração, que é simples, vamos dar apenas a parte que prova 3'). Sem dúvida que $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_i$, se $j \neq i$. Resta mostrar que cada $n_i \in \mathfrak{N}_i$ pode sempre ser escrito sob a forma $n_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_h$, ($m_j \in \mathfrak{N}_j$). Dado n_i , se este elemento pertence a todos os \mathfrak{N}_j , então $n_i = 0$ tem a forma indicada. Supondo, de contrário, que, por ex., é \mathfrak{N}_1 , o primeiro

\mathfrak{N}_i que não contém n_i , podemos escrever $n_i = n_{k_1} + \dots + m_{k_1}$, ($i \neq k_1$). Vê-se que $n_{k_1} \in \mathfrak{N}_i \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{k_1}$. Em seguida, seja \mathfrak{N}_{k_2} , ($i \neq k_2 > k_1$), o primeiro \mathfrak{N}_j que não contém n_{k_1} . Podemos escrever $n_{k_1} = n_{k_2} + m_{k_2}$, com $n_{k_2} \in \mathfrak{N}_i \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{k_2}$, e também $n_i = n_{k_2} + m_{k_2} + \dots + m_{k_1}$. O raciocínio prossegue até se chegar a um n_{k_i} , com $i \neq k_i$, pertencente a todos os \mathfrak{N}_j . Nesse momento é $n_{k_i} = 0$ e $n_i = m_{k_1} + \dots + m_{k_i}$, como se afirmou.

Em complemento, podemos dizer:

TEOREMA 43': Nas condições do teorema 42', existem idempotentes E'_1, \dots, E'_h , tais que: 5') \mathfrak{N}_i é o aniquilador modular de E'_i , e o ideal direito aniquilador de \mathfrak{N}_i é $\bar{s}_i = E'_i \bar{\Omega}$; 6') $1 = E'_1 + \dots + E'_h$ e $E'_i E'_j = 0$, se $i \neq j$; 7') $\bar{\Omega} = E'_1 \bar{\Omega} + \dots + E'_h \bar{\Omega}$; 8') o ideal de contracções em \mathfrak{N}_i é $n_i = \bar{\Omega} E'_1 + \dots + \bar{\Omega} E'_{i-1} + \bar{\Omega} E'_{i+1} + \dots + \bar{\Omega} E'_h$; 9') o ideal direito aniquilador de \mathfrak{N}_i é $E'_1 \bar{\Omega} + \dots + E'_{i-1} \bar{\Omega} + E'_{i+1} \bar{\Omega} + \dots + E'_h \bar{\Omega}$; 10') o ideal de contracções em \mathfrak{M}_i é $m_i = \bar{\Omega} E'_i$. A afirmação 5') resulta imediatamente do corolário D'. Em seguida, escrevamos, para $x \in \mathfrak{M}$, $x = m_1 + m_2 + \dots + m_h$, com $m_i \in \mathfrak{N}_i$. O corolário D' garante-nos também ser \mathfrak{M}_i o aniquilador modular de $1 - E'_i$. Por isso, sendo $m_i = m_i E'_i + m_i (1 - E'_i)$, tem-se $m_i = m_i E'_i$. Nessas condições, é $x E'_i = m_i E'_i = m_i$, de sorte que $x (E'_1 + \dots + E'_h) = x E'_1 + \dots + x E'_h = m_1 + \dots + m_h = x$. Por outro lado, $x E'_i E'_j = m_i E'_j = 0$, se $j \neq i$, pelo que 6') fica provado. 7') traduz uma propriedade elementar da teoria dos anéis; 8'), 9') e 10') encontram-se provados em [14, teor. 19 e 19'].

Nos dois teoremas, que ainda vamos estabelecer neste §, é introduzida a condição de máximo para os sub-módulos- Ω , de \mathfrak{M} .

TEOREMA 64': Se \mathfrak{M} é um módulo- Ω com condição de cadeia ascendente e se $\bar{\Omega}$ não tem radical; então, admitindo que, para cada sub-módulo máximo $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{M}$, é diferente de zero o ideal aniquilador \bar{s} , podemos afirmar que (0) é intersecção dum certo número de sub-módulos máximos e que \mathfrak{M} é completamente redutível. Neste enunciado só oferece interesse o caso em que \mathfrak{M} não é irreduzível- Ω . Tomemos, em \mathfrak{M} , um sub-módulo máximo $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{M}$. O ideal \bar{s}_1 não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, [14, teor. 16'], e $\bar{\Omega}$ teria radical não nulo. Por esse facto, \mathfrak{N}_1 é precisamente aniquilador modular dum idempotente $E_1 \in \bar{s}_1$, [14, teor. 23'], tendo-se $\mathfrak{N}_1 E_1 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M} E_1 = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}'$, se $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} E_1$. E vê-se que $n_1 E_1 = 0$, $n' E_1 = n'$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, sem esquecermos a relação $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}(1 - E_1)$. Se \mathfrak{N}' for máximo, o teorema está demonstrado, pois que ambas as parcelas de \mathfrak{M} serão também sub-módulos sim-

ples. Se \mathfrak{N}' não é máximo, tomemos $\mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}'$ e máximo. É, então, $\mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M} E_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M} E_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_2$, como anteriormente. E vê-se que o aniquilador modular de $E_1 E_2$ é $-\mathfrak{M}$, pois $\mathfrak{M} E_1 E_2 = \mathfrak{N}' E_2 \subseteq \mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$. É válida a igualdade $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_2 \cap (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'') = \mathfrak{N}_2 \cap \Omega_1$, com $\Omega_1 = (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'')$, como vamos provar. Sem dúvida que \mathfrak{N}' está contido no 2.º membro. Se, agora, $n_2 = n' + n''$ for um elemento do 2.º membro, do facto de ser $n_2 E_2 = 0 = 0 + n''$, concluímos $n_2 = n'$ e \mathfrak{N}' como se deseja. E tem-se $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \Omega_1$, ao mesmo tempo que, sendo $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, é $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \Omega_1 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\Omega_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. Se $\Omega_1 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, pois que, então, \mathfrak{N}' , \mathfrak{N}' e $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ são simples. Se Ω_1 não é máximo, o processo continua. Obtém-se $(0) = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{M} E_3 = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} E_1 E_3 = \mathfrak{M} E_2 E_3 = (0)$, pois que $\mathfrak{N}_3 \supset \Omega_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. São válidas as igualdades $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}''' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 = \Omega_2 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\Omega_2 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2 + \mathfrak{M} E_3$. Se $\Omega_2 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, com $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 \cap \Omega_2$ e com a decomposição anterior para \mathfrak{M} . A cadeia $(0) \subset \mathfrak{N}' \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ é finita, de sorte que se chega a encontrar Ω_{n-2} máximo e tal que $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1} \cap \Omega_{n-2}$, $\mathfrak{M} = \Omega_{n-2} + \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$, $\Omega_{n-2} = \mathfrak{M} E_1 + \dots + \mathfrak{M} E_{n-1}$. Nesse momento, o sub-módulo simples $\mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$ tem a forma $\mathfrak{M} E_n$, vindo $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} E_1 + \dots + \mathfrak{M} E_n$. Os idempotentes E_i verificam as relações $E_i E_j = 0$, ($i < j$; $i=1, \dots, n-1$; $j=1, \dots, n$).

Inversamente, se \mathfrak{M} é um módulo completamente redutível, a condição de cadeia ascendente é válida, o radical do seu anel de endomorfismos é nulo, [10, pgs. 30; (II), pgs. 58 e seguintes], e, para cada sub-módulo máximo, o ideal aniquilador é $\neq (0)$. Portanto:

TEOREMA 65': As condições enunciadas no teorema 64' são necessárias e suficientes, para que \mathfrak{M} seja completamente redutível.

Da comparação com os teoremas 36 e 37, de [10], resulta ainda que as mesmas condições são necessárias e suficientes para que valha em \mathfrak{M} a condição de cadeia descendente, $\bar{\Omega}$ não tenha radical e seja diferente de zero o ideal de contracções num sub-módulo mínimo.

3. Sobre anéis densos. Trata-se de provar neste § o seguinte

TEOREMA: Se $\bar{\Omega}$ é um anel denso de endomorfismos- Ω , de \mathfrak{M} , e se $\bar{\mathfrak{M}}$ é um ideal bilateral de $\bar{\Omega}$ que contém transformações lineares finitas, então, dado o sub-módulo- $\bar{\Omega}$ finito $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, há uma projecção $E \in \bar{\mathfrak{M}}$,

de \mathfrak{M} sobre \mathfrak{N} . Convém observar que nenhuma hipótese se faz quanto à dimensionalidade de \mathfrak{M}_1 sobre $\bar{\Omega}$. No caso de $\mathfrak{N}=[x]$ ser um sub-módulo- $\bar{\Omega}$ com uma única dimensão, JACOBSON, [4], faz a demonstração como segue. Imaginemos $0 \neq B \in \mathfrak{A}$ e $\mathfrak{M}B = [y_1, \dots, y_n]$ um espaço finito com a base formada pelos elementos y_i , supostos independentes- $\bar{\Omega}$. Admitamos que $z_1 \in \mathfrak{M}$, $z_1 B = y_1$, $A_1 \in \bar{\Omega}'$, $y_1 A_1 = z_1$, $y_i A_1 = 0$, se $i \neq 1$. Vê-se que $\mathfrak{M}BA_1 = [y_1, \dots, y_n]A_1 \subseteq [z_1]$, $z_1 BA_1 = z_1$, de sorte que $E_1 = BA_1 \in \mathfrak{A}$ é idempotente e tal que $\mathfrak{M}E_1 = [z_1]$. Para se construir o idempotente E tal que $\mathfrak{M}E = [x]$, suponhamos $A_2, A_3 \in \bar{\Omega}'$, $z_1 A_2 = x$, $x A_3 = z_1$. Então, verifica-se que $\mathfrak{M}A_3 E_1 A_2 \subseteq [z_1] A_2 = [x]$, $x A_3 E_1 A_2 = x$, de modo que $A_3 E_1 A_2 = E$ é precisamente o idempotente procurado. Passando ao caso em que $\mathfrak{N} = [x_1, \dots, x_n]$, onde os x_i são independentes- $\bar{\Omega}$, imaginemos construídos idempotentes E'_i , ($i=1, 2, \dots, n$), tais que $[x_1, \dots, x_n] = \mathfrak{M}E'_1 + \dots + \mathfrak{M}E'_n$, $\mathfrak{M}E'_i = [x_i]$, $E'_i \in \mathfrak{A}$. É fácil de construir um idempotente $F \in \mathfrak{A}$ nas condições seguintes: $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F$, $E'_1 F = F E'_1 = 0$. Vejamos primeiramente que se tem $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2(1-E'_1)$ onde, 1 significa o endomorfismo idêntico. Um elemento do 2.º membro é da forma $mE'_1 + m'E'_2(1-E'_1) = (m-m'E'_2)E'_1 + m'E'_2$, ($m, m' \in \mathfrak{M}$), o que mostra pertencer ao primeiro. Inversamente, um elemento do 1.º membro é da forma $mE'_1 + m'E'_2 = mE'_1 + m'E'_2 + m'E'_2 E'_1 - m'E'_2 E'_1 = (m+m'E'_2)E'_1 + m'E'_2(1-E'_1)$, pelo que pertence ao segundo. O referido 2.º membro é uma soma directa. Como a sua 2.ª parcela não é nula e é de 1.ª ordem, designemos por $E''_1 \in \mathfrak{A}$ um idempotente tal que $\mathfrak{M}E'_2(1-E'_1) = \mathfrak{M}E''_1$. Vê-se que $E''_1 E'_1 = 0$. Pondo, então, $F = E''_1 - E'_1 E''_1$, vem imediatamente $F E'_1 = E'_1 F = 0$, $F F = F$, $E''_1 F = E''_1$, $F E''_1 = F$, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}E''_1 F \subseteq \mathfrak{M}F$, $\mathfrak{M}F = \mathfrak{M}F E''_1 \subseteq \mathfrak{M}E''_1$, e, portanto, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}F$. Em seguida, o idempotente $E_1 = E'_1 + F$ é tal que $[x_1, x_2] = \mathfrak{M}E_1$. O processo continua, pondo $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3$. Chegamos a encontrar o idempotente G nas seguintes condições: $G \in \mathfrak{A}$, $G E_1 = E_1 G = 0$, $\mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G$, $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F + \mathfrak{M}G$. Vamos ver que os três idempotentes E'_1, F, G são ortogonais.

De facto,

$$\begin{aligned} E_1 E'_1 &= E'_1, & E'_1 E_1 &= E'_1, & G E_1 E'_1 &= 0 = G E'_1, \\ E'_1 E_1 G &= 0 = E'_1 G, & E_1 F &= F, & F E_1 &= F, \\ G E_1 F &= G F = 0, & F E_1 G &= F G = 0. \end{aligned}$$

Teremos, deste modo, $[x_1, x_2, x_3] = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G = \mathfrak{M}E_2$, $E_2 = E_1 + G = E'_1 + F + G$. O raciocínio prossegue, até à demonstração do teorema. Tem lugar este

ADITAMENTO. A projecção $E \in \mathfrak{A}$ decompõe-se em projecções ortogonais e_i todas pertencentes a \mathfrak{A} , de tal modo que

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n] &= \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}e_1 + \dots + \mathfrak{M}e_n, & \begin{cases} e_i e_k = 0, & \text{se } i \neq k; \\ k \leq n. \end{cases} \\ [x_1, \dots, x_n] &= \mathfrak{M}e_1 + \dots + \mathfrak{M}e_k, \end{aligned}$$

4. Sobre a densidade dos anéis irreduzíveis. Do teorema em causa neste §, que vai ser enunciado, a parte directa é provada como em [4]. O que tem principal interesse é a demonstração da parte inversa, à qual se é levado, rigorosamente falando, com um raciocínio devido a CHEVALLEY, que se encontra em [3].

TEOREMA DE CHEVALLEY-JACOBSON. *Seja $\bar{\Omega}'$ um anel denso arbitrário em \mathfrak{M} , sobre Ω , este suposto anel de divisão. $\bar{\Omega}'$ é anel irreduzível e Ω é o seu comutador. Inversamente, se $\bar{\Omega}'$ é irreduzível e o anel de divisão $\bar{\Omega}$ é o seu comutador, então $\bar{\Omega}'$ é denso em \mathfrak{M} , sobre Ω .*

Partamos do anel denso $\bar{\Omega}'$ e suponhamos $(\mathfrak{M}/\Omega) = 1$, isto é, \mathfrak{M} de 1.ª ordem sobre Ω . Então, pois que \mathfrak{M} é finito, o anel denso $\bar{\Omega}'$ é a totalidade dos endomorfismos- Ω , pelo que é o comutador de Ω . Podemos afirmar que $\bar{\Omega}'$ é anti-isomorfo de Ω . Escrevendo $\mathfrak{M} = x\bar{\Omega}'$, ($0 \neq x \in \mathfrak{M}$), pois que $\bar{\Omega}'$, por ser denso, é irreduzível, procuremos também o comutador de $\bar{\Omega}'$. Como $\bar{\Omega}'$ é anel de divisão, o seu comutador é anel de divisão Θ , que contém Ω , e é anti-isomorfo de $\bar{\Omega}'$. Seja $d' \in \Theta$. Por se ter $x d' = x d$, para um certo $d \in \Omega$, vem, se $d' \neq d$, $x(d' - d) = 0$, $x(d' - d)(d' - d)^{-1} = x = 0$, o que é absurdo. Assim, $d' = d$, $d' \in \Omega$ e $\Theta = \Omega$. $\bar{\Omega}'$ e Ω são, portanto, comutadores recíprocos, no caso de \mathfrak{M} ter uma só dimensão. Inversamente, se $\bar{\Omega}'$ é irreduzível e Ω o seu comutador, na hipótese $(\mathfrak{M}/\Omega) = 1$, $\bar{\Omega}'$ é denso em \mathfrak{M} sobre Ω , sendo $\bar{\Omega}'$ e Ω comutadores recíprocos. O teorema encontra-se completamente demonstrado, no caso de \mathfrak{M} ter uma só dimensão.

Suponhamos agora que isso não tem lugar e voltemos ao anel $\bar{\Omega}'$. Admitindo que B pertence ao comutador de $\bar{\Omega}'$, trata-se de provar que $B = b \in \Omega$. Seja $0 \neq x \in \mathfrak{M}$. Em primeiro lugar, x e $x B$ são dependentes- Ω , visto que, de contrário, poderíamos encontrar $C \in \bar{\Omega}'$, nas condições seguintes: $x C = 0$, $x B C \neq 0$, $x B C = x C B = 0$, o que é absurdo. Pondo $x B = x b_x$, onde $b_x \in \Omega$, vamos provar que, para $y \in \mathfrak{M}$ e qualquer, é também $y B = y b_x$. De facto, escolhamos $A \in \bar{\Omega}'$ de modo que seja $x A = y$. Então, $x A B = x B A = y B = x b_x A = x A b_x = y b_x$, como se quer. Demonstrado que b_x é independente de x , poremos $x B = x b$, o que prova a afirmação, pois, se $x = 0$, $0 \cdot B = 0 \cdot b = 0$. A parte directa do teorema

encontra-se, assim, com JACOBSON, completamente demonstrada. A parte inversa será provada deste modo: pois que \mathfrak{M} não é de 1.ª ordem relativamente a Ω , começaremos por mostrar que, dados $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathfrak{M}$ e independentes- Ω , é possível encontrar endomorfismos $B_1, \dots, B_n, B_{n+1} \in \bar{\Omega}'$, para os quais $x_i B_i = x_i$, $x_j B_i = 0$, ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n+1$), contanto que se admita existirem n endomorfismos A_i para os quais $x_i A_i = x_i, \dots, x_n A_n = -x_n$, $x_i A_j = 0$; se $i \neq j$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$); depois, tendo em conta a irreduzibilidade de $\bar{\Omega}'$ e a existência dos A_i , procuram-se $C_1, \dots, C_n \in \bar{\Omega}'$ realizando as igualdades $x_i C_1 = y_1, \dots, x_n C_n = y_n$, onde os y_i são quaisquer elementos de \mathfrak{M} . O endomorfismo $C = \sum A_i C_i \in \bar{\Omega}'$ será tal que $x_i C = y_i, \dots, x_n C = -y_n$, e a densidade de $\bar{\Omega}'$ ficará estabelecida.

DEMONSTRAÇÃO. Encontrados os A_i , ($i=1, 2, \dots, n$), designaremos por \mathfrak{s} o ideal direito aniquilador do sub-espaço $[x_1, \dots, x_n]$. Para cada $x_0 \notin [x_1, \dots, x_n]$, vamos ver que é $x_0 \mathfrak{s} \neq (0)$. Se for $x_0 \mathfrak{s} = (0)$, começemos por fixar i e consideremos B tal que $x_i B = 0$. Então, sendo $x_i A_i B = x_i B = 0$ e $x_j A_i B = 0$, concluímos $A_i B \in \mathfrak{s}$ e $x_0 A_i B = 0$. A correspon-

dência $x_i A \rightarrow x_0 A_i A$, ($A \in \bar{\Omega}'$ é qualquer), por ser $x_i \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, é um endomorfismo de \mathfrak{M} , visto que, se se admitir $x_i A = x_i C$, é $x_i(A-C) = 0$, e, pela observação acabada de fazer quanto a B , é $x_0 A_i(A-C) = 0$, o que dá $x_0 A_i A = x_0 A_i C$. O referido endomorfismo é um endomorfismo- $\bar{\Omega}'$, que representaremos por $a_i \in \Omega$. Ele dá $x_i A \rightarrow x_i A a_i = -x_0 A_i A$; $x_i = x_i A_i \rightarrow x_i A_i a_i = x_0 A_i A_i$; e, como $x_i(A_i^2 - A_i) = 0$, é $A_i^2 - A_i \in \mathfrak{s}$, $x_0(A_i^2 - A_i) = 0$, $x_0 A_i A_i = x_0 A_i$. Posto isto, tomemos $D = \sum A_i$. Vale $x_j(A - DA) = x_j A - x_j A = 0$, $x_0(A - DA) = (x_0 - x_0 D)A = 0$. E, como A é qualquer, tem-se $x_0 - x_0 D = 0$, $x_0 = x_0 D = x_0 \sum A_i$. Os endomorfismos- $\bar{\Omega}'$, representados por $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$, dão, assim, $x_0 = x_0 \sum A_i = x_0 \sum A_i a_i = \sum x_i a_i \in [x_1, \dots, x_n]$, contra a hipótese feita sobre x_0 . Estabelecido que $x_0 \mathfrak{s} \neq (0)$, tem-se $x_0 \mathfrak{s} \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, e, portanto, $x_0 \mathfrak{s} = \mathfrak{M}$. Existe $A_0 \in \mathfrak{s}$ para o qual $x_0 A_0 = x_0$. Também existem $A'_i \in \mathfrak{s}$, ($i=1, 2, \dots, n$), para os quais $x_0 A_i = x_0 A'_i$. Pondo, então, $x_0 = x_{n+1}$, $A_0 = B_{n+1}$, $B_i = A_i - A'_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), vê-se que $x_{n+1} B_{n+1} = x_{n+1}$, $x_i B_{n+1} = -x_i A_0 = 0$, $x_i B_i = x_i A_i - x_i A'_i = x_i$, $x_j B_i = x_j A_i - -x_j A'_i = 0$, ($j \neq i$). A demonstração está feita.