TIPOGRAFIA DELTA, LDA.
51-B, R. ACTOR VALE, 51-C
TELEFONE 84 79 77 — LISBOA

SUR LES DEMI-ANNEAUX RÉTICULÉS

PAR

A. ALMEIDA COSTA et M.ª L. NORONHA GALVÃO

SEPARATA DA REVISTA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
2.ª Série — A — Vol. XIV — Fasc. 2.º — Págs. 195 a 208

LISBOA — 1973

SUR LES DEMI-ANNEAUX RÉTICULÉS*

PAR

A. ALMEIDA COSTA et M.ª L. NORONHA GALVÃO

1. INTRODUCTION

Un demi-anneau $\{a,\ldots,i,r,r',\ldots,x,y,\ldots\}$, qui soit un treillis pour lequel les opérations $\vee$ et $\wedge$ vérifient les relations $x+y=x\vee y, xy \leqq x\wedge y$, s'appelle un *demi-anneau réticulé*. Nous le représenterons par $\mathfrak{T}$, s'il ne contient pas l'élément-zéro; par $\mathfrak{T}_0$, si 0 appartient au demi-anneau; et par $\mathfrak{B}$, lorsque l'existence ou non-existence de 0 n'intervient pas dans les raisonnements. Nous ferons aussi usage de quelques autres symboles: $\mathfrak{S}$ signifiera un demi-anneau quelconque; $\mathfrak{J}$, ou éventuellement $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$, désignera l'idéal nucléaire ou idéal de Suschkewitsch de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux non vides; $\mathfrak{J}_d$ et $\mathfrak{J}_e$ représenteront, respectivement, l'idéal nucléaire à droite et à gauche, c'est-à-dire les intersections de tous les idéaux à droite ou à gauche non vides [1, 2].

Un idéal (ou un idéal à droite ou à gauche) est minimal, s'il ne contient, en tant qu'idéaux propres (en tant qu'idéaux à droite ou à gauche propres), que les idéaux vide et l'idéal-zéro (ce dernier, si l'élément-zéro existe).

À titre d'exemples: si $0\notin\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{J}_d\neq\emptyset, \mathfrak{J}_d$ est le seul idéal à droite minimal; et, si $0\notin\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{J}\neq\emptyset$, $\mathfrak{J}$ est le seul idéal minimal.

* Ce travail a été publié grâce à l'aide de l'Institut de Haute Culture.

Un demi-anneau qui contient des idéaux à droite et à gauche minimaux prend le nom de *dem-demi-anneau.* Et un demi-anneau dont les éléments différents de zéro constituent un groupe par rapport au produit s'appelle un *demi--anneau à division*. Étant donné $\mathfrak{S}$, s'il n'existe pas zéro et si $\mathfrak{J}_d \neq \emptyset \neq \mathfrak{J}_e$, alors $\mathfrak{J}_d = \mathfrak{J}_e$ est un sous-demi-anneau à division. Les anneaux à division, avec leurs ensembles d'idéaux à droite à gauche ou bilatères, sont des demi-anneaux à division. Et on remarquera que, d'une façon générale, tout anneau contenant l'identité est un demi-anneau avec les mêmes ensembles des différents types d'idéaux.

Les concepts de demi-anneau premier (semi-premier) et d'idéal premier (semi-premier) sont analogues aux concepts correspondants de la théorie des anneaux. Et les théorèmes habituels de caractérisation de ces concepts et bien aussi d'autres qui leur sont associés s'établissent comme on le fait dans la même théorie [1, 3, 4].

Toutes les assertions démontrées dans ce travail, sauf deux exceptions, appartiennent à la théorie des demi--anneaux réticulés. Bien qu'on trouve chez [1, 5] une étude développée de ces demi-anneaux, nos résultats sont tout à fait différents.

Dans le § 2, après que nous avons montré que l'idéal nucléaire d'un demi-anneau réticulé est (0) ou $\emptyset$ (corollaire 1), nous arrivons à reconnaître que les radicaux classique, de Levitzki, de Köthe, le radical supérieur et le radical inférieur sont égaux. Ils constituent un idéal réticulé, composé de tous les nilélements (th. 4 et 5). Quant au radical de Jacobson, nous démontrons que tout demi--anneau réticulé est un anneau-radical (th. 6).

Dans le § 3, nous rappelons l'importance des demi--anneaux réticulés dans l'étude des μ-demi-anneaux [7, 8], en y donnant d'ailleurs une proposition noethérienne du radical d'un idéal.

Dans le § 4, l'étude des idéaux à droite (à gauche) minimaux d'un demi-anneau réticulé et bien aussi celle des sous-demi-anneaux à division fait arriver à des conclusions un peu frappantes, car, sauf un cas exceptionel, ils se composent de deux éléments (th. 7 et 8). On profite à suivre de ce résultat (th. 9). À propos de demi-anneaux à division, la proposition 2, démontrée en passant, est très interessante.

Enfin, dans le § 5, en partant d'un demi-anneau réticulé premier, on établit que tout idéal à doite minimal $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ vérifie les conditions suivantes (th. 10): a est un atome et $\mathfrak{r}$ est un sous-demi-anneau à division égal à l'idéal nucléaire. Une assertion qui rappelle le deuxième théorème de Wedderburn-Artin de la théorie des anneaux est donnée à suivre (corollaire 2). Puis, en faisant intervenir le socle (ou somme d'idéaux à droite minimaux) d'un demi-anneau réticulé semi-premier, on donne un résultat (th. 11) qui admet une conséquence comparable au premier théorème de Wedderburn-Artin (corollaire 3).

2. IDÉAUX NUCLÉAIRES. RADICAUX.

Prenons $\mathfrak{B}$. De la définition de demi-anneau réticulé, on conclut: 1) si $a \leqslant b$, alors $xa \leqslant xb$, $ax \leqslant bx$, $\forall x \in \mathfrak{B}$, puisque, par exemple, de $a \vee b = a + b = b$, on déduit $x(a+b) = = xb = xa + xb = xa \vee xb$; 2) $x \leqslant a$ et $y \leqslant b$ impliquent $xy \leqslant ab$; 3) s'il existe l'élément-zéro, on a $0 \leqslant a, \forall \in \mathfrak{B}$, puisque $0 = a0 \leqslant a \wedge 0 \leqslant a$; 4) on a $sx \leqslant x, \forall x \in \mathfrak{B}$, puisque $sx \leqslant s \wedge x \leqslant \leqslant x$; et, de même $xs \leqslant x$.

Soit ensuit $\mathfrak{a}$ un idéal du treillis $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{a}$ est aussi un idéal du demi-anneau, qu'on appelera *idéal réticulé* de $\mathfrak{B}$. En effet: si $x, y \in \mathfrak{a}$ on voit que $x + y = x \vee y \in \mathfrak{a}$; d'autre part, $\forall s \in \mathfrak{B}$, en supposant $x \in \mathfrak{a}$, on a $sx \leqslant x$, ainsi que $xs \leqslant x$, donc $sx, xs \in \mathfrak{a}$.

Pour construire l'idéal réticulé $\mathfrak{a}$ engendré par une famille d'éléments, on construira l'idéal $\mathfrak{a}'$ engendré par la famille en question, puis on prendra l'ensemble des éléments $a \lesssim a'$, où $a' \in \mathfrak{a}'$. Par exemple, l'idéal engendré par x est $(x) = x \cup (x\mathfrak{B}, \mathfrak{B}x, \mathfrak{B}x\mathfrak{B})$, tandis que l'idéal réticulé engendré par x est l'idéal principal correspondant du treillis.

Théorème 1: — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal réticulé et supposons $ab \in \mathfrak{a}$. Le produit $(a)(b)$ ainsi que le produit des idéaux réticulés engendrés par a et b, respectivement, sont contenus dans $\mathfrak{a}$. De plus: $\mathfrak{a}$ est premier (semi-premier), si et seulement s'il est complètement premier (semi-premier).* D'abord, si $ab \in \mathfrak{a}$, tout élément $x \in (a)(b)$ vérifie la condition $x \lesssim ab$, par conséquent $(a)(b) \subseteq \mathfrak{a}$. Et il en est de même du produit des idéaux principaux engendrés par a et par b. Supposons ensuite, par exemple, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ réticulé et premier. D'une part, quel que soit le demi-anneau, tout idéal complètement premier est premier. D'autre part, puisque $\mathfrak{p}$ est réticulé et premier, de $ab \in \mathfrak{p}$, on tire $(a)(b) \subseteq \mathfrak{p}$ ainsi que $(a) \subseteq \mathfrak{p}$ ou $(b) \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui entraîne $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

Théorème 2: — *L'idéal nucléaire $\mathfrak{J}$, de $\mathfrak{B}$, s'il n'est pas vide, est* (0). *$\mathfrak{J}$ est toujours un idéal réticulé.* Si $\mathfrak{J}$ est vide, il est un idéal réticulé. Si $\mathfrak{J} \neq \phi$, prenons $i \in \mathfrak{J}$ et $x \in \mathfrak{B}$. L'idéal (x) vérifie la relation $(x) \supseteq \mathfrak{J}$, donc $i \in (x)$, $i \lesssim x, \forall x \in \mathfrak{B}$, et $i = 0$. D'autre part, (0) est bien un idéal réticulé.

Corollaire 1: — *Les trois idéaux nucléaires de $\mathfrak{B}$ sont égaux et leur valeur est ϕ ou* (0).

Nous allons analyser quelques conséquences de ce corollaire. Rappelons que l'élément-zéro d'un demi-anneau est trivial, si $a+b=0$ implique $a=b=0$ et $ab=0$ implique $a=0$ ou $b=0$.

Théorème 3: — *$\mathfrak{B}$ n'est pas premier, si et seulement s'il contient un zéro non trivial.* Si $\mathfrak{B}$ n'est pas premier, on a nécessairement $\mathfrak{J} = (0)$ et il existe $a \neq 0 \neq b$ tels que $ab = 0$,

de sorte que 0 n'est pas trivial. Réciproquement, si $0 \in \mathfrak{B}$ n'est pas trivial, puisque $a+b=0$ implique $a=b=0$, il existe $a \neq 0 \neq b$ tels que $ab=0$ et $\mathfrak{B}$ n'est pas premier.

Sans doute que les différents radicaux de $\mathfrak{T}$, composés de niléléments [3], sont vides, donc égaux. Mais, si $\mathfrak{J} = (0)$, puisque la somme de deux niléléments est un nilélément, on voit tout de suite que l'ensemble des niléléments constitue un nilidéal réticulé; de plus, tout nilélément engendre un nilidéal nilpotent. Donc:

Théorème 4: — *Le radical supérieur d'un demi-anneau réticulé est égal à son radical classique, à son radical de Levitzki et à son radical de Köthe. Il s'agit de l'ensemble des niléléments de $\mathfrak{B}$, qui forme un nilidéal réticulé.*

En ce qui concerne le radical inférieur $B(\mathfrak{a})$, d'un idéal réticulé $\mathfrak{a}$, nous savons que $B(\mathfrak{a})$ est l'idéal semi-premier minimal unique appartenant à $\mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{B} - B(\mathfrak{a})$ est le seul p-système maximal [1, 3] disjoint de $\mathfrak{a}$, aussi défini comme ensemble réunion de tous les p-systèmes disjoints de $\mathfrak{a}$. Alors, si $v \in B(\mathfrak{a})$, puisque $P = \{v, v^2, v^3, \dots\}$ est un p-système, on voit que $P \not\subseteq \mathfrak{B} - B(\mathfrak{a})$, par conséquent P n'est pas disjoint de $\mathfrak{a}$ et il existe $v^\sigma \in \mathfrak{a}$. Réciproquement, si $v^\sigma \in \mathfrak{a}$, on a $v^\sigma \in B(\mathfrak{a})$, donc $v \in B(\mathfrak{a})$. De plus, prenons $y \lesssim v$. Il en résulte $y^\sigma \lesssim v^\sigma$, $y^\sigma \in \mathfrak{a}$, ainsi que $y \in B(\mathfrak{a})$. Ainsi:

Théorème 5: — *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal réticulé, pour que v appartienne à son radical inférieur $B(\mathfrak{a})$, il faut et il suffit qu'on ait $v^\sigma \in \mathfrak{a}$. En particulier, $v \in B((0))$ signifie $v^\sigma = 0$, donc sont égaux les radicaux supérieur et inférieur de $\mathfrak{B}$. De plus: $B(\mathfrak{a})$ est un idéal réticulé.*

Toujours que la somme soit commutative et que les trois idéaux nucléaires soient égaux, on peut faire, d'après [6], la théorie du J-radical d'un demi-anneau $\mathfrak{S}$. Alors, un élément r est dit semi-régulier à droite, si les conditions suivantes sont réalisées: 1_0) dans le cas où $\mathfrak{J}_d=\phi$, il existe r', r'' tels que $r+r'+rr'=r''+rr''$; 2_0) dans le cas $\mathfrak{J}_d \neq \phi$, il existe r', r'', ainsi que $i', i'' \in \mathfrak{J}_d$, tels que $r+r'+rr'+i'=$ $=r''+rr''+i''$. Et un idéal à droite $\mathfrak{r}$ est dit semi-régulier, si, en supposant $\mathfrak{J}_d=\phi$, il est composé d'éléments semi-réguliers à droite, et, en prenant $r_1, r_2 \in \mathfrak{r}$, il existe $r_1', r_2' \in \mathfrak{r}$ tels que $r_1+r_1'+r_1r_1'+r_2r_2'=r_2+r_2'+r_1r_2'+r_2r_1'$; mais, si $\mathfrak{J}_d \neq \phi$, il ne faut pas faire l'hypothèse que $\mathfrak{r}$ soit composé d'éléments semi-réguliers à droite, car cette propriété est déjà une conséquence de l'autre, comme on le voit de la façon suivante: en prenant $r_1 \in \mathfrak{r}$, puisque $\mathfrak{J}_d \subseteq \mathfrak{r}$, si l'on pose $j=r_2 \in \mathfrak{J}_d$, il existe $r_1', r_2' \in \mathfrak{r}$ tels que $r_1+r_1'+r_1r_1'+$ $+jr_2'+j'=j+r_2'+r_1r_2'+jr_1'+j''$, $(j', j'' \in \mathfrak{J}_d)$, et on peut écrire l'égalité précédente sous la forme $r_1+r_1'+r_1r_1'+i'=$ $=r_2'+r_1r_2'+i''$, qui montre la semi-régularité à droite de r_1.

Or, pour les demi-anneaux réticulés, non seulement la somme est commutative et les trois idéaux nucléaires sont égaux, mais, indépendamment de la valeur de $\mathfrak{J}$, tout élément est semi-régulier à droite (à gauche), puisque, en prenant a et en faisant $a'=a$, $a''=a$, l'égalité $a \vee a' \vee aa'=$ $=a'' \vee aa''$ est valable. D'autre part, si l'on considère, par exemple, un idéal à droite $\mathfrak{r}$, on voit qu'il est semi-régulier à droite, car en prenant $r_1, r_2 \in \mathfrak{r}$, il suffit de faire $r_1'=r_2, r_2'=r_1$, pour obtenir $r_1 \vee r_1' \vee r_1 r_1' \vee r_2 r_2' = r_2 \vee r_2' \vee r_2 r_1' \vee r_1 r_2'$. Donc:

Théorème 6: — *Tout demi-anneau réticulé est égal à son* J*-radical.*

3. LE DEMI-ANNEAU $\overline{\mathfrak{S}}$.

Parmi les demi-anneaux réticulés, le demi-anneau $\overline{\mathfrak{S}}$ des idéaux d'un demi-anneau $\mathfrak{S}$, à l'exclusion de l'idéal vide, offre un intérêt tout particulier. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{S}$. Nous représentons par $\bar{\mathfrak{b}}_0$ l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{S}$ contenus dans $\mathfrak{b}$, à l'exclusion de l'idéal vide (il s'agit de l'idéal principal du treillis $\overline{\mathfrak{S}}$ engendré par l'élément $\mathfrak{b}$). Dans l'etude des μ-demi-anneaux [7] l'emploi de $\overline{\mathfrak{S}}$ est très avantageux. Nous nous bornons à rappeler les propositions ci-dessous dont on trouve les démonstrations chez [8]: *a*) $\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, si et seulement si tout idéal réticulé et semi-premier de $\overline{\mathfrak{S}}$ est un idéal principal. *b*) $\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées: 1_{00}) La condition de chaîne ascendante est valable pour les idéaux semi-premiers de $\mathfrak{S}$; 2_{00}) si $\mathfrak{x}$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à l'idéal $\mathfrak{a}$, alors $\bar{\mathfrak{x}}_0$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.

Cette condition 2) justifie la propriété noethérienne suivante du radical $B(\mathfrak{a})$ d'un idéal $\mathfrak{a}$:

Proposition 1: — *Si* $\mathfrak{S}$ *est un* μ*-demi-anneau et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{S}$*, alors on a* $[B(\mathfrak{a})]^\sigma \subseteq \mathfrak{a}$*, pour un certain* σ. En effet: Puisque $\overline{(B(\mathfrak{a}))}_0 = B(\bar{\mathfrak{a}}_0)$, de $B(\mathfrak{a}) \in \overline{(B(\mathfrak{a}))}_0$, on tire $B(\mathfrak{a}) \in B(\bar{\mathfrak{a}}_0)$, donc, d'après le théorème 5, $[B(\mathfrak{a})]^\sigma \in \bar{\mathfrak{a}}_0$, c'est-à-dire $[B(\mathfrak{a})]^\sigma \subseteq \mathfrak{a}$.

Remarque: — En profitant de la propriété simple que $\bigcap \mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{c}$, $(\alpha \in A)$, où les $\mathfrak{b}_\alpha$ et $\mathfrak{c}$ sont des idéaux de $\mathfrak{S}$, équivaut à $\bigcap \overline{(\mathfrak{b}_\alpha)}_0 = \bar{\mathfrak{c}}_0$, le lecteur vérifie d'une manière facile la validité du théorème 2 pour le demi-anneau $\overline{\mathfrak{S}}$. En réalité, si $\mathfrak{J}=\phi$, on a aussi $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})=\phi$; et si $\mathfrak{J}\neq\phi$, alors $\mathfrak{J}(\overline{\mathfrak{S}})=\{\mathfrak{J}\}$, puisque $\mathfrak{J}$ est l'élément-zéro de $\overline{\mathfrak{S}}$.

4. IDÉAUX À DROITE (À GAUCHE) MINIMAUX ET SOUS-DEMI-ANNEAUX À DIVISION

Soit $\mathfrak{r}_0$ un idéal à droite composé d'un seul élément r, qui ne soit pas l'élément-zéro de $\mathfrak{S}$. Alors $\mathfrak{S}$ ne peut pas contenir cet élément-zéro et la définition d'idéal à droite minimal donnée dans l'Introduction sous-entend $\mathfrak{r}_0=\{r\}$ comme idéal à droite minimal.

Exemple: — Si $\mathfrak{S}$ est défini par les règles $x+y=y, xy=x$, un élément quelconque constitue un idéal à droite minimal.

Prenons ensuite un dem-demi-anneau dans lequel $\mathfrak{r}_0=\{e\}$ et $\mathfrak{e}_0=\{f\}$ soient, respectivement, un idéal à droite et un idéal à gauche minimal. Le produit $\mathfrak{r}_0\mathfrak{e}_0=\{ef\}$, puisque $eb=e$, $bf=f, \forall b\in\mathfrak{S}$, vérifie les relations $\mathfrak{r}_0\mathfrak{e}_0=\{e\}=\{f\}$. De plus, on a $e=e+e$. Il est bien simple de donner des cas où ces circonstances sont réalisées.

En ce qui concerne les sous-demi-anneaux à division, remarquons que, même que $\mathfrak{S}$ contienne l'élément-zéro, il peut exister des sous-demi-anneaux à division ne contenant pas cet élément, bien qu'ils contiennent son élément-zéro. Par exemple, soit $e\in\mathfrak{S}$ tel que $e+e=e$, $ee=e$. Le sous-demi-anneau $\{e\}$ est composé de son seul élément-zéro. Si $e\neq 0\in\mathfrak{S}$, nous considérerons $\{e\}$ comme sous-demi-anneau à division. Le produit $\mathfrak{r}_0\mathfrak{e}_0$ qu'on a trouvé ci-dessus est un idéal et aussi un sous-demi-anneau à division.

Cela posé, étudions un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{J}=\phi$ et $a\in\mathfrak{r}$, on a $\mathfrak{r}=a\cup a\mathfrak{B}$. Un élément at, $(t\in\mathfrak{B})$, engendre aussi $\mathfrak{r}$, de sorte que $a\geqq at\geqq a$, ce qui donne $a=at\leqq t$. Alors, a serait l'élément-zéro de $\mathfrak{B}$, donc $\mathfrak{r}$ n'existe pas. Si $\mathfrak{J}=(0)$, en écrivant $\mathfrak{r}=a\cup a\mathfrak{B}$, ou bien $a\mathfrak{B}=(0)$ et $\mathfrak{r}=\{0,a\}$, ou $a\mathfrak{B}\neq(0)$ et tout $as\neq 0$ engendre $\mathfrak{r}$. On en conclut $as=a$ et $\mathfrak{r}=\{0,a\}$, tel que précédemment.

D'ailleurs, on peut ajouter que l'hypothèse $at=a$, puisque $a=at\leqq a\wedge t$, implique $a\leqq t$. Par conséquent, $at=0$, si $t<a$. En ce qui concerne les idéaux à gauche (ou bilatères) minimaux, les conclusions sont les mêmes. On énonce ce

Théorème 7: — *Un demi-anneau réticulé pour lequel $\mathfrak{J}=\phi$ ne contient pas des idéaux à droite (à gauche, bilatères) minimaux. Si $\mathfrak{J}=(0)$, les idéaux à droite (à gauche, bilatères) minimaux, lorsqu'ils existent, sont de la forme $\{0,a\}$ et on a $at=0$, sauf si $t\geqq a$.*

Exemple: — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal minimal d'un anneau semi-simple d'Artin-Noether. Alors $\{(0),\mathfrak{a}\}$ est un idéal à droite, à gauche et bilatère minimal du demi-anneau réticulé des idéaux de l'anneau. Et, si $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal de l'anneau, on a bien $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(0)$.

En ce qui concerne un sous-demi-anneau à division $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}$, admettons qu'il puisse contenir plus d'un élément. Soit u son identité. En prenant $d\in\mathfrak{D}$, si $d_0\in\mathfrak{D}$ est tel que $d_0 d=d d_0=u$, on a, d'une part, $d=du\leqq d\wedge u\leqq u$; d'autre part, $u=dd_0\leqq d$. Par conséquent, $d=u$. Ainsi:

Théorème 8: — *Les sous-demi-anneaux à division d'un demi-anneau réticulé sont de la forme $\{u\}$ ou de la forme $\{u_0,u\}$. Dans le premier cas, on suppose $u\neq 0\in\mathfrak{B}$,* si 0 existe, et, dans le deuxième, on a $u_0+u_0=u_0$, $u_0+u=u+u_0=u$, $u+u=u$, $u_0u_0=u_0u=uu_0=u_0$, $uu=u$.

Nous voyons que, bien que $\mathfrak{B}$ soit à somme commutative, les sous-demi-anneaux à division contenus dans $\mathfrak{B}$ ne sont jamais des anneaux à division. À ce sujet, nous donnons, en passant, une proposition générale importante. Il est bien connu qu'un demi-anneau peut être plongé dans un anneau, si et seulement si la somme est commutative et vérifie la loi de la coupe [9]. S'il s'agit d'un demi-anneau à division, nous avons cette

Proposition 2:—*Un demi-anneau à division $\mathfrak{D}$ vérifiant la loi de la coupe pour la somme est à somme commutative. Si $\mathfrak{D}$ contient l'élément-zéro, pour que ce zéro soit non trivial, il faut et il suffit que le demi-anneau soit un anneau à division. Sous l'hypothèse $0 \in \mathfrak{D}$, l'existence de $a \neq 0$ tel que $a + a_0 = 0$, pour un certain $a_0 \in \mathfrak{D}$, implique que $\mathfrak{D}$ soit de même un anneau à division.* Prenons $x, y \in \mathfrak{D}$ et écrivons $(u+u)\,(x+y) = u(x+y) + u(x+y) = (u+u)\,x + (u+u)\,y$, ce qui donne $x+y+x+y = x+x+y+y$. Si la loi de la coupe est vérifiée, on obtient $y+x = x+y$. Quant à la deuxième assertion, sans doute que, en supposant $\mathfrak{D}$ un anneau à division, l'élément-zéro est non trivial. Réciproquement, si $0 \in \mathfrak{D}$ est non trivial, puisque $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$, il existe $b_0 \neq 0$ et $b_0' \neq 0$ tels que $b_0 + b_0' = 0$. L'équation $b_0 y = d$, $(d \in \mathfrak{D})$, est soluble, par hypothèse. Si y est la solution, on voit que $b_0 y + b_0' y = d + b_0' y = 0$. Tout élément d admet un inverse par rapport à la somme, donc $\mathfrak{D}$, par rapport à cette opération, est un groupe. Alors, la somme est commutative et $\mathfrak{D}$ est un anneau à division. La dernière assertion de l'énoncé est maintenant immédiate.

En revenant aux idéaux à droite et à gauche minimaux, nous avons:

Théorème 9:—*Si $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ et $\mathfrak{e} = \{0, b\}$ sont respectivement, un idéal à droite minimal et un idéal à gauche minimal de $\mathfrak{T}_0$, l'hypothèse $a \neq b$ entraîne $ab = 0$. Si $ab \neq 0$, on a $a = b$ et $\mathfrak{r} = \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ est un idéal minimal tel que $\mathfrak{a}^2 \neq (0)$. De plus $\mathfrak{a}$ est un sous-demi-anneau à division.* D'abord, si $a \neq b$, on ne peut pas avoir $ab = a$, car cette relation entraînerait $b = a$. Par conséquent $ab = 0$. L'hypothèse $ab \neq 0$ implique $a = b$, et $\mathfrak{r} = \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ est un idéal minimal tel que $\mathfrak{a}^2 \neq (0)$. D'une façon précise, on a $a^2 = a$ et $\mathfrak{a}$ est un sous-demi-anneau à division.

Exemple:—En supposant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux minimaux d'un anneau semi-simple d'Artin-Noether, $\{(0), \mathfrak{a}\}$ et $\{(0), \mathfrak{b}\}$ sont des sous-demi-anneaux à division du demi-anneau réticulé des idéaux de l'anneau. Il s'agit aussi d'idéaux minimaux, et, si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est (0). Le demi-anneau $\mathfrak{T}_0$ de cet exemple contient d'autres sous-demi-anneaux à division, par exemple $\{\mathfrak{a}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$. $\mathfrak{T}_0$ est d'ailleurs une réunion de sous-demi-anneaux à division.

Remarque:—On trouve chez [10] le théorème que voici: si $\mathfrak{r}\mathfrak{e}$ est le produit d'un idéal à droite minimal par un idéal à gauche minimal, pourvu que $\mathfrak{r}\mathfrak{e} \neq (0) \neq \mathfrak{e}\mathfrak{r}$, le produit $\mathfrak{r}\mathfrak{e}$ est un sous-demi-anneau à division et on a $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{r}$. On en conclut, par exemple: 1_{000}) si $0 \notin \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{J}_d(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$, tout idéal à gauche minimal est un sous-demi-anneau à division contenu dans $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$; 2_{000}) les hypotèses $0 \notin \mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}_d(\mathfrak{S}) \neq \emptyset \neq \mathfrak{J}_e(\mathfrak{S})$ entraînent que $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$ soit un sous-demi-anneau à division, comme nous l'avons dit dans l'Introduction; 3_{000}) si $\mathfrak{a}^2 \neq (0)$ et $\mathfrak{a}$ est minimal en tant qu'idéal à droite et à gauche, alors $\mathfrak{a}$ est un sous-demi-anneau à division.

5. DEMI-ANNEAUX PREMIERS ET SEMI-PREMIERS

$\mathfrak{T}$, puisque $\mathfrak{J} = \emptyset$, est, par définition, un demi-anneau premier, ce qui n'arrive pas pour $\mathfrak{T}_0$. Nous allons imposer cette condition à $\mathfrak{T}_0$ et démontrer ce

Théorème 10:—*Si $\mathfrak{T}_0$ est premier, l'existence d'un idéal à droite minimal $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ implique: 1′) l'élément-zéro est trivial; 2′) $\mathfrak{r}$ est un sous-demi-anneau à division; 3′) l'élément a est un atome; 4′) en suposant $t \neq 0$, les relations $at = a = ta$ sont valables et $\mathfrak{r}$ est un idéal.* 1′) est évident, d'après le théorème 3. 2′) est une conséquence du corollaire 1: on ne peut pas avoir $a^2 = 0$. Quant à 3′), prenons $t \in \mathfrak{T}_0$, avec $t < a$. Alors $at \leqq a \wedge t \leqq t < a$ donc $at = 0$ et $t = 0$; par conséquent, a est un atome. Enfin, si $t \neq 0$, on a $at = a \leqq a \wedge t \leqq t$, donc $a = aa \leqq ta \leqq t \wedge a \leqq a$ et $ta = a$. L'idéal à droite $\mathfrak{r}$ est bien un idéal minimal.

Corollaire 2: — *Un demi-anneau réticulé semi-premier simple avec élément-zéro et contenant un idéal à droite minimal est un demi-anneau à division de la forme* $\{0, a\}$.

Soit $\mathfrak{r}$ un idéal à droite d'un demi-anneau quelconque $\mathfrak{S}$. Un morphisme à gauche $\mathfrak{r} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{r}^*$ est défini d'après les règles suivantes [11]: $r_1 \rightarrow \sigma r_1, r_1' \rightarrow \sigma r_1', r_1 + r_1' \rightarrow \sigma(r_1 + r_1') = \sigma r_1 + \sigma r_1', rs \rightarrow \sigma(rs) = \sigma r \cdot s, (r_1, r_1' \in \mathfrak{r};\ s \in \mathfrak{S})$. Et un morphisme à droite est défini d'une façon analogue.

Alors, si $\mathfrak{T}_0$, supposé semi-premier, n'est plus simple mais contient des idéaux à droite minimaux, par exemple $\mathfrak{r} = \{0, a\}$, l'idéal à droite $t\mathfrak{r} = \{0, ta\}$, si $ta \neq 0$, est non seulement minimal mais aussi isomorphe à gauche à $\mathfrak{r}$. Réciproquement, si $\{0, a\}$ et $\{0, b\}$ sont des idéaux à droite isomorphes à gauche, de $b \rightarrow a$, $ba \rightarrow aa = a$, on conclut $ba = b$, donc $\{0, b\} = b \cdot \{0, a\}$. L'idéal $\mathfrak{T}_0 a$, qui contient tous les idéaux à droite isomorphes à gauche à $\mathfrak{r}$, est égal à leur somme. Il s'agit d'ailleurs d'un idéal minimal car $0 \neq c \in \mathfrak{T}_0 a$, en prenant $c = t_0 a$, mène à $ac \neq o$, puisque $ac = at_0 a = 0$ entraînerait $(t_0 a)^2 = 0 = c^2$. Aussi bien c que a engendrent cet idéal minimal, par conséquent $c = a$. On énonce ce

Théorème 11: — *Si $\mathfrak{T}_0$ est semi-premier et contient un idéal à droite minimal $\{0, a\}$, la composante homogène correspondante du socle est $\{0, a\}$. Cette composante est un idéal minimal.*

Corollaire 3: — *Si le demi-anneau réticulé $\mathfrak{T}_0$ est semi-premier et égal à son socle, il est une somme $\Sigma\{0, a_\alpha\}$, $(\alpha \in A)$. Chaque $\{0, a_\alpha\}$ est une composante homogène du socle et aussi un sous-demi-anneau à division.*

Exemples: — On trouve des réalisations de ce corollaire, en considérant le demi-anneau des idéaux d'un anneau semi-simple d'Artin-Noether ou en prenant le booléien des parties d'un ensemble.

Remarque: — Le concept d'isomorphisme à gauche constitue un outil important de la théorie des demi-anneaux, qui permet, en utilisant les résultats qu'on trouve chez [10], d'arriver à des théorèmes analogues à ceux démontrés dans la théorie des demi-groupes [12]. Par exemple: 1') Si $0 \in \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau semi-premier simple contenant un idéal à droite minimal avec un élément idempotent, alors $\mathfrak{S}$ est égal à la somme de ses idéaux à droite minimaux, tous eux isomorphes à gauche; 2') si $0 \in \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau semi-premier égal à la somme de ses idéaux à droite minimaux $\mathfrak{r}$, alors $\mathfrak{S}$ est une somme de demi-anneaux semi-premiers simples $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$, qui sont des idéaux simples de $\mathfrak{S}$, et, sous la condition que chacun de ces $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ contienne un idéal à droite minimal possédant un idempotent, la structure de chaque $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ est donnée par 1').

BIBLIOGRAPHIE

1. NORONHA GALVÃO, M. L.: *Sobre a teoria de Noether-Krull em semi--anéis.* Rev. Fac. Ci. Lisboa **8**, 175-256 (1961).
2. ——— *On the theory of residuals.* Rev. Fac. Ci. Lisboa **7**, 283-300 (1959).
3. ALMEIDA COSTA, A.: *Sur la théorie générale des demi-anneaux,* I. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, exposé 24 (1961).
4. ISÉKI, K.: *Ideals in semirings.* Proc. Japan Acad. **34**, 29-31 (1958).
5. ALMEIDA COSTA, A.: *Sur la théorie générale des demi-anneaux,* II. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, exposé 25 (1961).
6. BOURNE, S.: *The Jacobson radical of a semiring.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **37**, 163-170 (1951).
7. ALMEIDA COSTA, A.: *Sur les μ-demi-anneaux.* Math. Z. **108**, 10-14 (1968).
8. ——— *Sur la théorie générale des demi-anneaux.* Publ. Math. Debrecen **10**, 14-29 (1963).
9. SMITH, D. A.: *On semigroups, semirings and rings of quotients.* J. Sci. Hiroshima **30**, 123-130 (1966).
10. BOURNE, S.: *On multiplicative idempotents of a potent semiring.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **42**, 632-638 (1956).
11. BOURNE, S. et ZASSENHAUS, H.: *On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **43**, 613-615 (1957).
12. SCHWARZ, Š.: *On semi-groups having a kernel.* Czechslovak Math. J. **1**, 229-264 (1951).