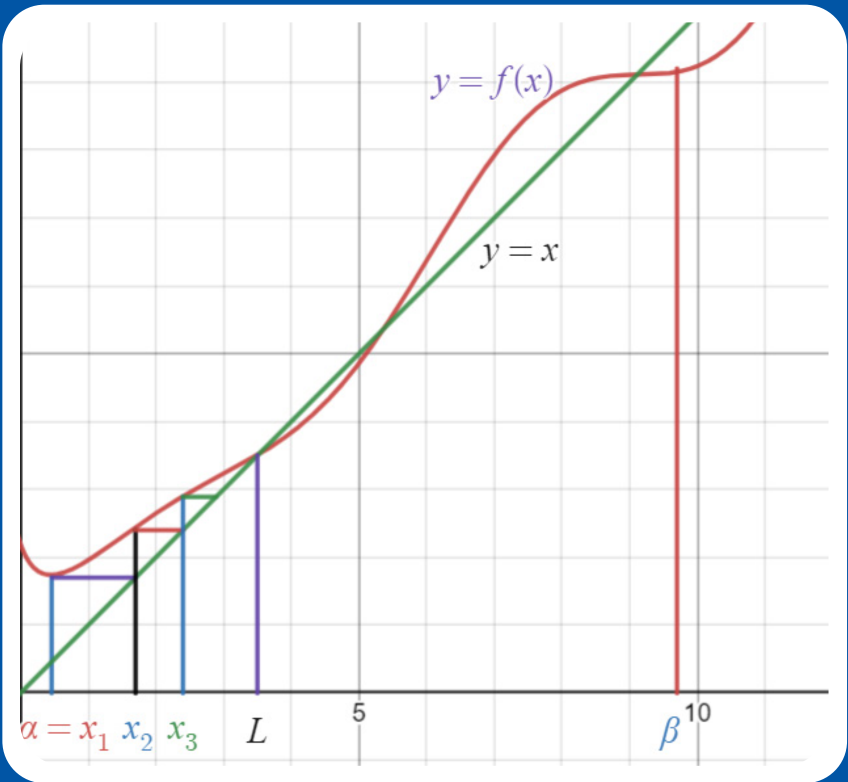
TEXTOS DE MATEMÁTICA

Introdução a Métodos da Análise Matemática

- Bases, Adendas, Extensões

Luís Sanchez Rodrigues



Ciências ULisboa

Departamento de Matemática

INTRODUÇÃO A MÉTODOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA – BASES, ADENDAS, EXTENSÕES

Editor: Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Departamento de Matemática
ISBN 978-972-8394-35-6

Estas notas foram escritas a partir da matéria dos mini-cursos de *Análise Matemática "avançada"* realizados na FCUL entre 2014 e 2023. Incluem enunciados de exercícios, e demonstrações da maioria dos resultados importantes. Desti nam-se a estudantes dos dois primeiros anos das licenciaturas em Matemática com interesse especial nos temas e nos métodos da Análise. Têm, portanto, um nível introdutório, mas não ficam limitadas ao teor estrito do currículo de base.

A partir de 2005, as licenciaturas em Matemática da FCUL passaram a incluir "versões avançadas" de algumas disciplinas básicas dos dois primeiros anos. Estas versões complementam as disciplinas a que correspondem e não são obrigatórias. A aprovação em cinco delas confere ao aluno o direito a uma menção especial no apuramento final de notas.

Lecionei alguns destes mini-cursos (de Análise Matemática I, II, III e IV) a partir de 2014, e tenho mantido colaboração nos mesmos até ao presente. Do material que utilizei fiz a seleção apresentada nesta monografia.

A minha concepção destes cursos é a seguinte: os tópicos abordados não têm de ser necessariamente mais difíceis do que alguns que são abordados nas disciplinas básicas, mas podem sê-lo em alguns casos; devem ser interessantes, úteis no prosseguimento dos estudos em Matemática, e preferencialmente escolhidos entre os não abordados, ou abordados em menor detalhe, nos programas estabelecidos para as disciplinas de Análise da licenciatura. Claramente, pressupõem um domínio seguro desses programas (sem esquecer a Álgebra Linear), constituindo um complemento ocasional deles. Em certos casos podem antecipar métodos e argumentos que o estudante de Matemática encontrará mais tarde em contexto muito mais geral. Este conceito, juntamente com preferências pessoais, reflete-se no conteúdo do texto.

Em excertos do texto referente a equações diferenciais é reconhecível a influência do clássico *Ordinary Differential Equations* de Birkhoff e Rota e da monografia com o mesmo título de Wolfgang Walter.

As figuras que ilustram o texto foram obtidas com recurso ao WolframAlpha e ao Desmos.

Luís Sanchez, Novembro 2023

1

UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES VALOR ABSOLUTO

Começamos por observar que a função com dois ramos lineares

$$f(x) = \begin{cases} -x/2, & \text{if } x \leq 0 \\ 3x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

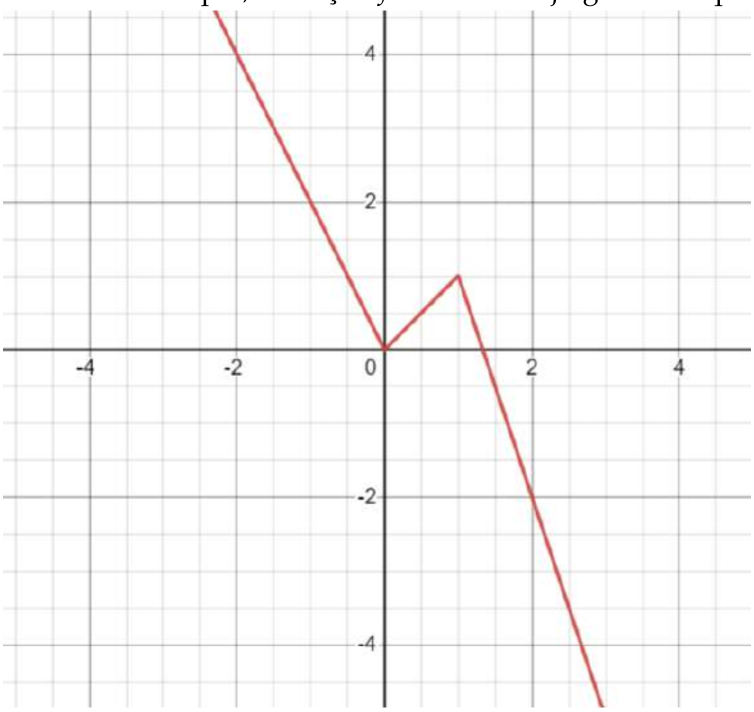
pode ser representada de forma "compacta" por

$$f(x) = ax + b|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

onde a, b são constantes reais. De facto, esta representação implica $a - b = -1/2$ e $a + b = 3$; um cálculo elementar mostra que isto é possível de modo único, com $a = 5/4$ e $b = 7/4$.

Este exemplo sugere que as funções reais de variável real que são contínuas e *seccionalmente afins*, isto é, cujo gráfico é composto de semirectas e/ou segmentos de recta em número finito, ligados uns aos outros por um vértice comum, podem ser representadas como combinação linear de uma função afim e funções módulo.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico esquematizamos a seguir



fica bem determinada por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e pelos declives das semirectas que constituem as restrições do seu gráfico a $]-\infty, 0]$ e $[1, +\infty[$ (-2 e -3 respectivamente). É natural procurar uma representação de f da forma

$$f(x) = a|x| + b|x-1| + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}$$

com constantes a, b, c, d adequadas.

Efectivamente, a partir dos dados obtemos as condições

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a + c + d = 1 \\ -a - b + c = -2 \\ a + b + c = -3 \end{cases}$$

de onde: $a = 3/2$, $b = -2$, $c = -5/2$, $d = 2$.

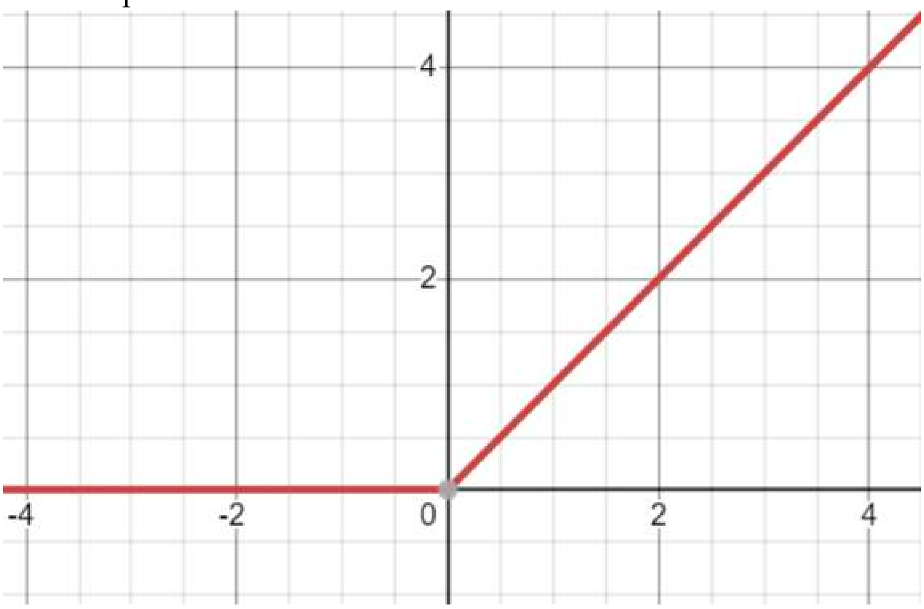
(Usando uma linguagem que em breve aprenderemos na Álgebra Linear, este exemplo ilustra o seguinte facto: o conjunto das funções seccionalmente afins com possíveis vértices nos pontos de abcissa 0 e 1 constituem um espaço vectorial de dimensão 4, e uma base desse espaço é formado pelas funções $|x|$, $|x-1|$, x e 1.)

Na "compactação" de fórmulas deste tipo podemos usar, em vez do valor absoluto, as funções (de duas variáveis) "máximo" e "mínimo", representadas por max e min respectivamente. Basta observar que

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2},$$

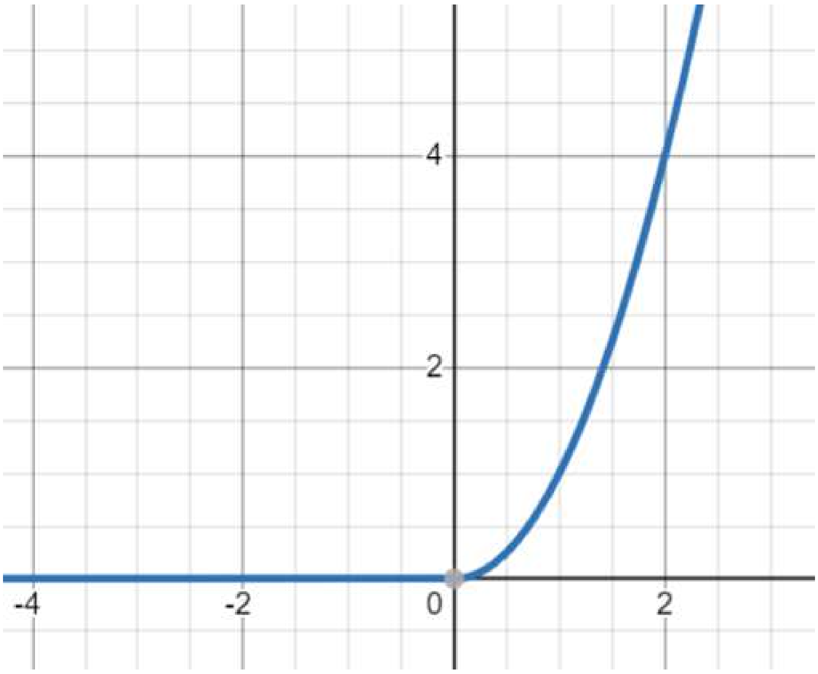
$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Exemplos:



Aqui, $f(x) = \max(0,x) = \frac{x+|x|}{2}$.

Consideremos agora $g(x) = f(x)^2$:



Neste caso, $g(x) = \frac{(x+|x|)^2}{4} = \max(0, x|x|)$.

Observemos, ainda como exemplo, que a função f correspondente ao primeiro dos desenhos introduzidos acima pode ser dada por

$$f(x) = \max(-2x, \min(x, -3x+4)) \quad \forall x \leq 4.$$

"Redução" da variável independente a um determinado intervalo: Observemos que, dados números $a < b$, tem-se

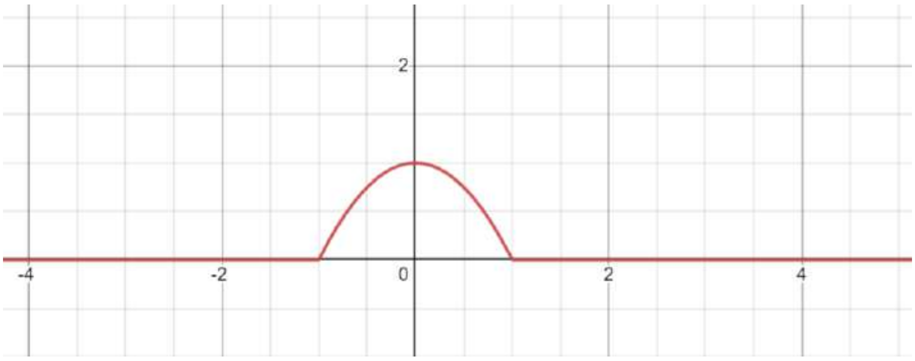
$$\min(\max(x,a),b) = \begin{cases} a & \text{if } \ x \leq a \\ x & \text{if } \ a \leq x \leq b \\ b & \text{if } \ x \geq b \end{cases}$$

Esta função será notada $\varphi_{\{a,b\}}$. Facilmente verificamos que

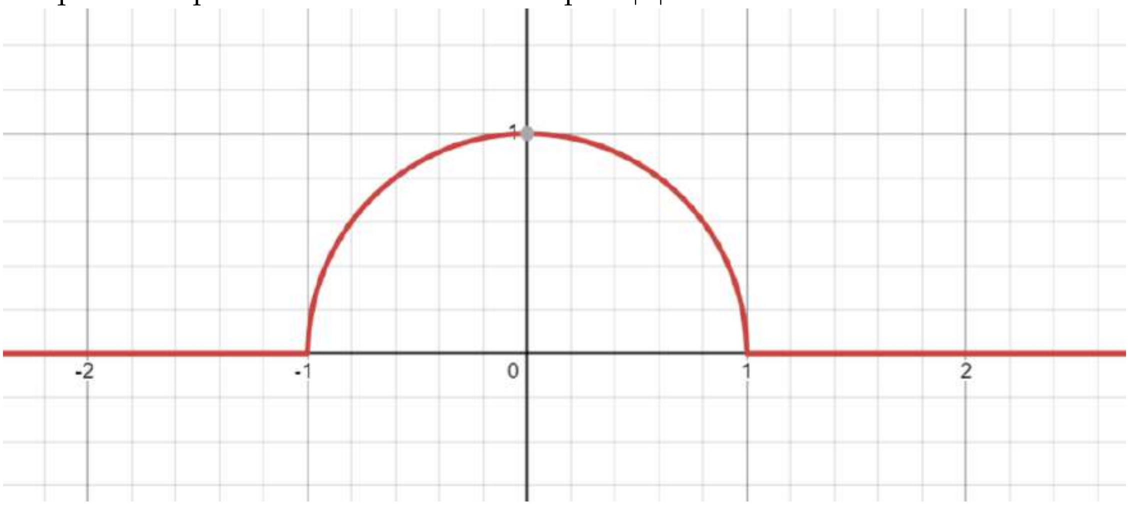
$$\varphi_{\{a,b\}}(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{|x-a|}{2} - \frac{|x-b|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função é útil em situações como a que vamos exemplificar agora. Repare-se que é fácil representar a expressão da função que coincide com $1 - x^2$ quando esta expressão é ≥ 0, isto é, se $-1 \leq x \leq 1$, e que é constante para $x \leq -1$ ou $x \geq 1$: basta escrever

$$\max(0, 1 - x^2)$$



mas já exige mais cuidado o caso em que $1 - x^2$ é substituído por $\sqrt{1-x^2}$, pela simples razão de que esta expressão deixa de ter sentido para $|x| > 1$:



Neste caso obtemos uma expressão correcta escrevendo

$$\sqrt{1 - \varphi_{\{-1,1\}}(x)^2}.$$

Note-se, no entanto, a alternativa equivalente e mais simples

$$\sqrt{\max(1 - x^2, 0)}.$$

Terminamos este tópico observando o seguinte

Facto 1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente afim cujo gráfico tem vértices nos pontos de abcissas $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Então f exprime-se como combinação linear das funções 1, x, e $|x - a_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$. Por outras palavras: o conjunto das funções seccionalmente lineares cujos gráficos têm um conjunto de vértices contido no conjunto de pontos indicados é um espaço vectorial de dimensão $n+1$.*

A ideia da demonstração é a que conduz aos cálculos usados nos nossos exemplos iniciais. A demonstração está ao alcance do estudante que domine o curso inicial de Álgebra Linear.

Exercícios: 1) Dar expressões em termos de valor absoluto, ou max, ou min, das funções seguintes

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

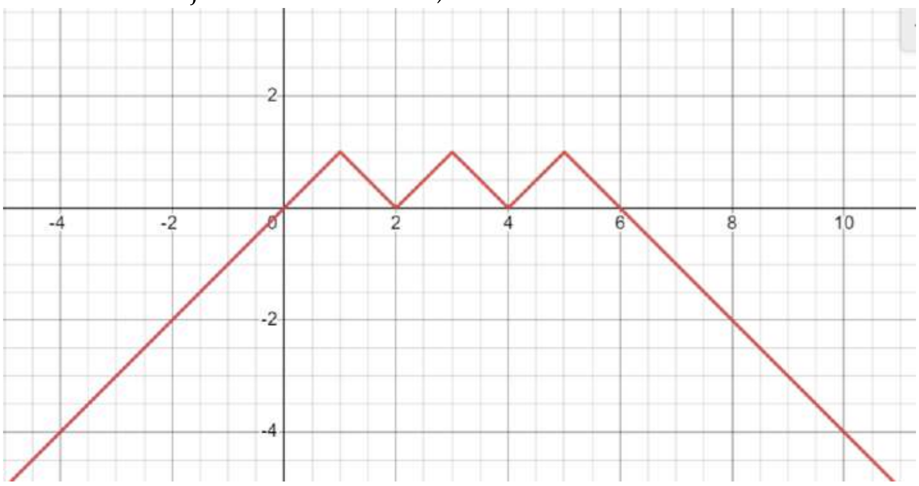
$$g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 0 \\ 0. & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Determinar condições sobre a, b, c para que a função

$$ax + b|x| + c|x-1|$$

(a) seja estritamente crescente; (b) seja sobrejectiva; (c) tenha valor mínimo absoluto em $\mathbb{R}$.

3) Dar uma expressão, em termos de valor absoluto, ou max, ou min, da função seccionalmente linear cujo gráfico é sugerido no seguinte gráfico, formado por duas semi-rectas e quatro segmentos de recta cujos declives são ± 1)



(Sugestão: os cálculos podem ser simplificados usando uma simetria, e eventualmente uma translacção.)

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função do exercício anterior. Dado $y \in \mathbb{R}$, qual é o número de soluções da equação $f(x) = y$?

5) Dar uma expressão da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

em termos de valor absoluto, ou max, ou min.

2

SUCESSÕES DEFINIDAS POR RECORRÊNCIA - OS CASOS MAIS SIMPLES DE RECORRÊNCIA LINEAR

Recordemos que a sucessão definida pela recorrência linear

$$x_{n+1} = ax_n \quad n = 1, 2 \cdots$$

onde a é uma constante, é a progressão geométrica de razão a:

$$x_n = a^{n-1}x_1.$$

Sabemos que $\lim x_n = 0$ se, e só se, $|a| < 1$. Se $|a| > 1$ tem-se $\lim |x_n| = +\infty$ (excluindo o caso trivial em que $x_1 = 0$).

Vamos agora estudar a existência de limite da sucessão dada pela relação de recorrência linear

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (rl)$$

onde a e b são constantes. Em primeiro lugar, se existir, e for finito, $L = \lim x_n$, tem-se, tomando limites em ambos os membros da equação anterior

$$L = aL + b, \quad \text{de onde:} \quad L = \frac{b}{1-a}.$$

Na verdade:

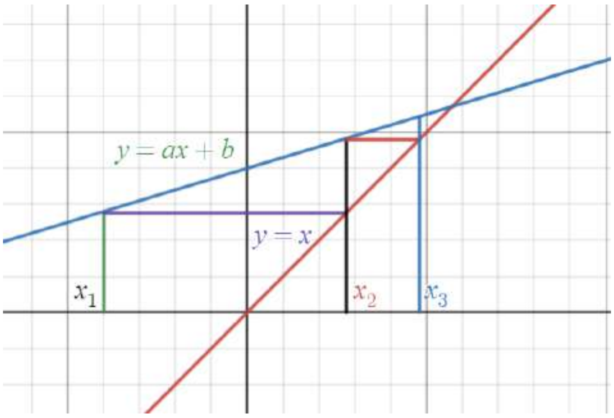
Facto 2. *Se $|a| < 1$, a sucessão definida por (rl) tem limite $L = \frac{b}{1-a}$.*

Demonstração: De (rl) deduzimos

$$x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = ax_n + b - \frac{b}{1-a} = a(x_n - \frac{b}{1-a})$$

significando que $y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$ é progressão geométrica de razão a, o que permite concluir.

Eis em esquema gráfico a aproximação ao limite da sucessão (rl):



Observação: Estivemos focados na convergência da sucessão (rl). Outra questão que poderíamos ter colocado é a da determinação do termo geral da mesma sucessão. Não é difícil obter, por indução finita, que:

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b(1 + a + \cdots + a^{n-2}), \quad n \geq 2.$$

Vamos estudar em seguida a convergência da sucessão definida por

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n \tag{rlv}$$

onde os coeficientes que figuram no segundo membro variam com n.

Facto 3. *Se* $\lim a_n = a$*,* $|a| < 1$*, e* $\lim b_n = b$*, a sucessão definida por (rlv) tem limite* $L = \frac{b}{1-a}$*.*

Demonstração: 1) Verifiquemos que, se $b = 0$, então $\lim x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos supôr, ignorando um número finito de termos se necessário, que existe um número A tal que

$$|a_n| < A < 1 \quad \text{e} \quad |b_n| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{a}$$

(Em virtude das hipóteses, aquelas desigualdades valem a partir de um certo índice m; ignorando os termos anteriores à ordem m e renumerando os índices podemos então admitir (a). Ignorar um número finito de termos não altera as propriedades de convergência.)

Consideremos a sucessão definida por recorrência

$$y_{n+1} = Ay_n + \varepsilon, \quad \text{com} \ \ y_1 = |x_1|.$$

De (a) deduzimos, por indução finita, que

$$|x_n| \leq y_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(De facto, a desigualdade é uma igualdade para $n = 1$, por construção. Admitindo que é válida para n temos $|x_{n+1}| \leq |a_n||x_n| + |b_n| \leq Ay_n + \varepsilon = y_{n+1}$.)

Pelo facto 2, temos $\lim y_n = \frac{\varepsilon}{1-A}$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq m \Longrightarrow |x_n| \leq y_n < \frac{2\varepsilon}{1 - A}$$

que é, por definição, o significado de $\lim x_n = 0$.

2) No caso geral, observemos que

$$x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a_n\big(x_n - \frac{b}{1-a}\big) + b_n - \frac{b}{1-a} + a_n\frac{b}{1-a}$$

e apliquemos o caso 1 à sucessão $z_n = x_n - \frac{b}{1-a}$.

Uma aplicação curiosa deste resultado é um método para calcular limites de sucessões do tipo

$$x_n = a_n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

onde (a_n) e (b_n) são sucessões dadas. Basta observar que uma tal sucessão pode definir-se por recorrência:

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x_n + a_{n+1}b_{n+1}.$$

Exercícios: 1) Calcular

$$\lim \frac{n}{2^{n+1}}\Big(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}\Big)$$

2) Definir a sucessão

$$x_n = \frac{1}{3^n \ln(n^4+1)}[3\ \ln 3 + 3^2 \ln 5 + \cdots + 3^n \ln(2n+1)]$$

por um processo de recorrência linear e calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3

OS CASOS MAIS SIMPLES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEAR

Comecemos por estudar um resultado muito prático para sucessões de recorrência definidas a partir de uma função crescente.

Facto 4. *Seja $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente. Suponhamos*

$$\alpha \leq f(\alpha), \quad \beta \geq f(\beta). \tag{a}$$

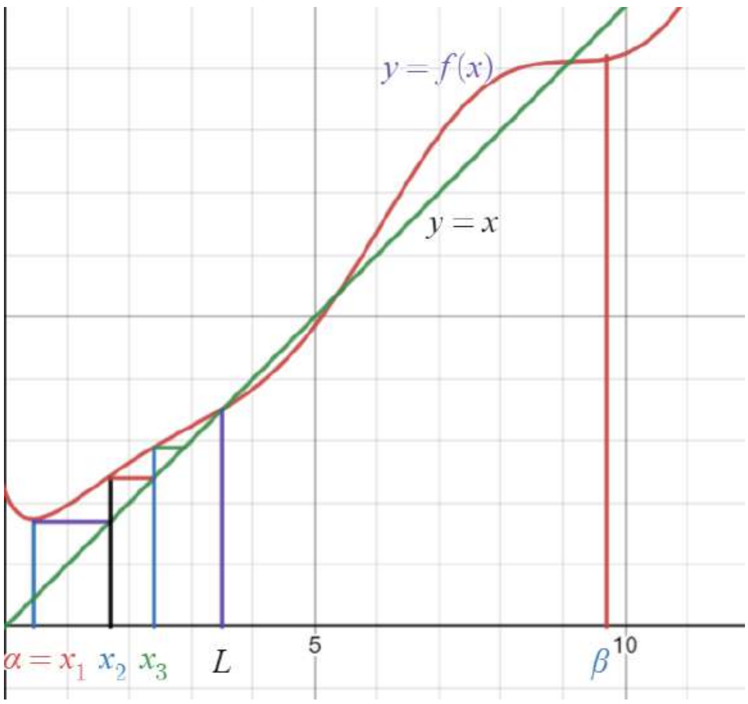
Então a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n), \;\; x_1 = \alpha \;\; \textit{(respectivamente} \;\; x_1 = \beta) \tag{s}$$

é crescente (respectivamente decrescente) e tem como limite a menor (respectivamente maior) raiz da equação

$$x = f(x)$$

em $[\alpha, \beta]$.



Demonstração: Consideremos o caso $x_1 = \alpha$; o outro é análogo. Antes de mais note-se que a sucessão está bem definida porque, como f é crescente, (a) implica que os valores de f pertencem a $[\alpha, \beta]$.

Começamos por verificar, utilizando a indução finita, que a sucessão (x_n) é crescente: em primeiro lugar, $x_2 = f(\alpha) \geq \alpha = x_1$; depois, admitindo $x_{n+1} \geq x_n$, e lembrando que f é crecente, obtemos

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}) \geq f(x_n) = x_{n+1}.$$

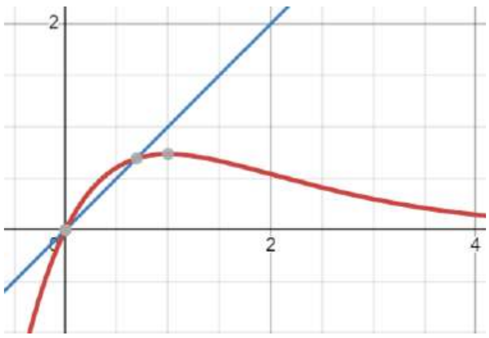
Seguidamente observamos que (x_n) é majorada, já que $x_n \leq \beta \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Do teorema da sucessão monótona resulta que existe o número real $L = \lim x_n \in [\alpha, \beta]$. Passando ao limite a equação (s) resulta $L = f(L)$. Mais: dada uma qualquer raiz $y \in [\alpha, \beta]$ da equação $y = f(y)$, é fácil mostrar (novamente por indução) que $x_n \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $L \leq y$, e todas as afirmações do enunciado ficam verificadas.

Exemplo: A função $2xe^{-x}$ é crescente em $[0, 1]$ e a raiz positiva de $x = 2xe^{-x}$ é $\ln 2$, tendo-se $2xe^{-x} > x$ se $0 < x < \ln 2$. Em virtude do facto anterior, imediatamente se conclui que a sucessão definida por recorrência

$$x_{n+1} = 2x_n e^{-x_n}$$

em que o primeiro termo é um número arbitrário $x_1 \in]0, \ln 2[$, é monótona crescente e tem limite $\ln 2$.

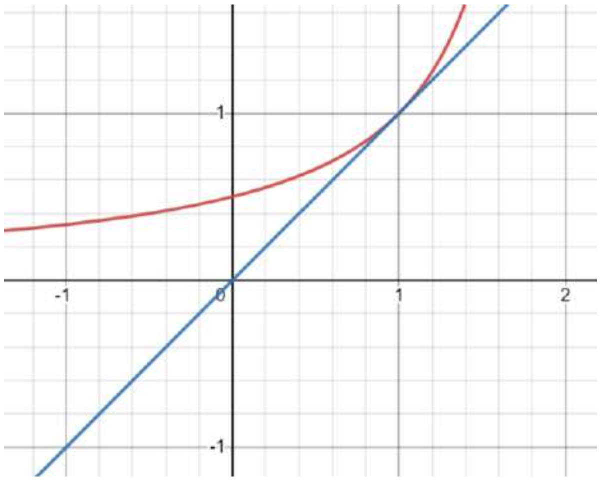


Exemplo: A sucessão definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \quad x_1 = -1$$

converge? Qual o seu limite?

Apliquemos o enquadramento anterior, desta vez com $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Se a sucessão convergir, o seu limite é solução de $x = \frac{1}{2-x}$, isto é, $x = 1$. É óbvio que f é crescente em $]-\infty, 2[$. Como $f(-1) > -1$ podemos concluir que a sucessão é crescente e tem, efectivamente, limite 1.



Exercícios: 1) Para que valores não negativos de k é convergente a sucessão

$$x_{n+1} = x_n^2 + k, \quad x_1 = 0\,?$$

Qual é o seu limite?

2) Estudar a convergência da sucessão

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 + 1}, \quad x_1 = 10.$$

(Começar por fazer um esquema gráfico sugerido pelo problema.)

3) A sucessão

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n^2, \quad x_1 = 1$$

não é do tipo estudado anteriormente, mas facilmente se reconhece que é decrescente e portanto tem limite. Na verdade é fácil reconhecer (por indução) que

$$0 < x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-2}} \quad \forall n \geq 3.$$

4) Conideremos as sucessões

$$x_{n+1} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) x_n^2, \quad x_1 = 1,$$

$$y_{n+1} = (1 - \frac{1}{4n^2}) y_n^2, \quad y_1 = 1.$$

Ambas são decrescentes e de termos positivos, mas é necessário um estudo particular de cada uma delas para se obter o valor do limite.

Para a primeira, não é difícil obter o termo geral

$$x_n = \frac{n+1}{2n},$$

o que resolve imediatamente o problema. Por outro lado, como $x_n < y_n\ \forall n \geq 1$, tem-se $\lim y_n \geq \frac{1}{2}$. Este limite não é fácil de identificar ao nível deste curso, mas o cálculo de alguns termos sucessivos sugere que $\lim y_n = 0.6535\cdots$ sendo exactas as casas decimais indicadas.

5) Determinar, justificando, o limite da sucessão (x_n) definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - x_n + 2}, \quad x_1 = 0.$$

Esta sucessão é monótona? Explicar.

Estudamos em seguida uma recorrência em que intervém uma função decrescente.

Facto 5. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to I$ uma função contínua e decrescente. Suponhamos que existe $x_1 \in I$ tal que para a sucessão definida por*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{d}$$

se tem

$$x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2. \tag{o}$$

Então:

- a subsucessão de (x_n) com índices ímpares, bem como a sucessão com índices pares, são monótonas, tendo-se, mais precisamente

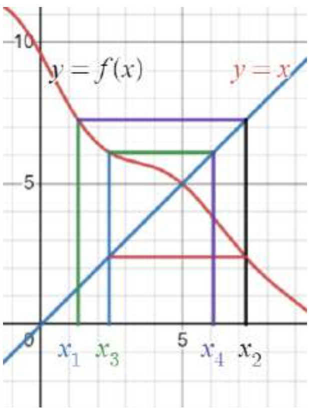
$$x_1 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{2n-1} \leq x_{2n} \leq \cdots \leq x_4 \leq x_2 \quad \forall n \geq 3, \tag{m}$$

e qualquer das sucessões tem como limite uma solução da equação

$$x = (f \circ f)(x) \tag{e}$$

em I.

- se a equação (e) tem uma única solução em I, ela é também solução de $x = f(x)$, e é limite de (x_n).



Demonstração: A prova de que as sucessões mencionadas satisfazem (m) faz-se por indução finita. Ilustremos o procedimento mostrando que $x_3 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_4$ (a passagem da etapa n à etapa $n+1$ é completamente análoga). Como $x_4 \leq x_2$ por hipótese, e f é decrescente, resulta $x_3 \leq x_5$. Daqui resulta, pelo mesmo argumento, $x_6 \leq x_4$. De $x_3 \leq x_4$ deduz-se ainda $x_5 \leq x_4$ e daqui $x_5 \leq x_6$.

De (m) resulta, além da monotonia de (x_{2n-1}) e (x_{2n}), que estas subsucessões são limitadas. Portanto os respectivos limites existem e são números reais. Como

$$x_{2n+1} = f(f(x_{2n-1}))$$

conclui-se que $L = \lim x_{2n-1}$ satisfaz $L = (f \circ f)(L)$. A conclusão para $\lim x_{2n}$ é análoga.

Finalmente, suponhamos que (e) só tem uma solução em I e representemos esta solução por L. Do que acabámos de mostrar resulta que $L = \lim x_n$. Logo, passando ao limite em (d), tem-se também $L = f(L)$.

Observação: Como toda a solução de $x = f(x)$ é também solução de $x = (f \circ f)(x)$, a afirmação "$x = (f \circ f)(x)$ tem solução única em I" implica a afirmação "$x = f(x)$ tem solução única em I".

Exemplos: 1) A sucessão

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 10$$

tem limite $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$. Com efeito, o facto precedente é aplicável, uma vez que

(i) a função $3 + \frac{1}{x}$ é decrescente e aplica $I =]0, +\infty[$ em si próprio, e a equação $x = 3 + \frac{x}{3x+1}$ tem apenas uma solução em I ($\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$, que é, de resto, a solução de $x = 3 + \frac{1}{x}$);

(ii) Facilmente se comprova, fazendo os cálculos, que os quatro termos que seguem o primeiro verificam

$$x_2 < x_4 < x_5 < x_3.$$

2) Se $-1 < a < 0$ e $b \in \mathbb{R}$, sabemos que a sucessão dada por $x_{n+1} = ax_n + b$ (recorrência linear) tem limite $\frac{b}{1-a}$. Podemos recuperar este resultado a partir do Facto anterior, uma vez que, se $x_1 < \frac{b}{1-a}$, facilmente se verifica que $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$. A sucessão (x_n) não é monótona, mas são-no as subsucessões de índices pares e de índices ímpares.

3) A sucessão

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n^2 + 1}, \quad x_1 = 1.39$$

é interessante como ilustração do Facto anterior e também para confronto com o exercício 2 da série de exercícios precedentes. Para $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, facilmente se vê que tanto $x = f(x)$ como $x = f(f(x))$ têm a única solução positiva $\sqrt{2}$; e f é *decrescente* em $[1, +\infty[$. Os primeiros quatro termos são, com cálculo de 5 casas decimais:

$$1.39; 1.42219; 1.41155; 1.4151.$$

Resulta que $\lim x_n = \sqrt{2}$. É útil esboçar o gráfico de f para interpretar o resultado.

Exercícios: 5) Mostrar que, para qualquer valor do primeiro termo x_1, a sucessão definida por

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

tem limite.

6) (difícil) Seja c um número do intervalo $]0, 1[$ e considere-se a sucessão

$$x_{n+1} = x_n^2 - c, \quad x_1 = 0.$$

Mostrar que (x_n) converge se $0 < c < 3/4$. Que se pode afirmar noutro caso? (Observar que a função $f(x) = x^2 - c$ aplica o intervalo $[-c, 0]$ em si próprio. Pode ser útil obter numa máquina valores aproximados das raízes de $x = (f \circ f)(x)$ e de alguns termos da sucessão.)

Completamos este tópico mencionando o seguinte resultado.

Facto 6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 com a propriedade: existe $a \in]0, 1[$ tal que*

$$|f'(x)| \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, para qualquer $x_1 \in \mathbb{R}$, a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge, tendo como limite a (única) solução da equação $x = f(x)$.

Não faremos aqui a demonstração deste enunciado, que é um caso particular de outro que os alunos encontrarão, até sob forma mais geral, em futuras disciplinas de Análise. Observamos, no entanto, que é um exercício simples mostrar que, sob as hipóteses dadas, a equação $x = f(x)$ tem uma e uma só solução.

4

SÉRIES NUMÉRICAS: CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA SIMPLES

Teorema 1. *(Critério de Dirichlet) Sejam (a_n) e (b_n) sucessões de números reais tais que*
(i) (a_n) é decrescente e $\lim a_n = 0$
(ii) a sucessão de somas parciais $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ é limitada.
Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

Demonstração: Seja $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Temos

$$S_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n =$$

$$= T_{n-1} + a_n B_n \qquad (a)$$

onde estamos a designar por T_n a soma parcial de ordem n da série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$. Vamos ver que esta série é absolutamente convergente: temos a comparação

$$|B_n(a_n - a_{n+1})| \leq L(a_n - a_{n+1})$$

onde L é um majorante de $|B_n|$ (que existe por (ii)) e onde atendemos a que $a_n - a_{n+1} \geq 0$ em virtude de (i); por outro lado é imediato verificar que a série de termo geral $L(a_n - a_{n+1})$ é convergente com soma La_1 (série "telescópica").

Da igualdade (a) resulta então que $\lim S_n$ existe e é igual a $\lim T_n$, uma vez que $\lim(a_n B_n) = 0$ (em virtude das hipóteses (i) e (ii)).

Observação importante: Da demonstração anterior vale a pena reter o que poderemos chamar "fórmula de soma por partes":

$$a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n - a_1 B_1.$$

Teorema 2. *(Critério de Abel) Sejam (a_n) e (b_n) sucessões de números reais tais que*
(i') (a_n) é decrescente e $\lim a_n$ *é finito.*
(ii') a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.
Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

Demonstração: Este resultado é consequência do anterior. De facto, ponhamos $\lim a_n = a$. A sucessão $(a_n - a)$ verifica a hipótese (i). Então

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n$$

onde as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$ convergem: a primeira pelo teorema anterior e a segunda por causa de (ii'). Podemos portanto concluir.

Exemplos: 1) Pelo critério de Dirichlet, podemos concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{\sqrt{n}}$$

converge. De facto, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente com limite 0; e as somas parciais referentes a $(\sin(n\pi/4))$, isto é, à sucessão periódica

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cdots$$

tomam apenas um número finito de valores (4), pelo que tais somas parciais constituem evidentemente uma sucessão limitada.

2) Vamos utilizar o critério de Dirichlet para mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

é convergente. Basta, para isso, provar que a sucessão de somas parciais $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ é limitada. Ora, utilizando a identidade trigonométrica

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

obtemos:

$$2\sin(1/2)B_n =$$
$$= \cos(\frac{1}{2}) - \cos(\frac{3}{2}) + \cos(\frac{3}{2}) - \cos(\frac{5}{2}) + \cdots + \cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2}),$$

isto é:

$$2\sin(1/2)B_n = \cos(\frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})$$

e concluímos

$$|B_n| \leq \frac{1}{\sin(1/2)} \quad \forall n$$

como se pretendia.

Este procedimento estende-se à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

que é mais interessante porque é uma série de Fourier (encontrá-la-emos numa posterior disciplina de Análise). Usando a mesma identidade trigonométrica de há pouco, temos, agora com $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$

$$2\sin(x/2)B_n = \cos(\frac{x}{2}) - \cos(n+\frac{1}{2})x.$$

Substituindo aqui x por $2x$ temos também

$$2\sin x \sum_{k=1}^{n} \sin(2kx) = \cos(x) - \cos(2n+1)x.$$

Com base nas duas últimas estimativas e atendendo a que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(kx) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kx) - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\sin(2kx)$$

(onde $[y]$ representa o maior inteiro $\leq y$) obtemos:

$$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(kx)| \leq |\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) + 2|\sum_{k=1}^{[n/2]}\sin(2kx)| \leq$$

$$\frac{1}{\sin(x/2)} + \frac{2}{\sin x}$$

sempre que x não é múltiplo de π. Por conseguinte, a série (*) é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios: 1) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série cuja sucessão de somas parciais (A_n) é limitada.
(i) Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ é convergente para todo o $t > 0$.
(ii) Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ é convergente e tem a mesma soma que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(n+1)}$.
2) Calcular $\sum_{i=1}^{n} i2^i$ (por partes).
3) Seja (a_n) uma sucessão decrescente e de termos ≥ 0. Seja (b_n) uma sucessão tal que $b_{n+1} - b_n$ é majorada. Mostrar que a série.$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_n - a_{n+1})$ é convergente.
4) Seja (A_n) uma sucessão limitada. Mostrar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_n \ln(1+\frac{1}{n+1})}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$ é convergente e tem a mesma soma que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln(n+1)}$, onde (a_n) é definida por $a_1 = A_1$ e $a_n = A_n - A_{n-1}$ se $n > 1$.

5

SÉRIES: CONVERGÊNCIA SIMPLES VS. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Há operações simples que se podem executar com séries tal como se fossem somas finitas. Por exemplo, tomemos a soma da série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(Veremos mais tarde que $S = \pi^2/6$, mas isso não é relevante para o que pretendemos exemplificar agora.) Multiplicando a igualdade acima por $1/4$ obtemos

$$\frac{S}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Das duas igualdades anteriores sai então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3S}{4}.$$

E combinando os resultados das duas igualdades anteriores ficamos também a conhecer a soma da série alternada construída com base em $1/n^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{3S}{4} - \frac{S}{4} = \frac{S}{2}.$$

No exemplo anterior a justificação formal dos passos (usando somas parciais) não oferece dificuldade. Também é simples reconhecer que podemos associar termos de uma série convergente, obtendo-se uma série convergente com a mesma soma. Por exemplo: seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente com somas parciais A_n. Consideremos a série obtida associando alternadamente grupos de 2 e 3 termos:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \cdots$$

e designemos por B_n as repectivas somas parciais. Reconhece-se imediatamente que

$$B_1 = A_2,\ B_2 = A_5,\ B_3 = A_7, \cdots,$$

de modo que (B_n) é subsucessão de (A_n). Por isso, $\lim B_n = \lim A_n$.

Já a questão da comutatividade é muito mais delicada. Alterar a ordem dos termos de uma série pode alterar as propriedades da série.

Exemplo: Seja S a soma da série alternada construída a partir da série harmónica

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \qquad (a)$$

(tem-se $S = \ln 2$ mas isso é agora irrelevante). Alteremos a ordem dos termos juntando, de cada vez, dois termos negativos: obtemos a série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Calculemos a soma da nova série associando pares de termos consecutivos, começando no primeiro par, mas deixando invariante um termo entre cada dois pares. Obtemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots = \frac{S}{2}.$$

Exemplo: Ainda a partir da mesma série, consideremos a seguinte

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad (b)$$

onde agora colocamos de cada vez dois termos (positivos) de denominadores ímpares, surgindo os termos (negativos) intercalados entre cada ocorrência dos anteriores. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a série (a), formemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \qquad (c)$$

e ainda a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ onde (b_n) é a sucessão dos $(a_n/2)$ com zeros intercalados (o que, obviamente, não lhe altera as propriedades):

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

Facilmente se reconhece então que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, isto é, a série (b) (outra que se obtém alterando a ordem dos termos de (a)), tem soma $S + \frac{S}{2} = \frac{3S}{2}$.

Exercícios: 1) Como vimos, alterar a ordem de termos em séries simplesmente convergentes pode alterar a soma. Considere-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$$

Qual é a soma da série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots ?$$

Sugestão: associar os termos primeiro e segundo; quarto e quinto, etc, mantendo invariante um termo entre cada dois associados.

2) Estudar a convergência da série

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

Nota: É fácil ver que a soma é $S-T$, onde S e T são respectivamente as somas de

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

e

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

isto é: $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$. Para introduzir o cálculo da soma numa máquina, é útil observar que o termo geral da série pode ser escrito

$$\frac{|((n-1)\,mod\,4)-2|-|((n-1)\,mod\,4)-1|}{n}$$

onde $x\,mod\,y$ significa o resto da divisão inteira de x por y. (Alternativamente, o numerador pode ser escrito $\sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{4}+(n-1)\frac{\pi}{2})$.)

3) (*difícil) Estudar a convergência da série

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots$$

onde o número de termos com o mesmo sinal aumenta de uma unidade em cada novo bloco.

4) Estudar a convergência da série

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots$$

(onde alternam três termos positivos e três negativos da série (a)). Determinar a sua soma em termos da de (a). **Sugestão:** Observar que, sendo A_n a soma parcial da harmónica alternada e A'_n a desta série, tem-se $\forall n\ A'_{6n}=A_{6n}$; e, se $k\in\mathbb{N}$ é arbitrário, tomando n tal que $6n\leq k\leq 6(n+1)$, então $A'_k=A'_{6n}+t_n$ com $|t_n|\leq 5/(6n)$.

Há, no entanto, situações em que alterar a ordem dos termos não afecta a natureza nem a soma da série. É o que estudamos em seguida. Para exprimir que numa série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ alteramos a ordem dos termos, consideramos uma bijecção $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e formamos a série $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ em que $b_n=a_{i(n)}$.

Facto 7. *(Comutatividade nas somas infinitas com termos positivos) Seja $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uma série de termos ≥ 0. Seja $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma bijecção. Então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i(n)}$ têm a mesma natureza e, em caso de convergência, têm a mesma soma.*

Demonstração : Sejam A_n e B_n as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i(n)}$, respectivamente. Como as séries de termos ≥ 0 convergem se, e só se, as suas somas parciais são majoradas (sendo a soma da série o supremo de tais somas), a propriedade enunciada resulta dos seguinte factos simples:

$$\forall p\in\mathbb{N}\,\exists q\in\mathbb{N}\quad B_p\leq A_q$$

(basta tomar q como o maior dos números $i(1)$, ... $i(p)$);

$$\forall p \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{N} \quad A_p \leq B_q$$

(porque os papeis das duas séries podem, obviamente, ser trocados).

Seja agora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos reais arbitrários, e definamos a partir dela duas outras, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, onde $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0 \\ x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^- = \frac{-x+|x|}{2} = \begin{cases} |x|, & \text{if } x \leq 0 \\ 0, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Representemos por A_n, B_n e C_n, respectivamente, as somas parciais de ordem n de cada uma das três séries introduzidas. Sejam ainda $A*_n$ as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Facilmente se reconhece que

$$A_n = B_n - C_n, \quad A*_n = B_n + C_n \ \ \forall n.$$

Como $B_n \leq A*_n$ e $C_n \leq A*_n$, resulta do critério de convergência de sucessões crescentes que:

$A*_n$ tem limite finito se, e só se, B_n e C_n têm limite finito.

Daqui se conclui o seguinte

Facto 8. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é simplesmente (não absolutamente) convergente tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.*

Registamos também a “comutatividade" nas séries absolutamente convergentes:

Facto 9. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente. Seja $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijecção. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$ é também absolutamente convergente e tem soma igual à da primeira.*

Demonstração : A par das sucessões de somas parciais acima introduzidas B_n e C_n para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, consideremos as correspondentes B'_n e C'_n para $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$. Então, como todos os termos positivos de uma dada soma parcial da primeira série se encontram obrigatoriamente na segunda série,

$\forall p \exists q$ tal que $B'_p \leq B_q \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$

o que mostra que (B'_n) tem limite finito e $\leq \lim B_n$. Como na asserção anterior podemos trocar os papéis de B_n e B'_n, tem-se na verdade $\lim B'_n = \lim B'_n$. Procedendo do mesmo modo com C_n e C'_n vemos que o facto fica demonstrado.

6

CÓNICAS EM COORDENADAS POLARES E PARÂMETROS ASSOCIADOS

Há conveniência em reconhecer e manejar equações das cónicas que não sejam necessariamente as chamadas formas canónicas. Recordemos, com um exemplo, a técnica de "completação do quadrado" no reconhecimento da cónica, e as informações que daí podemos obter. Neste caso, tratar-se-á da equação de uma elipse. A partir de

$$x^2 + 3y^2 + x = 0$$

podemos reescrever

$$(x + \frac{1}{2})^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$$

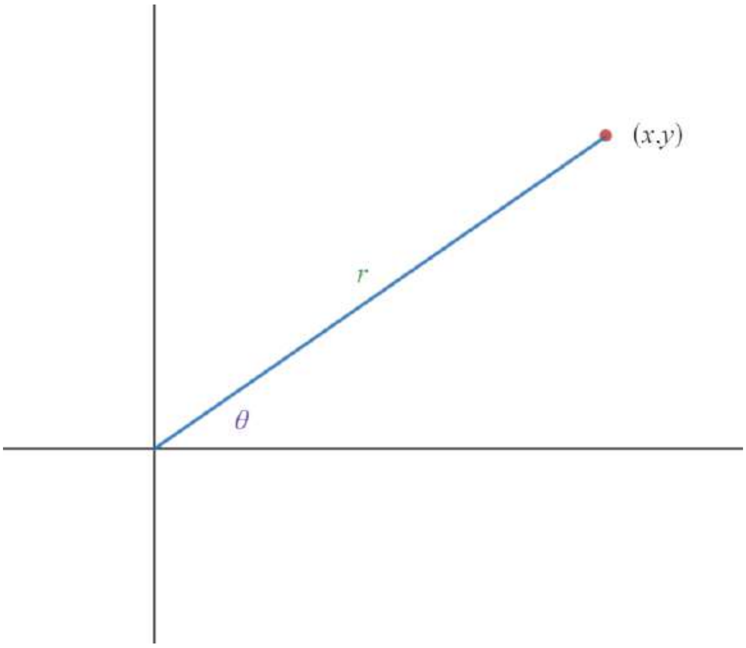
o que nos permite dizer imediatamente que estamos perante uma elipse centrada em $(-\frac{1}{2}, 0)$ e que todos os seus pontos satisfazem

$$|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Recordemos que um sistema de coordenadas polares no plano é uma semi-recta e (eixo) de origem O. Habitualmente associa-se-lhe um sistema de coordenadas cartesianas com origem O e tendo e como semi-eixo de abcissas positivas.

Para cada ponto do plano, a relação entre coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) é então

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



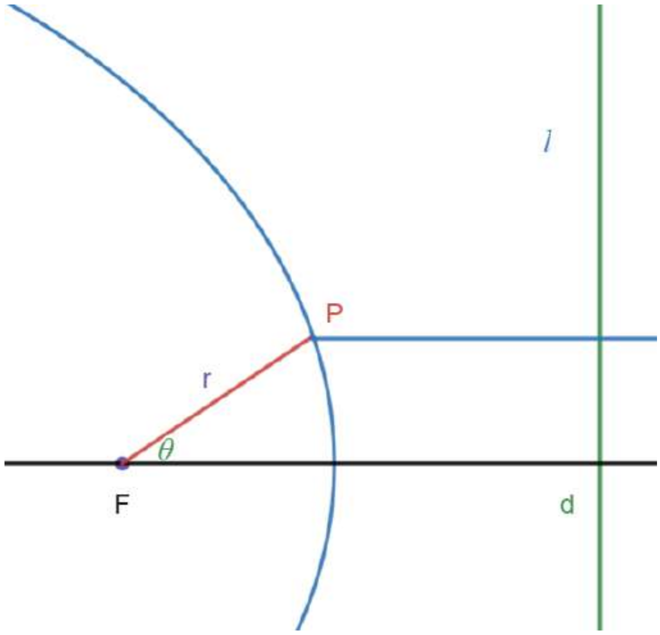
Vamos introduzir uma definição de cónicas que provavelmente é nova para o estudante principiante, e utilizar as coordenadas polares para obter as respectivas representações analíticas.

Consideremos, no plano, uma recta l e um ponto $F \notin l$ (a que chamaremos, no que segue, *directriz* e *foco*, respectivamente). Seja ainda dado um número real $e > 0$ (a que iremos chamar *excentricidade*). A *cónica* definida por estes elementos é o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$\frac{\|PF\|}{\operatorname{dist}(P,l)} = e \qquad (C)$$

Considerando um sistema de coordenadas polares com origem F e eixo perpendicular a l (e supondo, para fixar ideias, que l tem abcissa $d > 0$ nesse eixo) esta condição reescreve-se

$$r = e(d - r\cos\theta).$$



Resulta

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \qquad (C')$$

Há lugar a algumas observações:

- Se $0 < e < 1$ todos os pontos P que satisfazem (C) ficam no semiplano determinado por l e F, como é óbvio. A expressão (C') está bem definida para todos os valores de θ (basta restringir θ a $[0, 2\pi]$ para obter a totalidade da curva) porque o denominador é sempre $\geq 1 - e$. A cónica diz-se então uma *elipse*. É fácil, de resto, reconhecê-la fazendo a mudança para as coordenadas cartesianas: de (C') resulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ed - ex$$

e, depois de elevar ao quadrado ambos os membros, obtemos uma equação do tipo que exemplificámos no início do capítulo.

Estamos em presença, evidentemente, de uma curva *limitada* porque $r \leq \frac{ed}{1-e}$.

Para incluir uma circunferência como caso particular, consideramos $e = 0$ em (C'). Podemos imaginá-la como elipse de foco no centro e com directriz a distância infinita.

- Se $e = 1$ também todos os pontos P que satisfazem (C) ficam no semiplano determinado por l e F. Mas agora a curva não é limitada. A expressão (C') fica bem definida para $-\pi < \theta < \pi$ mas o denominador anula-se nos extremos do intervalo e $\lim r(\theta) = \infty$ quando $\theta \to \pm\pi$. Dizemos então que se trata de uma *parábola.*

- Se $e > 1$ há pontos que satisfazem (C) no outro semiplano, mas para representar a condição desses pontos devemos reescrever (C) do seguinte modo

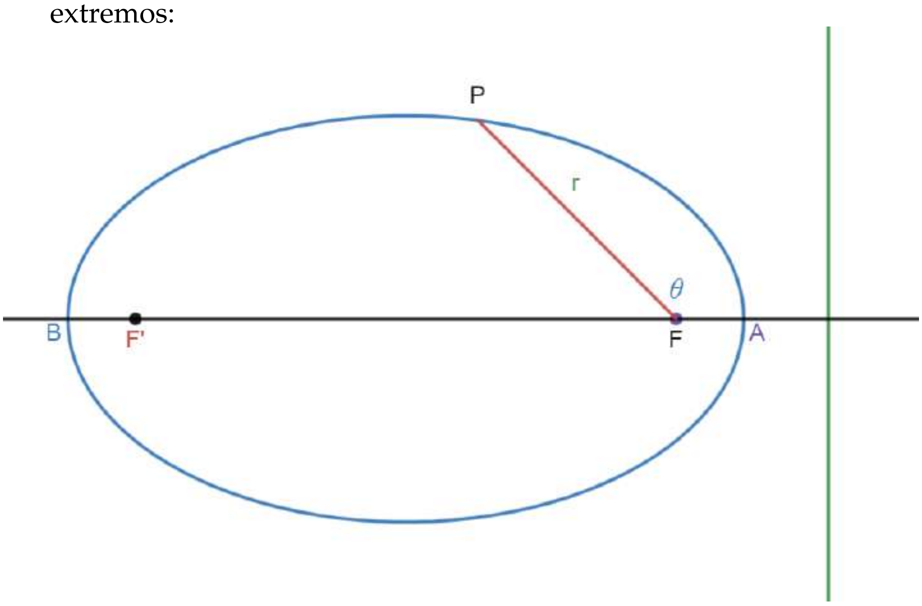
$$r = e(r\cos\theta - d),$$

e assim obtemos a representação

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1} \qquad (C'')$$

Trata-se agora de uma *hipérbole* com os dois ramos (C') e (C''), cujos domínios são: $|\theta| < \alpha$ com $\alpha = \arccos(-1/e)$ e $\alpha = \arccos(1/e)$, respectivamente.

Consideremos o caso geral da elipse. Os *vértices* são os pontos A e B onde r atinge valores extremos:



$$\|FA\| = \frac{ed}{1+e}, \quad \|FB\| = \frac{ed}{1-e}.$$

O segmento de recta AB é o *eixo maior*. Além da origem do sistema de coordenadas (F) há um outro ponto interessante: F', o ponto de AB tal que $\|BF'\| = \|AF\|$. Veremos adiante que a elipse tem precisamente F e F' como focos. Assim, $\|FF'\| = \frac{2e^2d}{1-e^2}$. A distância entre os focos costuma ser representada por $2c$, e representamos por $2a$ o comprimento do *eixo maior* $\|AB\|$. Temos então $2a = \frac{2ed}{1-e^2}$, $2c = \frac{2e^2d}{1-e^2}$ e portanto:

$$c = ea.$$

(C') pode reescrever-se

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{a}$$

Outro parâmetro relevante é a *ordenada máxima* dos pontos da elipse, que é costume representar por b. Calculemos o seu valor, isto é, o máximo de $r\sin\theta$: como $r\sin\theta = \frac{ed\sin\theta}{1+e\cos\theta}$, e

$$\frac{e^2d^2\sin^2\theta}{1+e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta} = \frac{e^2d^2(1-t^2)}{1+e^2t^2+2et}$$

onde fizemos a substituição $\cos\theta = t$. O estudo da função $f(t) = \frac{e^2d^2(1-t^2)}{1+e^2t^2+2et}$ no intervalo $-1 \le t \le 1$ mostra imediatamente que o seu máximo é atingido em $t = -e$, de onde concluimos

$$b = \frac{ed\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = a\sqrt{1-e^2}.$$

Resulta agora

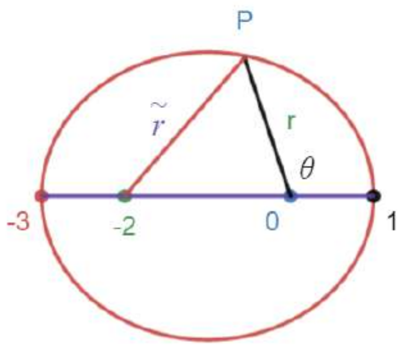
$$a^2 = b^2 + c^2$$

e tem-se também a expressão da excentricidade

$$e = \frac{c}{a}.$$

A elipse tem *centro*, isto é: há um ponto a respeito do qual ela é simétrica, que é o ponto médio do eixo maior e do segmento $F'F$. (A justificação é dada um pouco adiante.) Em particular, c representa também a distância do centro a cada um dos focos.

Exemplo: A equação $r = \frac{3}{2+\cos\theta}$ representa uma elipse. Os valores extremos de r são 1 (no ponto $(1,0)$) e 3 (no ponto $(-3,0)$) - aqui estamos a referir um sistema de coordenadas cartesianas associado ao sistema polar que a equação subentende. Sendo os vértices $(1,0)$ e $(-3,0)$ e sendo a origem um dos focos, o outro será $(-2,0)$. Representemos por $\tilde{r}$ a distância de um ponto genérico a $(-2,0)$. Vamos verificar neste exemplo, como exercício, que se realiza a propriedade característica da elipse, isto é, que para cada ponto se tem $r + \tilde{r} = 4$.



Tem-se

$$\tilde{r}^2 = r^2 + 4 + 4r\cos\theta = \frac{9}{(2+\cos\theta)^2} + 4 + \frac{12\cos\theta}{2+\cos\theta},$$

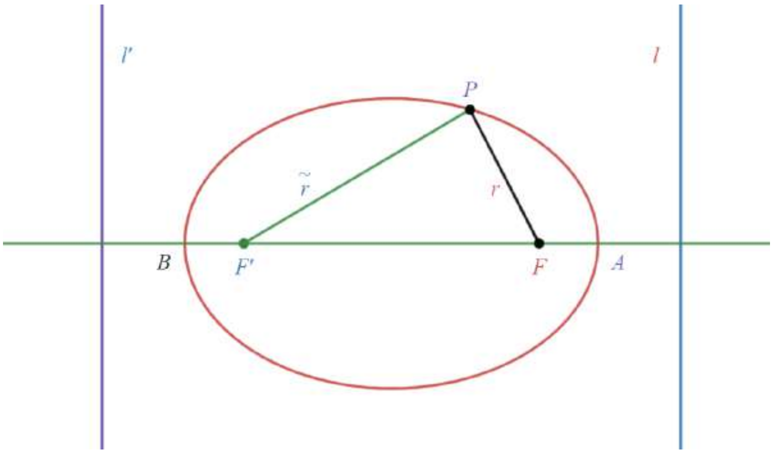
$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{9 + 4(2+\cos\theta)^2 + 12\cos\theta + (2+\cos\theta)}}{2+\cos\theta},$$

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{25 + 40\cos\theta + 16\cos^2\theta}}{2+\cos\theta} = \frac{5+4\cos\theta}{2+\cos\theta}$$

e resulta a conclusão pretendida.

Exercício: Identificar o tipo de cónica dado pelas equação polar nos casos: $r = \frac{8}{3+3\cos\theta}$; $r = \frac{4}{1+3\cos\theta}$. Identificar foco(s), directriz e dar as correspondentes equações cartesianas.

Voltemos a considerar uma elipse com foco F e a correspondente directriz, e a representação em coordenadas polares de origem F e eixo polar perpendicular à directriz: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ (onde d é a distância de F à directriz).



Ao foco F' associamos uma directriz l' de tal modo que l', F' são obtidos de l, F pela simetria de centro no ponto médio de AB. Facilmente se reconhece, raciocinando como no primeiro caso, que a este par de foco e directriz corresponde a representação polar

$$\tilde{r} = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

(no sistema com origem F' e eixo polar dirigido de F' para F). Tem-se, obviamente, para todo o θ,

$$r(\theta) = \tilde{r}(\theta + \pi)$$

mostrando que os "raios vectores" $r(\theta)$ e $\tilde{r}(\theta + \pi)$, partindo de F e F', respectivamente, têm o mesmo comprimento e são paralelos com sentidos opostos; são, por isso, lados opostos de um paralelogramo que tem $F'F$ como uma das diagonais. Isto explica que os pontos correspondentes da elipse, digamos, P e $\tilde{P}$, são simétricos em relação ao ponto médio de $F'F$. Justifica-se, assim, a existência de centro da elipse.

Vamos agora mostrar que efectivamente os pontos F e F' desempenham o papel de focos. Precisamente, pretendemos mostrar que, para cada ponto P da curva,

$$r + \tilde{r} = 2a.$$

Mostraremos, equivalentemente (porque $r < 2a$), que

$$\tilde{r}^2 = (2a - r)^2.$$

Pelo teorema de Carnot para triângulos, temos

$$\tilde{r}^2 = 4c^2 + r^2 + 4cr\cos\theta$$

e ficamos reduzidos a provar que

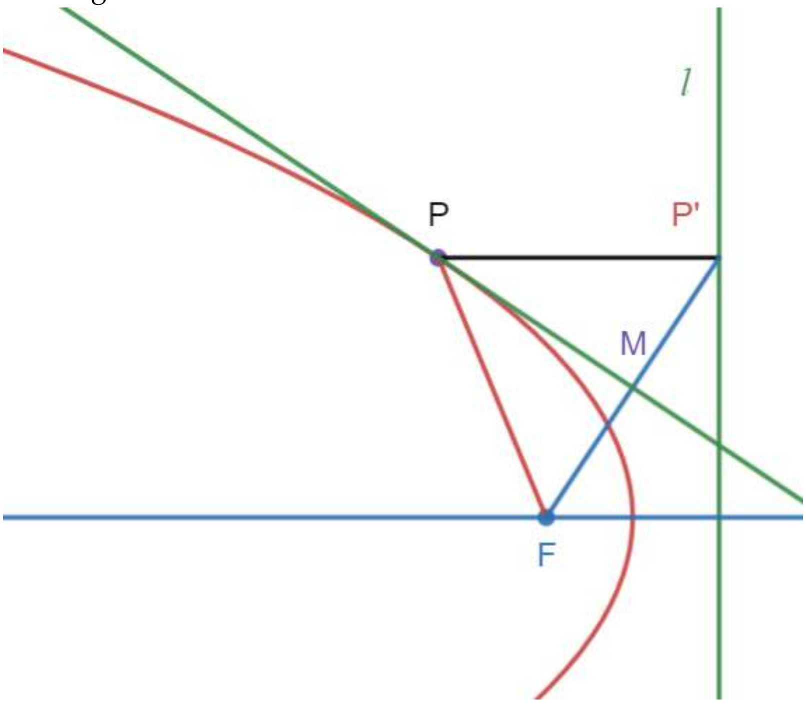
$$4c^2 + 4cr\cos\theta = 4a^2 - 4ar$$

ou seja

$$a^2(1 - e^2) = cr\cos\theta + ar$$

que é consequência imediata de (a).

A propriedade de reflexão na parábola: Na figura, ilustramos a justificação de que os raios incidentes num objecto parabólico, paralelos ao eixo, reflectem-se passando pelo foco. Com isto queremos dizer, precisamente, que, sendo P' a projecção ortogonal de um ponto P da parábola sobre a sua directriz d, o ângulo da recta PP' com a tangente à curva no ponto P é igual ao ângulo da tangente com a recta PF.



A justificação, usando argumentos essencialmente geométricos, pode fazer-se assim: consideremos o ponto médio M do segmento FP' e a mediatriz t deste segmento (perpendicular ao segmento que incide no ponto M); como P pertence à parábola, $P \in t$, já que é equidistante de F e P'. Afirmamos agora que esta recta t é a tangente à parábola em P. Para o reconhecer há que ter em conta:

(a) um ponto $Q \in t$ que seja distinto de P tem distância à diretriz menor que a distância a F, porque a projecção Q' de Q terá a propriedade $|QQ'| < |QP'| = |QF|$; assim, P é o único ponto comum à parábola e a t.

(b) todos os pontos da parábola ficam no semiplano determinado por t que contém F: com efeito, se X é um ponto do outro semiplano, tem-se $|XF| > \text{dist}(X, d)$. Para justificar este facto, observar que, dado um tal ponto X, existe um ponto Y comum ao segmento XF e a t.

A propriedade de reflexão na elipse: Também a elipse possui uma propriedade de reflexão, traduzida no seguinte facto: um raio emitido a partir de um dos focos reflecte-se de modo a passar no outro foco. Precisamente: para cada ponto P da elipse, usando uma notação já introduzida acima, os segmentos correspondentes a r e $\tilde{r}$ determinam ângulos iguais com a tangente à elipse no ponto P. Analogamente para a hipérbole.

7

FACTOS MUITO BÁSICOS SOBRE POLINÓMIOS REAIS

7.1 RAÍZES; FACTORIZAÇÃO

Como sabemos, uma função real de variável real diz-se um polinómio se tiver uma expressão analítica da forma

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e os coeficientes a_i são constantes reais. Se $a_0 \neq 0$, dizemos que P tem grau n. Um número α tal que $P(\alpha) = 0$ diz-se uma raiz ou um zero de P.

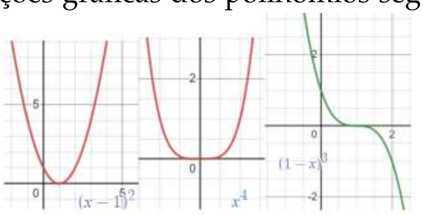
Facto 10. *O polinómio P tem a raiz α se, e só se, existe outro polinómio Q tal que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

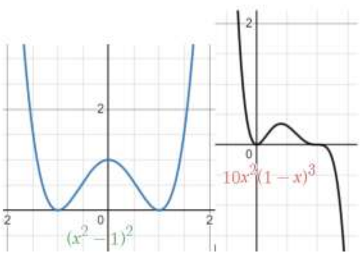
Mais geralmente, dizemos que α é raiz de P com multiplicidade k ($k \in \mathbb{N}$) se existe um polinómio Q tal que $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $Q(\alpha) \neq 0$. Quando $k = 1, 2, 3$ falamos de raiz simples, dupla ou tripla, respectivamente.

Facto 11. *São equivalentes as afirmações:*
(i) α é raiz de P com multiplicidade k
(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ e $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Facto 12. *Se α é raiz de P com multiplicidade $k > 1$, então α é raiz de P' com multiplicidade $k - 1$*

Comportamento do polinómio numa vizinhança de uma das suas raízes: Observemos as representações gráficas dos polinómios seguintes, em intervalos que incluem as suas raízes.





As várias situações ilustram o seguinte facto, cuja verificação é um exercício simples:

Facto 13. *Seja α uma raiz do polinómio P com multiplicidade k. Então:*
Se k é par, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x)$ mantém o sinal $\forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\setminus \{\alpha\}$. Trata-se do sinal de a_0.
Se k é ímpar, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x)$ tem o sinal a_0 em $]\alpha, \alpha+\varepsilon[$ e o sinal contrário ao de a_0 em $]\alpha-\varepsilon, \alpha[$.

O principal resultado que descreve a estrutura dos polinómios como funções de variável real é o seguinte, que não demonstraremos aqui mas que certamente soa familiar.

Facto 14. ***(Decomposição de um polinómio em factores reais)*** *Dado o polinómio (1), com $n > 1$, existem números reais α_i, β_j, γ_j e números $k_i \in \mathbb{N}_0$, $p_j \in \mathbb{N}_0$ de modo que se tem a decomposição num produto de polinómios de graus 1 ou 2*

$$P(x) =$$
$$= a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{p_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{p_l}.$$

Os números α_i são as raízes reais de P, os números k_i são as suas multiplicidades. Os trinómios $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ não têm raízes reais. Tem-se $\sum_{i=1}^m k_i + 2\sum_{j=1}^l p_j = n$.

Factorização em casos simples: Em certos casos podemos obter a factorização real sem passar pelo cálculo das raízes (reais ou complexas). Nos exemplos seguintes usamos a completação do quadrado ou uma mudança de variável:

$$x^4+1 = x = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

O polinómio $f(x) = x^6 - 2x^2 + 1$ pode escrever-se como função composta: $f(x) = P(x^2)$ onde $P(x) = x^3 - 2x + 1$). Como $x^3 - 2x + 1) = (x-1)(x^2+x-1) = (x-1)(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$, temos, substituindo x por x^2:

$$x^6 - 2x^2 + 1 =$$
$$(x-1)(x+1)(x - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(x + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

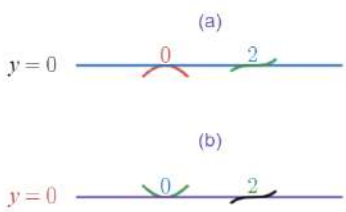
Exercícios: 1) Discutir, em função de c, o número de raízes reais da equação $x^6 - x^2 = c$.

2) Fazer um esquema do gráfico de $x^6 + ax^5$, onde $a > 0$ é um número dado. Determinar a de modo que o valor mínimo do polinómio $x^6 + ax^5 + 1$ seja 0. Qual é a ordem da raiz de $x^6 + ax^5 + 1$ onde o mínimo é atingido?

3) Que factores aparecem na decomposição real de $x^n - 1$?

4) Factorizar $x^5 + x^4 + 1$.

5) Dar a expressão analítica de um polinómio cujo comportamento em vizinhanças dos pontos 0 e 2 seja traduzido graficamente pelo esquema seguinte



Procurar, para as respostas, polinómios com o grau menor possível. No caso (b) pode o polinómio atingir um valor mínimo em $x = 1$?

5) Verificar que existem um polinómio P de grau 4 e um número $b > 1$ tais que $P(0) = P'(0) = P(1) = P(b) = 0$, $P(x) > 0\ \forall x < 0$, e $\min_{x\in\mathbb{R}} P(x) = -\max_{x\in[0,1]} P(x)$.

Esquema da resolução do ex. 5: O polinómio pedido será qualquer múltiplo de $P(x) = x^2(x-1)(x-b)$. As soluções de $P'(x) = 0$, além de $x = 0$, são as raízes $x_1(b)$ e $x_2(b)$ de uma equação do 2º grau, com $0 < x_1(b) < 1 < x_2(b)$. Trata-se então de estudar a função $g(b) = P(x_1(b)) + P(x_2(b))$ para concluir que ela tem um zero $b \in]1, +\infty[$.

6) Um polinómio P de grau 4 tem duas únicas raízes reais, 0 e 1, com $P'(0) > 0$ e $P'(1) < 0$. Para o polinómio $Q(x) = P(x)^3$ indicar os valores de $Q'(0)$, $Q'(1)$, $Q''(0)$, $Q''(1)$ e o sinal de $Q'''(0)$.

7) Dar a expressão analítica do polinómio P (de variável real) com as propriedades seguintes:

(1) $P(0) = 0$ e P tem um mínimo local em $x = 0$;

(2) $P(3) = 0$;

(3) P tem valor mínimo (absoluto) $P(1) = -1$.

(3) P tem grau mínimo entre os polinómios que satisfazem (1)-(2)-(3).

Terminamos a secção com o critério para a presença de raiz racional:

Facto 15. *Se em (1) os coeficientes a_i são inteiros e P tem uma raiz racional exprimível como fracção $\frac{p}{q}$ em que p e q não têm divisores comuns, então p é divisor de a_n e q é divisor de a_0.*

Demonstração: De $P(\frac{p}{q}) = 0$ resulta

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_nq^n = 0.$$

Então a última parcela é divisível por p, mas como q e p são primos entre si, a_n é divisível por p, o que mostra a primeira afirmação. Um argumento análogo estabelece a segunda.

7.2 REGRA DE SINAIS DE DESCARTES

Consideremos um polinómio P como em (1) e a sequência finita dos seus coeficientes

$$a_0, a_1, \cdots, a_n.$$

Ignorando nesta sequência os termos nulos, designemos por $S = S(P)$ o número de mudanças de sinal que ocorrem pela ordem dada.

Facto 16. *(Regra de Descartes) Seja $Z = Z(P)$ o número de raízes* positivas *do polinómio P, contadas com as multiplicidades respectivas. Então $S(P) \geq Z(P)$ e a diferença $S(P) - Z(P)$ é um inteiro par.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, supomos que $a_0 > 0$ e $a_n \neq 0$. Então $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Se $a_n = P(0) > 0$, o número $S(P)$ é um inteiro par. E, tendo em conta o Facto 13, também $Z(P)$ é par: com efeito, cada raiz positiva α em que P passa de positivo a negativo determina a existência de uma outra $\beta > \alpha$ em que em que P passa de negativo a positivo, envolvendo portanto duas multiplicidades ímpares.

Se $a_n < 0$, o mesmo tipo de argumento mostra que tanto $S(P)$ como $Z(P)$ são ímpares.

Assim, em qualquer caso $S(P) - Z(P)$ é par.

Demonstremos em seguida que $S(P) \geq Z(P)$. Fá-lo-emos por indução no grau de P. Se $n = 1$ é evidente que $S(P) \geq Z(P)$ (ambos com o valor 0 ou 1). Admitamos em seguida que a desigualdade é verdadeira para os polinómios de grau $< n$ e tomemos P com grau n. Para o polinómio P', obtido derivando P, é claro que $S(P) \geq S(P')$ e, por outro lado, tendo em conta o Facto 12 e o teorema de Rolle, $Z(P') \geq Z(P) - 1$. Portanto, usando a hipótese de indução

$$S(P) \geq S(P') \geq Z(P') \geq Z(P) - 1,$$

mas, já que $S(P) - Z(P)$ é par, tem-se necessariamente $S(P) \geq Z(P)$.

Exercícios: 1) Enunciar uma "regra de Descartes" para o número de raízes negativas. (Sugestão: considerar o polinómio $P(-x)$).

2) Mostrar que, para toda a constante real c, o polinómio $x^5 + cx^2 + 1$ não pode ter apenas raízes reais.

3) Que se pode afirmar sobre o número de raízes positivas de

$$x^4 + x^3 - 5x^2 - 10x - 3\,?$$

E quanto ao número de raízes negativas?

4) Quantas raízes reais tem o polinómio $x^{13} + 2x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + 3x^3 + 20x^2 - 1$?

8

LIMITES NO INFINITO E EXISTÊNCIA DE EXTREMOS ABSOLUTOS

8.1 INTRODUÇÃO E PRIMEIROS EXEMPLOS

Recordemos o seguinte **Teorema de Weierstrass**, mencionado na disciplina de Análise Matemática II:

Se K é um subconjunto compacto (isto é, limitado e fechado) de $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com valores reais, então f tem um valor máximo e um valor mínimo em K; precisamente, existem x_1 e $x_2 \in K$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in K.$$

Não vamos aqui ocupar-nos da demonstração deste teorema, que será objecto de uma outra disciplina de Análise, mas vamos dar relevo a um seu corolário que passaremos a utilizar sistematicamente:

Facto 17. ***Corolário do teorema de Weierstrass*** *Sejam F um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty. \tag{i}$$

Então f tem um valor mínimo em F, isto é, existe $x_1 \in F$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Antes de prosseguir recordemos o que (i) significa exactamente:

$$\forall A > 0 \; \exists b \text{ tal que } \quad \|x\| > b, \;\; x \in F \implies f(x) > A. \tag{ii}$$

Demonstração: Fixemos um ponto $z \in F$. Pela condição (i) ou a sua explicitação (ii), existe b tal que

$$\|x\| > b, \;\; x \in F \implies f(x) > f(z).$$

Definamos $K = \overline{B(0,b)} \cap F$. Então K é compacto e é claro que $z \in K$. Pelo teorema de Weierstrass, f tem mínimo em K, isto é, existe $x_1 \in K$ tal que

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in K.$$

Mas, se $x \in F \setminus K$, então $\|x\| > b$ e temos também $f(x) \geq f(z) \geq f(x_1)$. Conclui-se que $f(x_1) = \min f$.

Notas: 1) O mínimo referido neste enunciado é um mínimo *global* ou *absoluto*.

2) De modo simétrico, demonstra-se que Se F é um fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty. \qquad (iii)$$

Então f tem um valor máximo em F, isto é, existe $x_2 \in F$ tais que

$$f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in F.$$

3) Obviamente, para que as condições (i) ou (iii) tenham sentido não trivial, F deve ser um conjunto não limitado.

4) Em muitas aplicações, tem-se $F = \mathbb{R}^n$.

Comecemos por apresentar os exemplos mais simples de utilização do corolário.

Exemplos. 1) Qual é o valor mínimo de $f(x) = x^4 - 2x^3$ e $\mathbb{R}$?

Como $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$, sabemos que f tem mínimo (absoluto). Como $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3/2$ e num ponto de mínimo a derivada tem um zero, o mínimo só pode ser atingido em 0 ou $3/2$. Como $f(0) = 0$ e $f(3/2) = -27/16$, a resposta é $-27/16$.

2) Qual é o valor mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - y + 1$?

Como, para valores "grandes" de $\|(x,y)\|$, os termos do 2º grau são dominantes, somos levados a intuir que também aqui se tem a condição (i), a qual agora será escrita na forma

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty \qquad (a)$$

Logo, existe mínimo absoluto. Como o mínimo é necessariamente atingido num ponto crítico, vamos procurá-los: resolvendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ encontramos uma só solução: $(-1, 1/2)$. Concluimos que o mínimo pedido é $f(-1, 1/2) = -1/4$.

Mas justifiquemos cuidadosamente a afirmação (a). Escrevamos $\rho = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como é óbvio, tem-se

$$|x| \leq \rho, \quad |y| \leq \rho.$$

Então $f(x,y) \geq \rho^2 - 3\rho + 1$. Como a função de uma variável $\varphi(\rho) = \rho^2 - 3\rho + 1$, definida em $[0, +\infty[$, tem a propriedade $\lim_{\rho\to+\infty} \varphi(\rho) = +\infty$, obtemos imediatamente (a).

A justificação de (a) dada no exemplo acima enquadra-se num padrão geral: trata-se de exibir uma função contínua $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) \geq \varphi(\rho) \ \ \forall (x,y) \text{ no domínio de } f$$

e

$$\lim_{\rho\to+\infty} \varphi(\rho) = +\infty.$$

Aqui estávamos a tratar de uma função de duas variáveis, mas é claro que o argumento tem sentido de um modo geral em $\mathbb{R}^n$.

Um procedimento ligeiramente diferente poderia consistir no seguinte: determinar duas funções contínuas φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x,y) \geq \varphi(x) + \psi(y) \ \ \forall (x,y) \text{ no domínio de } f$$

e

$$\lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{|y|\to+\infty} \varphi(y) + \infty.$$

Esta ideia poderia ser aplicada no mesmo exemplo, escolhendo $\varphi(x) = x^2 + 2x$ e $\psi(y) = y^2 - y + 1$.

A mesma ideia se aplica a uma função f definida em $\mathbb{R}^n$, devendo então f ser minorada por uma soma de n funções de uma variável.

3) Qual é o valor mínimo de $f(x,y) = x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - x + 3y$? Esta questão é ligeiramente mais delicada, porque a presença do termo $\frac{3}{2}xy$, que toma valores com os dois sinais, poderia perturbar a minoração por uma função de ρ que tenda para $+\infty$. Mas o termo é controlável através da desigualdade elementar

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \quad \forall x,y$$

de onde:

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - \frac{3(x^2+y^2)}{4} = \frac{x^2+y^2}{4}.$$

Assim, obtemos para a função em causa a minoração

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - x + 3y \geq \frac{x^2+y^2}{4} - x + 3y \geq \frac{\rho^2}{4} - 4\rho$$

que ainda tem a propriedade que conduz a (a). Portanto existe o valor mínimo de f. Calculando os pontos críticos, encontramos apenas um: $(26/7, -30/7)$. O valor mínimo pedido é, por isso, $f(26/7, -30/7) = -58/7$.

É natural perguntarmo-nos como é que os coeficientes dos termos quadráticos – e particularmente do termo misto – influencia o facto de se ter, ou não, o limite (a). Esta questão será esclarecida adiante.

Exercícios: 1) Justificar a existência de mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y$ em $\mathbb{R}^3$ e calculá-lo. (Sugestão: com $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tem-se $f(x,y,z) \geq \rho^2 - 2\rho$...)

2) Justificar que $x^2 + y^2 + 3z^2$ tem mínimo no plano $x + y - z = 1$ e calculá-lo. (Sugestão: o plano é um conjunto fechado... depois utilizar o multiplicador de Lagrange.)

Exemplo. Vamos mostrar que a função $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ tem mínimo no quadrante de $\mathbb{R}^2$

$$Q = \{(x,y) |\, x > 0.\ y > 0\}$$

e calculá-lo. Note-se que o corolário do teorema de Weierstrass não é directamente aplicável, porque Q não é fechado. Mas não é difícil adaptar o argumento do corolário:

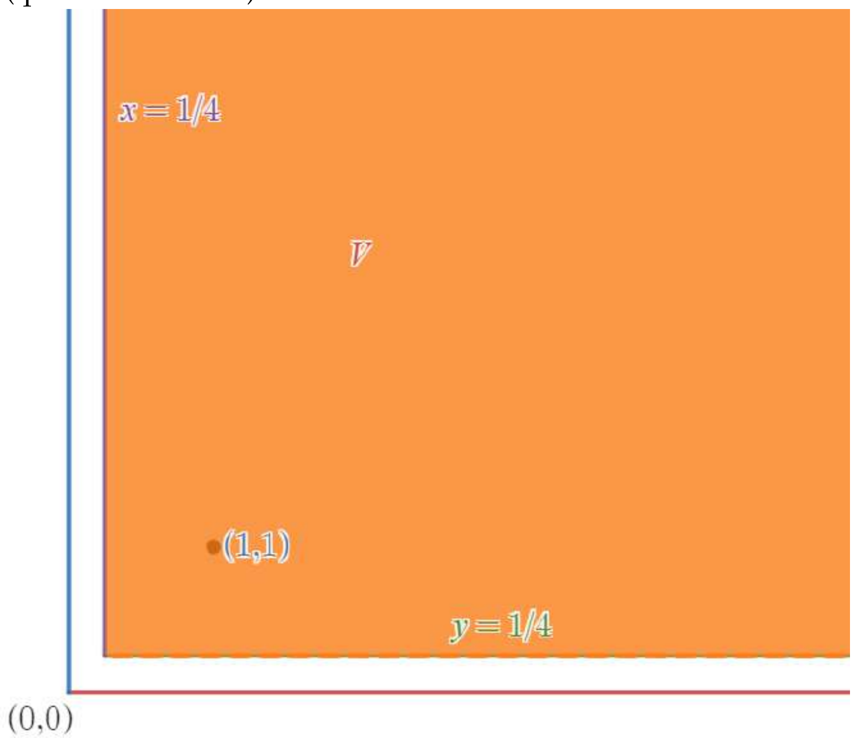
Comecemos por observar que f tem um único ponto crítico: $(1,1)$, com $f(1,1) = 3$. Por outro lado, se $(x,y) \in Q$,

$$0 < x < \frac{1}{4} \ \text{ ou } \ 0 < y < \frac{1}{4} \Longrightarrow f(x,y) > 4; \qquad (i)$$

e na parte do domínio

$$V = \{(x,y) \mid x \geq \frac{1}{4}, \ y \geq \frac{1}{4}$$

(que é um fechado) tem-se



$$f(x,y) \geq \frac{1}{4}\max(x,y). \qquad (ii)$$

Utilizando a notação já introduzida acima, $\rho^2 \leq 2\max(|x|,|y|)^2$, de onde

$$\max(|x|,|y|) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\rho.$$

Deduz-se $f(x,y) \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\rho$. Portanto $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f|_V(x,y) = +\infty$. Pelo corolário e Weierstrass, $f|_V$ tem mínimo; devido a (i) esse é o mínimo em Q. É, portanto, atingido no único ponto crítico, com o valor 3.

Terminamos esta introdução com a resposta completa à questão seguinte: quando é que um polinómio homogéneo do 2º grau, com duas variáveis, tem a propriedade (i)?

Facto 18. *Dado o polinómio homogéneo do 2º grau $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ são equivalentes as condições*

(i) $\lim_{\rho\to\infty} P(x,y) = +\infty$

(ii) *Existe $\sigma > 0$ tal que, com $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,*

$$P(x,y) \ \geq \ \sigma\rho^2 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(iii) *$b^2 < 4ac$ e $a > 0$.*

Demonstração: $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Observemos que para qualquer número $\varepsilon > 0$

$$|bxy| = |b\varepsilon x \frac{1}{\varepsilon} y| \leq \frac{|b|\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{|b|y^2}{2\varepsilon^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

de onde, para todos os valores de x e y,

$$ax^2 + bxy + cy^2 \geq (a - \frac{|b|\varepsilon^2}{2})x^2 + (c - \frac{|b|}{2\varepsilon^2})y^2.$$

Assim, sendo

$$\sigma = \min\{a - \frac{|b|\varepsilon^2}{2},\ c - \frac{|b|}{2\varepsilon^2}\}$$

temos

$$ax^2 + bxy + cy^2 \geq \sigma(x^2 + y^2) = \sigma\rho^2$$

e resta ver que podemos tomar $\sigma > 0$ com uma escolha conveniente de ε. Se $b = 0$ isto é óbvio porque $\sigma = a$ ou c. Se $b \neq 0$, temos por hipótese $\frac{|b|}{2c} < \frac{2a}{|b|}$ e basta tomar ε tal que

$$\frac{|b|}{2c} < \varepsilon^2 < \frac{2a}{|b|}.$$

para garantir que $\sigma > 0$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: é óbvio.

$(i) \Longrightarrow (iii)$: Sob a hipótese (i) tem-se $a > 0$, porque $a \leq 0$ implica $P(x, 0) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, o que é incompatível com (i). Por um argumento análogo, tem-se $c > 0$. Mostremos que também $b^2 < 4ac$. Mais uma vez o argumento é por contradição. Se fosse $b^2 = 4ac$ ter-se-ia $P(x,y) = ax^2 \pm 2\sqrt{ac}xy + cy^2 = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y)^2$, pelo que $P(x,y) = 0$ em todos os pontos da recta $\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y = 0$, o que é incompatível com (i). Se fosse $b^2 > 4ac$ teríamos, designando $d = b^2 - 4ac$,

$$P(x,y) = (\sqrt{a}x + \frac{by}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{d}{4a}y^2 =$$

$$= (\sqrt{a}x + \frac{b - \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y)(\sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y)$$

e então P anular-se-ia ao longo das rectas

$\sqrt{a}x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y = 0$ e $\sqrt{a}x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y = 0$, além de tomar valores negativos em dois dos quadrantes definidos por essas rectas, nova contradição com (i).

Exemplo: Para que valores de A se pode garantir que $f(x,y) = x^2 - 4xy + Ay^2 + 10x - 9y + 11\cos(x+y)$ tem mínimo absoluto?

A resposta baseia-se fortemente no comportamento da "parcela dominante" de grau 2, isto é, do polinómio $P(x,y) = x^2 - 4xy + Ay^2$. Se este polinómio satisfizer a condição (iii), isto é, se $A > 4$, sabemos que existe $\sigma > 0$ tal que

$$f(x,y) > \sigma\rho^2 - 19\rho - 11$$

justificando que f satisfaz (i). O mínimo de f pode então ser calculado através da obtenção dos pontos críticos, escolhendo aquele onde f toma o menor valor. A obtenção dos pontos críticos pode ser feita, eventualmente, por métodos numéricos ou com recurso a uma máquina.

Observação importante: Os polinómios homogéneos do 2º grau que temos estado a estudar são precisamente as "formas quadráticas" que conhecemos da Álgebra Linear, no caso particular de $\mathbb{R}^2$. Considerando a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

imediatamente se reconhece que a expressão $ax^2 + bxy + cy^2$ coincide com

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente, com

$$A\vec{u} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vamos ainda dar um exemplo em que os "termos dominantes" da função têm graus diferentes mas, ainda assim, não é difícil dar condições para a existência de mínimo.

Exemplo: Para que valores de A se tem

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} 2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 + x - 5y^3 = +\infty \ ?$$

A ideia aqui é absorver o termo de sinal indefinido $3xy^2$ pelos dois primeiros, visto que então os restantes termos terão crescimento de ordem inferior e não perturbarão o limite. Usando mais uma vez a desigualdade elementar $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, temos, para qualquer ε

$$3|x|y^2 \leq \frac{3\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{3y^4}{2\varepsilon^2}$$

de onde

$$2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 \geq (2 - \frac{3\varepsilon^2}{2})x^2 + (A - \frac{3}{2\varepsilon^2})y^4$$

Para obtermos limite $+\infty$, os dois coeficientes da última expressão devem ser positivos, pelo que a escolha de ε deve satisfazer

$$\frac{3}{2A} < \varepsilon^2 < \frac{4}{3}$$

de onde $A > \frac{9}{8}$. Para estes valores de A temos

$$2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 + x - 5y^3 \geq \sigma_1 x^2 + x + \sigma_2 y^4 - 5y^3$$

com $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, onde no 2º membro está a soma de duas funções de uma única variável com limite $+\infty$, o que termina a resposta à questão.

Observe-se que, em alternativa, poderíamos ter aplicado à função $2x^2 + Ay^4 + 3xy^2$ a mudança de variável $y^2 = z$, que a transforma numa forma quadrática em x e z, aplicando-se então o Facto 18.

Exercício: Mostrar que, dada qualquer constante $a > 0$, a função

$$x^4 + ay^2 + xy$$

tem um valor mínimo absoluto em $\mathbb{R}^2$ e determiná-lo.

8.2 COMPARAÇÃO DE FUNÇÕES HOMOGÉNEAS

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, onde $D = \mathbb{R}^n$ ou $D = \mathbb{R}^n \setminus 0$ diz-se homogénea de grau $\alpha(\in \mathbb{R})$ se $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)\ \forall x \in D,\ \ \lambda > 0$.

Exemplos: Os polinómios homogéneos do 2º grau estudados na secção anterior são funções homogéneas de grau 2. O polinómio $x^4 - 5xy^3 - 2y^4$ é uma função homogénea de grau 4. A função

$$\frac{x^4 - 5xy^3 - 2y^4}{x^2 + y^2}$$

é homogénea de grau 2. A função $\sqrt{|x| + |y| + 2|z|}$ é homogénea de grau $1/2$. As aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ são homogéneas de grau 1.

Facto 19. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, contínua e homogénea de grau α. Então valem as estimativas*

$$m\|P\|^\alpha \leq f(P) \leq M\|P\|^\alpha \quad \forall P \in D$$

onde $m = \min\{f(P)|\ \|P\| = 1\}$ e $M = \max\{f(P)|\ \|P\| = 1\}$

Demonstração: Como a fronteira $S = \{P|\ \|P\| = 1\}$ da bola unitária é um compacto de $\mathbb{R}^n$ e f é contínua, o mínimo m e o máximo M de f em S existem. Consideremos a desigualdade da esquerda. Por definição de mínimo temos

$$\|P\| = 1 \Longrightarrow m \leq f(P).$$

Portanto, $\forall P \neq 0$,

$$m \leq f(\frac{P}{\|P\|}) = \frac{1}{\|P\|^\alpha} f(P)$$

de onde resulta imediatamente a desigualdade $m\|P\|^\alpha \leq f(P)$.

Com um argumento análogo demonstra-se a outra desigualdade.

Observe-se que, se $\alpha > 0$, $D = \mathbb{R}^n$, então as desigualdades são mesmo igualdades para $P = 0$ (basta tomar limites quando $P \to 0$: pela continuidade de f obtém-se $f(0) = 0$).

O seguinte enunciado é consequência imediata do precedente mas vale a pena registá-lo:

Facto 20. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua e homogénea de grau $\alpha > 0$. Então $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$ se, e só se, $f(x) > 0\ \forall x \neq 0$.*

Exemplo: Determinar o valor mínimo de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^3 + 2xy^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}\rho^4, \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

e, como $| - 4x^3 + 2xy^2|$ é homogénea de grau 3, existe $M > 0$ tal que $\forall (x, y)$

$$| - 4x^3 + 2xy^2| \leq M\rho^3.$$

Assim,

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\rho^4 - M\rho^3$$

e concluímos que $\lim_{\rho\to\infty} f(x,y) = +\infty$. Pelo corolário de Weierstrass, f tem mínimo absoluto. O cálculo dos pontos críticos de f conduz a

$$(0,0),\ (3,0),\ (\frac{3-\sqrt{11}}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{11}-3}{2}}),\ (\frac{3-\sqrt{11}}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{11}-3}{2}}).$$

Facilmente se comprova que o valor mínimo é -27, atingido em $(3,0)$.

Seguidamente vamos generalizar a desigualdade $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ com o objectivo de compararmos termos de funções homogéneas de qualquer grau.

Facto 21. *(Desigualdade de Young) Dados números reais p, $q > 0$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

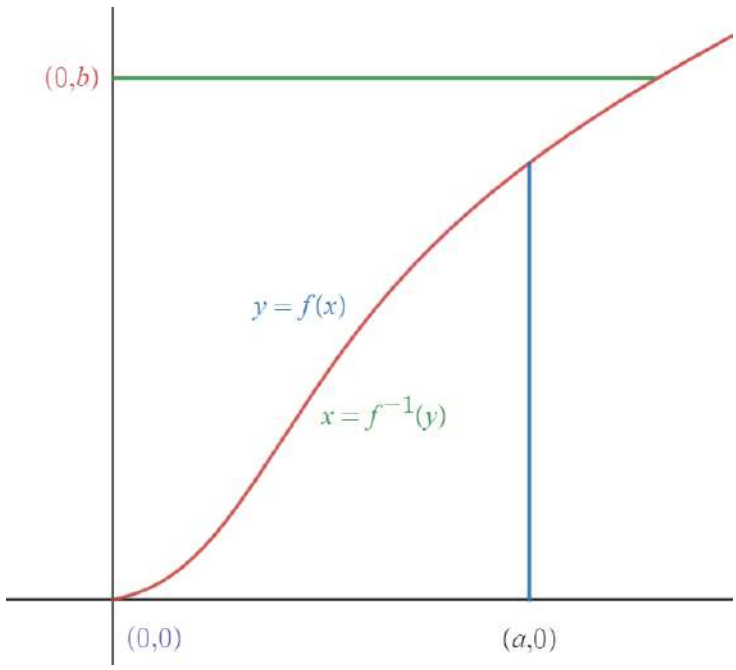
tem-se

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{Y}$$

Demonstração: É claro que basta demonstrar a desigualdade para a, $b > 0$. E na verdade vamos demonstrar um enunciado mais geral:

Facto 22. *Seja $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ uma função contínua, estritamente crescente e sobrejetiva. Então tem-se*

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(s)\,ds \quad \forall a, b > 0. \tag{Y2}$$



Demonstração: Usaremos um argumento geométrico (que não é difícil de formalizar). Consideremos a curva no 1º quadrante que é o gráfico de f; a mesma curva é gráfico da função inversa f^{-1}, bastando para isso inverter o papel habitual dos eixos coordenados. Fixados nos eixos os pontos de coordenadas a e b, ab representa a área de um rectângulo obviamente inferior à soma das áreas das duas regiões

$$\{(t,y)|\, 0 \leq t \leq a,\ \ 0 \leq y \leq f(t)\}$$

e

$$\{(x,s)|\, 0 \leq s \leq b,\ \ 0 \leq x \leq f^{-1}(s)\}.$$

Assim, fica demonstrada a desigualdade $(Y2)$.

Demonstração do Facto 21: Sendo p e q como no enunciado, definamos $f(t) = t^{p-1}$ para $t \geq 0$. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ é equivalente a $(p-1)(q-1) = 1$, tem-se $f^{-1}(s) = s^{q-1}$. O cálculo dos integrais que surgem em $(Y2)$ conduz imediatamente a (Y).

Exemplo: Para que valores de a podemos afirmar que $\lim_{\rho\to\infty}(|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 + x^2 - 2y^2 + 3xy + 20y) = +\infty$?

Por argumentos já utilizados, a resposta depende do comportamento dos termos de mais alto grau, isto é, da função homogénea de grau 3 $|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3$. Se estiver garantida uma desigualdade do tipo

$$|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 \geq k\rho^3 \quad \forall x,\, y \tag{$*$}$$

com $k > 0$, a resposta será positiva. Para obter uma tal desigualdade utilizemos Young com $p = 3$, $q = 3/2$ e a introdução de um parâmetro:

$$|axy^2| = |a\varepsilon x \frac{1}{\varepsilon} y^2| \leq \frac{|a|\varepsilon^3|x|^3}{3} + \frac{|a|2|y|^3}{3\varepsilon^{(3/2)}}.$$

Assim,

$$|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 \geq (1 - \frac{|a|\varepsilon^3}{3})|x|^3 + (4 - \frac{|a|2}{3\varepsilon^{(3/2)}})|y|^3. \tag{$**$}$$

Em virtude do Facto 19, existe $m > 0$ tal que

$$|x|^3 + |y|^3 \geq m\rho^3 \quad \forall x,\, y.$$

Então, para obter (*), basta, ter em conta (**) e exigir

$$1 - \frac{|a|\varepsilon^3}{3} > 0, \quad 4 - \frac{2|a|}{3\varepsilon^{(3/2)}} > 0.$$

É fácil ver que um tal ε deve satisfazer

$$\varepsilon^3 > \frac{|a|^2}{36}, \quad \varepsilon^3 < \frac{3}{|a|}$$

de onde $|a|^3 < 108$, isto é, $|a| < \sqrt[3]{108}$ (aproximadamente 4.7622).

Vamos agora dar uma ligeira generalização do Facto 19 que tem interesse prático na obtenção de desigualdades de comparação.

Facto 23. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínuas e homogéneas de grau $\alpha > 0$. Suponha-se que*

$$g(P) > 0 \quad \forall P \neq 0 \tag{+}$$

Então valem as estimativas

$$m\, g(P) \leq f(P) \leq M\, g(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}^n$$

onde $m = \min\{f(P)|\ g(P) = 1\}$ e $M = \max\{f(P)|\ g(P) = 1\}$

Demonstração: A demonstração faz-se imitando a do Facto 19, com a seguinte adaptação simples: $\forall P \neq 0$ tem-se $g(\frac{P}{g(P)^{1/\alpha}}) = \frac{g(P)}{g(P)} = 1$ e portanto, considerando o significado de M:

$$f\Big(\frac{P}{g(P)^{1/\alpha}}\Big) = \frac{f(P)}{g(P)} \leq M.$$

Do mesmo modo se obtém a desigualdade relativa a m.

As conclusões anteriores podem ser enunciadas de modo um pouco diferente:

Facto 24. *Se f e g verificam as hipóteses do Facto anterior, e designando*

$$C = \{P|\ g(P) = 1\},$$

então, para todo o número real A tem-se a equivalência

$$f(P) \leq A g(P) \ \ \forall P \Longleftrightarrow \max f|_C \leq A$$

e do mesmo modo

$$f(P) \geq A g(P) \ \ \forall P \Longleftrightarrow \min f|_C \geq A.$$

Observação importante: Nas desigualdades do facto anterior a melhor informação obtém-se com os valores extremos $A = \max f|_C$ ou $A = \min f|_C$.

Exemplo: Para que valores de a se tem

$$\lim x^4 + 3y^4 + axy^3 - x^3 - 10x^2 = +\infty\,?$$

Como sabemos, a pergunta é equivalente a saber em que condições se tem

$$\lim x^4 + 3y^4 + axy^3 = +\infty$$

o que, por sua vez, é equivalente a saber em que condições se tem

$$x^4 + 3y^4 + axy^3 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

em virtude do Facto 20. Consideremos o número $M = \max\{xy^3|\ x^4 + 3y^4 = 1\}$. Este número calcula-se pelo método do multiplicador de Lagrange, que conduz ao sistema seguinte:

$$y^3 + 4\lambda x^3 = 0, \ \ 3xy^2 + 12\lambda y^3 = 0, \ \ x^4 + 3y^4 = 1.$$

Das duas primeiras equações resulta, depois de isolar num dos membros o termo com λ e dividir membro a membro

$$\frac{y}{x} = \frac{x^3}{y^3}$$

de onde, com $\frac{y}{x} = t$, $t = \pm 1$, $y = \pm x$, $x^4 = \frac{1}{4}$. Logo, $M = \frac{1}{4}$.

Com cálculo análogo, ou simplesmente atendendo a que $-xy^3 = (-x)y^3$, encontramos também $\max\{-xy^3 | \, x^4 + 3y^4 = 1\} = \frac{1}{4}$. Conclui-se que $\forall (x, y)$

$$|axy^3| \leq \frac{|a|}{4}(x^4 + 3y^4).$$

Podemos então afirmar que

$$x^4 + 3y^4 + axy^3 \geq (1 - \frac{|a|}{4})(x^4 + 3y^4) > 0$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $|a| < 4$. São estes os valores de a que se procurava.

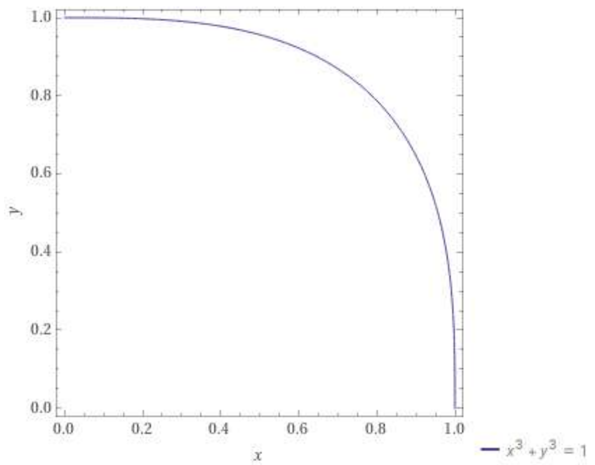
Exemplo: Calcular o valor mínimo de $\frac{xy^2 - y^3}{x^3 + y^3}$ em $Q \setminus (0, 0)$ on de $Q = \{(x, y) | \, x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

Observemos que a existência do mínimo pode parecer à primeira vista problemática porque o domínio da função não é fechado nem limitado; mas, observando que a função é constante ao longo de cada semi-recta que parte da origem (por ser cociente de homogéneas do mesmo grau) imediatamente se conclui que o mínimo pedido coincide com o mínimo da mesma função no compacto (ver a figura)

$$K = \{(x, y) | \, x \geq 0, \ y \geq 0, x^3 + y^3 = 1\}$$

ou ainda, com o mínimo de $xy^2 - y^3$ em K; ou, finalmente, tal mínimo é o maior número m tal que $\frac{xy^2 - y^3}{x^3 + y^3} \geq m \ \forall (x, y) \in Q \setminus (0, 0)$; ou ainda, o maior número tal que

$$xy^2 - y^3 \geq m(x^3 + y^3) \quad \forall (x, y) \in Q \setminus (0, 0).$$



Escolhamos esta última caracterização: então m é tal que a função $xy^2 - y^3 - m(x^3 + y^3)$ atinge mínimo absoluto em $Q \setminus (0, 0)$ (com o valor 0). Se o mínimo é atingido num ponto interior ao 1º quadrante Q, esse ponto será crítico e portanto verificará o sistema

$$y^2 - 3mx^2 = 0, \ \ 2xy - 3y^2 = 3my^2.$$

Pondo $\frac{y}{x} = t$ obtemos para t o valor da raiz de $t^3 + 3t - 2 = 0$ e a partir daí podemos calcular um tal ponto crítico, que podemos "normalizar" introduzindo a condição que define K: $x^3 + y^3 = 1$. Mas não vale a pena completar o cálculo, porque esse ponto (x, y), tendo duas coordenadas positivas, vai conduzir a um valor de $xy^2 - y^3 \geq -y^3 > -1$, porque $y < 1$ (já que $x > 0$). Mas como $xy^2 - y^3$ toma os valores 1 e -1 nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente, os quais também petencem a K, na verdade o mínimo procurado é -1, não podendo ser atingido no interior.

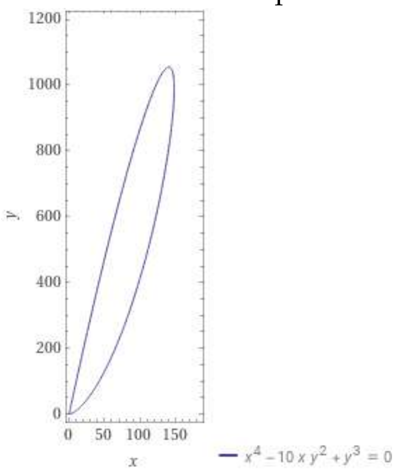
Exemplo: Mostrar que $C = \{(x, y) | x^4 + y^3 = 10xy^2,\ y \geq 0, \}$ é um compacto.

Seja $f(x, y) = x^4 + y^3 - 10xy^2$. Então, C é o conjunto dos pontos (x, y) que verificam simultaneamente as condições

$$f(x, y) = 0, \quad y \geq 0$$

Como f é obviamente uma função contínua, é imediato reconhecer que se trata de um conjunto fechado, a partir da caracterização de conjunto fechado em termos de sucessões (dada qualquer sucessão de elementos de C que tem limite, então o limite pertence a C).

A parte mais interessante do problema consiste em mostrar que se trata de um limitado, isto é, que as coordenadas de pontos de C têm um minorante e um majorante.



Utilizemos Young com $p = 3$, $q = 3/2$,

$$10xy^2 \leq \frac{10\varepsilon^3 x^3}{3} + \frac{20y^3}{3\varepsilon^{(3/2)}}$$

e, para fixar ideias, escolhamos $\varepsilon = 4$:

$$10xy^2 \leq \frac{640x^3}{3} + \frac{5y^3}{6}$$

o que permite a minoração vantajosa

$$x^4 + y^3 - 10xy^2 \geq x^4 - \frac{640x^3}{3} + \frac{y^3}{6}.$$

Logo, se $(x, y) \in C$,

$$x^4 - \frac{640x^3}{3} + \frac{y^3}{6} \leq 0.$$

Como $y \geq 0$, vem $x^4 \leq \frac{640x^3}{3}$, de onde

$$|x| \leq \frac{640}{3} < 214.$$

Finalmente, $y^3 \leq 1280x^3 - 6x^4$ e, como x pecorre um intervalo limitado, y tem um majorante positivo (grosseiramente, o valor máximo da função contínua $(1280x^3 - 6x^4)^{(1/3)}$ em $[-214, 214]$, que é $640\sqrt[3]{5}$).

Observamos que as estimativas efectuadas são as mesmas que serviriam para demonstrar que (supondo f restringida ao semiplano $y \geq 0$): $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$.

Exercício: Para que valores de A se pode afirmar que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} (x^6 + Ay^6 - 5x^2y^4) = +\infty \ \ ?$$

8.3 AINDA O CÁLCULO DAS CONSTANTES m E M; VALORES PRÓPRIOS

Vamos dar outro argumento para o cálculo dos números m e M referido no Facto 23. Consideremos o caso de m. Este número tem a propriedade seguinte:

(i) $f(x) - mg(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tal que $f(x_0) - mg(x_0) = 0$. (E, pela homogeneidade, também os pontos tx_0, com $t > 0$, verificam a mesma igualdade.)

Noutros termos: $f(x) - mg(x)$ atinge em x_0 um mínimo absoluto. Assim, podemos inferir

Facto 25. *Se, no Facto 23, f e g são de classe C^1, então a função $x \mapsto f(x) - mg(x)$ tem um ponto crítico não nulo, isto é, existe $x_0 \neq 0$ tal que*

$$\nabla(f - mg)|_{x=x_0} = 0.$$

É claro que o mesmo resultado vale para M, pois o raciocínio repete-se com a função $Mg(x) - f(x)$. Assim, podemos afirmar:

Facto 26. *Nas condições do Facto 23, com f e g de classe C^1, a equação vectorial*

$$\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0 \tag{λ}$$

tem, para $\lambda = m$, pelo menos uma solução $x \neq 0$; e o mesmo vale para $\lambda = M$.

Este enunciado pode ser visto como um argumento alternativo ao método do multiplicador de Lagrange para o cálculo do extremo condicionado que envolve o par de funções f, g. No contexto desta discussão será útil o seguinte:

Facto 27. *(teorema de Euler para as funções homogéneas) Se f é de classe C^1 e homogénea de grau α, então*

$$\nabla f(x) \cdot x \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \right) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, definamos $\varphi(t) = f(tx)$ para $t \geq 0$. Então, pela regra da cadeia, $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Com $t = 1$ obtém-se o resultado.

Resulta que:

Facto 28. *Se a equação* (λ) *tem solução* $x \neq 0$, *então* λ *é valor de* f *em* C *(ver Facto 24).*

Demonstração: Com efeito, podemos supôr que $g(x) = 1$; fazendo o produto interno de ambos os membros de (λ) com x vem $\alpha f(x) = \lambda \alpha g(x)$.

Observação: Com a notação anterior, suponhamos em particular que $m < 0 < M$. Então facilmente se conclui que $M'g(P) - f(P) > 0$ e $f(P) - m'g(P) > 0 \; \forall P \neq 0$ desde que $M' > M$ e $m' < m$. Assim, resulta

$$\lim_{\|P\| \to \infty} g(P) - \alpha f(P) = +\infty$$

se (na verdade, se e só se, como não é difícil de verificar) $\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{M}$. Os números $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{M}$ são, como é óbvio, o menor e o maior valor de μ tal que

$$\nabla g(x) - \mu \nabla f(x) = 0$$

admite soluções $x \neq 0$.

Exemplo: O exemplo que surge a seguir à demonstração da desigualdade de Young pode ser tratado mais directamente com base na observação precedente: com $f(x, y) = xy^2$ e $g(x, y) = |x|^3 + 4|y|^3$, basta estudar a existência de pontos críticos não triviais de $|x|^3 + 4|y|^3 - \mu xy^2$. Somos conduzidos ao sistema

$$3|x|x - \mu y^2 = 0, \quad 12|y|y - 2\mu xy = 0.$$

Conclui-se que existem soluções $(x, y) \neq (0, 0)$ se $\mu = \pm 3\sqrt[3]{4}$. Logo, $|x|^3 + 4|y|^3 - \mu xy^2$ tende para $+\infty$ quando $\|(x, y)\| \to \infty$ se $|\mu| < 3\sqrt[3]{4}$.

É de grande interesse reconsiderar aqui o caso em que f e g são formas quadráticas (portanto, um caso especial de funções homogéneas de grau 2), dadas por matrizes simétricas A e B:

$$f(x) = Ax \cdot x, \quad g(x) = Bx \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{$*$}$$

Notemos que, se $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$, as parcelas de f onde intervém uma dada variável x_k são

$$x_k \Big(\sum_{i \neq k}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{j \neq k}^{n} a_{kj} x_j \Big) + a_{kk} x_k^2.$$

Logo, em cada ponto genérico x,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i, \quad k = 1, \cdots, n$$

que se pode condensar em notação vetorial como

$$\nabla f(x) = 2Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Facto 29. *Sejam* A, B *matrizes simétricas, sendo* B *definida positiva, e* f, g *as formas quadráticas que elas respectivamente definem, de acordo com (*). Então o sistema linear*

$$Ax - \lambda Bx = 0$$

tem soluções $x \neq 0$ *para* $\lambda = m$ *ou* $\lambda = M$*, sendo* m *(respect.* M*) o mínimo (respect o máximo) de* $f(x)$ *sob a condição* $g(x) = 1$*. Se* λ *é tal que aquele sistema linear tem soluções* $\neq 0$*, então* $m \leq \lambda \leq M$*.*

Merece referência especial o caso em que

$$g(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

em que $\nabla g(x) = 2x$ (ou, equivalentemente, $B = I$ (matriz identidade $n \times n$). O enunciado anterior pode então reescrever-se:

Facto 30. *Seja* A *uma matriz simétrica e* f *a forma quadrática que ela define. Então o mínimo* m *(e o máximo* M*) de* $f(x)$ *sob a condição* $\|x\| = 1$ *são valores próprios de* A*, isto é: para* $\lambda = m$ *ou* $\lambda = M$ *o sistema linear*

$$Ax - \lambda x = 0$$

tem soluções $x \neq 0$ *Se* λ *é qualquer outro valor próprio de* A*, então* $m \leq \lambda \leq M$*.*

8.4 FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO COROLÁRIO DO TEOREMA DE WEIERSTRASS

Facilmente se reconhece que o corolário de Weierstrass (Facto 17) admite a seguinte formulação mais geral, com a mesma demonstração:

Facto 31. *Sejam* F *um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : F \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com valores reais, tal que existe* $x_0 \in F$ *de modo que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) > f(x_0).$$

Então f *tem um valor mínimo em* F*, isto é, existe* $x_1 \in F$ *tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Do mesmo modo, temos a versão simétrica

Facto 32. *Sejam* F *um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : F \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com valores reais, tal que existe* $x_0 \in F$ *de modo que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) < f(x_0). \qquad (i)$$

Então f *tem um valor máximo em* F*, isto é, existe* $x_1 \in F$ *tais que*

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Exemplo. A função $f(x,y) = (x^4 + y^4)e^{-x^2+xy-y^2}$ só toma valores positivos e tem-se

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0.$$

De facto, com $\rho = \|(x,y)\|$, temos $-x^2 + xy - y^2 \leq -\frac{\rho^2}{2}$ e $(x^4 + y^4) \leq \rho^4$ $\forall (x,y)$; pelo que

$$0 \leq f(x,y) \leq \rho^4 e^{-\frac{\rho^2}{2}}$$

e sabemos que $\lim_{\rho \to \infty} \rho^4 e^{-\frac{\rho^2}{2}} = 0$. Resulta que f tem um máximo absoluto em $\mathbb{R}^2$. Para o calcular, basta procurar os pontos críticos de f. Um cálculo simples mostra que eles são $(0,0)$, $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, e que o máximo é atingido nos dois últimos.

8.5 FORMAS QUADRÁTICAS – CRITÉRIO DE SYLVESTER

Nesta secção vamos enunciar e demonstrar uma caracterização cómoda das formas quadráticas definidas positivas. Para isso, começaremos por recordar definições e estabelecer algumas propriedades gerais.

Uma *forma quadrática* em $\mathbb{R}^n$ é um polinómio homogéneo de grau 2 nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$, isto é, uma função do tipo

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

onde os a_{ij} são números reais que supomos, sem perda de generalidade, formar as entradas de uma matriz simétrica $A = [a_{ij}]$: $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \cdots, n$. É claro que uma tal função pode representar-se matricialmente assim:

$$f(x) = x^t A x$$

onde x é o vector coluna com coordenadas x_i e x^t é o seu transposto, ou seja o vector linha com as mesmas componentes. Podemos ainda escrever

$$f(x) = Ax \cdot x$$

usando a operação $\cdot$ (produto interno usual).

A forma quadrática f (ou a matriz simétrica A que a define) diz-se *definida positiva* (respectivamente *semi-definida positiva*) se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \quad Ax \cdot x > 0 \quad (\text{respect } \ Ax \cdot x \geq 0).$$

Se A é semidefinida positiva, a aplicação bilinear de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$

$$b(x, y) = Ax \cdot y$$

tem as propriedades de um produto interno (a simetria resulta de que $Ax \cdot y = Ay \cdot x \ \forall x, y$, por causa da simetria de A) excepto que $b(x, x) = 0$ não implica $x = 0$. Mas esta propriedade não intervém na demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz, e portanto vale para b esta desigualdade:

$$|Ax \cdot y| \leq \sqrt{Ax \cdot x}\,\sqrt{Ay \cdot y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{CS}$$

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tipo $n \times n$, recordemos que os seus *menores principais* são os determinantes das matrizes quadradas

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Facto 33. *A matriz simétrica A de tipo $n \times n$ é definida positiva se, e só se, os seus n menores principais são positivos.*

Demonstração: O facto é evidente se $n = 1$ e foi demonstrado atrás se $n = 2$ (ver Facto 20 e Facto 18). Completaremos a demonstração por indução finita. A matriz A pode escrever-se em termos de quatro blocos

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ u^t & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $B = A_{n-1}$, u é um vector coluna $(n-1) \times 1$, u^t é o seu transposto, e $\lambda = a_{nn}$ é um número real. Admitamos que os n menores principais de A são positivos e (em consequência da hipótese de indução) a matriz A_{n-1} é definida positiva.

Para cada vector x de $\mathbb{R}^n$, que decompomos na forma

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}$$

onde $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mu \in \mathbb{R}$, efectuemos a multiplicação por blocos

$$Ax = \begin{bmatrix} Bv + \mu u \\ u^t v + \lambda \mu \end{bmatrix}$$

e a partir dela o seguinte cálculo

$$Ax \cdot x = x^t Ax = v^t Bv + 2\mu\, u \cdot v + \lambda \mu^2. \qquad (a)$$

Em virtude de Cauchy-Schwarz, e introduzindo o factor $\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}$:

$$2|\mu\, u \cdot v| \leq \varepsilon^2 \|u\|^2 + \frac{\mu^2 \|v\|^2}{\varepsilon^2}.$$

Pela hipótese de indução, existe $m > 0$ tal que $v^t Bv \geq m\|v\|^2 \ \forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Combinando com a estimativa acima obtemos a minoração:

$$x^t Ax \geq (m - \varepsilon^2)\|v\|^2 + (\lambda - \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2})\mu^2.$$

Para sublinhar a dependência de A relativamente a λ passamos a escrever $A = A(\lambda)$.

Então, escolhendo ε suficientemente pequeno (por exemplo, $\varepsilon^2 = m/2$), podemos afirmar:

(i) Para λ suficientemente grande (por exemplo, $\lambda > \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2} = \frac{2\|u\|^2}{m}$) a matriz $A(\lambda)$ é definida positiva. Na verdade, por ser $\|x\|^2 = \|v\|^2 + \mu^2$,

$$x^t A(\lambda) x \geq \min(\frac{m}{2}, \lambda - \frac{2\|u\|^2}{m})\|x\|^2.$$

Por outro lado, é evidente (desenvolvendo pela última linha) que

(ii) O determinante de $A(\lambda)$ é dado por $\det A(\lambda) = \lambda \det B + K$ onde K é uma constante independente de λ.

Portanto existe λ_0 tal que $\det A(\lambda)$ é positivo, nulo ou negativo conforme $\lambda > \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda < \lambda_0$.

Para concluir a demonstração vamos agora mostrar que:

(iii) $A(\lambda)$ é definida positiva se, e só se, $\lambda > \lambda_0$.

Comecemos por observar que

(iv) Se $A(\lambda)$ é definida positiva se, o mesmo sucede com $A(\lambda_1)$ $\forall \lambda_1 > \lambda$; e existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(\lambda - \varepsilon)$ é definida positiva.

Demonstração de (iv): A primeira afirmação é trivial por causa de (a). Demonstramos a segunda por absurdo: se não existe um tal ε então, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{e} \quad x_k^t A(\lambda - \frac{1}{k})x_k \leq 0.$$

Como a fronteira da bola unitária é um compacto, podemos supôr (passando a uma sucessão) que x_k converge, digamos, $x_k \to x$. Como a função $(x, \lambda) \mapsto x^t A(\lambda)x$ é contínua em $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos, por passagem ao limite, $\|x\| = 1$ e $x^t A(\lambda)x \leq 0$, o que contradiz a hipótese de (iv).

Facilmente reconhecemos agora que o conjunto dos λ tais que $A(\lambda)$ é definida positiva é um intervalo da forma $]\bar{\lambda}, +\infty[$, onde necessariamente $\bar{\lambda} \geq 0$, já que $A(0)$ não é definida positiva. Além disso, concluímos que

$$x^t A(\bar{\lambda})x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

por passagem ao limite da desigualdade $x^t A(\lambda)x > 0$ (se $x \neq 0$) quando $\lambda \to \bar{\lambda}^+$. Em particular, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ com $\|x_0\| = 1$ e $x_0^t A(\bar{\lambda})x_0 = 0$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz (CS) implica então, com $x = x_0$ e $y = A(\bar{\lambda})x_0$,

$$\|A(\bar{\lambda})x_0\|^2 \leq (A(\bar{\lambda})x_0 \cdot x_0)\,(A(\bar{\lambda})^2 x_0 \cdot A(\bar{\lambda})x_0) = 0,$$

de onde $A(\bar{\lambda})x_0 = 0$. Já que $x_0 \neq 0$, conclui-se que $\det A(\bar{\lambda}) = 0$. Por conseguinte, $\bar{\lambda} = \lambda_0$, o que termina a demonstração da afirmação (iii).

9

ALGUNS OBJETOS MATEMÁTICOS MENOS COMUNS

9.1 DENSIDADE DOS ÂNGULOS INTEIROS NO CÍRCULO UNITÁRIO

Definição 1: Recordemos que, se $A \subset B$ são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, dizemos que A é denso em B se todo o elemento de B é limite de uma sucessão de elementos de A, isto é: $\forall b \in B$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ tal que $\|a - b\| < \varepsilon$.

Sabemos, por exemplo, que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$; que uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ privada de um diâmetro é densa na correspondente bola fechada, etc.

Vamos trabalhar com vectores de $\mathbb{R}^2$, que por vezes serão encarados como números complexos. Assim, não distinguiremos entre (a, b) e $a + ib$. Particularmente importantes no que segue são os vectores unitários, isto é, os números

$$u_t = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos estes elementos (a circunferência unitária centrada na origem) será representdo por S. A vantagem de olhar os vectores como números complexos é que podemos então multiplicá-los. Por outro lado, norma (euclidiana) de vector e módulo de número são o mesmo. Recordemos que

$$u_t u_s = u_{t+s}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$u_t^k = u_{kt}, \quad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

O objectivo desta nota é demonstrar os seguintes factos, que estão relacionados entre si.

Teorema 1. *O conjunto* $\{(\cos n, \sin n) | n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* S.

Teorema 2. *O conjunto* $\{\sin n | n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* $[-1, 1]$.

Na verdade, é fácil reconhecer que o teorema 2 é uma consequência simples do teorema 1.

Vamos então provar o teorema 1. Comecemos por efectuar cálculos simples: para quaisquer t, s

$$\|u_t - u_s\|^2 = 2 - 2\cos(t - s) \qquad (a)$$

$$\|u_{t-s} - (1, 0)\|^2 = |u_{t-s} - 1|^2 = 2 - 2\cos(t - s) \qquad (b)$$

Para verificar (a) basta observar que $(\cos t - \cos s)^2 + (\sin t - \sin s)^2 = 2 - 2(\cos t \cos s + \sin t \sin s)$. A verificação de (b) é ainda mais directa.

Consideremos então o conjunto $A = \{(\cos n, \sin n) | n \in \mathbb{Z}\}$. Trata-se do conjunto de termos de uma sucessão limitada; portanto há uma subsucessão convergente. E como a aplicação $n \mapsto (\cos n, \sin n)$ é injectiva, concluimos que $\forall \varepsilon > 0$ existem $m \neq n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon$$

ou, em virtude de (a), $2 - 2\cos(m-n) < \varepsilon^2$. Utilizando (b) vemos que

$$\|u_{m-n} - (1,0)\| < \varepsilon. \tag{c}$$

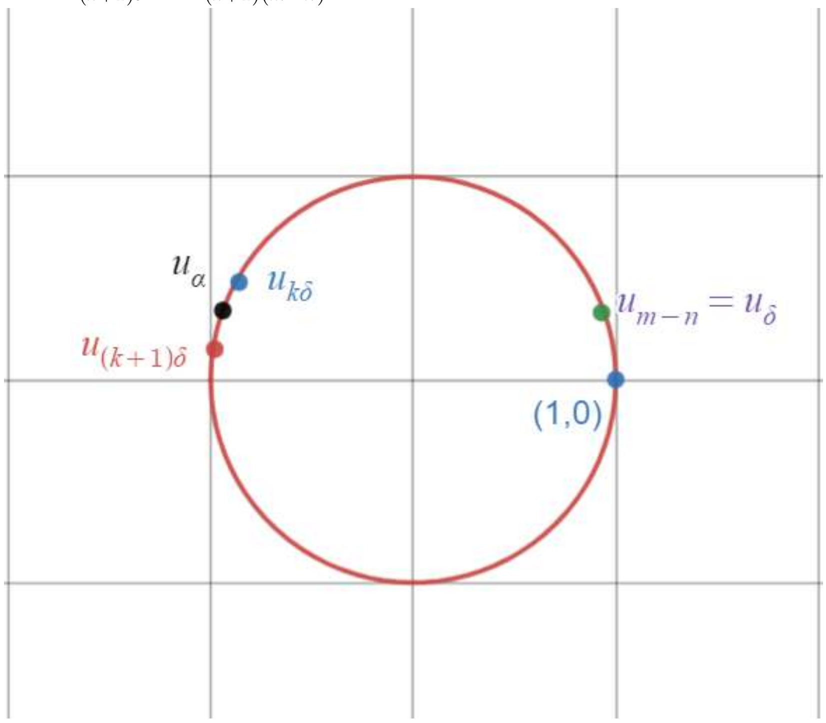
Seja agora u_α um ponto arbitrário de S, com $0 < \alpha < 2\pi$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, em particular $\varepsilon < \|u_\alpha - (1,0)\|$ e supondo, para fixar ideias, que em (c) se tem $u_{m-n} = u_\delta$ com $0 < \delta < 2\pi$, então $\delta < \alpha$; escolhamos o inteiro k tal que $k\delta \leq \alpha < (k+1)\delta$. Resulta que

$$u_\delta^k u_{m-n} = u_{(k+1)\delta}$$

e

$$\|u_\alpha - u_{(k+1)\delta}\|^2 = 2 - 2\cos(\alpha - (k+1)\delta) \leq 2 - 2\cos\delta = \|u_{m-n} - (1,0)\|^2 \leq \epsilon^2.$$

Como $u_{(k+1)\delta} = u_{(k+1)(m-n)} \in A$, a demonstração fica concluída.



Notas: 1) a demonstração do teorema 2 pode fazer-se também directamente com base no seguinte facto: *Se a é um número irracional, o conjunto dos números $m + na$, com m, $n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Não é difícil encontrar na internet demonstrações desta afirmação, que não são complicadas. Também se encontram demonstrações da irracionalidade de π, mas estas são mais elaboradas.

2) É fácil verificar, examinando a demonstração, que nos teoremas 1 e 2 $\mathbb{Z}$ pode ser substituído por $\mathbb{N}$.

3) Exercício: utilizando o facto (não trivial) de que o número π é transcendente, provar que o conjunto
$\{(\cos\sqrt{2}n, \sin\sqrt{2}n) | n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em S.

4) Exercício fácil: o conjunto
$\{z \in \mathbb{C} |\, \exists n \in \mathbb{N}\ z^n = 1\}$
é denso em S.

9.2 FUNÇÕES DE DIRICHLET E DE THOMAE

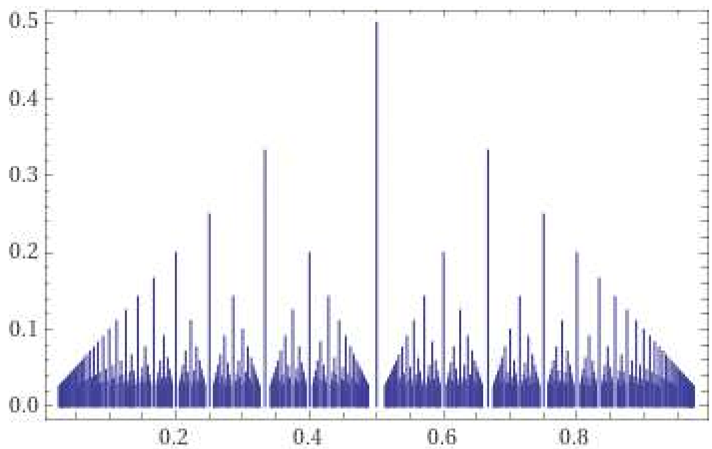
É bem conhecida a *função de Dirichlet*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

como exemplo de função limitada mas descontínua em todos os pontos do seu domínio.

É talvez mais interessante a seguinte variação em torno desta ideia, que conduz à *função de Thomae* $T : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ onde } 0 < p < q \in \mathbb{N} \text{ são primos entre si} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$



A função T é contínua nos pontos irracionais e também nos extremos do intervalo, e descontínua em todos os outros pontos. Demonstremos esta afirmação.

Seja x irracional em $[0,1]$ e tomemos uma sucessão de pontos do intervalo $x_n \to x$. Como $T(x_i) = 0$ sempre que x_i é irracional, basta considerar o caso em que (pelo menos para uma subsucessão, ainda representada pelo mesmo símbolo) se tem $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ com $0 < p_n < q_n$ com p_n, q_n primos entre si. Afirmamos então que $q_n \to \infty$, o que provará que $T(x_n) \to 0$, como se pretende. Se tal não se verifica, existe $M > 0$ tal que $p_n \leq M$ para uma infinidade de valores de n e, novamente passando a uma subsucessão (sempre representada pelo mesmo símbolo) podemos supor que $p_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Então os p_n são em número finito e, já que $p_n < q_n$, as fracções x_n assumem apenas um número finito de valores. Logo, $\lim x_n$ tem de ser um destes valores, contradizendo o facto de o limite ser o irracional x.

Uma pequena modificação do argumento prova também a continuidade para $x = 0$ ou $x = 1$.

Se $x = \frac{p}{q}$ com $0 < p < q \in \mathbb{N}$ é óbvio que T é descontínua em x, porque podemos tomar uma sucessão $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com limite igual a x.

9.3 PROPRIEDADES DE INTEGRABILIDADE

A teoria de integração que conhecemos neste momento é a do integral de Riemann. Recordemos que afirmar que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem integral (no sentido dessa teoria), o qual é um número representado por $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$, significa que

$$S(P_n) \to \int_a^b f$$

para *qualquer* sucessão $S(P_n)$ de somas de Riemann para f determinadas por partições P_n onde $|P_n| \to 0$.

Recordemos que, para este efeito, uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0,\ 1,\ \cdots k-1)$ com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$$

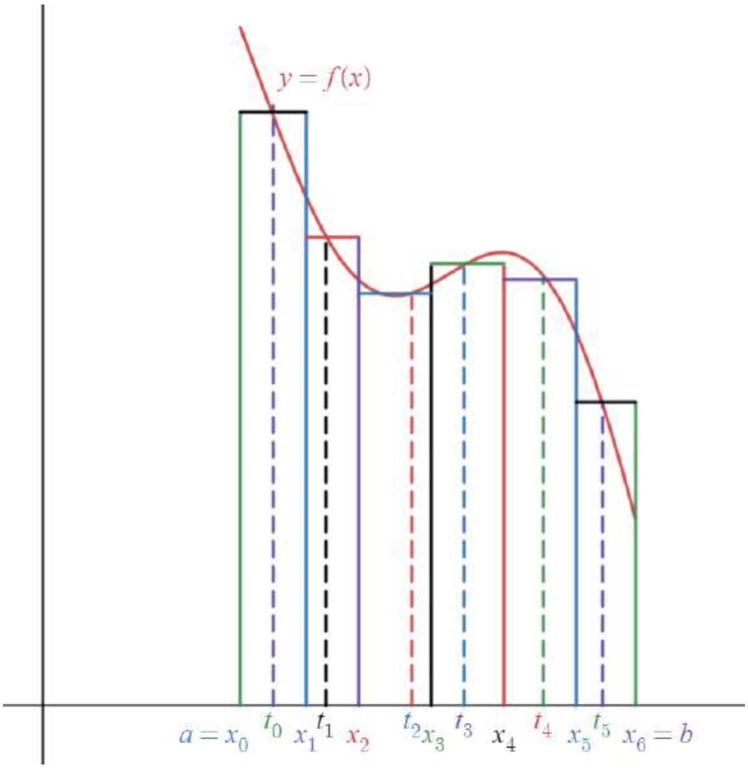
onde foi escolhida uma sequência de elementos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$; que a soma de Riemann associada a P é o número

$$S(P) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

e que designamos por $|P|$ o número $\max_{0 \le i \le k-1}(x_{i+1} - x_i)$.

Deve ser sublinhado que esta definição envolve uma condição muito forte, ao exigir que *todas* as sucessões de somas de Riemann nas condições indicadas tenham limite (necessariamente o mesmo); e que a definição só tem sentido quando aplicada a funções *limitadas* no intervalo considerado (para uma função ilimitada, facilmente se constroem sucessões de somas de Riemann que não têm limite finito).

A figura abaixo recorda o significado geométrico das somas de Riemann como aproximações à área de uma figura determinada pelo gráfico de f, no caso em que $f \geq 0$.



Exemplo: A função de Dirichlet não tem integral de Riemann no intervalo $[0,1]$. Com efeito, é trivial construir uma sucessão de somas $S(P_n)$ com o valor constante 0 e outra, $S(P'_n)$, com o valor constante 1 (e com $|P_n| \to 0$ e $|P'_n| \to 0$).

Exemplo: A função de Thomae tem integral de Riemann em $[0,1]$, sendo $\int_0^1 T = 0$. Vamos dar uma prova directa deste facto.

Seja $S(P_n)$ uma sucessão de somas de Riemann para T em $[0,1]$ com $|P_n| \to 0$. Mostraremos que $S(P_n) \to 0$. Podemos escrever

$$S(P_n) = \sum_{i=0}^{k_n-1} T(t_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$$

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, pelo argumento usado na secção anterior, o conjunto

$$F = \{y \in [0,1] \,|\, T(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

é finito, digamos: tem N_ε elementos. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, se tem $|P_n| < \frac{\varepsilon}{4N_\varepsilon}$. Decomponhamos $S(P_n)$ como

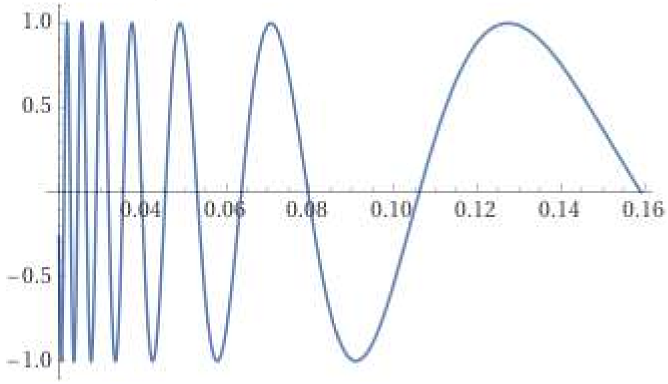
$$S(P_n) = A_n + B_n$$

onde A_n é a soma das parcelas em que os $t_i^{(n)}$ pertencem a F e B_n é a soma das restantes. Como $T \leq 1$ e $\sum_{i=0}^{k_n-1}(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) = 1$ tem-se

$$A_n \leq 2N_\varepsilon|S_n|, \quad B_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclui-se que, para $n \geq p$, $S(P_n) \leq \varepsilon$, que exprime o que se pretendia.

Exemplo São interessantes também as funções cujo comportamento exibe oscilações rápidas numa parte do domínio. O gráfico junto representa o gráfico de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ em $]0, 2\pi]$. É uma função habitualmente referida como exemplo de função contínua, limitada, mas sem limite num extremo do domínio ($x = 0$), o que torna impossível prolongá-la a $[0, 1]$ como função contínua. Esta função, prolongada com um valor arbitrário $f(0)$, tem integral de Riemann em qualquer intervalo $[0, a]$ (ver o exercício seguinte).



Exercício: Seja $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua em $]0, a]$. Então o integral $A = \int_0^a f(x)\, dx$ existe no sentido do integral impróprio (graças ao critério de comparação). Mostrar que o integral de f, no sentido de Riemann, existe e tem o mesmo valor.

Esquema da resolução: Tome-se uma sucessão de somas de Riemann para f, $S(P_n)$, com $|P_n| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $c \in]0, a]$ tal que $c \leq \varepsilon$ e $|A - \int_d^a f| < \varepsilon$ desde que $0 < d \leq c$. A subdivisão P_n consiste em pontos

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_j^{(n)} \leq c < x_{j+1}^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$$

onde destacamos os que estão à esquerda de c e os restantes. Decomponha-se $S(P_n) = A_n + B_n$ onde A_n contém as parcelas correspondentes a intervalos da decomposição P_n com extremos à esquerda de c, e B_n as restantes parcelas. Sendo M um número tal que $|f(x) \leq M \; \forall x \in]0, a]$, vem $|A_n| \leq M\varepsilon$. Por outro lado, os pontos

$$c < x_{j+1}^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$$

formam uma decomposição P'_n para $[c, b]$ e facilmente se vê que a correspondente soma de Riemann para $f|_{[c,b]}$ (onde no primeiro intervalo escolhemos, por exemplo, o ponto c caso o correspondente t_i esteja à esquerda de c) satisfaz $|S'(P'_n) - B_n| \leq 2M|P_n|$. A partir de

$$S(P_n) - A = A_n + (B_n - S(P'_n)) + (S(P'_n) - \int_c^b f) + \int_0^c f$$

deduz-se

$$|S(P_n) - A| \leq M\varepsilon + 2M|P_n| + |(S(P'_n) - \int_c^b f)| + \varepsilon.$$

Portanto existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, tem-se $|S(P_n) - A| \leq (3M + 2)\varepsilon$.

10

FUNÇÕES CONVEXAS EM DIMENSÃO 1

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se, para qualquer intervalo $[a,b] \subset I$, se tem

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \forall x \in [a,b]$$

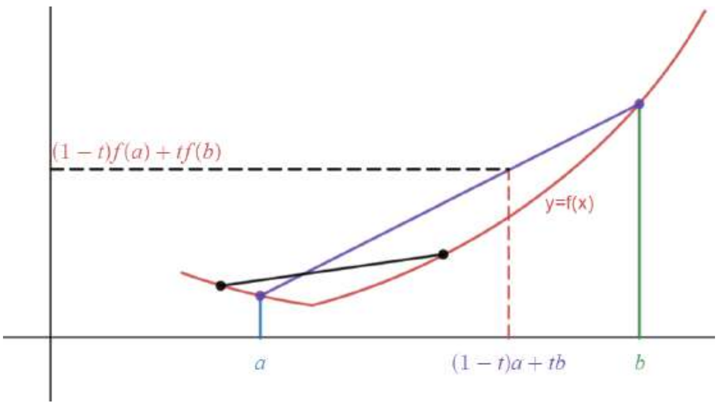
ou, equivalentemente

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Em linguagem geométrica esta condição afirma: para dois quaisquer pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$ do gráfico de f a parte do gráfico compreendida entre esses pontos está no semiplano inferior determinado pela recta PQ.

Como cada ponto $x \in [a,b]$ se pode representar na forma $x = (1-t)a + tb$ (com $t = \frac{x-a}{b-a}$), imediatamente reconhecemos que a definição se pode reformular assim: f é *convexa* se $\forall a,\ b \in I$ e $\forall t \in [0,1]$

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$



Fixada a função f, consideremos a família de declives

$$m(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Facto 34. *São afirmações equivalentes*

(i) f é convexa em I

(ii) para cada $a \in I$ a função

$$x \mapsto m(a,x)$$

é crescente em $I \setminus \{a\}$
(iii) *para quaisquer* $a < b < c < d$ *em* I *tem-se*

$$m(a,b) \leq m(a,c) \leq m(b,c) \leq m(c,d)$$

Demonstração: $(i) \implies (ii)$. Mostremos que, por exemplo, $a < x < y$ implica $m(a,x) \leq m(a,y)$ (as restantes situações são análogas). Como $x = (1-t)a + ty$ com $t = \frac{x-a}{y-a}$, temos

$$m(a,x) \leq \frac{(1-t)f(a) + tf(y) - f(a)}{x-a} = \frac{t(f(y) - f(a))}{x-a} = m(a,y).$$

$(iii) \implies (i)$: Se $a < x < b$, a condição $m(x,a) \leq m(x,b)$ é precisamente a definição de convexidade.

Facto 35. *Se f é convexa em I, f tem derivadas laterais* finitas *em cada ponto interior de I. Em particular, f é contínua no interior de I. Além disso: se $c < d$ em I, tem-se $f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d)$.*

Demonstração: Mostremos, por exemplo, que $f'_+(c)$ existe se c é interior em I. Tem-se, por definição, $f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} m(c,x)$, e o limite existe e é igual ao ínfimo de $m(c,x)$ para $x > c$ porque a função $m(c,\cdot)$ é monótona crescente; o limite é finito porque, fixando em I um ponto $d < c$, tem-se $m(c,d) \leq m(c,x)$ $\forall x > c$, mostrando que a mesma função tem um minorante. As desigualdades resultam de argumentos semelhantes, com base no Facto anterior.

Facto 36. *Se f é convexa em I, $a \in I$ e a derivada $f'(a)$ existe, tem-se*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in I.$$

Dito de outro modo, o gráfico de uma convexa fica acima do de qualquer das suas tangentes.

Demonstração: Trata-se e uma consequência imediata da passagem ao limite de $m(a,x)$ quando $x \to a$, tendo em conta a monotonia.

Facto 37. Para funções diferenciáveis, *são equivalentes*
(i) *f é convexa*
(ii) *f' é crescente*
(iii)

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x,\ a \in I.$$

Demonstração: $(i) \implies (ii)$ por causa do Facto 35. $(ii) \implies (iii)$: supondo $x > a$, pelo teorema do valor médio existe $d \in]a,x[$ tal que $f(x) - f(a) = f'(d)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$. Analogamente se trata o caso $x < a$. $(iii) \implies (i)$: Se x, $a \in I$ temos, por hipótese, a desigualdade (iii) e do mesmo modo

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x).$$

Adicionando as duas desigulddades obtemos

$$(f'(a) - f'(x))(x-a) \leq 0$$

o que implica que f' é crescente. Então, se $a < x < b$, o teorema do valor médio implica $m(a,x) \leq m(x,b)$.

Facto 38. Para funções duas vezes diferenciáveis, *tem-se a equivalência*
(i) f é convexa
(ii) $f'' \geq 0$ em I.

Como obter novas funções convexas a partir de funções convexas dadas:

Facto 39. Se f e g são convexas num domínio comum, também o são $f+g$; cf com $c>0$ constante; $\max(f,g)$.
Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ além disso é crescente, a composição $g \circ f$ é convexa.
Se $f_n : I \to \mathbb{R}$ é uma sucessão de funções convexas que converge pontualmente, isto é, $\forall x \in I$ existe

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

então f é convexa em I.
Uma função afim φ é trivialmente convexa. E, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa, a composição $f \circ \varphi$ é convexa.

Facto 40. *(Desigualdade de Jansen) Se f é convexa em I, tem-se*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in I$, $\forall t_i$ tais que $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

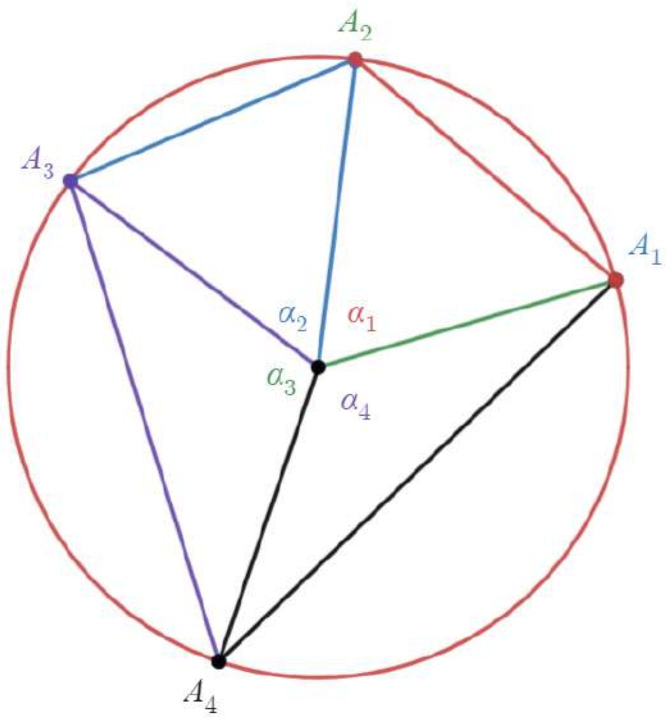
Demonstração: Ver o capítulo seguinte.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *côncava* se $-f$ é convexa. Obviamente, uma função côncava satisfaz desigualdades de sentido contrário às que caracterizam as convexas; as propriedades das funções côncavas resultam facilmente da simetrização das correspondentes propriedades das convexas.

Exemplo: A função sin é côncava em $[0,\pi]$. Portanto, se $a_i \in [0,\pi]$, $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, tem-se

$$\sin(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i \sin(a_i).$$

Esta desigualdade tem uma interpretação geométrica curiosa. Inscrevamos no círculo unitário um polígono caracterizado pelos ângulos ao centro α_1, α_2, ... α_n dos respectivos lados A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_1. O perímetro deste polígono é $P_n = 2\sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{\alpha_i}{2})$. Como $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$, atendendo a que $\frac{\alpha_i}{2} \in [0,\pi]$ e considerando $t_i = \frac{1}{n}$, concluímos $P_n \leq 2n \sin\frac{\pi}{n}$: isto é, fixado n, o valor máximo possível para P_n corresponde ao polígono regular com n lados.



Exercícios: 1) Verificar que são convexas $|x|^\alpha$ com $\alpha \geq 1$; $x \ln x$; $\ln(1 + e^x)$; $- \ln(\ln x)$ em $]1, +\infty[$.

2) Se f é convexa num intervalo ilimitado à direita, então existe o $\lim_{x \to +\infty)} \frac{f(x)}{x}$ (podendo ser infinito).

3) Se f é convexa num intervalo $[a, b]$ e possui um mínimo local num extremo do intervalo, então f é monótona.

4) Que condição devem satisfazer os números a, $b\, c$ para que a função seccionalmente afim $a|x + 1| + b|x| + c|x - 2|$ seja convexa?

5) Mesmo problema para $ax + b|x| + c|x - 2| + 5$.

6)Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e convexa, então $-f^{-1}$ é também convexa.

7) Sejam $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Mostrar que

$$g\Big(\int_0^1 f(x)\, dx\Big) \leq \int_0^1 g(f(x))\, dx.$$

(Sugestão: somas de Riemann e desigualdade de Jansen.)

11

FUNÇÕES CONVEXAS EM $\mathbb{R}^n$

11.1 GENERALIDADES. EXISTÊNCIA DE MÍNIMO

Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Recorde-se que isso significa, por definição, que $\forall a, b \in C$ o segmento de extremos a, b está contido em C, isto é, $(1-t)a + tb \in C \ \forall t \in [0,1]$.

É importante observar o seguinte facto que estende a propriedade dada pela definição:

Facto 41. *Seja C um convexo. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in C$, $\forall t_i$ tais que $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} t_i a_i \in C \tag{$*$}$$

.

As somas da forma (*) chamam-se *combinações convexas* dos a_i.

Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se satisfizer: $\forall a, b \in C$ e $\forall t \in [0,1]$

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Uma consequência imediata da definição é o carácter unidimensional da propriedade de convexidade. Mais precisamente, consideremos uma recta de $\mathbb{R}^n$ com parametrização

$$r(t) = x + ty, \quad t \in \mathbb{R}$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^n$; facilmente se reconhece que $I = \{t | r(t) \in C\}$ é um intervalo. Conclui-se que

Facto 42. *f é convexa em C se, e só se, para cada recta r, a função*

$$g : I \ni t \mapsto f(x + ty)$$

é convexa no correspondente intervalo I.

Demonstração: Se $t_1, t_2 \in I$ e $s \in [0,1]$ temos

$$g((1-s)t_1 + st_2) = f(x + ((1-s)t_1 + st_2)y) =$$
$$= f((1-s)(x + t_1 y) + s(x + t_2 y)) \leq$$
$$(1-s)g(t_1) + sg(t_2).$$

Reciprocamente, se $x, y \in C$ e $g(t) = f((1-t)x + ty)$ é convexa em $[0,1]$, vem

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(0) + tg(1) =$$
$$(1-t)f(x) + tf(y).$$

Facto 43. (Desigualdade de Jensen) *Se f é convexa em C, tem-se*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in C$, $\forall t_i$ *tais que* $t_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

A demonstração é fácil, por indução em n. Façamos a passagem de $n = 2$ para $n = 3$: aplicando duas vezes a definição de convexidade (e observando que $\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2} \in C$), temos

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3) = f((t_1 + t_2)\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2} + t_3 a_3)$$

$$\leq (t_1 + t_2) f(\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2}) + t_3 f(a_3) \leq$$

$$t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + t_3 f(a_3).$$

As funções afins

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

(onde os c_i são constantes reais) são trivialmente convexas. Na verdade, para uma tal função, imediatamente se reconhece que:

$$\varphi((1-t)a + tb) = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$$

Além disso, *se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e φ é afim, então $g \circ \varphi$ é convexa.*

Mantêm-se na dimensão n as propriedades descritas no facto 39, com I substituído pelo convexo C. Vale a pena observar adicionalmente que *qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é convexa.* Este facto é consequência imediata das propriedades triangular e homogénea das normas.

Vejamos agora como caracterizar as funções convexas *de classe C^1*.
Seja f de classe C^1 num aberto convexo C. Para cada $a \in C$, e cada $v \in \mathbb{R}^n$, a função

$$F(t) = f(a + tv)$$

está definida num intervalo aberto contendo $t = 0$ e tem-se

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) v_i = \nabla f(a + tv) \cdot v. \tag{1}$$

Como vimos, a convexidade de f é equivalente à convexidade de todas as funções de uma variável F assim construídas. Daqui resulta

Facto 44. *Se f é C^1 num aberto convexo C, são equivalentes:*
(i) *f é convexa*
(ii) $\forall x,\ a \in C$ *tem-se*
$$f(x) \geq f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)$$
(iii) $\forall x,\ y \in C$ *tem-se*
$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0$$

Demonstração: $(i) \longrightarrow (ii)$ Usar a convexidade de $\varphi(t) = f(a+t(x-a), 0 \leq t \leq 1$ e $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$.
$(ii) \longrightarrow (iii)$ Escrever a desigualdade (ii) trocando os papéis de x e a e adicionar membro a membro as duas desigualdes.
$(iii) \longrightarrow (i)$ Reduzindo o problem a restrições a rectas, basta ver que F (com a notação acima) tem derivada crescente, isto é
$$(F'(t) - F'(s))(t-s) \geq 0 \quad t,s \in [0,1].$$
Isto é imediato a partir de (iii).

Passemos a caracterizar as funções convexas *de classe* C^2.
Com a notação já introduzida, resulta do facto 38 que $f : C \to \mathbb{R}$ (de classe C^2) é convexa se e só se todas a funções $F(t)$ construídas restringindo f a rectas têm segunda derivada não negativa. Ora, a partir da equação (1) obtemos, derivando novamente
$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+tv)v_i v_j$$
Assim, considerando em particular $t = 0$ podemos afirmar:

Facto 45. $f : C \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *é convexa se e só se* $\forall a \in C$ *e* $\forall v \in \mathbb{R}^n$ *se tem a desigualdade*
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)v_i v_j \geq 0$$

Esta condição significa exactamente que em cada ponto $a \in C$ a matriz $n \times n$ (Hessiana)
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]$$
é *semi-definida positiva*.

Exercícios: Verificar que são convexas as seguintes funções de duas variáveis:
1)$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$;
2) x^2/y no semiplano dado por $y > 0$;
3) $x^4 + y^2 + 3$; $x^2 - xy + y^2$;
4) $-\sqrt{xy}$ no primeiro quadrante; 5) $\ln(e^x + e^y)$;
6)$-x^\alpha y^\beta$ com $\alpha,\ \beta > 0$ e $\alpha + \beta < 1$ no primeiro quadrante;
7) $-x^\alpha y^{1-\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$ no primeiro quadrante;

8) $(x-y)^2 + |2-3x+y|$;
9) $(x^2+y^2)^2$.

Facto 46. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\{x \in C \,|\, f(x) \leq \alpha\}$ é um conjunto convexo.*

Seguidamente estudamos critérios de existência de mínimo para funções convexas.

Facto 47. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e tem um mínimo local em $a \in C$, então $f(a) = \min_C f$.*

Facto 48. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa, C^1 num aberto que contém C e tem um ponto crítico $a \in C$, então $f(a) = \min_C f$.*

Demonstração: Em virtude da condição (ii) do Facto 44, tem-se $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in C$.

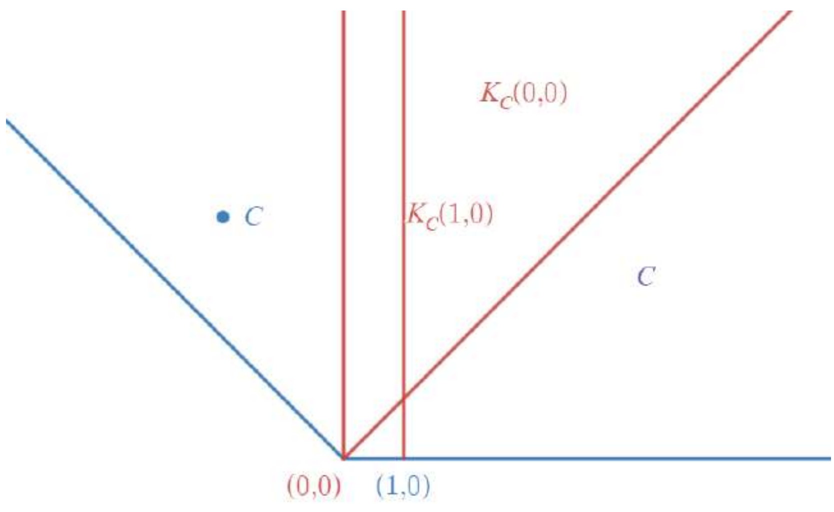
No entanto, tem-se o resultado seguinte mais geral. Antes de o enunciar, damos duas definições:
Seja C um convexo fechado. Chamamos *cone tangente a C num ponto $a \in C$*, e representamos por $T_C(a)$, a aderência do conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ da forma $t(x-a)$ com $t \geq 0$ e $x \in C$.
E chamamos *cone associado ao convexo C no ponto $a \in C$*: ao conjunto

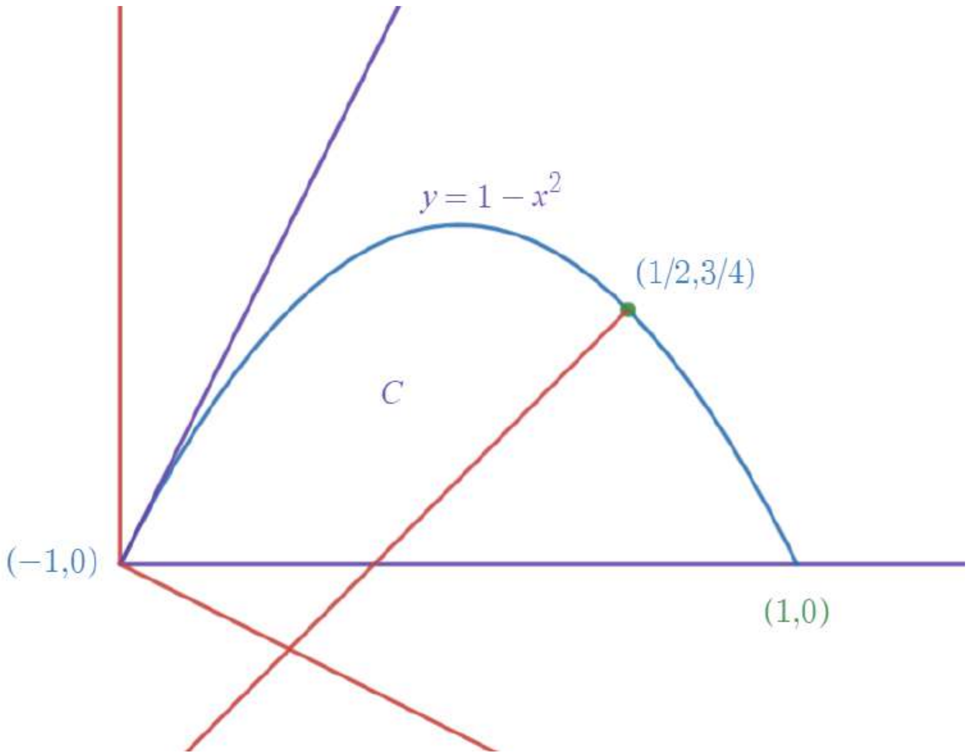
$$K_C(a) := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \cdot (x-a) \geq 0 \ \ \forall x \in C\}$$

que se verifica facilmente ser o mesmo que

$$\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \cdot w \geq 0 \ \ \forall w \in T_C(a)\}.$$

Exemplos: 1) Se a é interior a C, $T_C(a) = \mathbb{R}^n$ e $K_C(a) = \{0\}$. 2) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq \max(0,-x)\}$ e $a = (1,0)$, $T_C(a) = \{v | \, v_2 \geq 0\}$ e $K_C(a) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$; se $a = (0,0)$,$T_C(a) = C$ e $K_C(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x \geq 0\}$. (Ver a primeira figura abaixo) 3) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0, \ \ x^2+y^2 \leq 1\}$ e $a = (-1,0)$, $T_C(a)$ e $K_C(a)$ coincidem com o primeiro quadrante. 4) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 1-x^2\}$ e $a = (-1,0)$, $T_C(a)$ é formado pelas semirectas de origem a que ficam dentro do ângulo cujos lados são o semieixo horizontal (partindo de a) e a semirecta $y = 2(x+1)$ $(x \geq -1)$. Na segunda figura abaixo esquematizamos $T_C(a)$ $K_C(a)$ a azul e vermelho, respectivamente; e ainda $K_C(1/2, 3/4)$.





Facto 49. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e C^1 num aberto que contém C, então $f(a) = \min_C f$ se e só se*

$$\nabla f(a) \in K_C(a).$$

Demonstração: A condição é necessária (pela convexidade de C; não intervém a de f) porque implica, para todo o $x \in C$, que a função $F(t) = f(a + t(x - a))$, definida em $[0, 1]$, tem mínimo em $t = 0$ e $\varphi'(0) = \nabla f(a) \cdot (x - a)$. A condição é suficiente pela afirmação (ii) do facto 44.

Exemplo: Calculemos o valor mínimo de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x - y$ no primeiro quadrante (incluindo os semieixos). Como f é convexa, não tem pontos críticos no interior do quadrante, e por outro lado

$$\nabla f(x, 0) = (4x^3 + 1, -1), \quad \nabla f(0, y) = (1, 4y^3 - 1)$$

concluimos que só pode ter-se $\nabla f(a) \in K_C(a)$ se $a = (0, y)$ com $4y^3 - 1 = 0$. A condição garante, pois, existência de mínimo absoluto atingido em $(0, 1/4^{1/3})$.

Exercícios: 1) Minimizar $x + 3y^2$ no paralelogramo de vértices $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
2) Que se pode afirmar de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é convexa e majorada?
3) (a) Indicar o domínio aberto do plano onde é (estritamente) convexa a função

$$g(x, y) = e^{x+y} - xy.$$

(b) Determinar os valores da constante a de modo que a função $g(x, y) + ax$, restringida ao convexo

$$\{(x, y) \mid x + y \geq 2, \;\; x \leq 0\},$$

atinja o seu mínimo no ponto $(0, 2)$.

4) Seja C um convexo fechado de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que a norma Euclidiana $\|\cdot\|$ atinge um mínimo em C, e o (único) ponto $a \in C$ onde o mínimo é atingido é caracterizado por

$$a \cdot (x - a) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

5) Seja C um convexo fechado, não vazio, de $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Mostrar que existe um único $q \in C$ tal que

$$\|p - q\| = \min_{x \in C} \|p - x\|$$

($\|\cdot\|$ é a norma euclidiana) e que q é caracterizado por

$$(q - p) \cdot (x - p) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

(Diz-se que q é a projecção de p sobre C e escreve-se $q = P_C(p)$.) Concluir, a partir dessa caracterização, que $\forall p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\|P_C(p_1) - P_C(p_2) \leq \|p_1 - p_2\|.$$

11.1.1 *Formas quadráticas semidefinidas*

Recordemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função da forma

$$u \mapsto Au \cdot u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz real simétrica. Sabemos (ver o critério de Sylvester, cap. 8.5) que a forma (ou A) é definida positiva quando $\min_{\|u\|=1} Au \cdot u > 0$ ou, equivalentemente: todos os valores próprios de A são > 0; ou ainda, quando os determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$(k = 1, \cdots, n)$ são todos positivos. Analogamente, A é semidefinida positiva se $\min_{\|u\|=1} Au \cdot u \geq 0$, ou, equivalentemente, se todos os valores próprios de A são ≥ 0. O critério em termos de determinantes de submatrizes é menos imediato e vamos agora apresentá-lo.

Diremos que uma submatriz de A é *principal* e notamo-la $A_{\mathcal{J}}$ se resulta de A por supressão das linhas cujos índices formam um subconjunto $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ e das colunas com os mesmos índices. É claro que $A_{\mathcal{J}}$ é ainda simétrica.

Assim, há n submatrizes principais 1×1, $\binom{n}{2}$ submatrizes principais 2×2, etc, sendo o número total das submatrizes principais (excluído o caso $\mathcal{J} = \{1, 2, \cdots, n\}$) igual a $2^n - 1$.

Facto 50. *(Critério de Frobenius) A é semidefinida positiva se, e só se, os determinantes de todas as suas submatrizes principais são ≥ 0.*

A verificação deste facto apoiar-se-á nas asserções seguintes:

1. Se A é semidefinida positiva, qualquer submatriz principal é-o também.

2. A é semidefinida positiva se e só se $\forall \varepsilon > 0$ $A + \varepsilon I$ é definida positiva. (I é a matriz identidade $n \times n$.)

Demonstração de 1: Tomemos $A_{\mathcal{J}}$. Sejam $j_1 < \cdots < j_p$ os índices de 1 a n que não estão em $\mathcal{J}$. Então $A_{\mathcal{J}}$ é uma matriz $p \times p$. Para cada vector $w \in \mathbb{R}^p$ designemos por $z = z(w)$ o vector de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes de índices j_i são as de w pela mesma ordem, sendo nulas as componentes restantes (isto é, as de índices em $\mathcal{J}$). Um cálculo imediato mostra que

$$w^T A_{\mathcal{J}} w = z^T A z$$

(recorde-se que $z^T A z$ é outro modo de representar $Az \cdot z$.)

Demonstração de 2: A afirmação resulta imediatamente de se ter, para cada vector fixado $u \neq 0$,

$$(A + \varepsilon I)u \cdot u = Au \cdot u + \varepsilon \|u\|^2$$

(para obter um dos sentidos da implicação, tomar limite quando $\varepsilon \to 0^+$).

Demonstração do facto: Condição necessária: atendendo ao ponto 1 acima, basta mostrar que, se A é semidefinida positiva, tem-se $\det A \geq 0$. Ora, pelo ponto 2 e pelo critério de Frobenius para as matrizes definidas positivas, $\det(A + \varepsilon I) > 0$ $\forall \varepsilon > 0$. Como este determinante é uma função polinomial em ε, obtemos $\det A = \lim_{\varepsilon \to 0} \det(A + \varepsilon I) \geq 0$.

Condição suficiente: Em virtude de 1 e 2, e novamente invocando o critério que envolve determinantes para as definidas positivas, basta mostrar que qualquer submatriz do tipo

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} + \varepsilon & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} + \varepsilon \end{vmatrix}$$

tem, para $\varepsilon > 0$, determinante positivo. Ora, explicitando o determinante com os termos agrupados pondo em evidência as potências de ε, obtemos o polinómio

$$S_0 + S_1 \varepsilon + S_2 \varepsilon^2 + \cdots + S_{k-1} \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^k$$

onde $S_0 = \det A$ e S_i é a soma dos determinantes das submatrizes principais de tipo $(k - i) \times (k - i)$. Em virtude da hipótese, a conclusão pretendida é imediata.

Exercício: A forma quadrática $Ax \cdot x$ é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$ se, e só se, é semidefinida positiva.

11.2 envólucro convexo. valores máximos

Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ chamamos *envólucro convexo* de S e notamos co(S) o menor (no sentido da inclusão) convexo que contém S. Podemos também dizer que co(S) é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm S. E também

$$co(S) = \{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i \,|\, k \in \mathbb{N},\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ x_i \in S\ \ (i = 1, \cdots, k)\}.$$

Para justificar a última asserção basta ter em conta que:

(a) dado um convexo C que contém $x_1. \cdots, x_k$ então C contém qualquer combinação convexa destes k pontos. (Resulta do facto 41.)

(b) O conjunto definido no segundo membro é convexo

Justificação de (b): dadas duas combinações convexas da forma indicada, podemos supôr que envolvem os mesmos vectores

$$\sum_{i=1}^{k} t_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{k} t_i' x_i$$

bastando, para isso, juntar termos, se necessário, com alguns dos t_i ou t_i' nulos. Então, para todo o $s \in [0,1]$,

$$(1-s)\sum_{i=1}^{k} t_i x_i + s\sum_{i=1}^{k} t_i' x_i = \sum_{i=1}^{k} [(1-s)t_i + st_i'] x_i$$

com $\sum_{i=1}^{k} [(1-s)t_i + st_i'] = 1 - s + s = 1$, mostrando que o segmento definido pelas duas combinações convexas é uma combinação convexa do mesmo tipo.

Outro conceito útil é o de ponto extremo. Dado um convexo fechado C, um ponto $a \in C$ diz-se *extremo* se

$$a = (1-t)x + ty,\quad x, y \in C,\quad x \neq y,\quad t \in [0,1] \Longrightarrow t = 0 \ \text{ ou } \ t = 1$$

(informalmente: se a não é "interior" a qualquer segmento com extremos distintos em C).

Em muitos casos simples, não é difícil identificar os pontos extremos de um convexo. Por exemplo, no convexo do exemplo 3 acima, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, os pontos extremos são os do arco de semicírculo.

Facto 51. *Seja $S = \{p_1, \cdots, p_k\}$ um conjunto finito em $\mathbb{R}^n$. Então:*

(i) $co(S)$ é compacto.

(ii) Se $\exists i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $p_i \in co(S \setminus \{p_i\})$, tem-se $co(S) = co(S \setminus \{p_i\})$.

(iii) Se $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$ $p_i \notin co(S \setminus \{p_i\})$, cada p_i é ponto extremo de $co(S)$.

(iv) Se $f : co(S) \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, tem-se $\max_{co(S)} f = \max_S f$.

Demonstração: (i). Observar que co(S) é imagem, pela aplicação contínua de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^n$

$$(t_1, \cdots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} t_i p_i,$$

do compacto $\{(t_1, \cdots, t_k) \,|\, t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\}$.

(ii) imediato.

(iii) Tomemos o ponto $p_1 \notin co(\{p_2, \cdots, p_k\})$. Se p_1 não é extremo, podemos representá-lo como $p_1 = \frac{1}{2}(a + a')$ onde a, $a' \in co(S) \setminus co\{p_2, \cdots, p_k\}$ (notemos que $co\{p_2, \cdots, p_k\}$ é compacto, e portanto fechado). Também facilmente reconhecemos que

$$a = tp_1 + (1-t)b, \quad b \in co\{p_2, \cdots, p_k\}$$

com $0 < t < 1$. Do mesmo modo, $a' = sp_1 + (1-s)c$ com $0 < s < 1$ e $c \in co\{p_2, \cdots, p_k\}$. Somando as expressões de a e a' resulta

$$(2 - t - s)p_1 = (1-t)b + (1-s)c$$

de onde se conclui imediatamente que p_1 pertence ao segmento de extremos b e c, e portanto a $co(\{p_2, \cdots, p_k\})$, o que contradiz a hipótese.

(iv) Da desigualdade de Jansen resulta imediatamente que, se $\max_S f = M$, então $f(x) \leq M$ $\forall x \in co(S)$.

Observação importante: Utilizando $(ii) - (iii) - (iv)$ podemos afirmar que o valor máximo de f (convexa) em co(S) é atingido num ponto extremo deste conjunto.

É verdade mais geralmente (não apenas para o envólucro convexo de um conjunto finito) o seguinte: se C é convexo e compacto e f é convexa em C, o máximo de f em C é atingido num ponto extremo de C. A demonstração segue a mesma ideia da anterior, tendo por base o seguinte teorema (de H. Minkowski): *se C é convexo e compacto em $\mathbb{R}^n$, então C é o envólucro convexo dos seus pontos extremos.* Não incluiremos aqui a prova deste facto, mas observamos que em casos simples é fácil de o reconhecer.

Exercícios: 1) A função $x^2 + y^4 + xy$ é convexa em algum domínio? Qual é o seu valor máximo no quadrilátero de vértices $(-3, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-2, 2)$?

2) Determinar o máximo de $x + 3y$ no domínio definido por

$$x^2 + 2y^2 \leq 1, \quad x + y \geq 1, \quad y \leq x.$$

3) (a) Verificar que a função $\frac{z^2+1}{z+2}$ é convexa e crescente num certo intervalo da forma $]c, +\infty[$. (SUGESTÃO: para obter a convexidade de modo simples, reescrever a fracção usando a divisão de polinómios.)

(b) Utilizando a afirmação anterior, determinar o máximo da função $f(x, y) = \frac{(x+y-1)^2+1}{x+y+1}$ no domínio convexo definido pelas condições

$$|x - 3| \leq y \leq 3.$$

(Sugestão: composição de funções.)

11.3 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES CONVEXAS

Nesta secção usaremos vizinhanças de um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ do tipo

$$Q(a, \varepsilon) = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon] =$$

$$= \{x \mid \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - a_i| \leq \varepsilon\}.$$

É fácil reconhecer que $Q(a, \varepsilon)$ é o envólucro convexo de 2^n pontos:

$$Q(a, \varepsilon) = co\{x \mid \forall i = 1, \cdots n \quad x_i = a_i \pm \varepsilon\}$$

Facto 52. *Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $Q(a, \varepsilon) \subset C$, então f é limitada em $Q(a, \varepsilon)$.*

Demonstração: Como $Q(a, \varepsilon)$ é envólucro convexo de um conjunto finito, existe $M = \max_{Q(a,\varepsilon)} f$.

Seja $x \in Q(a, \varepsilon)$, e seja x' o simétrico de x relativamente a a. Então $a = \frac{x+x'}{2}$, e pela convexidade de f temos

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x') \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{M}{2}$$

de onde

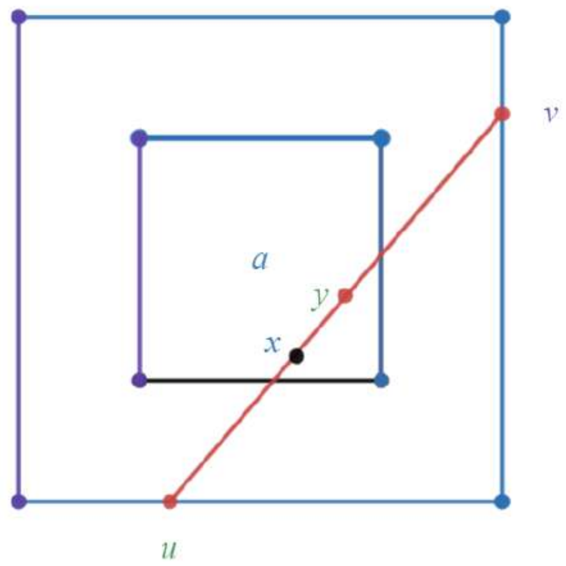
$$f(x) \geq 2f(a) - M \quad \forall x \in Q(a, \varepsilon)$$

o que conclui a demonstração.

Facto 53. *Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então f é contínua no interior de C. Mais precisamente, é localmente Lipschitziana no interior de C.*

Demonstração: Seja a um ponto interior a C. Seja $\varepsilon > 0$ um número tal que $Q(a, 2\varepsilon) \subset C$. Pelo lema anterior, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq M$ em $Q(a, 2\varepsilon)$. Vamos mostrar que f é Lipschitziana em $Q(a, \varepsilon)$, com constante de Lipschitz $2M/\varepsilon$: $\forall x \neq y \in Q(a, \varepsilon)$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \leq 2M/\varepsilon.$$



Consideremos a recta que contém x e y parametrizada por $t \mapsto P(t) := p + tw$ onde $p,\ w \in \mathbb{R}^n$ e $\|w\| = 1$. Esta recta tem dois pontos comuns com $\partial Q(a, 2\varepsilon)$; designemo-los por u e v e suponhamos, sem perda de generalidade, que os pontos u, x, y, v correspondem por via de $P(t)$ a valores do parâmetro $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, respectivamente. Como a função $\varphi(t) = f(p + tw)$ é convexa, resulta do lema dos declives

$$\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2} \leq \frac{\varphi(t_4) - \varphi(t_3)}{t_4 - t_3}.$$

Ora, $t_2 - t_1 = \|x - u\|$, $t_3 - t_2 = \|y - x\|$ e $t_4 - t_3 = \|v - y\|$, de onde

$$-\frac{2M}{\varepsilon} \leq \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \leq \frac{2M}{\varepsilon},$$

que é o que pretendíamos.

12

CONVERGÊNCIA UNIFORME - TRÊS PONTOS ADICIONAIS

12.1 SÉRIES DE POTÊNCIAS: CONVERGÊNCIA NUM INTERVALO COMPACTO

Comecemos por mencionar o seguinte facto elementar sobre somas (“soma por partes"): dadas duas sucessões numéricas, (a_n) e (b_n), se notarmos $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ as somas parciais da primeira, temos

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n =$$

$$= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n.$$

Resulta daqui o seguinte

Facto 54. *Se $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ e existe $K > 0$ tal que $|A_i| \leq K$ ($i = 1, \cdots, n$), tem-se*

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq K b_1.$$

Teorema 3. *(Teorema de Abel) Suponhamos que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge se $x = r$ onde r é um número positivo dado. Então a série converge uniformemente em $[0, r]$.*

Demonstração: Pela hipótese, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq N \implies |\sum_{i=n+1}^{m} a_i r^i| < \varepsilon.$$

Portanto, em virtude do Facto 54 e de ser $(x/r)^k \leq 1$ e decrescente em k $\forall x \in [0, r]$:

$$m > n \geq N \implies \sup_{0 \leq x \leq r} |\sum_{i=n+1}^{m} a_i x^i| = \sup_{0 \leq x \leq r} |\sum_{i=n+1}^{m} a_i r^i (\frac{x}{r})^i| < \varepsilon.$$

Esta afirmação significa que a sucessão de somas parciais $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ é de Cauchy em $C([0, r])$ e portanto converge uniformemente para a sua soma como função de x.

Observação: Se R é o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ e, por verificação directa, a série converge no extremo $x = R$ do intervalo aberto de convergência, resulta do que sabemos sobre séries de potências e do teorema anterior que a série converge uniformemente em qualquer intervalo $[a, R]$ com $a > -R$.

Podem fazer-se considerações “simétricas" das anteriores com respeito a um intervalo $[-r, 0]$.

Exemplos: 1) O desenvolvimento em série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (a)$$

é válido se $|x| < 1$. A série que figura no 2º membro converge em $x = 1$ (pelo critério de Dirichlet para séries alternadas). Portanto a convergência é uniforme em $[0, 1]$ e a soma é uma função contínua da variável x neste intervalo. Como $\ln(1+x)$ é também contínua, a igualdade (a) vale para $x = 1$. Assim,

$$\ln 2 = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2) Também para $|x| < 1$, tem-se:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (b)$$

sendo o 2º membro uma série convergente em $x = 1$. Com o mesmo argumento do exemplo anterior deduz-se que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

3) Da teoria da série binomial, sabemos que, se $|x| < 1$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3\, 3!}x^3 - \cdots$$

Escrevamos o 2º membro simplesmente como

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

notando que $b_n > 0\ \forall n \geq 1$. Vamos mostrar, usando um argumento de positividade, que a série converge também em $x = 1$. De facto

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}, \quad |x| < 1$$

implica, para todo o $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{p} b_n x^n < 1, \quad |x| < 1.$$

Com p fixado e tomando limite quando $x \to 1^-$ resulta

$$\sum_{n=1}^{p} b_n \leq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Tratando-se de uma série de termos positivos, existe o limite das somas quando $p \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 1$$

como se pretendia.

Concluímos então que $\sqrt{1-x}$ *é limite uniforme em* $[0,1]$ *de uma sucessão de polinómios* $P_n(x)$ (as somas parciais da série binomial). E, como $1-x^2$ toma valores em $[0,1]$ quando $|x| \leq 1$, podemos afirmar que a função

$$\sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$$

é também limite uniforme em $[0,1]$ *de uma sucessão de polinómios* (os polinómios $P_n(1-x^2)$). Na verdade, com uma mudança de variável do tipo $x = ct$, onde $c > 0$, temos:

Facto 55. *A função* $|x|$ *é, em qualquer intervalo da forma* $[-a,a]$*, limite uniforme de uma sucessão de polinómios.*

Com base neste facto ficamos a poucos passos de demonstrar o seguinte importante teorema:

Teorema 4. *(Teorema de aproximação de Weierstrass) Qualquer função* $f \in C([a,b]$ *é limite uniforme em* $[a,b]$ *de uma sucessão de polinómios.*

Noutros termos: o subespaço dos polinómios é ***denso*** *em* $C([a,b])$*.*

Exercícios: 1) Calcular a soma da série

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots .$$

Sugestão: começar pelo desenvolvimento em série de $\frac{1}{1+x^3}$.

2) Seja $0 < a < 1$. Mostrar que $\forall \varepsilon > 0$ existe um polinómio $P(x)$ tal que $|P(x)| < \varepsilon$ se $x \in [-1,0]$ e $|P(x)-1| < \varepsilon$ se $x \in [a,1]$. (Sugestão: a função seccionalmente linear em $[-1,1]$ que vale 0 no semieixo negativo e 1 em $[a,1]$ é combinação linear de um polinómio de grau 1, $|x|$ e $|x-a|$.)

12.2 CONVERGÊNCIA UNIFORME A PARTIR DE CONVERGÊNCIA PONTUAL

Teorema 5. *(Teorema de Dini) Seja* $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ *uma sucessão crescente de funções contínuas que converge pontualmente em* $[a,b]$ *para uma função* f *contínua em* $[a,b]$*. Então* $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a,b]$*.*

Demonstração: Antes de mais, notemos que, de acordo com a hipótese, $f_n(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Se a conclusão é falsa, então existe $\varepsilon > 0$ e existem infinitos valores de n tais que

$$\|f_n - f\|_\infty = max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon. \qquad (a)$$

Passando à subsucessão correspondente àqueles valores de n (que, por comodidade, representamos com o mesmo símbolo), existe para cada n um ponto $x_n \in [a,b]$ tal que

$$f(x_n) - f_n(x_n) = max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

De (x_n) podemos extrair uma subsucessão convergente: continuamos a representá-la pelo mesmo símbolo, isto é, supomos que é (x_n) que converge, digamos: $\lim x_n = x \in [a,b]$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) - f_k(x) < \varepsilon/2$; pela continuidade de $f - f_k$ esta desigualdade estende-se a uma vizinhança de x, isto é: existe $\delta > 0$ tal que $t \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b] \implies f(x) - f_k(x) < \varepsilon/2$; finalmente, pela monotonia da sucessão f_n, podemos concluir

$$t \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b], \ \ j \geq k \implies f(x) - f_j(x) < \varepsilon/2. \tag{b}$$

Ora, como para n suficientemente grande temos $x_n \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$, o confronto de (a) e (b) conduz a uma contradição.

Observação: A demonstração anterior é um de muitos exemplos de utilização de um "argumento de compacidade", traduzido aqui numa passagem ao limite em subsucessão. O mesmo argumento, no essencial, permite resolver os exercícios seguintes.

Exercícios: 1) Seja f_n uma sucessão de funções contínuas e crescentes em $[a,b]$ que converge pontualmente em $[a,b]$ para uma função contínua. Mostrar que a convergência da sucessão é uniforme. INDICAÇÃO: Imitar a demonstração do teorema de Dini até à passagem ao limite $\lim x_n = x \in [a,b]$. Em seguida, suponhamos para fixar ideias que $x_n > x$ para infinitos valores de n (o caso $x_n < x$ é análogo). Fixemos $z > x$ tão próximo de x que $f(x) \leq f(z) < f(x) + \varepsilon/4$ (notar que f é contínua e crescente). Ora, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m > p \quad |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/4, \quad |f_m(z) - f(z)| < \varepsilon/4.$$

Considerando o retângulo $R = \{(t,y) \,|\, x \leq t \leq z, \ \ f(x) - \varepsilon/4 \leq y \leq f(z) + \varepsilon/2$, facilmente se constata então que para $m > p$ o gráfico de $f_m|_{[x,z]}$ está contido em R. E obviamente o mesmo vale para f. Então (escolhendo x_m em $[x,z]$), $|f(x_m) - f_m(x_m)|$, que é a distância na vertical entre dois pontos dos gráficos de f e f_m, é inferior a $3\varepsilon/4$.

2) Seja f_n uma sucessão de funções Lipschitzianas em $[a,b]$, todas com a mesma constante de Lipschitz, que converge pontualmente em $[a,b]$ para uma função f. Mostrar que a convergência é uniforme. INDICAÇÃO: Imitar a demonstração do teorema de Dini até à passagem ao limite $\lim x_n = x \in [a,b]$. Depois, temos (sendo L a constante de Lipschitz)

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq L|y-x|, \ \ |f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$$

de onde

$$|f_n(y) - f(y)| \leq 2L|y-x| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Tomando n suficientemente grande, e escolhendo $y = x_n$, qualquer das duas últimas parcelas fica $< \varepsilon/2$, o que determina a contradição com a construção dos x_n.

3) Mostrar que uma função localmente Lipschitziana em $[a,b]$ é Lipschitziana em $[a,b]$.

4) Seja E o espaço das funções contínuas definidas em $[-1,1]$ cujo gráfico consiste em dois segmentos de recta com uma extremidade comum. Seja f_n uma sucessão em E tal que $f_n(x) \to 1 - |x|$ $\forall x \in [-1,1]$. Mostrar que esta convergência é uniforme.

5) Mostrar que existe uma sequência de polinómios P_n de grau 7 que converge uniformemente para $(x-1)^3(x-2)^2(x^2+x+1)$ em $[0,3]$ e tal que cada P_n possui 5 raízes reais *distintas*. SUGESTÃO: escolhida uma sucessão $\varepsilon \to 0$, substituir o factor $(x-1)^3$ por $(x-1)(x-1+\varepsilon_n)(x-1+2\varepsilon_n)$...

12.3 PASSAGEM AO LIMITE EM INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

Uma das consequências mais úteis da convergência uniforme é a seguinte: se $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f \qquad (Lim)$$

desde que os integrais tenham sentido (por exemplo, à Riemann).

Vamos dar alguns elementos para o tratamento do problema análogo quando os integrais em jogo são impróprios. Embora a abordagem satisfatória desta questão exija uma teoria mais sofisticada do integral (por exemplo, a teoria de Lebesgue, que será estudada numa disciplina posterior), veremos nesta secção como resolver a questão em casos particularmente simples, com o nível de conhecimentos já adquiridos.

Consideremos, para fixar ideias, o caso de integrais impróprios num intervalo $[a, b[$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. As funções que consideramos, definidas neste intervalo, serão seccionalmente contínuas (isto é, podem admitir um número finito de descontinuidades) e os seus integrais existem (pelo menos) no sentido do integral impróprio. (Não repetiremos este pressuposto nos enunciados.) Pretendemos saber sob que condições, a partir da convergência pontual

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b[\qquad (CP)$$

se pode inferir que é válida a passagem ao limite nos integrais (Lim).

Facto 56. *(Intervalo limitado) Suponhamos $b \in \mathbb{R}$. Seja $f_n : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*

(1) Existe $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [a, b[$, e $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b - \varepsilon]$.

Então vale a passagem ao limite (Lim).

Facto 57. *(Intervalo ilimitado) Seja $f_n : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*

(1) Existe $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [a, +\infty[$, e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$.

(2) $\forall A > a$ $f_n \to f$ uniformemente em $[a, A]$.

Então vale a passagem ao limite (Lim).

Observação: Em linguagem sintética, estes enunciados garantem a passagem ao limite desde que a sucessão seja majorada em valor absoluto por uma função integrável e haja convergência uniforme nos subintervalos compactos de $[a, b[$. Obviamente, as hipóteses implicam, em particular, que se verifica (CP).

2) É fácil formular enunciados análogos para o caso de um intervalo $]a, b]$ ou outro tipo de intervalos. Como habitualmente ao trabalhar com integrais impróprios, também podemos considerar integrais em $\mathbb{R}$, os quais se reduzem por adição aos tipos anteriores. Por exemplo, se nos factos anteriores substituirmos o intervalo por $]a, +\infty[$ podemos tratar a convergência de integrais impróprios nete intervalo por meio do seguinte enunciado:

Facto 58. *(Intervalo ilimitado e funções ilimitadas no extremo finito) Seja $f_n :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*

(1) Existe $g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]a, +\infty[$, *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx < +\infty$.
(2) $\forall \varepsilon > 0, \quad A > a + \varepsilon\ f_n \to f$ *uniformemente em* $[a + \varepsilon, A]$.
Então vale a passagem ao limite (Lim).

Demonstração: Vamos demonstrar o primeiro enunciado, sendo semelhante a demonstração do segundo, com adaptações óbvias.

Em virtude das hipóteses e do critério de comparação, o integral de f em $[a, b[$ existe (sendo absolutamente convergente. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq \int_a^b |f_n - f| = \int_a^{b-\varepsilon} |f_n - f| + \int_{b-\varepsilon}^b |f_n - f|.$$

Em virtude de (1), $|f_n - f| \leq 2g$ em $[a, b[$ para todo o n, e $2g$ é integrável em $[a, b[$; então, dado arbitrariamente $\delta > 0$ podemos fixar $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\int_{b-\varepsilon}^b |f_n - f| < \frac{\delta}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por causa de (2), $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b - \varepsilon]$, o que pemite afirmar

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow \int_a^{b-\varepsilon} |f_n - f| < \frac{\delta}{2}.$$

Resulta, para $n \geq p$, que $| \int_a^b f_n - \int_a^b f| < \delta$, o que conclui a demonstração.

Exemplos: (O símbolo lim representará sempre $\lim_{n\to\infty}$.) Tem-se $\lim \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+4}\, dx = \frac{1}{4}$ porque

$$\lim \frac{x^n + 1}{x^n + 4} = f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{5} & x = 1 \end{cases}$$

sendo a sucessão limitada por 1 e convergindo para $\frac{1}{4}$ uniformemente em $[0, 1 - \varepsilon]$ para todo o $\varepsilon > 0$. O limite dos integrais é, pois, o integral de f, que coincide com o da constante $\frac{1}{4}$.

2) $\lim \int_0^1 nx(1 - x)^n\, dx = 0$. A sucessão das integrandas converge pontualmente para 0 em $[0, 1]$, mas não uniformemente; com efeito o máximo de $nx(1 - x)^n$ naquele intervalo é $\frac{n^{n+1}}{(1+n)^{n+1}}$, atingido em $x = \frac{1}{1+n}$. Mas a conclusão resulta de a sucessão de integrandas ter majorante 1 e de a convergência ser uniforme nos intervalos da forma $[\varepsilon, 1]$, já que $nx(1 - x)^n \leq n(1 - \varepsilon)^n\ \forall x \in [\varepsilon, 1]$ e a sucessão numérica $n(1 - \varepsilon)^n$ tem limite 0.

3) Seja $a > 1$. Então $\lim \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax}\, dx = \int_0^{\infty} e^{(1-a)x} = \frac{1}{a-1}$. Com efeito, sabemos que para $x \geq 0$ tem-se $\lim(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, sendo a sucessão crescente relativamente a n. Assim, as integrandas são majoradas pela função integrável $e^{(1-a)x}$; e a monotonia permite obter a convergência uniforme nos compactos, em virtude do teorema de Dini (Facto 5).

4) $\lim \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+nx^2}}\, dx = 0$. De facto, designando $f_n(x)$ a sucessão de integrandas, temos

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}\, dx := g(x);$$

a função g é integrável em $]0, +\infty[$ porque $g(x)\ \frac{1}{\sqrt{x}}$ quando $x \to 0$ e $g(x)\ \frac{1}{x^{3/2}}$ quando $x \to +\infty$; e dados $0 < \varepsilon < A$ tem-se $f_n \to 0$ uniformemente em $[\varepsilon, A]$, visto que

$$f(x) \leq \frac{1}{\varepsilon + n\varepsilon^3} \quad \forall x \geq \varepsilon.$$

5) $lim \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^{-n} \sin \frac{x}{n}\, dx = 0$, visto que, pondo $h_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-n}$, tem-se $\lim h_n(x) = e^{-x}$, $h_1(x) \geq h_2(x) \geq h_3(x) \geq \cdots$ e h_2 é integrável em $[0, +\infty[$. Assim, as integrandas são majoradas em módulo por uma integrável e está garantida a convergência uniforme nos compactos.

Exercícios 1) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{\sqrt{(1-x)(1+4n^2x^2)}}\, dx.$$

2) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\, dx.$$

Apresentar o resultado na forma de integral impróprio convergente. *Sugestão:* Começar por fazer a mudança de variável $x^n = t$.

3) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx}{2 + n(x^3 + x)}\, dx.$$

4) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + x + n^2x^2}\, e^{-x}}{n}\, dx.$$

13

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 1ª ORDEM - SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Sejam $p, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas dadas. Seja $T > 0$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq T \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{1}$$

que referiremos habitualmente como "problema periódico" referente ao período T.

Como todas as soluções de (1) se obtêm a partir da fórmula

$$y(x) = e^{-P(x)}(C + \int_0^x e^{P(s)} f(s)\, ds) \tag{2}$$

onde P é uma primitiva de p fixada e C uma constante real, vemos que se obtém uma solução de (1) se, e só se,

$$C(e^{-P(T)} - e^{-P(0)}) + e^{-P(T)} \int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0.$$

Daqui concluímos imediatamente:

Facto 59. *Se $P(T) \neq P(0)$, o problema (1) tem uma e uma só solução.*

Facto 60. *Se $P(T) = P(0)$, o problema (1) tem solução se, e só se, $\int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0$. Neste caso, cada escolha do número C dá uma solução.*

Observação: 1. A condição $\int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0$ significa que cada solução z do problema homogéneo $y' - p(x)y = 0$ satisfaz $\int_0^T z(s) f(s) = 0$.

2. Em particular, uma função f de período T tem primitivas periódicas de período T se, e só se, $\int_0^T f(x)\, dx = 0$. (considerar a equação $y' = f(x)$).

Facto 61. *Suponhamos que p e f são funções contínuas e periódicas com período T. Então as soluções em $\mathbb{R}$ de (1) são periódicas de período T.*

Demonstração: Pretendemos provar que, se $y(x)$ é solução de $y'(x) + p(x)y = f(x)$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo $y(0) = y(T)$, então $y(x + T) = y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Ora, atendendo à periodicidade de p e f imediatamente se verifica que a função

$$w(x) = y(x + T)$$

é ainda solução de $y'(x) + p(x)y = f(x)$. A condição $y(0) = y(T)$ implica $y(0) = w(0)$. Concluimos que $y \equiv w$.

Exercícios: 1) Verificar que a solução do problema $y' + 2xy = 1$, $y(0) = 0$ tem limite 0 quando $x \to +\infty$ e portanto tem máximo absoluto em $[0, +\infty[$. O máximo é atingido no único ponto x em que $y(x)$ coincide com $\frac{1}{2x}$.

2) Calcular a única solução periódica de $y' + (1 + \sin x)y = \cos \frac{x}{2}$.

3) Dado $T > 0$, a cada função contínua e $T-$periódica $p(t)$ associamos um número positivo $j = j(p)$ tal que para *qualquer* solução da equação homogénea $y' = p(t)y$ se tem

$$y(t + T) = j\,y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Verificar que a aplicação $p \mapsto j$ está bem definida no espaço (de Banach) C_T das funções contínuas e $T-$periódicas e que:

(a) $j(p + q) = j(p)j(q)$ $\forall p, q \in C_T$

(b) j é contínua como aplicação de C_T (que tem a norma do supremo) em $\mathbb{R}$.

(c) $j(p) = 1$ se, e só se, as equações $y' \pm p(t)y = 0$ têm soluções T-periódicas não triviais (isto é, não identicamente nulas).

4) Seja $a > 0$ constante.

(a) Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ com $f(+\infty) = L$, verificar que qualquer solução de $y' + ay = f(x)$ tem limite em $+\infty$ e calculá-lo.

(b) Se f é uma função contínua e limitada em $[0, +\infty[$, verificar que existe uma solução de $y' = ay + f(x)$ que é limitada em $[0, +\infty[$.

5) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular a solução geral de $y' + y = |x - a|$. Sugestão para um cálculo rápido: como os coeficientes são constantes, a equação admite uma solução que é polinómio do 1º grau em cada intervalo onde o 2º membro é polinómio do 1º grau.

6) Seja p uma função T-periódica. Verificar que para toda a solução $y(x)$ de $y' + p(x)y = 0$ existem $m \in \mathbb{R}$ e uma função T-periódica B tal que $y(x) = e^{mx}B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. SUGESTÃO: decompôr p na forma $p = c + p_1$, onde $c \in \mathbb{R}$ e p_1 é T-periódica e $\int_0^T p_1(x)\,dx = 0$.

14

OBSERVAÇÕES SOBRE UNICIDADE NO PVI

Lema 1. *Se h é uma função diferenciável em $[a, b]$ e existe uma constante $K \geq 0$ tal que*

$$h'(t) \leq Kh(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

então

$$h(t) \leq h(a)e^{K(t-a)} \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração. Multiplicar por e^{-Kt}. Obtém-se $\frac{d}{dt}(e^{-Kt}h(t)) \leq 0$ e portanto $e^{-Kt}h(t) \leq e^{-Ka}h(a)$ $\forall t \in [a, b]$.

Corolário 1. *(**Desigualdade de Gronwall**) Seja g uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ tal que existem c, $d \geq 0$ verificando*

$$g(t) \leq c + d \int_a^t g(s)\, ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Então

$$g(t) \leq ce^{d(t-a)} \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração. Aplicar o lema com $h(t) = c + d \int_a^t g(s)\, ds$.

Começamos por considerar o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{PVI}$$

Suponhamos que f é contínua numa faixa $I \times \mathbb{R}$, tem valores em $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, e ainda: existe $L \geq 0$ tal que

$$f(x, y) - f(x, \bar{y}) \leq L(y - \bar{y}), \quad \forall x \in I, \, \forall y \geq \bar{y} \tag{1}$$

(condição de Lipschitz unilateral).

Proposição 1. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x, y)$ em I e suponha-se que f satisfaz a condição de Lipschitz unilateral (1). Então*

$$|y(x) - z(x)| \leq e^{L(x-x_0)}|y(x_0) - z(x_0)|, \quad \forall x \geq x_0.$$

Demonstração. Considerar a função $h(x) = (y(x) - z(x))^2$ e aplicar o Lema: obtém-se

$$h'(x) = 2(y(x) - z(x))(f(x, y(x)) - f(x, z(x)) \leq 2Lh(x)$$

(considerar separadamente os casos $y(x) > z(x)$ e $y(x) \leq z(x)$).

Nota importante: No caso em que $L = 0$ obtemos já o seguinte resultado notável: Se para cada x a função $y \mapsto f(x, y)$ é decrescente, então o problema PVI com condição inicial em $x = a$ tem solução única em $[a, b]$. De igual modo se pode afirmar que, se $y \mapsto f(x, y)$ é crescente, há solução única em $[a, b]$ para o problema com o valor inicial dado em $x = b$.

Proposição 2. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x, y)$ em I mas suponha-se agora que f é y-Lipschitziana, isto é:*

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall x \in I,\ \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Então

$$|y(x) - z(x)| \leq e^{L|x-x_0|}|y(x_0) - z(x_0)|, \ \ \forall x \in I.$$

Demonstração. Como (2) implica (1), a desigualdade a demonstrar, para $x \geq x_0$, resulta da proposição anterior. Por outro lado, a cada solução $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ corresponde a solução $y_1(x) := y(-x)$ de $y_1' = -f(-x, y_1)$ que está definida no intervalo $-I$ formado pelos simétricos dos elementos de I. Como (2) também implica (1) para a função $-f(-x, y)$, conclui-se a desigualdade para $x < x_0$. (Em alternativa: refazer directamente o cálculo.)

Observação. Se a condição (2) é válida apenas num rectângulo finito, produto de dois intervalos, $I \times J$, (i.e. substituindo $\mathbb{R}$ por J) a conclusão da Proposição 3.2 é válida para soluções com valores em J.

Observemos que a proposição anterior pode ser reenunciada do modo seguinte, evidenciando que as soluções dependem continuamente dos dados iniciais. Mais precisamente, a norma da solução em cada intervalo compacto depende de modo Lipschitziano (o modo mais simples de dependência contínua!) do dado inicial:

Proposição 3. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x, y)$ em I com f y-Lipschitziana, isto é: verificando (2). Então para cada intervalo compacto $K \subset I$ existe uma constante $M > 0$ tal que*

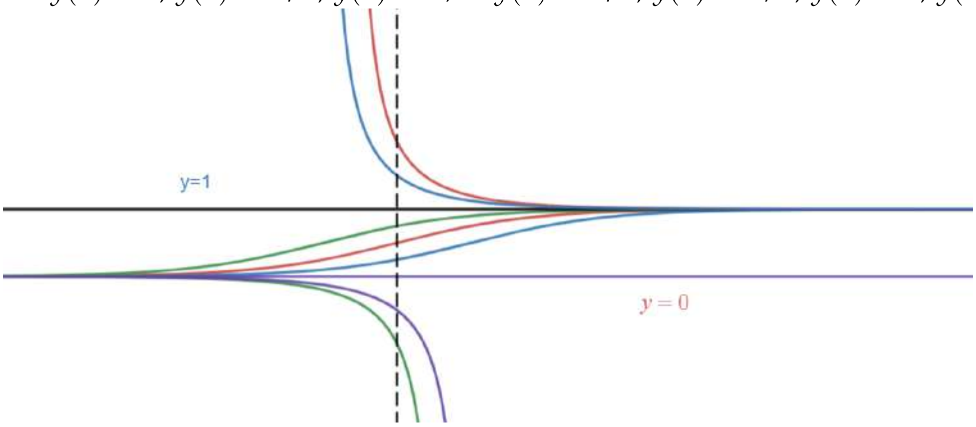
$$\sup_{x \in K} |y(x) - z(x)| \leq M|y(x_0) - z(x_0)|.$$

Proposição 4. *Sob a condição (1), o problema (PVI) tem no máximo uma solução em cada intervalo da forma $[x_0, x_0 + \delta] \cap I$.*

Proposição 5. *Sob a condição (2), o problema (PVI) tem no máximo uma solução em cada intervalo da forma* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I$.

Notas. 1) Se $y(t)$ é solução da equação *autónoma* $y' = f(y)$, então todas as translatadas $y(t-c)$, $c \in \mathbb{R}$, são também soluções.

2) As soluções da logística $y' = y(1-y)$ são, além das constantes 0 e 1: $\frac{e^t}{1+e^t}$ e as suas translatadas se $0 < y(0) < 1$; $\frac{2e^t}{2e^t-1}$ e as suas translatadas se $y(0) > 1$; $\frac{e^t}{e^t-2}$ e as suas translatadas se $y(0) < 0$. Na figura abaixo estão esquematizados os gráficos das soluções $y(t)$ com as condições iniciais $y(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/4$, $y(0) = 1/2$. $y(0) = 3/4$, $y(0) = 3/2$, $y(0) = 2$, $y(0) = -1/2$, $y(0) = -1$.



2) As soluções de $y' = \sqrt{y_+}$ são: todas as constantes negativas; a função

$$u(t) = \begin{cases} t^2/4 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

e todas as suas translatadas. Em particular, as soluções do PVI $y' = \sqrt{y_+}, \;\; y(0) = 0$ são todas as funções $u(t-c)$ com $c \geq 0$. Notar que neste problema há unicidade para $t \leq 0$.

Exercícios 1) Determinar as soluções do problema $y' = y^{1/3}, \;\; y(0) = 0$.

2) Determinar todas as soluções em $\mathbb{R}$ do problema: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. Observar que a equação e a condição inicial implicam que as soluções tomam valores ≤ 0 para $t < 0$

3) Determinar a (única) solução do problema (a) $y' = \sqrt{y_+} + 1, \quad y(0) = 0$; (b) $y' = \sqrt{y_+} + t, \;\; y(0) = 0$. Notar que (b) tem uma solução óbvia $\varphi(t)$ (visível por simples observação da equação). Se houver outra solução y, representemo-la na forma $y(t) = \varphi(t)u(t)$ e deduzamos uma equação diferencial para u.

15

CONTINUAÇÃO DE SOLUÇÕES; COMPORTAMENTO NO INFINITO

Neste capítulo, que é dedicado a extensões e complementos de parte da matéria de Análise Matemática IV, consideramos uma equação $y' = f(x,y)$ com segundo membro contínuo e y-localmente Lipschitziano numa faixa infinita $D = I \times \mathbb{R}^n$, em que I é intervalo *aberto* real.

Proposição 6. *Se $y(x)$ é solução de $y' = f(x,y)$ definida e* limitada *em $[x_0, x_1)$, com $x_1 \in I$, então y é prolongável a $[x_0, x_1]$ como solução da equação.*

Proof. Tem-se $M = \sup_{x_0 \le x < x_1} f(x, y(x)) < +\infty$. Se tomarmos uma sucessão qualquer $t_k \in [x_0, x_1)$, com $t_k \to x_1$, e escrevermos a equação em forma integral, obtemos, a partir do teorema de valor médio sob a forma de desigualdade, $|y(t_i) - y(t_j)| \le M|t_i - t_j|$. O critério de Cauchy implica que $\lim_{x \to x_1^-} y(x)$ existe. Chamemos-lhe y_1. Prolongando $y(x)$ a $[x_0, x_1]$ com o valor y_1 em $x = x_1$ obtemos uma função diferenciável em x_1 (verificação simples,pela regra de Cauchy) e imediatamente se comprova (por passagem ao limite) que ela satisfaz a equação diferencial em $[x_0, x_1]$.

Uma solução $y(x)$ de $y' = f(x,y)$ definida num intervalo $[x_0, x_1)$ (respect. $(x_0, x_1]) \subset I$ diz-se **continuável à direita** (respect **à esquerda**) se existe um prolongamento $\tilde{y}$ de y que ainda é solução da equação diferencial e que está definida num intervalo $[x_0, x_2)$ (respect. $(x_2, x_1]$) com $x_2 > x_1$ (respect. $x_2 < x_0$). Por negação destas condições obtêm-se os conceitos de solução **não continuável â direita** ou **não continuável à esquerda**.

Uma solução definida num subintervalo aberto de I diz-se **não continuável** se é não continuável à direita e não continuável à esquerda.

Teorema 1. *Seja $y(x)$ uma solução de $y' = f(x,y)$ definida no intervalo $[x_0, x_1) \subset I$, não continuável à direita. Então, se $x_1 < \sup I$, tem-se*

$$\lim_{x \to x_1^-} |y(x)| = +\infty.$$

Proof. Admitamos, pois, que $x_1 < \sup I$. Em particular, $x_1 \in I$.

Afirmação 1:

$$\limsup_{x \to x_1^-} |y(x)| = +\infty.$$

Com efeito, se este limite superior for finito, e por ser $x \mapsto y(x)$ limitada nos intervalos compactos, resulta que $y(x)$ é limitada em $[x_0, x_1)$. Pela proposição acima, y prolonga-se como solução ao ponto x_1, e portanto, pelo teorema de existência e unicidade, prolonga-se mesmo a um intervalo da forma $[x_0, x_1 + \delta)$ com $\delta > 0$. Obtemos uma contradição com a hipótese.

Ora, para provarmos que o limite existe, temos de verificar que a condição

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in (x_1 - \varepsilon, x_1) \quad |y(x)| \leq M \tag{$*$}$$

não é verdadeira. Suponhamos que o é, com vista a uma contradição.

Consideremos as fronteiras S_M, S_{2M} das bolas de centro 0 e raios M e $2M$, respectivamente. Conjugando (*) e a Afirmação 1, construimos $t_1 < t_2$ tais que $x_0 < t_1 < t_2 < x_1$, t_1 tão próximo de x_1 quanto se pretenda, e

$$y(t_1) \in S_M, \;\; y(t_2) \in S_{2M}, \;\; M \leq |y(t)| \leq 2M \; \forall t \in (t_1, t_2).$$

E na verdade podemos repetir este raciocínio construindo analogamente $t_3 < t_4$ tais que $t_2 < t_3 < t_4 < x_1$ e t_3, t_4 gozam exactamente da mesma propriedade. (Verificar com cuidado este argumento.) Notemos ainda que também t_3 pode ser tomado tão próximo de x_1 quanto quisermos. Por indução, construimos uma sucessão

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots, \quad t_n \to x_1 \tag{a}$$

com a propriedade:

$$y(t_{2i-1}) \in S_M, \quad y(t_{2i}) \in S_{2M},$$

$$M \leq |y(t)| \leq 2M \;\; \forall t \in (t_{2i-1}, t_{2i}), \;\; i = 1, 2, \cdots$$

Ponhamos $K = \sup_{x_0 \leq x \leq x_1,\, M \leq |z| \leq 2M} |f(x,z)|$. Teremos

$$M \leq |y(t_{2i}) - y(t_{2i-1})| = \int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} |f(s, y(s))| \, ds \leq K(t_{2i} - t_{2i-1})$$

que implica que $t_{2i} - t_{2i-1}$ não tende para zero e portanto contradiz (a).

Demonstra-se analogamente:

Teorema 2. *Seja $y(x)$ uma solução de $y' = f(x,y)$ definida no intervalo $(x_0, x_1] \subset I$ e não continuável à esquerda. Então, se $x_0 > \inf I$, tem-se*

$$\lim_{x \to x_0^+} |y(x)| = +\infty.$$

Este resultado tem consequências importantes para o estudo do domínio da solução do problema de valor inicial

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{PVI}$$

Sabemos que este problema tem uma solução não continuável, única.

Corolário 2. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ a solução de (PVI) não continuável à direita. Suponhamos que $\forall b \in I$ tal que y está definida em $[x_0, b)$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que $|y(x)| \leq K$ $\forall x \in [x_0, b)$. Então o domínio de y contém $[x_0, \sup I)$.*

Demonstração. Seja $[x_0, x_1)$ o domínio de y, suposta não continuável à direita. Se $x_1 < \sup I$ o teorema anterior mostra que há uma contradição com a hipótese.

Corolário 3. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ a solução de $y' = f(x, y)$ não continuável à esquerda. Suponhamos que para todo o $b \in I$ tal que y está definida em $(b,\ x_0]$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que $|y(x)| \leq K\ \forall x \in (b, x_0]$. Então o domínio de y contém $(\inf I,\ x_0]$.*

Corolário 4. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ solução não prolongável de $y' = f(x, y)$. Suponhamos que para todo o intervalo (a, b) tal que $a,\ b \in I$ e y está definida em (a, b) existe um número K (dependente possivelmente de a e b) tal que $|y(x)| \leq K\ \forall x \in (a, b)$. Então o domínio de y é I.*

Para aplicar os corolários anteriores é conveniente dispor de técnicas que permitam estimar as soluções. A desigualdade de tipo Gronwall fornece estimativas simples:

Corolário 5. *Se $D = I \times \mathbb{R}^n$ e existem funções contínuas não negativas $h,\ j : I \to \mathbb{R}$ tais que*

$$|f(x, y)| \leq h(x)|y| + j(x), \quad \forall (x, y) \in D \tag{$*$}$$

então qualquer solução não prolongável de $y' = f(x, y)$ tem domínio I.

Demonstração: Sejam $a,\ b \in I$ tais que o domínio de y contém (a, b).
Fixemos $c \in (a, b)$. Ponhamos $M = \sup_{[c,b]} h < \infty$ e $N = \sup_{[c,b]} j < \infty$. Tem-se em $[c, b]$:

$$y(x) = y(c) + \int_c^x f(s, y(s)\, ds$$

e, por isso, usando a estimativa (*) da hipótese

$$|y(x)| \leq |y(c)| + N(b - c) + M \int_c^x |y(s)|\, ds \quad \forall x \in [c, b).$$

Da desigualdade de Gronwall deduzimos então que y é limitada em $[c, b)$.
De modo análogo se prova que y é limitada em $(a, c]$, utilizando a simetria de variável independente $x \mapsto -x$, para a qual $z(x) = y(-x)$ é solução, no intervalo simétrico, da equação $z' = -f(-x, z)$, à qual aplicamos o mesmo raciocínio.

OBSERVAÇÕES. 1) O caso particular em que f é linear em y (em que se verifica a hipótese deste último corolário) foi estudado em detalhe no curso de Análise Matemática IV, onde vimos que todas as soluções de um sistema linear estão definidas no intervalo I onde a equação tem sentido.
2) Para uma equação de ordem n, digamos

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \cdots, u^{(n-1)}) \tag{e}$$

obtemos enunciados correspondentes aos anteriores por redução a um sistema de n equações de primeira ordem com variável dependente $y = (u, u', \cdots, u^{(n-1)})$. Deve notar-se, pois, que tudo o que envolva limitação ou limites se refere a esta função vectorial. Por exemplo:

Corolário 6. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $u(x)$ solução de (e) não continuável à direita. Suponhamos que $\forall b \in I$ tal que u está definida em $[x_0, b)$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que* $\max\{|(u(x)|, |u'(x)|, \cdots, |u^{(n-1)}(x)|\} \leq K\ \forall x \in [x_0, b)$. *Então o domínio de u contém $[x_0, \sup I)$.*

Vamos ainda referir aplicações úteis a equações autónomas escalares de primeira ordem.

Proposição 7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com um zero z, e suponhamos que existe $A < z$ (respectivamente $B > z$) tal que*

$$f(s) > 0 \ \ \forall s \in [A, z), \quad (\textit{respect.} \ \ f(s) < 0 \ \ \forall s \in (z, B]\,).$$

Então o problema de valor inicial

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0, \tag{$**$}$$

em que $A \leq y_0 \leq z$ (respect. $z \leq y_0 \leq B$), tem solução $y(x)$ definida e crescente (respect decrescente) em $[0, +\infty)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = z.$$

Demonstração: Consideremos a primeira afirmação (a segunda é análoga). Comecemos por verificar o seguinte

Facto: Se $[0, b)$ é um intervalo qualquer onde a solução $y(t)$ de (**) está definida, então $y_0 \leq y(t) < z$ $\forall t \in [0, b)$.

Justificação deste facto: Se existisse $t_1 \in [0, b)$ tal que $y(t_1) = z$, teríamos uma contradição com o teorema de unicidade para o problema de valores iniciais, já que a constante z é solução da equação diferencial e $y \neq z$. Como a imagem de y em $[0, b)$ é intervalo e y é crescente numa vizinhança de 0 (na verdade facilmente se reconhece que é crescente em todo o seu domínio), resulta que tal imagem está contida em $[y_0, z)$.

Do corolário 2 deduz-se que o domínio da solução de (**), já suposta não continuável à direita, contém $[0, +\infty)$. Como $y(x)$ é crescente neste intervalo, tem limite quando $x \to +\infty$ e é claro que $y_0 < L = \lim_{x \to +\infty} \leq z$. Se fosse $L < z$ teríamos

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} f(y(x)) = f(L) > 0.$$

Pela definição de limite e pelo teorema de Weierstrass podemos escolher $C > 0$ tal que

$$y'(x) \geq C \ \ \forall x \in [0, \infty).$$

O teorema fundamental do Cálculo implica então

$$y(x) = y_0 + \int_0^x y'(t)\, dt \geq \ y_0 + Cx \ \to +\infty$$

quando $x \to +\infty$, contradizendo o facto de $y(x)$ ter limite finito e terminando a demonstração.

Analogamente se obteria uma afirmação sobre domínio e limites da solução de (**) alterando nas hipóteses o sinal de f:

$$f(x) < 0 \ \ \forall x \in [A, z), \quad (\text{respect. } f(x) > 0 \ \ \forall x \in (z, B] \ ).$$

Sugerimos ao leitor que redija o correspondente enunciado.

Neste caso surgem nas conclusões limites quando $x \to -\infty$.

Por outro lado, combinando enunciados deste tipo, obtemos

Proposição 8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com dois zeros $z_1 < z_2$ tais que $f(s) > 0 \ \forall s \in (z_1, z_2)$. Então o problema de valor inicial*

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0, \tag{$**$}$$

em que $z_1 < y_0 < z_2$, tem solução com domínio $\mathbb{R}$ e tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = z_2, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = z_1.$$

Exemplo de cálculo de tempo de explosão. A solução $Y(t)$ do problema

$$y' = t(y^3 + 4y + 1), \ \ y(0) = 1$$

calcula-se pela técnica de separação de variáveis, sendo dada implicitamente por

$$\int_1^y \frac{1}{s^3 + 4s + 1} \, ds = t^2/2, \quad \forall y \geq 1, \ t \geq 0 \ \text{ tais } \ \text{ que } \ \ y = Y(t).$$

Daqui resulta que o supremo de tais valores de t é o número $T > 0$ tal que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^3 + 4s + 1} \, ds = T^2/2$$

(é um número porque o integral é convergente). O domínio da solução Y, suposta não continuável à direita, é $[0, T)$. Tem-se

$$\lim_{t \to T} Y(t) = +\infty.$$

A solução não pode, obviamente, prolongar-se ao ponto $t = T$, e por isso o número T é referido como *tempo de explosão* de $Y(t)$.

Exemplo de ausência de unicidade: um zero atingido em tempo finito. Consideremos a situação seguinte.

(H) É dada uma função f contínua em $(A, z]$, C^1 e positiva em (A, z), com $f(z) = 0$, e

$$\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)} \, ds \quad \text{converge.}$$

(Exemplo: $\sqrt{1 - x}$ para $x \leq 1$ (aqui $A = -\infty$, $z = 1$).)

A solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \tag{†}$$

onde $y_0 \in (A, z)$, é dada implicitamente, para $t \geq 0$, por

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)}\, ds = t, \quad \forall y \in [y_0, z), \ t \geq 0 \quad \text{tais} \quad \text{que} \quad y = Y(t).$$

Resulta que o número real

$$\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)}\, ds = T$$

tem as propriedades: a solução $y = Y(t)$ está bem definida para $t \in [0, T)$ e

$$\lim_{t \to T} Y(t) = z.$$

Portanto Y prolonga-se como solução da equação diferencial ao intervalo $[0, T]$, com o valor $Y(T) = z$ (ver o argumento da demonstração da Proposição 6). Como a constante z (definida em $\mathbb{R}$) é também solução, resulta que estamos numa situação de não unicidade – duas soluções distintas passam no ponto (T, z).

Podemos sumarizar as nossas conclusões com o seguinte enunciado.

Proposição 9. *Sob a hipótese (H), a solução $y(t)$ do problema de valor inicial (†) está definida em $[0, T]$, onde $T = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$ e $y(T) = z$.*

Também em contraponto com o caso C^1, uma solução pode "ligar" dois zeros consecutivos em tempo finito. Na verdade, utilizando os argumentos anteriores, prova-se analogamente.

Proposição 10. *Admitamos a hipótese*

(HH) É dada uma função f contínua em $[z_1, z_2]$, C^1 e positiva em (z_1, z_2), $f(z_1) = f(z_2) = 0$ e

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds \quad \textit{converge.}$$

Então, se $y_0 \in (z_1, z_2)$, a solução $y(t)$ do problema de valor inicial (†) está definida em $[S, T]$, onde $T = \int_{y_0}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$, $S = \int_{y_0}^{z_1} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$, $y(S) = z_1$ e $y(T) = z_2$. Em particular, o comprimento do intervalo $[S, T]$ é igual a $\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds$.

Exemplos de argumentos que envolvem soluções não prolongáveis e também a dependência contínua dos dados iniciais. 1) Seja $h(t)$ uma função periódica de período T e tal que $0 < h < 1$. Então a equação diferencial

$$u' = (1 - u)^2 - h(t) \tag{p}$$

tem pelo menos uma solução T-periódica, isto é, uma solução u com $u(0) = u(T)$.

Para justificar esta afirmação seja u_z a solução de (p) com condição inicial

$$u_z(0) = z.$$

Então, *afirmamos:* $0 < u_z(t) < 1 \; \forall z \in [0,1]$ *e* $\forall t > 0$ *tal que a solução esteja tenha sentido em* t.

Começamos por ver que, se $z \in [0,1]$, a desigualdade $0 < u_z(t)$ verifica-se $\forall t > 0$ tal que $u_z(t)$ exista. De facto, se para algum $t_0 > 0$ se tivesse $u_z(t_0) = 0$ poderíamos supor que t_0 era o menor número positivo com essa propriedade e, como $u_z(t) > 0$ numa vizinhança esquerda de t_0, viria $u_z'(t_0) \leq 0$, em contradição com a equação diferencial.. De modo análogo se verifica que $u_z(t) < 1$ para $t > 0$.

Em virtude da teoria anterior, por ser limitada a solução u_z em qualquer eventual intervalo $[0, s)$ onde exista, então u_z, suposta já não prolongável, está definida em $[0, +\infty)$.

Resulta que a função $z \mapsto u_z(T) - u_z(0)$ está bem definida e é contínua no intervalo $[0,1]$. Pelo que acabamos de mostrar, esta função toma um valor positivo para $z = 0$ e um valor negativo para $z = 1$. O teorema do valor intermédio garante que existe z^* tal que $u_{z^*}(T) - u_{z^*}(0) = 0$. Como h é T-periódica, o mesmo sucede com u_{z^*}. (Recordar um argumento utilizado no cap. 13.)

Exercício: O argumento anterior conduziu a uma solução que tem valores em $[0,1]$. Mostrar que, na verdade, há outra solução periódica com valores em $[1,2]$. Sugestão: tomar valores iniciais em $t = T$.

2) Sem resolver a equação

$$u' = (1 + x^2)u(1 - u) \tag{e}$$

podemos demonstrar que existe um número $a > 0$ tal que para cada $b \in (0, a)$ a equação (e) tem duas soluções tais que $u(10) - u(0) = b$.

Para isso, representemos por u_λ a solução (suposta já não prolongável) de (e) com condição inicial

$$u_\lambda(0) = \lambda.$$

Tem-se, evidentemente, $u_0 \equiv 0$ e $u_1 \equiv 1$. Se $0 < \lambda < 1$, u_λ é crescente e só pode tomar valores em $(0,1)$. Assim, u_λ tem domínio $\mathbb{R}$. A função

$$\lambda \mapsto u_\lambda(10) - u_\lambda(0)$$

está bem definida e é contínua em $[0,1]$, sendo positiva em $(0,1)$ e nula nos extremos. A afirmação é então verificada desde que se tome a como o máximo desta função.

16

SUB E SOBRE-SOLUÇÕES EM PROBLEMAS DE 1ª ORDEM

Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e consideremos o PVI

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = A \tag{1}$$

Uma função $v \in C^1[a,b]$ diz-se uma *sobre-solução estrita* de (1) em $[a,b]$ se

$$v'(x) > f(x,v(x)) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \text{e} \quad v(a) > A.$$

Facto 62. *Se $v(x)$ é uma sobre-solução estrita de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $v(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstração: Se a conclusão é falsa, existe $t_1 \in [a,b]$ tal que $v(t_1) = y(t_1)$ e, tomando um ínfimo se necessário, podemos supor que $v(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,t_1[$. Facilmente se conclui então $v'(t_1) \leq y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) = f(t_1, v(t_1)) < v'(t_1)$, uma contradição.

Dizemos que $v \in C^1[a,b]$ é uma *sobre-solução* de (1) em $[a,b]$ se

$$v'(x) \geq f(x,v(x)) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \text{e} \quad v(a) \geq A.$$

Facto 63. *Seja f localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. Se $v(x)$ é uma sobre-solução de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $v(x) \geq y(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstração: Fixemos $\varepsilon > 0$ e o compacto $S_\varepsilon = \{(x,z) |\ x \in [a,b],\ \ |z - y(x)| \leq \varepsilon\}$. Então f é Lipschitziana em relação à segunda variável em S_ε, com certa constante L. Para $\delta > 0$ definamos

$$w_\delta(x) = v(x) + \delta e^{2L(x-a)}.$$

Se δ é suficientemente pequeno, o gráfico de w_δ está contido em S_ε e portanto

$$w'_\delta(x) = v'(x) + 2L\delta e^{2L(x-a)} \geq f(x,v(x)) + 2L\delta e^{2L(x-a)} >$$

$$> f(x, v(x) + \delta e^{2L(x-a)}) = f(x, w_\delta(x))$$

$\forall x \in [a,b]$. Então w_δ é sobresolução estrita para (1).. Do resultado anterior deduz-se $w_\delta(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Tomando limite quando $\delta \to 0$ obtém-se a desigualdade pretendida.

Definimos sub-solução estrita e sub-solução de (1) em $[a,b]$ invertendo o sentido das desigualdades que serviram para definir sobre-solução estrita e sobre-solução. E, do mesmo modo, demonstra-se que

Facto 64. *Seja f localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. Se $u(x)$ é uma sub-solução de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $u(x) \leq y(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Se em (1) substituirmos a condição inicial $y(a)$ pela "condição final" $y(b) = B$ e, seguindo o esquema anterior, definirmos sobre-solução como uma função v tal que $v(b) \geq B$ e $v'(x) \leq f(x, v(x))$ $\forall x \in [a,b]$, obtemos um enunciado análogo ao anterior. Do mesmo modo, o conceito de subsolução que se adapta à condição final é: função u tal que $u(b) \leq B$ e $u'(x) \geq f(x, u(x))$ $\forall x \in [a,b]$.

Exercícios: 1) Seja $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 < h(t) < \frac{1}{4}$ $\forall t \in [0,T]$. Seja $y(t)$ solução de

$$y' = y(1-y) - h(t). \tag{E}$$

Mostrar que, se $1/2 < y(0) < 1$, então $1/2 < y(T) < 1$. E, se $0 < y(T) < 1/2$, então $0 < y(0) < 1/2$.

Concluir que, se h está definida em $\mathbb{R}$ e é T-periódica, a equação (E) tem duas soluções periódicas.

2) Considere-se a solução de $y' = y^2 + \sin t$ tal que $y(0) = 2$. Usando as equações autónomas $y' = y^2 \pm 1$ para construir sub- e sobre-soluções* com a mesma condição inicial, mostrar que $y(t)$ tem tempo de explosão T tal que

$$\frac{\pi}{2} - \arctan 2 < T < \frac{\ln 3}{2}.$$

*Pelo método de resolução das separáveis, obtemos as funções: $\tan(t + \arctan 2)$ e $\frac{e^{2t}+3}{3-e^{2t}}$.

3) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $a(t) \geq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Mostrar que a solução $y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = (y^2 - 2)a(t)(\frac{1}{2} + t), \quad y(0) = 2$$

tem tempo de explosão $T > 0$ finito, dando um majorante de T.

4) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $a(t) \geq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Mostrar que a solução $y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = (y^2 - 3)a(t)(3 + 2t), \quad y(0) = 2$$

tem tempo de explosão $T > 0$ finito, dando um majorante de T.

17

PROBLEMAS DE VALORES FRONTEIRA – EQUAÇÕES LINEARES DE 2ª ORDEM

Neste capítulo estudaremos um modelo simplificado de "problema com valores fronteira" linear. Precisamente, vamos considerar o problema de 2ª ordem

$$y'' + a(x)y = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{3}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{4}$$

onde a e f são funções contínuas no intervalo compacto $[0, l]$, com $l > 0$. Veremos que, ao contrário dos problemas de valores iniciais, problemas com condições deste tipo não gozam, em geral, das propriedades de existência e unicidade de solução. Tem um papel importante nesta discussão a equação homogénea associada

$$y'' + a(x)y = 0, \quad x \in [0, l] \tag{5}$$

e em particular quando lhe juntamos as condições (4).

Facto 65. *O conjunto de soluções $y(x)$ de (5)-(4) é um espaço vectorial de dimensão 0 ou 1.*

Demonstração: Se $y,\ z$ são soluções de (5)-(4), então, como o Wronskiano de $y,\ z$ tem uma linha nula, aquelas soluções são linearmente dependentes.

Vamos então ver que a resolução do problema (3)-(4) depende essencialmente do espaço de soluções de (5)-(4).

Facto 66. *São equivalentes as afirmações:*
(5)-(4) só tem a solução trivial ($y \equiv 0$);
$\forall f \in C([0, l])$ o problema (3)-(4) tem uma e uma só solução.

Demonstração: Sabemos que a solução geral de (3) admite a representação

$$y = y_p + c_1\varphi + c_2\psi$$

onde y_p é solução fixada de (3), $\varphi,\ \psi$ constituem uma base de soluções de (5) e $c_1,\ c_2$ são constantes reais. Uma tal solução satisfaz (4) se, e só se

$$\begin{cases} y_p(0) + c_1\varphi(0) + c_2\psi(0) = 0 \\ y_p(l) + c_1\varphi(l) + c_2\psi(l). \end{cases} \tag{6}$$

As constantes c_i que determinarão a solução procurada são, pois, soluções do sistema linear 2×2 (6) cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \varphi(l) & \psi(l) \end{bmatrix}$$

A solução de (6) existe e é única para qualquer vector coluna $[y_p(0), y_p(l)]^t$ se, e só se, a matriz é invertível, ou equivalentemente se o sistema homogéneo, em que $[y_p(0), y_p(l)]^t$ é substituído pelo vector nulo, só tem a solução $c_1 = 0 = c_2$ – o que, precisamente pelo cálculo que nos conduziu a (6), significa que (5)-(4) só admite a solução trivial.

Observação: A hipótese do Facto 66 é verificada se $a \leq 0$ em $[0, l]$. De facto, seja y uma solução de (5)-(4); multiplicando (5) por $y(x)$ e integrando por partes obtemos

$$[y(x)y'(x)]_0^l - \int_0^l y'(x)^2 \, dx + \int_0^l a(x)y(x)^2 \, dx = 0.$$

Em virtude de (4) tem-se $[y(x)y'(x)]_0^l = 0$. Resulta $0 \leq \int_0^l y'(x)^2 \, dx - \int_0^l a(x)y(x)^2 \, dx = 0$, de onde $y' \equiv 0$ e, novamente por (4), $y \equiv 0$.

Facto 67. *Suponhamos que (5)-(4) tem uma solução $\varphi \neq 0$ (isto é, uma solução não trivial). Então (3)-(4) tem soluções se, e só se*

$$\int_0^l f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \qquad (s)$$

e nesse caso tem uma infinidade de soluções.

Demonstração: Suponhamos que (5)-(4) tem uma solução $\varphi \neq 0$:

$$\varphi''(x) + a(x)\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \qquad (*)$$

e que (3)-(4) tem uma solução y:

$$y'' + a(x)y = f(x), \quad y(0) = 0, \; y(l) = 0. \qquad (**)$$

Multiplicando a equação de (**) por $\varphi(x)$ e integrando em $[0, l]$ (por partes no caso do 1º termo) obtemos

$$[y'(x)\varphi(x)]_0^l - $$
$$- \int_0^l y'(x)\varphi'(x) \, dx + \int_0^l a(x)y(x)\varphi(x) \, dx = \int_0^l f(x)\varphi(x) \, dx.$$

Pelas condições de φ nos extremos do intervalo, tem-se $[y'(x)\varphi(x)]_0^l = 0$. Integrando novamente por partes vem

$$-[y(x)\varphi'(x)]_0^l +$$
$$+ \int_0^l y(x)\varphi''(x) \, dx + \int_0^l a(x)y(x)\varphi(x) \, dx = \int_0^l f(x)\varphi(x) \, dx.$$

Utilizando as condições de $y(x)$ nos extremos resulta

$$\int_0^l y(x)(\varphi''(x) + a(x)\varphi(x) = \int_0^l f(x)\varphi(x)) \, dx.$$

e, pela equação em (*), conclui-se (s).

Suponhamos agora que f satisfaz (s). Vamos construir uma solução particular de (3) utilizando a fórmula de "variação das constantes". Em primeiro lugar, escolhamos uma base de soluções de (5) a partir de φ: basta considerar $\{\varphi, \psi\}$, onde ψ é qualquer solução de (5) que verifica $\psi(0) = 1$ (por exemplo, a solução do PVI $\psi(0) = 1,\ \psi'(0) = 0$) e que, portanto, é linearmente independente de φ. Como sabemos (ver Aula 9), uma solução particular de (3) é dada por

$$y_p(x) = c_1(x)\varphi(x) + c_2(x)\psi(x)$$

onde as derivadas das funções $c_i(x)$ são, para cada x, soluções do sistema linear 2×2

$$c_1'(x)\varphi(x) + c_2'(x)\psi(x) = 0$$

$$c_1'(x)\varphi'(x) + c_2'(x)\psi'(x) = f(x).$$

Resolvendo este sistema pelas fórmulas de Cramer ou por qualquer processo elementar encontramos

$$c_1'(x) = -\frac{\psi(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{\varphi(x)f(x)}{W(x)}$$

onde $W(x)$ é o determinante do sistema, isto é, o Wronskiano da base formada por φ e ψ. Obtemos finalmente

$$y_p(x) = \Big(-\int_0^x \frac{f(t)\psi(t)}{W(t)}\,dt\Big)\varphi(x) + \Big(\int_0^x \frac{f(t)\varphi(t)}{W(t)}\,dt\Big)\psi(x).$$

De $\varphi(l) = 0$ e (s) resulta imediatamente que y_p satisfaz (3)-(4). Além disso, é fácil ver que o conjunto de soluções de (3)-(4) é dado por

$$y_p(x) + A\varphi(x)$$

onde A é um número real arbitrário, o que termina a demonstração.

Observação: Na fórmula que usámos para a solução particular, o factor W pode sair dos integrais porque, para o tipo de equação que estamos a considerar (sem termo em y'), o wronskiano de duas soluções quaisquer é constante (exercício simples).

17.1 cálculo da solução única; função de green

Vamos agora determinar uma expressão analítica da solução única a que se refere o Facto 66. Supomos, pois, que (5)-(4) só tem a solução $y \equiv 0$. Para este efeito, convém escolher uma base de soluções $\{\varphi, \psi\}$ de (5) da seguinte maneira:

φ é qualquer solução não nula de (5) tal que $\varphi(0) = 0$ (por exemplo, a solução do PVI $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1$);

ψ é qualquer solução não nula de (5) tal que $\psi(l) = 0$.

Em virtude da hipótese que estamos a admitir, $\varphi(l) \neq 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Assim, facilmente se conclui que efectivamente $\{\varphi, \psi\}$ é base de soluções e, incidentalmente, o seu Wronskiano é $W = W(0) = -\psi(0)\varphi'(0)$. Vamos recorrer à solução geral de (3) que tem a expressão

$$y(x) = y_p(x) + A\varphi(x) + B\psi(x), \qquad (*)$$

onde

$$y_p(x) = \Big(- \int_0^x \frac{f(t)\psi(t)}{W(t)}\,dt \Big) \varphi(x) + \Big(\int_0^x \frac{f(t)\varphi(t)}{W(t)}\,dt \Big) \psi(x). \qquad (**)$$

Impondo em (*) a condição $y(0) = 0$ imediatamente se conclui que $B = 0$. E A calcula-se a partir de $y(l) = 0$, resultando

$$A = \frac{1}{W} \int_0^l \psi(t) f(t)\,dt.$$

Logo, a solução de (3)-(4) é

$$y_p(x) + \frac{1}{W}\Big(\int_0^l \psi(t) f(t)\,dt\Big)\varphi(x)$$

que, por conveniência, vamos escrever na forma

$$y_p(x) + \frac{1}{W}\Big(\int_0^x \psi(t) f(t)\,dt\Big)\varphi(x) + \frac{1}{W}\Big(\int_x^l \psi(t) f(t)\,dt\Big)\varphi(x).$$

Inserindo a expressão (**), esta última simplifica-se para

$$\frac{1}{W}\Big(\int_x^l \psi(t) f(t)\,dt\Big)\varphi(x) + \frac{1}{W}\Big(\int_0^x \varphi(t) f(t)\,dt\Big)\psi(x).$$

A expresssão analítica que procuramos pode, pois, escrever-se

$$y(x) = \int_0^l G(x,t) f(t)\,dt \qquad (7)$$

onde

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{W}\varphi(t)\psi(x), & \text{se } 0 \le t \le x \le l \\ \frac{1}{W}\varphi(x)\psi(t), & \text{se } 0 \le x \le t \le l \end{cases} \qquad (8)$$

A função G aqui introduzida chama-se *função de Green* para o problema (3)-(4). Reconhece-se que é uma função contínua no quadrado $[0,l] \times [0,l]$ e nula na fronteira deste.

Facto 68. *Suponhamos que $a(x) \le 0$ $\forall x \in [0.l]$. Então se $f \ge 0$, a solução (única) do problema (3)-(4) é ≤ 0.*

Demonstração: Suponhamos que $y(x)$, solução de (3)-(4), tem pelo menos um valor positivo. Então facilmente se reconhece que existe um intervalo $[c,d] \subset [0,l]$ tal que $y(c) = y(d) = 0$ e $y(x) > 0$ $\forall x \in]c,d[$. Multiplicando (3) por $y(x)$ e integrando (também por partes) em $[c,d]$ obtém-se

$$[y(x)y'(x)]_c^d - \int_c^d y'(x)^2\,dx + \int_c^d a(x)y(x)^2\,dx = \int_c^d f(x)y(x)\,dx.$$

Como a primeira parcela é nula, obtemos um valor ≤ 0 no primeiro membro e um valor ≥ 0 no segundo. Logo,

$$-\int_c^d y'(x)^2\,dx + \int_c^d a(x)y(x)^2\,dx = 0$$

de onde $y' \equiv 0$ em $[c,d]$, $y(x)$ constante em $[c,d]$, e, como $y(c) = 0$, temos $y(x) \equiv 0$ em $[c,d]$, contradizendo o que estamos a admitir.

Observemos que, em particular, repetindo o argumento com $f \equiv 0$, obtemos $y \leq 0$ e também $y \geq 0$ (porque $-y$ satisfaz a mesma equação). Estamos, pois, na situação em que (5)-(4) tem apenas a solução trivial, justificando a menção à solução única no enunciado. (Ver Observação a seguir ao facto 66.)

Exemplo: Consideremos o problema (3)-(4) com $a \equiv \lambda$ (constante) e $l = \pi$:

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad x \in [0, \pi] \tag{9}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{10}$$

Do Facto anterior resulta imediatamente que, se $\lambda \leq 0$, o problema homogéneo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, \pi] \tag{11}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{12}$$

só tem a solução trivial (nota: o mesmo se concluiria ensaiando as condições de fronteira na solução geral $y(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$ ou $y(x) = c_1 + c_2 x$) e portanto, se $f \geq 0$, a solução de (9)-(12) satisfaz $y \leq 0$.

Exemplo. Para o problema

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = 0, \ y(\pi) = 0 \tag{P_λ}$$

onde λ é um parâmetro real, é um exercício simples reconhecer que estamos nas condições de existência de solução única se λ não é quadrado de um inteiro positivo, isto é, $\lambda \neq n^2$ para $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se λ é também positivo, podemos tomar $\varphi(t) = \sin\sqrt{\lambda}t$, $\psi(t) = \sin\sqrt{\lambda}(\pi - t)$, e a função de Green vem dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)} \sin\sqrt{\lambda}t \sin\sqrt{\lambda}(\pi - x), & \text{se } 0 \leq t \leq x \leq \pi \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)} \sin\sqrt{\lambda}x \sin\sqrt{\lambda}(\pi - t), & \text{se } 0 \leq x \leq t \leq \pi \end{cases} \tag{13}$$

Obtemos então uma conclusão interessante, que estende o facto 68 de um modo mais subtil: *Se $0 < \lambda < 1$ e $f \geq 0$, para a solução de (P_λ) tem-se $y \leq 0$!* Isto porque para tais λ se verifica imediatamente que $G(x,t) \leq 0 \ \forall (x,t)$.

Exercícios: 1) Estudar, em função de λ, a existência de soluções não triviais do problema homogéneo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \ y(\pi) = 0.$$

2) Sob que condições é solúvel o problema

$$y'' + n^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \ y(\pi) = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$?

3) Determinar os valores positivos de a tais que o problema

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \ y(a) = 0$$

não tem solução.

4) Determinar a função de Green para o problema (P_λ) no caso $\lambda \leq 0$.

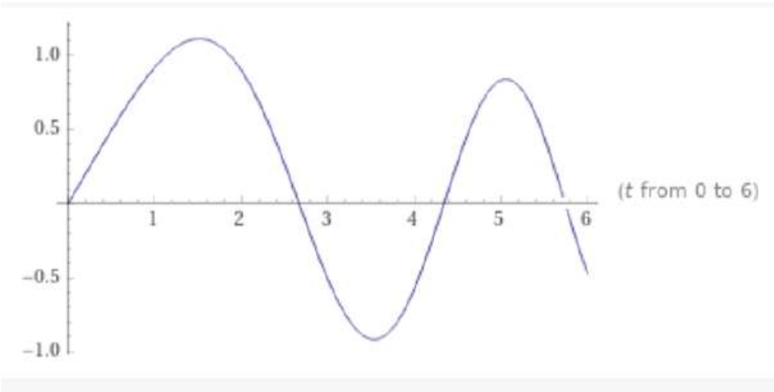
5) (a) A figura esquematiza o gráfico da solução $y_0(t)$ do problema de valores iniciais

$$y'' + t\,y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

obtido com o Wolframalpha. De acordo com o mesmo programa, y_0 tem uma sucessão de zeros $0 < z_1 < z_2 < z_3 < \cdots$, sendo

$$z_1 = 2.666..., \;\; z_2 = 4.342... \;\; z_3 = 5.741, \cdots$$

.



Qual dos seguintes problemas de valores fronteira tem solução para qualquer função contínua f que figura no segundo membro? Que há a dizer quanto ao outro problema?

$$y'' + t\,y = f(t), \quad y(0) = 0, \;\; y(z_2) = 0$$

$$y'' + t\,y = f(t), \quad y(0) = 0, \;\; y(2) = 0$$

(b) Verificar que a solução do problema

$$z'' - t\,z = 5t, \;\; t \in [0,1], \quad z(0) = 0, \;\; z(1) = 0$$

satisfaz

$$-5 \leq z(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

SUGESTÃO: Para (a) observar que o problema homogéneo correspondente ao primeiro problema tem a solução não nula cujo gráfico é dado; no 2º problema isto não sucede porque qualquer solução do problema homogéneo que se anula em $t = 0$ é múltipla da que está representada no gráfico (pelo teorema de existência e unicidade), logo só se anula em $t = 2$ se for identicamente nula.

Para (b) observar que a desigualdade da direita decorre imediatamente do Facto 68. A da esquerda obtém-se diretamente da equação diferencial: seja t^* o ponto de $[0,1]$ onde $z(t)$ atinge o seu mínimo; então, como $z''(t^*) \geq 0$, vem $-t^* z(t^*) \leq 5t^*$.

17.2 UM EXEMPLO DE PROBLEMA NÃO LINEAR MUITO SIMPLES

Vamos agora utilizar a função de Green para ilustrar a existência de solução para o problema não linear

$$y'' + a(x)y = \varepsilon g(x,y), \quad x \in [0,l] \tag{14}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{15}$$

onde ε é um parâmetro real e $g : [0,l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e Lipschitz em relação à segunda variável: existe $L > 0$ tal que

$$|g(x,u) - g(x,v)| \leq L|u - v| \quad \forall x \in [0,l], \ \ u, v \in \mathbb{R}. \tag{Lip}$$

Facto 69. *Admitamos (Lip) e também que $a(x)$ é tal que (5)-(4) só tem a solução trivial ($y \equiv 0$). Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ o problema (14)-(15) tem solução única.*

Demonstração: Graças à hipótese sobre a função a (o problema linear homogéneo subjacente só possui a solução trivial) podemos invocar a existência da função de Green G e, com base na expressão (7) que obtivemos na secção anterior, afirmar que (14)-(15) é equivalente à equação integral

$$y(x) = \varepsilon \int_0^l G(x,t) g(t, y(t))\, dt, \quad x \in [0,l] \tag{int}$$

ou, de modo mais abstracto,

$$y = \varepsilon T(y) \tag{$int*$}$$

onde $T : C[0,l] \to C[0,l]$ é o operador (não linear) definido por

$$(T(y))(x) = \int_0^l G(x,t) g(t, y(t))\, dt, \quad y \in C[0,l].$$

Ora, se u, $v \in C[0,l]$ facilmente calculamos

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\int_0^l G(x,t)(f(t,u(t)) - f(t,v(t)))\, dt \leq$$

$$\int_0^l |G(x,t)| L |u(t) - v(t)|\, dt.$$

Ponhamos $M = \max_{0 \leq x, t \leq l} G(x,t)$ e representemos por $\|\cdot\|_\infty$, como habitualmente, a norma do máximo em espaços de funções contínuas. Tomando o máximo em x na desigualdade precedente obtemos

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq ML \|u - v\|_\infty.$$

Assim, o operador εT é uma contração em $C[0,l]$ se $\varepsilon < \varepsilon_0$, onde $\varepsilon_0 = 1/(ML)$. Da formulação do problema na forma $(int*)$ resulta então, invocando o teorema de ponto fixo para as contrações, que a solução existe e é única.

Exercícios: 1) Qual é a solução de

$$y'' + y = e^y - 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,?$$

2) Mostrar que
$$y'' + y = y^2 + 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$
não tem solução.

3) Adaptando o argumento do Facto anterior, dar um majorante para $|\mu|$ de tal modo que o problema
$$y'' + \lambda y = \mu \arctan y + 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$
onde $0 \leq \lambda < 1$, tenha solução. (O majorante dependerá de λ.)

Resolução do caso $\lambda = 0$: Considere-se a função de Green do problema
$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \ \ y(1) = 0 :$$
$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & \text{se } 0 \leq t \leq x \leq l \\ t(x-1), & \text{se } 0 \leq x \leq t \leq l. \end{cases} \tag{16}$$
Então o problema proposto (com $\lambda = 0$) é equivalente à equação integral
$$y(x) = \mu \int_0^1 G(x,t)((\arctan y(t)) + 1)\, dt, \quad x \in [0,1].$$
Designando $T : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador definido por
$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,t)((\arctan u(t)) + 1)\, dt$$
a equação anterior lê-se como o problema de ponto fixo
$$y = \mu T(y).$$
Ora, como $\max |G| = 1/4$ e arctan é uma função com constante de Lipschitz igual a 1, facilmente obtemos, com uma estimativa rápida em que o integral em $[0,1]$ fica majorado pelo valor máximo da integranda
$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|u - v\|_\infty.$$
Portanto o operador μT é contração se $|\mu| < 4$ e nessa condição o problema tem solução única.

Vamos observar, no entanto, que esta estimativa pode ser melhorada procedendo de modo mais cuidadoso:
$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |G(x,t)| \|u - v\|_\infty \, dt$$
Ora, imediatamente se calcula: $\int_0^1 |G(x,t)|\, dt = \frac{1}{2}(x - x^2)$. Assim,
$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u - v\|_\infty$$
de onde concluímos que na verdade o problema tem solução única se $|\mu| < 8$.

4) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada, digamos: existem m, $M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq g(s) \leq M \ \forall s \in \mathbb{R}$. Mostrar que, se f é contínua em $[0,\pi]$ e o problema
$$y'' + y + g(y) = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$
tem uma solução $y(x)$, então
$$2m \leq \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \leq 2M.$$

18

O PROBLEMA DE VALORES INICIAIS REVISITADO

No capítulo anterior vimos como o estudo de certas equações integrais, interpretadas como problemas de ponto fixo, permite obter existência (e unicidade) de soluções de problemas de valores fronteira. Vamos agora rever o teorema de existência e unicidade para o PVI (problema de valores iniciais) com recurso a uma equação integral. Comecemos por estudar a equação integral simples

$$u(x) = \int_a^x K(x,t) g(t, u(t))\, dt \tag{17}$$

onde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Note-se que, ao contrário das equações integrais encontradas no final do capítulo anterior, o extremo do integral não é uma constante, mas coincide com a variável independente da função incógnita u.

Exemplos: 1) Se $K \equiv 1$, (17) é equivalente ao problema de valor inicial de primeira ordem

$$u' = g(x,u), \quad u(a) = 0.$$

2) Observemos que o PVI de 2ª ordem

$$u'' = f(x), \quad u(a) = 0. \quad u'(a) = 0$$

tem a solução que se obtém quando se utiliza a fórmula para encontrar uma solução particular

$$u(x) = (\int_a^x f(t)\psi(t)\, dt)\varphi(x) - (\int_a^x f(t)\varphi(t)\, dt)\psi(x)$$

onde se usou a base de soluções de $y'' = 0$: $\varphi(x) = x - a$ e $\psi(x) = 1$, que tem wronskiano igual a -1.

Portanto, com $K(x,t) = x - t$, (17) é equivalente ao problema de valor inicial de segunda ordem

$$u'' = g(x,u), \quad u(a) = 0, \quad u'(a) = 0.$$

3) O problema de 2ª ordem

$$u'' + u = f(x), \quad u(0) = 0. \quad u'(0) = 0$$

tem a solução

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt$$

como imediatamente se conclui através da fórmula de uma solução particular. Assim, o problema não linear

$$u'' + u = g(x, u), \quad u(0) = 0. \quad u'(0) = 0$$

é equivalente a (17) com $K(x, t) = \sin(x - t)$.

Facto 70. *Suponhamos que g é contínua nas duas variáveis e Lipschitziana relativamente à segunda, isto é: existe $L > 0$ tal que*

$$|g(x, u) - g(x, v)| \leq L|u - v| \quad \forall x \in [a, b], \quad u, v \in \mathbb{R}. \qquad (Lip)$$

Então (17) tem solução única em $[a, b]$.

Demonstração: Introduzamos em $C[a, b]$ a norma (aqui representada simplesmente pelo símbolo $\|\cdot\|$)

$$\|u\| = \sup_{x \in [a,b]} e^{-\lambda(x-a)}|u(x)|$$

onde λ é um número positivo que será fixado adiante. (É muito simples ver que se trata de uma norma e que é equivalente à norma usual do máximo, no sentido em que as sucessões convergentes para uma das duas normas são também convergentes para a outra, já que

$$e^{-\lambda(b-a)}\|u\|_\infty \leq \|u\| \leq \|u\|_\infty \quad \forall u \in C[a, b]).$$

Consideremos o operador $T : C[a, b] \to C[a, b]$ tal que Tu é a função dada pelo 2º membro de (17). Então, se u, $v \in C[a, b]$, tem-se, para $x \in [a, b]$:

$$e^{-\lambda(x-a)}|Tu\,(x) - Tv\,(x)| \leq$$

$$e^{-\lambda(x-a)} \int_a^x K(x, t)|g(t, u(t)) - g(t, v(t))|\, dt \leq e^{-\lambda(x-a)} ML \int_a^x |u(t) - v(t)|\, dt$$

onde $M = \max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t)|$. Como, por definição da norma introduzida, se tem

$$e^{-\lambda(t-a)}|u(t) - v(t)| \leq \|u - v\|, \quad \forall t \in [a, b]$$

concluímos

$$e^{-\lambda(x-a)}|(Tu\,(x) - Tv\,(x)| \leq$$

$$e^{-\lambda(x-a)} ML\|u - v\| \int_a^x e^{\lambda(t-a)}\, dt = ML\frac{1 - e^{-\lambda(x-a)}}{\lambda}\|u - v\|.$$

Assim, basta escolher $\lambda > ML$ para que T seja uma contração relativamnte à norma $\|\cdot\|$, o que perrmite concluir.

Vamos agora utilizar o método exposto para estudar a *dependência contínua* das soluções de uma equação diferencial em relação aos dados iniciais e a eventuais parâmetros presentes na equação. Comecemos por ilustrar a questão com dois exemplos:

Exemplo: Consideremos o PVI

$$u' = g(x, u, \mu), \quad x \in [0, l] \qquad (18)$$

$$u(0) = \alpha \qquad (19)$$

onde o 2º membro da equação é uma função contínua $g : [0.l] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$. A variável k-dimensional μ e o valor inicial α constituem os *parâmetros* presentes na equação, de modo que as soluções são funções de x, α e μ. Imediatamente reconhecemos que este problema é equivalente à equação integral

$$u(x) = \alpha + \int_0^x g(t, u(t), \mu)\, dt.$$

Como a solução depende de α e μ é mais rigoroso escrever

$$u(x, \alpha, \mu) = \alpha + \int_0^x g(t, u(t, \alpha, \mu), \mu)\, dt.$$

Exemplo: O PVI

$$u'' = g(x, u, \mu), \quad x \in [0, l] \tag{20}$$

$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta \tag{21}$$

(onde g é como no exemplo precedente) reduz-se, introduzindo a nova função incógnita $v(x)$ através de

$$u(x) = \alpha + \beta x + v(x),$$

a este outro:

$$v'' = g(x, \alpha + \beta x + v, \mu), \quad x \in [0, l] \tag{22}$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \tag{23}$$

o qual, por sua vez, é equivalente à equação integral

$$v(x) = \int_0^x (x - t) g(t, \alpha + \beta t + v(t), \mu)\, dt.$$

Tal como no exemplo anterior, é mais apropriado escrever

$$v(x, \alpha, \beta, \mu) = \int_0^x (x - t) g(t, \alpha + \beta t + v(t, \alpha, \beta, \mu), \mu)\, dt.$$

Alternativamente, se quiséssemos manter a incógnita inicial u, consideraríamos a equação

$$u(x, \alpha, \beta, \mu) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x - t) g(t, u(t, \alpha, \beta, \mu), \mu)\, dt.$$

Exercício: O PVI de 2ª ordem

$$u'' = x^2 u' + 3xu, \quad u(0) = 1, \;\; u'(0) = 0$$

é equivalente à equação integral

$$u(x) = 1 + \int_0^x (x + t) u(t)\, dt.$$

Com motivação nestes exemplos, propomo-nos considerar a seguinte equação integral geral, com parâmetros

$$y(x,\lambda,\mu) = \phi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)g(t,y(t,\lambda,\mu),\mu)\,dt \tag{24}$$

onde todas as funções que surgem se supõem contínuas; a variável independente x percorre um intervalo fixado $[0,l]$ e há dependência de parâmetros $\lambda \in \mathbb{R}^k$ (por via da função ϕ) e $\mu \in \mathbb{R}^p$ (pela presença na expressão de g).

Mais precisamente, temos então:

Teorema 6. *Seja $\phi : [0,l] \times A \to \mathbb{R}$ contínua, em que $A \subset \mathbb{R}^k$ é compacto; seja $g : [0,l] \times \mathbb{R} \times B$ contínua, onde B é um compacto de $\mathbb{R}^p$; e suponha-se que g é uniformemente Lipschitziana na 2^a variável, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$|g(x,u,\mu) - g(x,v,\mu)| \leq L|u-v|$$
$$\forall x \in [0,l], \quad u,v \in \mathbb{R}, \mu \in B. \tag{Lipuni}$$

Então a equação (24) tem uma solução única que é contínua em $[0,l] \times A \times B$.

Demonstração: A demonstração imita a do Facto anterior mas utiliza um espaço de funções diferente. Seja $X = C([0,l] \times A \times B)$ o espaço de Banach das funções contínuas em $[0,l] \times A \times B$ com a norma do máximo. Introduzamos em X a norma equivalente

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,l],\, \lambda \in A,\, \mu \in B} e^{-kx}|u(x,\lambda,\mu)|$$

onde k é um número positivo a escolher.

Define-se um operador $T : X \to X$ designando por $(Ty)(x,\lambda,\mu)$ o 2º membro de (24), para cada $y \in X$.

Tal como na demonstração do Facto 70 e com o mesmo significado de M vem então

$$\|Tu - Tv\| \leq ML\frac{1}{k}\|u-v\|.$$

Escolhendo $k > ML$, T é contração em X e daí resulta a conclusão.

Observação: O significado deste teorema é que a solução da equação (24) varia continuamente com os parâmetros. O mesmo se aplica aos problemas de valores iniciais redutíveis a uma equação integral deste tipo. Por outro lado, é fácil reconhecer que vale uma versão "vectorial" do teorema, com $\mathbb{R}$ substituído por $\mathbb{R}^n$; ϕ e g tomam então valores em $\mathbb{R}^n$ e o mesmo sucede com a solução y. A demonstração é a mesma, com o sinal de valor absoluto a significar norma euclidiana.

Exercício: Seja $y(t) = y(t,\lambda,\beta)$ a solução do problema de valores iniciais com parâmetros

$$y'' + \lambda y + (1-\lambda)\frac{y}{1+y^2} = \cos(2t), \quad y(0) = -1/3,\ y'(0) = \beta$$

que, como sabemos, está bem definida e é contínua para todos os valores reais das suas variáveis. Determinar

$$\lim_{(\lambda,\beta)\to(1,0)} y(t,\lambda,\beta)$$

para $t = 0.5$ e $t = 0.9$ e concluir que $\exists \varepsilon > 0$ tal que, se $\|(\lambda, \beta) - (1,0)\| < \varepsilon$, a função $t \mapsto y(t, \lambda, \beta)$ tem uma raiz em $[0.5, 0.9]$. (Para abreviar cálculos, observar que $y'' + y = \cos(2t)$ tem uma solução que é múltiplo de $\cos(2t)$.)

Vejamos, finalmente, o aspecto que assume a continuidade das soluções relativamente aos parâmetros no caso geral do PVI para uma equação diferencial ordinária (sistema de equações de 1ª ordem)

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y(0) = \alpha \tag{25}$$

onde, para fixar ideias e simplificar a escrita, tomamos $x = 0$ como "instante inicial". Podemos querer escrever (25) na forma mais explícita (com o símbolo y' a representar a derivação em ordem à 1ª variável)

$$y'(x, \alpha, \lambda) = f(x, y(x, \alpha, \lambda), \lambda), \quad y(0, \alpha, \lambda) = \alpha.$$

Faremos a seguinte hipótese, habitual no tratamento deste problema:

(H) $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua num aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, e é localmente Lipschitziana em relação à 2ª variável, isto é: para cada ponto $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega$ há uma vizinhança V desse ponto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ e um número $L > 0$ tais que, se (x, y_1, λ), $(x, y_2, \lambda) \in V$ tem-se

$$|f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

O símbolo $y(x, \alpha, \lambda)$ pressupõe que $x \mapsto y(x, \alpha, \lambda)$ é uma solução de (25) definida em algum intervalo não reduzido a um ponto, ao qual pertence 0. O nosso objectivo é provar que $y(x, \alpha, \lambda)$ é função contínua do conjunto das suas variáveis, num domínio conveniente onde esteja bem definida. O enunciado útil a este respeito (e que resolve a questão porque a continuidade é uma propriedade local) é o seguinte.

Teorema 3. *Suponhamos que se verifica (H), e que, para certos $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ está bem definida a solução*

$$x \mapsto y(x, \alpha_0, \lambda_0) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

no intervalo compacto $[a, b] \ni 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in [a, b]$, a função $y(x, \alpha, \lambda)$ está definida e é contínua nas três variáveis.

Demonstração: Por hipótese, o compacto

$$\{(x, y(x, \alpha_0, \lambda_0), \lambda_0) \,|\, x \in [a, b]\}$$

está contido em Ω. Com um argumento de compacidade semelhante aos que estudámos no capítulo 12, facilmente concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{(x, z, \mu) | x \in [a, b], \ |z - y(x, \alpha_0, \lambda_0)| \leq \varepsilon, \ |\mu - \lambda_0| \leq \varepsilon\} \subset \Omega.$$

O primeiro membro desta inclusão é compacto, e por isso f é Lipschitziana relativamente à segunda variável neste conjunto (Cap. 12). Representemos por $B(P, \rho)$ a bola fechada de centro P e raio ρ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^p$). Recordemos (ver 11.1) que a projeção $P_{B(P,\rho)} : \mathbb{R}^n \to B(P, \rho)$ tem a propriedade $|P_{B(P,\rho)}(z) - P_{B(P,\rho)}(w)| \leq |z - w|$, $\forall z, w \in \mathbb{R}^n$. Posto isto, consideremos a equação diferencial modificada

$$z' = f(x, P_{B(y(x,\alpha_0,\lambda_0),\varepsilon)}(z), \lambda) \tag{26}$$

Em virtude das afirmações acima, o 2º membro desta equação, que está bem definido em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times B(\lambda_0, \varepsilon)$, é Lipschitziano na variável z. Considerando a condição inicial $z(0) = \alpha$ em (26), obtemos a equação integral equivalente

$$z(x, \alpha, \lambda) = \alpha + \int_0^x f(t, P_{B(y(t,\alpha_0,\lambda_0),\varepsilon)}(z(t, \alpha, \lambda)), \lambda)\, dt$$

Em virtude do Teorema 6 este problema tem uma solução $z = z(x, \alpha, \lambda)$ (única) no espaço $C([a, b] \times B(\alpha_0, \varepsilon) \times B(\lambda_0, \varepsilon))$. Em particular, da unicidade resulta

$$z(x, \alpha_0, \lambda_0) = y(x, \alpha_0, \lambda_0). \tag{$*$}$$

Pela continuidade, por compacidade, e invocando (*), existe $\delta > 0$ tal que, se $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in [a, b]$, tem-se

$$z(x, \alpha, \lambda) \in B(y(x, \alpha_0, \lambda_0), \varepsilon).$$

Logo, para tais valores de α, λ e x,

$$z(x, \alpha, \lambda) = y(x, \alpha, \lambda)$$

o que conclui a demonstração.

Observação: Em particular, o teorema afirma que, dada uma solução de (25) em $[a, b]$, para pequenas variações de valores iniciais e de parâmetros obtém-se uma solução cujo domínio de definição inclui *o mesmo* intervalo.

19

PROBLEMAS DE FRONTEIRA E MÉTODO DE TIRO

19.1 NÃO LINEARIDADE LIMITADA

Vamos ilustrar neste capítulo o argumento conhecido como *método de tiro*, que utiliza a teoria do PVI para resolver problemas de valores fronteira.

Vamos considerar a seguinte variante não linear do problema estudado no capítulo 17:

$$y'' + a(x)y + g(y) = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{27}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{28}$$

A novidade é que o primeiro membro da equação inclui agora uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em geral não linear. Para manter o problema acessível com as técnicas que estudámos, apenas consideraremos funções localmente Lipschitzianas e limitadas.

Facto 71. *Sejam $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ contínua, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana e limitada. Suponhamos que o problema linear homogéneo (5)-(4) admite apenas a solução trivial $y \equiv 0$. Então o problema (27)-(28) tem pelo menos uma solução.*

Demonstração: Consideremos o PVI

$$y'' + a(x)y + g(y) = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{29}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \tag{30}$$

Como sabemos, este problema tem solução única $y(x, \alpha)$ em $[0, l]$, e a solução depende continuamente de (x, α). Propomo-nos mostrar que existe α tal que

$$y(l, \alpha) = 0. \tag{$*$}$$

Seja φ a solução do PVI

$$\varphi'' + a(x)\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Em virtude da hipótese, $\varphi(l) \neq 0$. Decomponhamos a solução de (29)-(30):

$$y(x, \alpha) = \alpha\varphi(x) + z(x, \alpha) \tag{a}$$

de modo que fica definida a função z que satisfaz

$$z'' + a(x)z + g(\alpha\varphi(x) + z) = f(x), \quad z(0) = z'(0) = 0. \tag{b}$$

Facilmente se reconhece (recordar a fórmula de variação das constantes) que z é dada implicitamente por

$$z(x,\alpha) = \varphi(x)\int_0^x \psi(t)(-f(t)+g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt +$$
$$+\psi(x)\int_0^x \varphi(t)(f(t)-g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt \qquad (c)$$

onde ψ é outra solução não trivial de (5) tal que $\psi(l) = 0$ e normalizada de modo que o Wronskiano de φ, ψ seja igual a 1. Em particular, $z(l,\alpha)$ é uma função contínua de α, e limitada. Atendendo a (a), a equação (*) fica equivalente a

$$\alpha + \int_0^l \psi(t)(-f(t)+g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt = 0.$$

Como o primeiro membro tende para $\pm\infty$ quando $\alpha \to \pm\infty$, resulta do teorema de Bolzano que existe α tal que $y(l,\alpha) = 0$. A demonstração fica completa.

Por fim, vamos estudar o caso em que (5)-(28) admite uma solução não trivial φ. Mas limitamo-nos a considerar o caso em que os únicos zeros de φ são os extremos do intervalo $[0,l]$.

Exercício: Suponha-se que $m \le g(s) \le M\ \forall s \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(x) > 0\ \forall x \in]0,l[$. Então, se (27)-(28) tem uma solução $y(x)$, tem-se:

$$mI \le \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx \le MI$$

onde $I = \int_0^l \varphi(x)\,dx$. (Comparar com o exercício 4 de 17.2)

O próximo resultado pode ser visto como um “recíproco" (muito) parcial do enunciado do exercício precedente.

Facto 72. *Sejam $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ contínua, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana e limitada; ponhamos*

$$g_+ = \liminf_{u\to+\infty} g(u), \quad g_- = \limsup_{u\to-\infty} g(u).$$

Suponhamos que o problema linear homogéneo (5)-(4) admite uma a solução φ com $\varphi(x) > 0\ \forall x \in]0,l[$. Então, se

$$g_- I < \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx < g_+ I \qquad (**)$$

onde $I = \int_0^l \varphi(x)\,dx$, o problema (27)-(28) tem pelo menos uma solução.

Demonstração: O argumento começa como na demonstração do facto anterior: pretende-se resolver a equação $(*)$ e usamos a decomposição (a) que conduz a (b) e (c). No entanto, a função φ anula-se agora em 0 e l; a função ψ é por isso escolhida de modo que $\psi(l) \neq 0$ para que $\{\varphi, \psi\}$ constitua uma base de soluções da equação linear homogénea. No caso presente, $(*)$ é equivalente a $z(l,\alpha) = 0$, e portanto a

$$\int_0^l \varphi(t)(f(t)-g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt = 0. \qquad (*')$$

Se mostrarmos que

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} \int_0^l g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt \geq g_+ I,$$

$$\limsup_{\alpha\to-\infty} \int_0^l g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt \leq g_- I,$$

então, da hipótese $(**)$ resulta que existem $\alpha_1 < \alpha_2$ tais que

$$\int_0^l g(\alpha_1\varphi(t) + z(t,\alpha_1))\varphi(t)\,dt < \int_0^l \varphi(t)f(t)\,dt <$$

$$\int_0^l g(\alpha_2\varphi(t) + z(t,\alpha_2))\varphi(t)\,dt$$

e o teorema de Bolzano permite concluir que $(*')$ tem pelo menos uma solução.

Façamos então a verificação referente ao caso de g_+ (o caso de g_- é análogo).

Para cada $\delta \in]0,l[$, decomponhamos o integral na forma

$$\int_0^l g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt = A_\delta + B_\delta \tag{d}$$

onde

$$A_\delta = \int_\delta^{l-\delta} g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt$$

e B_δ é o integral com a mesma função integranda no domínio $[0,\delta] \cup [l-\delta, l]$.

Da limitação de g, admitida por hipótese, e da expressão (c) para z resulta que podemos fixar uma constante $M > 0$ que majora z e também a referida integranda:

$$|z(t,\alpha)| \leq M, \quad |g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha))\varphi(t)| \leq M \;\; \forall t \in [0,l],\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por ser $|B_\delta| \leq 2M\delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno tem-se

$$|B_\delta| \leq \varepsilon I, \quad (g_+ - \varepsilon)|\int_\delta^{l-\delta} \varphi(x)\,dx \geq (g_+ - 2\varepsilon)I. \tag{e}$$

Fixemos um tal δ e seja $m_\delta = \min_{x\in[\delta,l-\delta]} \varphi(x)$. Por definição de $\liminf$ existe $A > 0$ tal que

$$s \geq A \Longrightarrow g(s) \geq g_+ - \varepsilon.$$

Então

$$\alpha \geq \frac{A+M}{m_\delta} \Longrightarrow g(\alpha\varphi(t) + z(t,\alpha)) \geq g_+ - \varepsilon \quad \forall t \in [\delta, l-\delta]. \tag{f}$$

Resulta que, se $\alpha \geq \frac{A+M}{m_\delta}$, de acordo com (d)-(e)-(f),

$$\int_0^l g(\alpha\varphi(x) + z(x,\alpha))\varphi(x) \geq (g - 2\varepsilon)I - \varepsilon I = (g_+ - 3\varepsilon)I$$

que é o que pretendíamos.

Observação: Nas condições do enunciado tem-se obviamente $g_- < g_+$. Facilmente se reconhece que vale uma outra versão do teorema em que, em $(**)$, $<$ passa a $>$ e os papéis de $\liminf$ e $\limsup$ são trocados.

Exercícios. 1) Mostrar que, se $\lambda < 1$, o problema

$$u'' + \lambda u + \frac{u}{1+u^2} = e^x, \quad u(0) = 0, \;\; u(\pi) = 0$$

tem uma solução que é negativa em $]0, \pi[$.

2) Indicar um intervalo de valores de c tais que o problema

$$u'' + u + \arctan u = c\, e^x, \quad u(0) = 0, \;\; u(\pi) = 0$$

admita pelo menos uma solução.

19.2 SUB E SOBRE-SOLUÇÕES EM PROBLEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Nesta secção voltaremos a utilizar o método de tiro para apresentar a técnica das *sub e sobre-soluções* para problemas de valores fronteira de segunda ordem, num contexto elementar. Concretizando, vamos estudar o problema não linear

$$y'' = f(x, y(x)), \quad x \in [0, l] \tag{31}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{32}$$

onde $f : [0, l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. (O leitor que prosseguir estudos nesta área verá que a propriedade de Lipschitz é na verdade dispensável.)

Diremos que $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}$ é uma subsolução de (31-32) se é C^2 e satisfaz as desigualdades

$$\alpha''(x) \geq f(x, \alpha(x)), \quad \forall x \in [0, l], \quad \alpha(0) \leq 0, \quad \alpha(l) \leq 0. \tag{33}$$

E diremos que $\beta : [0, l] \to \mathbb{R}$ é sobre-solução de (31-32) se é C^2 e satisfaz as desigualdades

$$\beta''(x) \leq f(x, \beta(x)), \quad \forall x \in [0, l], \quad \beta(0) \geq 0, \quad \beta(l) \geq 0. \tag{34}$$

Facto 73. *Suponhamos que (31-32) tem sub-solução α e sobre-solução β tais que $\alpha \leq \beta$ em $[0, l]$. Então (31-32) tem uma solução $y(x)$ tal que*

$$\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [0, l]. \tag{$*$}$$

Demonstração: Comecemos por modificar o problema. Definamos a função $F : [0, l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = f(x, \min(\max(y, \alpha(x)), \beta(x)))+$$
$$+ \arctan(y - \beta(x))_+ - \arctan(\alpha(x) - y)_+$$

(onde $t_+ = \max(t, 0)$). Recordando que max, min e $g(t) = t_+$ são exprimíveis como combinações lineares de funções valor absoluto, imediatamente se reconhece que F é contínua e localmente Lipschitz em relação à segunda variável. Consideremos então o problema modificado

$$y'' = F(t, y), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \tag{P}$$

Como o conjunto

$$E = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq l, \ \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

é compacto, f é limitada em E e portanto F é limitada em $[0,l] \times \mathbb{R}$. Em virtude do Facto 71, (P) admite pelo menos uma solução $y(x)$. Iremos mostrar que esta solução satisfaz (*), o que implica $F(x,y(x)) = f(x,y(x))$, mostrando que y resolve o problema original e portanto conclui a demonstração.

Vamos verificar a desigualdade da direita; a outra demonstra-se analogamente. Raciocinamos por absurdo: se a desigualdade não vale para todo o $x \in [0,l]$, e tendo em conta que $y(0) = 0 \leq \beta(0)$, $y(l) = 0 \leq \beta(l)$, conclui-se que existe $[a,b] \subset [0,l]$ tal que $y(x) - \beta(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$, $y(a) - \beta(a) = 0$, $y(b) - \beta(b) = 0$. Então $y - \beta$ atinge um máximo positivo num ponto $t_0 \in]a,b[$. Resulta $\min(\max(y(t_0), \alpha(t_0)), \beta(t_0)) = \beta(t_0)$, $y''(t_0) \leq \beta''(t_0)$ e

$$f(t_0, \beta(t_0)) + \arctan(y(t_0) - \beta(t_0)) =$$

$$y''(t_0) \leq \beta''(t_0) \leq f(t_0, \beta(t_0)),$$

uma contradição.

Exemplo: Se f é contínua em $[0,l]$ e $f(0) < 0$, $f(l) > 0$, então o problema

$$y'' = f(y), \quad y(0) = 0 = y(l)$$

tem pelo menos uma solução $y(x)$ tal que $a \leq y(x) \leq b \ \forall x \in [0,l]$. Na verdade, as constantes a e b são, neste caso, sub-solução e sobre-solução, respetivamente.

Com uma modificação simples do argumento da demonstração anterior obtemos a seguinte variante do resultado:

Facto 74. *Suponhamos que (31-32) tem sub-solução α e que f é limitada em $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq l, \ \ \alpha(x) \leq y\}$. Então (31-32) tem uma solução $y(x)$ tal que*

$$\alpha(x) \leq y(x) \quad \forall x \in [0,l]. \tag{$*$}$$

E, obviamente, vale um enunciado semelhante onde se parte da existência de sobre-solução. O leitor facilmente formulará a afirmação e a respectiva demonstração.

Exercícios: 1. Considere-se o problema

$$y'' + y = g(y), \quad y(0) = 0 = y(\pi)$$

onde g é contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo: (a) existe um intervalo $[0,\varepsilon]$ onde $g \leq 0$; (b) existe $c > 0$ tal que $g(c) \geq c$. Mostrar que o problema acima tem uma solução $y(x)$ tal que $y(x) > 0 \ \forall x \in]0,\pi[$, $y'(0) > 0$ e $y'(\pi) < 0$. SUGESTÃO: há uma sub-solução que é um múltiplo de $\sin x$.

2. Considere-se o problema

$$y'' + \lambda y = g(y), \quad y(0) = 0 = y(\pi)$$

onde $1 < \lambda \leq 2$, e: (a) existe um intervalo $[-\varepsilon,\varepsilon]$ onde $g \leq 0$; (b) existe $c > 0$ tal que $g(c) \geq \lambda c$. Mostrar que o problema admite uma solução com $y'(0) > 0$.

3. Mostrar que o problema

$$y'' = -\frac{2y}{1+y^2}, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

tem uma solução y tal que $y(x) > 0\ \forall x \in [0, \pi]$. SUGESTÃO: há sub-soluções que são múltiplos de $\sin x$.

4. Mostrar que o problema

$$y'' = \sqrt{y^2+1} - y - 2, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

tem uma solução y tal que $y(x) > 0\ \forall x \in [0, \pi]$.

5. Seja $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, localmente Lipschitz, e tal que

$$f(x,s) \leq -2 \quad \forall (x,s) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{4}].$$

Mostrar que o problema

$$y'' = f(x,y), \quad x \in [0,1],\ \ y(0) = 0 = y(1)$$

tem uma solução $y(x)$ tal que $y(x) \geq x(1-x)$ em qualquer dos seguintes casos: (a) f é limitada em $[0,1] \times \mathbb{R}_+$; (b) $\exists c > \frac{1}{4}$ tal que $f(x,c) \geq 0\ \forall x \in [0,1]$.