INTRODUÇÃO A MÉTODOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA – BASES, ADENDAS, EXTENSÕES

(EDIÇÃO REVISTA)

1 Utilização de funções valor absoluto 5
2 Sucessões definidas por recorrência - os casos mais simples de recorrência linear 11
3 Os casos mais simples de recorrência não linear 15
4 Séries numéricas: critérios de convergência simples 21
5 Séries: convergência simples vs. convergência absoluta 25
6 Cónicas em coordenadas polares e parâmetros associados 29
6.1 Uma nota sobre as esferas de Dandelin 36
7 Factos muito básicos sobre polinómios reais 39
7.1 Raízes; factorização 39
7.2 Regra de sinais de Descartes 41
8 Limites no infinito e existência de extremos absolutos 43
8.1 Introdução e primeiros exemplos 43
8.2 Comparação de funções homogéneas 49
8.3 Ainda o cálculo das constantes m e M; valores próprios 56
8.4 Formulações alternativas do corolário do teorema de Weierstrass 58
8.5 Formas quadráticas – critério de Sylvester 59
9 Integrais impróprios em $\mathbb{R}^n$ 63
9.1 Domínios limitados 63
9.2 Domínios ilimitados 67
9.3 Um teorema de integração sucessiva 68
10 Alguns objetos matemáticos menos comuns 73
10.1 Densidade dos ângulos inteiros no círculo unitário 73
10.2 Funções de Dirichlet e de Thomae 75
10.3 Propriedades de integrabilidade 76
11 Funções convexas em dimensão 1 79
12 Funções convexas em $\mathbb{R}^n$ 83
12.1 Generalidades. Existência de mínimo 83
12.1.1 Formas quadráticas semidefinidas 88
12.2 Envólucro convexo. Valores máximos 90
12.3 Continuidade das funções convexas 92
13 Convergência uniforme - três pontos adicionais 95
13.1 Séries de potências: convergência num intervalo compacto 95
13.2 Convergência uniforme a partir de convergência pontual 97

13.3 Passagem ao limite em integrais impróprios 99
14 Equações diferenciais lineares de 1ª ordem - soluções periódicas 103
15 Observações sobre unicidade no PVI 105
16 Continuação de soluções; comportamento no infinito 109
17 Sub e sobre-soluções em problemas de 1ª ordem 117
18 Problemas de valores fronteira – equações lineares de 2ª ordem 119
18.1 Cálculo da solução única; função de Green 121
18.2 Um exemplo de problema não linear muito simples 125
19 O problema de valores iniciais revisitado 127
20 Problemas de fronteira e método de tiro 133
20.1 Não linearidade limitada 133
20.2 Sub e sobre-soluções em problemas de segunda ordem 136
21 Nota sobre o teorema da função implícita 139

Editor: Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Departamento de Matemática
ISBN 978-972-8394-35-6

Estas notas foram escritas a partir da matéria dos mini-cursos de *Análise Matemática "avançada"* realizados na FCUL entre 2014 e 2023. Incluem enunciados de exercícios, e demonstrações da maioria dos resultados importantes. Desti nam-se a estudantes dos dois primeiros anos das licenciaturas em Matemática com interesse especial nos temas e nos métodos da Análise. Têm, portanto, um nível introdutório, mas não ficam limitadas ao teor estrito do currículo de base.

A partir de 2005, as licenciaturas em Matemática da FCUL passaram a incluir "versões avançadas" de algumas disciplinas básicas dos dois primeiros anos. Estas versões complementam as disciplinas a que correspondem e não são obrigatórias. A aprovação em cinco delas confere ao aluno o direito a uma menção especial no apuramento final de notas.

Lecionei alguns destes mini-cursos (de Análise Matemática I, II, III e IV) a partir de 2014, e tenho mantido colaboração nos mesmos até ao presente. Do material que utilizei fiz a seleção apresentada nesta monografia.

A minha concepção destes cursos é a seguinte: os tópicos abordados não têm de ser necessariamente mais difíceis do que alguns que são abordados nas disciplinas básicas, mas podem sê-lo em alguns casos; devem ser interessantes, úteis no prosseguimento dos estudos em Matemática, e preferencialmente escolhidos entre os não abordados, ou abordados em menor detalhe, nos programas estabelecidos para as disciplinas de Análise da licenciatura. Claramente, pressupõem um domínio seguro desses programas (sem esquecer a Álgebra Linear), constituindo um complemento ocasional deles. Em certos casos podem antecipar métodos e argumentos que o estudante de Matemática encontrará mais tarde em contexto muito mais geral. Este conceito, juntamente com preferências pessoais, reflete-se no conteúdo do texto.

Em excertos do texto referente a equações diferenciais é reconhecível a influência do clássico *Ordinary Differential Equations* de Birkhoff e Rota e da monografia com o mesmo título de Wolfgang Walter. Do mesmo modo, o tratamento dos integrais impróprios n-dimensionaia tem inspiração no tratamento do mesmo tópico no consagrado *Introduction to Calculus and Analysis - Vol II* de R. Courant e F. John.

As figuras que ilustram o texto foram obtidas com recurso ao WolframAlpha e ao Desmos.

Luís Sanchez Rodrigues, Junho 2026

1

UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES VALOR ABSOLUTO

Começamos por observar que a função com dois ramos lineares

$$f(x) = \begin{cases} -x/2, & \text{if } x \leq 0 \\ 3x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

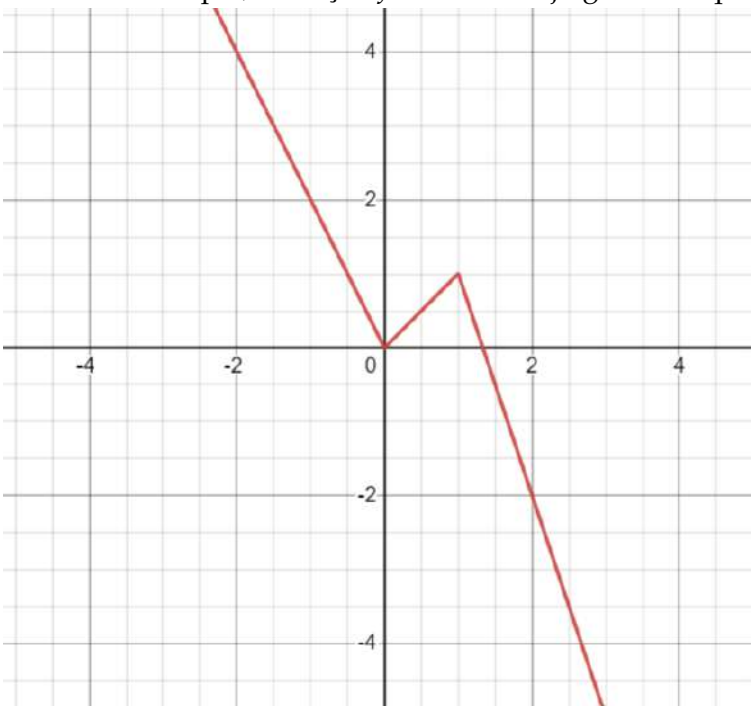
pode ser representada de forma "compacta" por

$$f(x) = ax + b|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

onde a, b são constantes reais. De facto, esta representação implica $a - b = -1/2$ e $a + b = 3$; um cálculo elementar mostra que isto é possível de modo único, com $a = 5/4$ e $b = 7/4$.

Este exemplo sugere que as funções reais de variável real que são contínuas e *seccionalmente afins*, isto é, cujo gráfico é composto de semirectas e/ou segmentos de recta em número finito, ligados uns aos outros por um vértice comum, podem ser representadas como combinação linear de uma função afim e funções módulo.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico esquematizamos a seguir



fica bem determinada por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e pelos declives das semirectas que constituem as restrições do seu gráfico a $]-\infty, 0]$ e $[1, +\infty[$ (-2 e -3 respectivamente). É natural procurar uma representação de f da forma

$$f(x) = a|x| + b|x-1| + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}$$

com constantes a, b, c, d adequadas.

Efectivamente, a partir dos dados obtemos as condições

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a + c + d = 1 \\ -a - b + c = -2 \\ a + b + c = -3 \end{cases}$$

de onde: $a = 3/2$, $b = -2$, $c = -5/2$, $d = 2$.

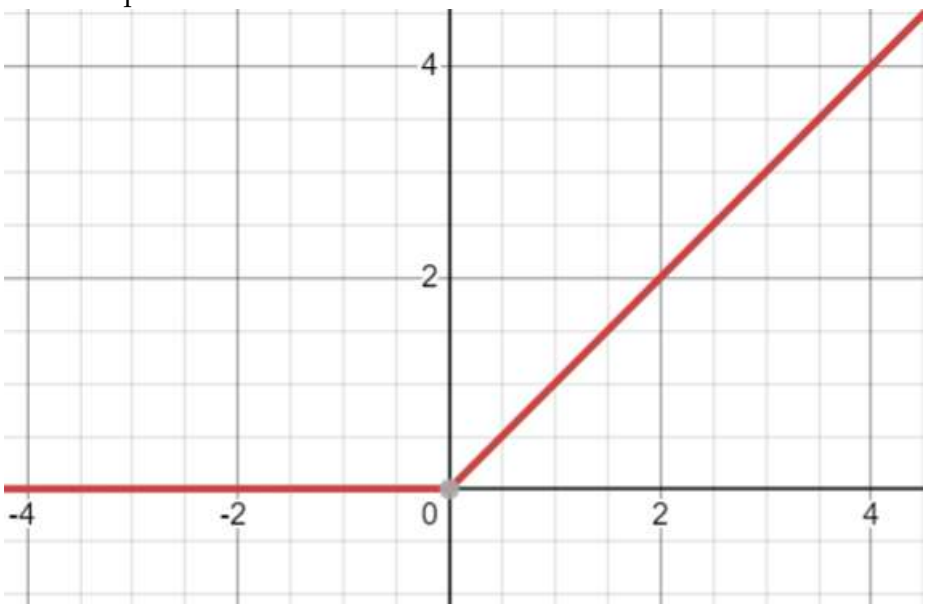
(Usando uma linguagem que em breve aprenderemos na Álgebra Linear, este exemplo ilustra o seguinte facto: o conjunto das funções seccionalmente afins com possíveis vértices nos pontos de abcissa 0 e 1 constituem um espaço vectorial de dimensão 4, e uma base desse espaço é formado pelas funções $|x|$, $|x-1|$, x e 1.)

Na "compactação" de fórmulas deste tipo podemos usar, em vez do valor absoluto, as funções (de duas variáveis) "máximo" e "mínimo", representadas por max e min respectivamente. Basta observar que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$

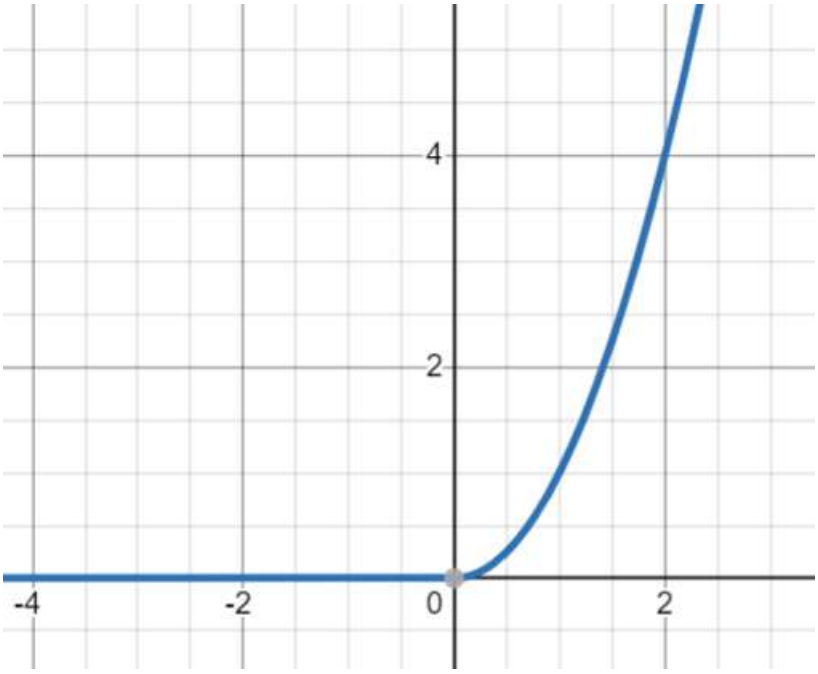
$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Exemplos:



Aqui, $f(x) = \max(0, x) = \frac{x+|x|}{2}$.

Consideremos agora $g(x) = f(x)^2$:



Neste caso, $g(x) = \frac{(x+|x|)^2}{4} = \max(0, x|x|)$.

Observemos, ainda como exemplo, que a função f correspondente ao primeiro dos desenhos introduzidos acima pode ser dada por

$$f(x) = \max(-2x, \min(x, -3x + 4)) \quad \forall x \leq 4.$$

"Redução" da variável independente a um determinado intervalo: Observemos que, dados números $a < b$, tem-se

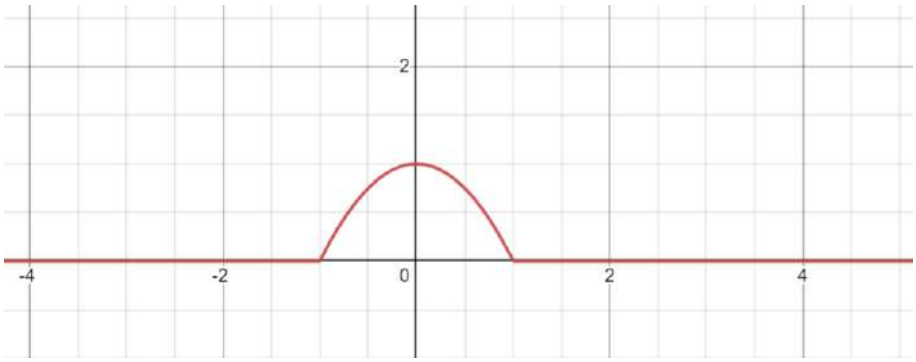
$$\min(\max(x, a), b) = \begin{cases} a & \text{if } x \leq a \\ x & \text{if } a \leq x \leq b \\ b & \text{if } x \geq b \end{cases}$$

Esta função será notada $\varphi_{\{a,b\}}$. Facilmente verificamos que

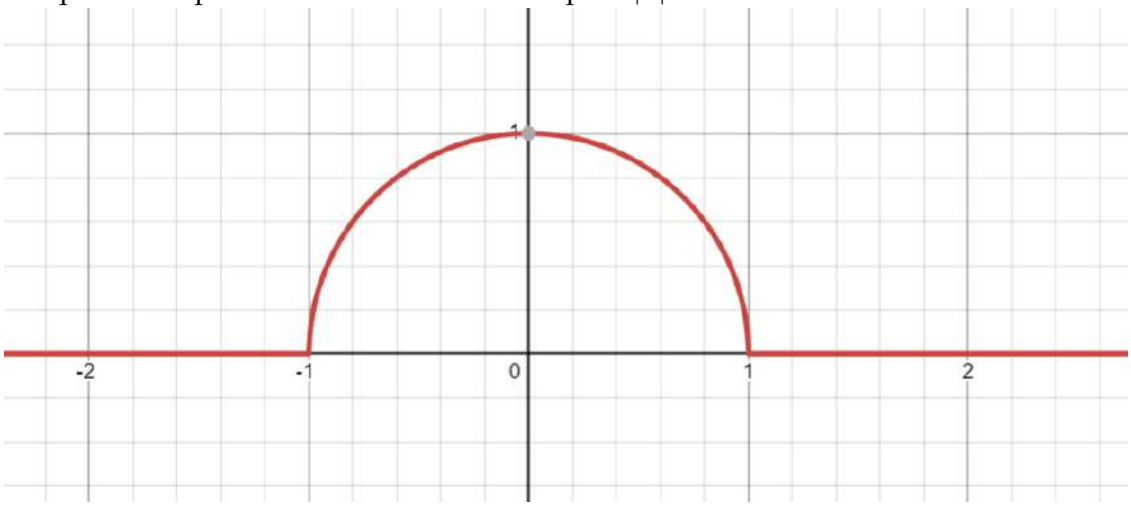
$$\varphi_{\{a,b\}}(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{|x-a|}{2} - \frac{|x-b|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função é útil em situações como a que vamos exemplificar agora. Repare-se que é fácil representar a expressão da função que coincide com $1 - x^2$ quando esta expressão é ≥ 0, isto é, se $-1 \leq x \leq 1$, e que é constante para $x \leq -1$ ou $x \geq 1$: basta escrever

$$\max(0, 1 - x^2)$$



mas já exige mais cuidado o caso em que $1 - x^2$ é substituído por $\sqrt{1 - x^2}$, pela simples razão de que esta expressão deixa de ter sentido para $|x| > 1$:



Neste caso obtemos uma expressão correcta escrevendo

$$\sqrt{1 - \varphi_{\{-1,1\}}(x)^2}.$$

Note-se, no entanto, a alternativa equivalente e mais simples

$$\sqrt{\max(1 - x^2, 0)}.$$

Terminamos este tópico observando o seguinte

Facto 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente afim cujo gráfico tem vértices nos pontos de abcissas $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Então f exprime-se como combinação linear das funções 1, x, e $|x - a_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n - 1)$. Por outras palavras: o conjunto das funções seccionalmente lineares cujos gráficos têm um conjunto de vértices contido no conjunto de pontos indicados é um espaço vectorial de dimensão $n + 1$.*

A ideia da demonstração é a que conduz aos cálculos usados nos nossos exemplos iniciais. A demonstração está ao alcance do estudante que domine o curso inicial de Álgebra Linear.

Exercícios: 1) Dar expressões em termos de valor absoluto, ou max, ou min, das funções seguintes

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

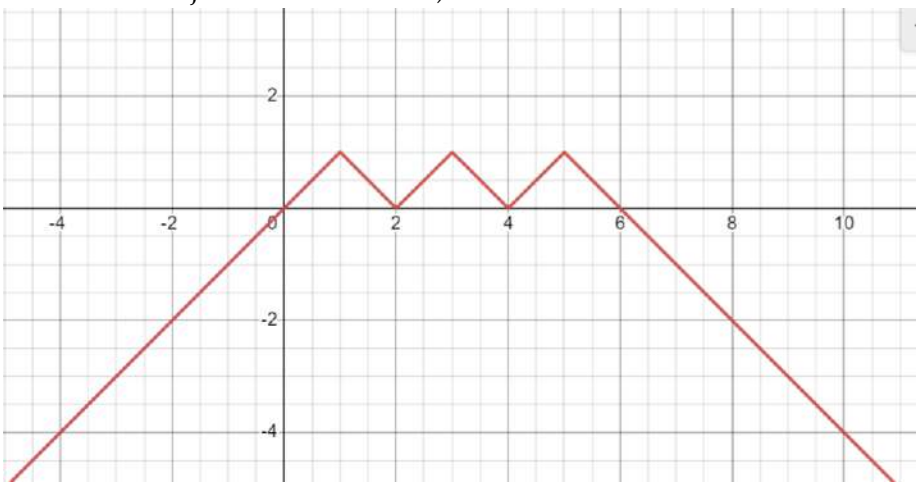
$$g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 0 \\ 0. & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Determinar condições sobre a, b, c para que a função

$$ax + b|x| + c|x-1|$$

(a) seja estritamente crescente; (b) seja sobrejectiva; (c) tenha valor mínimo absoluto em $\mathbb{R}$.

3) Dar uma expressão, em termos de valor absoluto, ou max, ou min, da função seccionalmente linear cujo gráfico é sugerido no seguinte gráfico, formado por duas semi-rectas e quatro segmentos de recta cujos declives são ± 1)



(Sugestão: os cálculos podem ser simplificados usando uma simetria, e eventualmente uma translacção.)

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função do exercício anterior. Dado $y \in \mathbb{R}$, qual é o número de soluções da equação $f(x) = y$?

5) Dar uma expressão da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

em termos de valor absoluto, ou max, ou min.

2

SUCESSÕES DEFINIDAS POR RECORRÊNCIA - OS CASOS MAIS SIMPLES DE RECORRÊNCIA LINEAR

Recordemos que a sucessão definida pela recorrência linear

$$x_{n+1} = ax_n \quad n = 1, 2 \cdots$$

onde a é uma constante, é a progressão geométrica de razão a:

$$x_n = a^{n-1}x_1.$$

Sabemos que $\lim x_n = 0$ se, e só se, $|a| < 1$. Se $|a| > 1$ tem-se $\lim |x_n| = +\infty$ (excluindo o caso trivial em que $x_1 = 0$).

Vamos agora estudar a existência de limite da sucessão dada pela relação de recorrência linear

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (rl)$$

onde a e b são constantes. Em primeiro lugar, se existir, e for finito, $L = \lim x_n$, tem-se, tomando limites em ambos os membros da equação anterior

$$L = aL + b, \quad \text{de onde:} \quad L = \frac{b}{1-a}.$$

Na verdade:

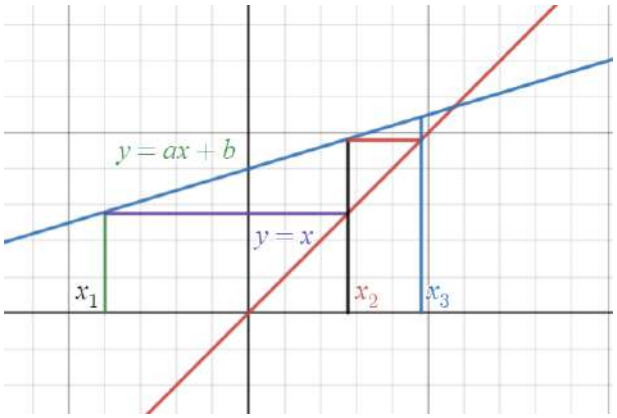
Facto 2. *Se $|a| < 1$, a sucessão definida por (rl) tem limite $L = \frac{b}{1-a}$.*

Demonstração: De (rl) deduzimos

$$x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = ax_n + b - \frac{b}{1-a} = a(x_n - \frac{b}{1-a})$$

significando que $y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$ é progressão geométrica de razão a, o que permite concluir.

Eis em esquema gráfico a aproximação ao limite da sucessão (rl):



Observação: Estivemos focados na convergência da sucessão (rl). Outra questão que poderíamos ter colocado é a da determinação do termo geral da mesma sucessão. Não é difícil obter, por indução finita, que:

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b(1 + a + \cdots + a^{n-2}), \quad n \geq 2.$$

Vamos estudar em seguida a convergência da sucessão definida por

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n \tag{rlv}$$

onde os coeficientes que figuram no segundo membro variam com n.

Facto 3. *Se* $\lim a_n = a$, $|a| < 1$, *e* $\lim b_n = b$, *a sucessão definida por (rlv) tem limite* $L = \frac{b}{1-a}$.

Demonstração: 1) Verifiquemos que, se $b = 0$, então $\lim x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos supôr, ignorando um número finito de termos se necessário, que existe um número A tal que

$$|a_n| < A < 1 \quad \text{e} \quad |b_n| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{a}$$

(Em virtude das hipóteses, aquelas desigualdades valem a partir de um certo índice m; ignorando os termos anteriores à ordem m e renumerando os índices podemos então admitir (a). Ignorar um número finito de termos não altera as propriedades de convergência.)

Consideremos a sucessão definida por recorrência

$$y_{n+1} = Ay_n + \varepsilon, \quad \text{com} \ \ y_1 = |x_1|.$$

De (a) deduzimos, por indução finita, que

$$|x_n| \leq y_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(De facto, a desigualdade é uma igualdade para $n = 1$, por construção. Admitindo que é válida para n temos $|x_{n+1}| \leq |a_n||x_n| + |b_n| \leq Ay_n + \varepsilon = y_{n+1}$.)

Pelo facto 2, temos $\lim y_n = \frac{\varepsilon}{1-A}$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq m \Longrightarrow |x_n| \leq y_n < \frac{2\varepsilon}{1-A}$$

que é, por definição, o significado de $\lim x_n = 0$.

2) No caso geral, observemos que

$$x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a_n\big(x_n - \frac{b}{1-a}\big) + b_n - \frac{b}{1-a} + a_n\frac{b}{1-a}$$

e apliquemos o caso 1 à sucessão $z_n = x_n - \frac{b}{1-a}$.

Uma aplicação curiosa deste resultado é um método para calcular limites de sucessões do tipo

$$x_n = a_n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

onde (a_n) e (b_n) são sucessões dadas. Basta observar que uma tal sucessão pode definir-se por recorrência:

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x_n + a_{n+1}b_{n+1}.$$

Exercícios: 1) Calcular

$$\lim \frac{n}{2^{n+1}}\Big(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}\Big)$$

2) Definir a sucessão

$$x_n = \frac{1}{3^n \ln(n^4+1)}[3\,\ln 3 + 3^2 \ln 5 + \cdots + 3^n \ln(2n+1)]$$

por um processo de recorrência linear e calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3

OS CASOS MAIS SIMPLES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEAR

Comecemos por estudar um resultado muito prático para sucessões de recorrência definidas a partir de uma função crescente.

Facto 4. *Seja* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e crescente. Suponhamos*

$$\alpha \leq f(\alpha), \quad \beta \geq f(\beta). \tag{a}$$

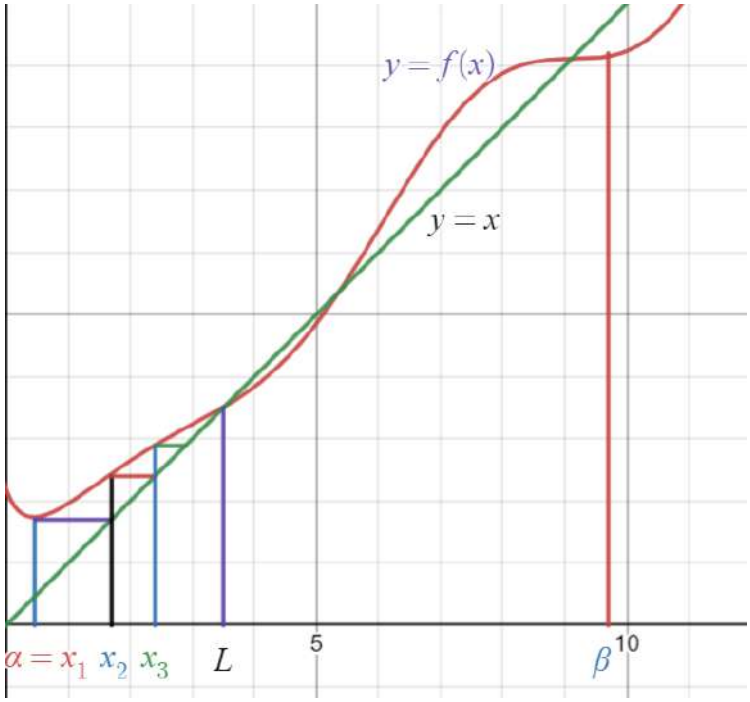
Então a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n), \;\; x_1 = \alpha \;\; (\textit{respectivamente} \;\; x_1 = \beta) \tag{s}$$

é crescente (respectivamente decrescente) e tem como limite a menor (respectivamente maior) raiz da equação

$$x = f(x)$$

em $[\alpha, \beta]$.



Demonstração: Consideremos o caso $x_1 = \alpha$; o outro é análogo. Antes de mais note-se que a sucessão está bem definida porque, como f é crescente, (a) implica que os valores de f pertencem a $[\alpha, \beta]$.

Começamos por verificar, utilizando a indução finita, que a sucessão (x_n) é crescente: em primeiro lugar, $x_2 = f(\alpha) \geq \alpha = x_1$; depois, admitindo $x_{n+1} \geq x_n$, e lembrando que f é crecente, obtemos

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}) \geq f(x_n) = x_{n+1}.$$

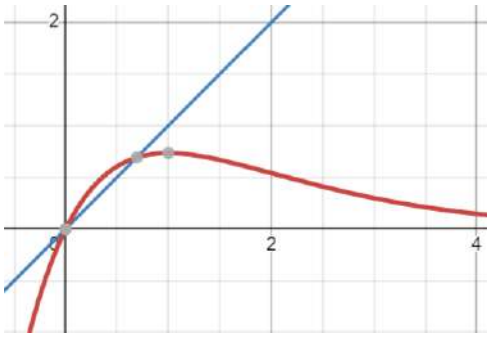
Seguidamente observamos que (x_n) é majorada, já que $x_n \leq \beta \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Do teorema da sucessão monótona resulta que existe o número real $L = \lim x_n \in [\alpha, \beta]$. Passando ao limite a equação (s) resulta $L = f(L)$. Mais: dada uma qualquer raiz $y \in [\alpha, \beta]$ da equação $y = f(y)$, é fácil mostrar (novamente por indução) que $x_n \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $L \leq y$, e todas as afirmações do enunciado ficam verificadas.

Exemplo: A função $2xe^{-x}$ é crescente em $[0, 1]$ e a raiz positiva de $x = 2xe^{-x}$ é $\ln 2$, tendo-se $2xe^{-x} > x$ se $0 < x < \ln 2$. Em virtude do facto anterior, imediatamente se conclui que a sucessão definida por recorrência

$$x_{n+1} = 2x_n e^{-x_n}$$

em que o primeiro termo é um número arbitrário $x_1 \in]0, \ln 2[$, é monótona crescente e tem limite $\ln 2$.

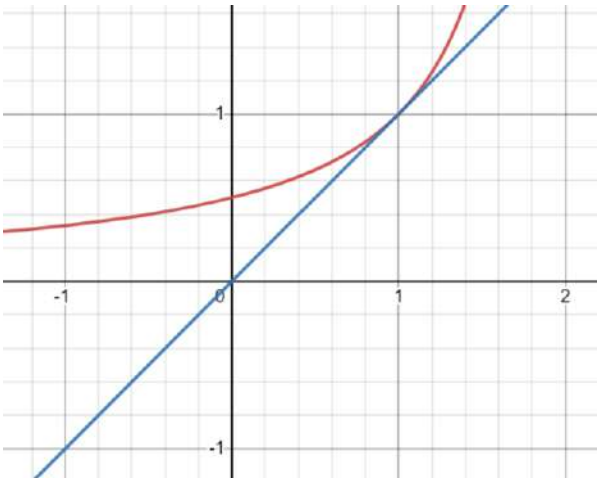


Exemplo: A sucessão definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \quad x_1 = -1$$

converge? Qual o seu limite?

Apliquemos o enquadramento anterior, desta vez com $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Se a sucessão convergir, o seu limite é solução de $x = \frac{1}{2-x}$, isto é, $x = 1$. É óbvio que f é crescente em $]-\infty, 2[$. Como $f(-1) > -1$ podemos concluir que a sucessão é crescente e tem, efectivamente, limite 1.



Exercícios: 1) Para que valores não negativos de k é convergente a sucessão

$$x_{n+1} = x_n^2 + k, \quad x_1 = 0\,?$$

Qual é o seu limite?

2) Estudar a convergência da sucessão

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 + 1}, \quad x_1 = 10.$$

(Começar por fazer um esquema gráfico sugerido pelo problema.)

3) A sucessão

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n^2, \quad x_1 = 1$$

não é do tipo estudado anteriormente, mas facilmente se reconhece que é decrescente e portanto tem limite. Na verdade é fácil reconhecer (por indução) que

$$0 < x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-2}} \quad \forall n \geq 3.$$

4) Conideremos as sucessões

$$x_{n+1} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) x_n^2, \quad x_1 = 1,$$

$$y_{n+1} = (1 - \frac{1}{4n^2}) y_n^2, \quad y_1 = 1.$$

Ambas são decrescentes e de termos positivos, mas é necessário um estudo particular de cada uma delas para se obter o valor do limite.

Para a primeira, não é difícil obter o termo geral

$$x_n = \frac{n+1}{2n},$$

o que resolve imediatamente o problema. Por outro lado, como $x_n < y_n \ \forall n \geq 1$, tem-se $\lim y_n \geq \frac{1}{2}$. Este limite não é fácil de identificar ao nível deste curso, mas o cálculo de alguns termos sucessivos sugere que $\lim y_n = 0.6535\cdots$ sendo exactas as casas decimais indicadas.

5) Determinar, justificando, o limite da sucessão (x_n) definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - x_n + 2}, \quad x_1 = 0.$$

Esta sucessão é monótona? Explicar.

Estudamos em seguida uma recorrência em que intervém uma função decrescente.

Facto 5. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to I$ uma função contínua e decrescente. Suponhamos que existe $x_1 \in I$ tal que para a sucessão definida por*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{d}$$

se tem

$$x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2. \tag{o}$$

Então:

- a subsucessão de (x_n) com índices ímpares, bem como a sucessão com índices pares, são monótonas, tendo-se, mais precisamente

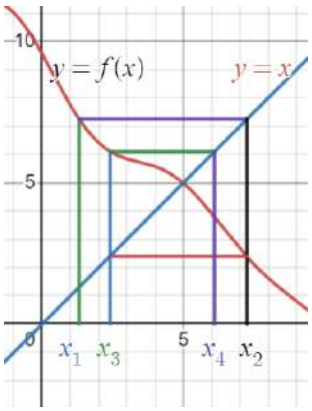
$$x_1 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{2n-1} \leq x_{2n} \leq \cdots \leq x_4 \leq x_2 \quad \forall n \geq 3, \tag{m}$$

e qualquer das sucessões tem como limite uma solução da equação

$$x = (f \circ f)(x) \tag{e}$$

em I.

- se a equação (e) tem uma única solução em I, ela é também solução de $x = f(x)$, e é limite de (x_n).



Demonstração: A prova de que as sucessões mencionadas satisfazem (m) faz-se por indução finita. Ilustremos o procedimento mostrando que $x_3 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_4$ (a passagem da etapa n à etapa $n+1$ é completamente análoga). Como $x_4 \leq x_2$ por hipótese, e f é decrescente, resulta $x_3 \leq x_5$. Daqui resulta, pelo mesmo argumento, $x_6 \leq x_4$. De $x_3 \leq x_4$ deduz-se ainda $x_5 \leq x_4$ e daqui $x_5 \leq x_6$.

De (m) resulta, além da monotonia de (x_{2n-1}) e (x_{2n}), que estas subsucessões são limitadas. Portanto os respectivos limites existem e são números reais. Como

$$x_{2n+1} = f(f(x_{2n-1}))$$

conclui-se que $L = \lim x_{2n-1}$ satisfaz $L = (f \circ f)(L)$. A conclusão para $\lim x_{2n}$ é análoga.

Finalmente, suponhamos que (e) só tem uma solução em I e representemos esta solução por L. Do que acabámos de mostrar resulta que $L = \lim x_n$. Logo, passando ao limite em (d), tem-se também $L = f(L)$.

Observação: Como toda a solução de $x = f(x)$ é também solução de $x = (f \circ f)(x)$, a afirmação "$x = (f \circ f)(x)$ tem solução única em I" implica a afirmação "$x = f(x)$ tem solução única em I".

Exemplos: 1) A sucessão

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 10$$

tem limite $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$. Com efeito, o facto precedente é aplicável, uma vez que

(i) a função $3 + \frac{1}{x}$ é decrescente e aplica $I =]0, +\infty[$ em si próprio, e a equação $x = 3 + \frac{x}{3x+1}$ tem apenas uma solução em I ($\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$, que é, de resto, a solução de $x = 3 + \frac{1}{x}$);

(ii) Facilmente se comprova, fazendo os cálculos, que os quatro termos que seguem o primeiro verificam

$$x_2 < x_4 < x_5 < x_3.$$

2) Se $-1 < a < 0$ e $b \in \mathbb{R}$, sabemos que a sucessão dada por $x_{n+1} = ax_n + b$ (recorrência linear) tem limite $\frac{b}{1-a}$. Podemos recuperar este resultado a partir do Facto anterior, uma vez que, se $x_1 < \frac{b}{1-a}$, facilmente se verifica que $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$. A sucessão (x_n) não é monótona, mas são-no as subsucessões de índices pares e de índices ímpares.

3) A sucessão

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n^2 + 1}, \quad x_1 = 1.39$$

é interessante como ilustração do Facto anterior e também para confronto com o exercício 2 da série de exercícios precedentes. Para $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, facilmente se vê que tanto $x = f(x)$ como $x = f(f(x))$ têm a única solução positiva $\sqrt{2}$; e f é *decrescente* em $[1, +\infty[$. Os primeiros quatro termos são, com cálculo de 5 casas decimais:

$$1.39; 1.42219; 1.41155; 1.4151.$$

Resulta que $\lim x_n = \sqrt{2}$. É útil esboçar o gráfico de f para interpretar o resultado.

Exercícios: 5) Mostrar que, para qualquer valor do primeiro termo x_1, a sucessão definida por

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

tem limite.

6) (difícil) Seja c um número do intervalo $]0, 1[$ e considere-se a sucessão

$$x_{n+1} = x_n^2 - c, \quad x_1 = 0.$$

Mostrar que (x_n) converge se $0 < c < 3/4$. Que se pode afirmar noutro caso? (Observar que a função $f(x) = x^2 - c$ aplica o intervalo $[-c, 0]$ em si próprio. Pode ser útil obter numa máquina valores aproximados das raízes de $x = (f \circ f)(x)$ e de alguns termos da sucessão.)

Completamos este tópico mencionando o seguinte resultado.

Facto 6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 com a propriedade: existe $a \in]0, 1[$ tal que*

$$|f'(x)| \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, para qualquer $x_1 \in \mathbb{R}$, a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge, tendo como limite a (única) solução da equação $x = f(x)$.

Não faremos aqui a demonstração deste enunciado, que é um caso particular de outro que os alunos encontrarão, até sob forma mais geral, em futuras disciplinas de Análise. Observamos, no entanto, que é um exercício simples mostrar que, sob as hipóteses dadas, a equação $x = f(x)$ tem uma e uma só solução.

4

SÉRIES NUMÉRICAS: CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA SIMPLES

Teorema 1. *(Critério de Dirichlet) Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sucessões de números reais tais que*
(i) (a_n) *é decrescente e* $\lim a_n = 0$
(ii) *a sucessão de somas parciais* $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ *é limitada.*
Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *é convergente.*

Demonstração: Seja $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Temos

$$S_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n =$$

$$= T_{n-1} + a_n B_n \qquad (a)$$

onde estamos a designar por T_n a soma parcial de ordem n da série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$. Vamos ver que esta série é absolutamente convergente: temos a comparação

$$|B_n(a_n - a_{n+1})| \leq L(a_n - a_{n+1})$$

onde L é um majorante de $|B_n|$ (que existe por (ii)) e onde atendemos a que $a_n - a_{n+1} \geq 0$ em virtude de (i); por outro lado é imediato verificar que a série de termo geral $L(a_n - a_{n+1})$ é convergente com soma La_1 (série "telescópica").

Da igualdade (a) resulta então que $\lim S_n$ existe e é igual a $\lim T_n$, uma vez que $\lim(a_n B_n) = 0$ (em virtude das hipóteses (i) e (ii)).

Observação importante: Da demonstração anterior vale a pena reter o que poderemos chamar "fórmula de soma por partes":

$$a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n B_n - a_1 B_1.$$

Teorema 2. *(Critério de Abel) Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sucessões de números reais tais que*
(i') (a_n) *é decrescente e* $\lim a_n$ *é finito.*
(ii') *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente.*
Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *é convergente.*

Demonstração: Este resultado é consequência do anterior. De facto, ponhamos $\lim a_n = a$. A sucessão $(a_n - a)$ verifica a hipótese (i). Então

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n$$

onde as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$ convergem: a primeira pelo teorema anterior e a segunda por causa de (ii'). Podemos portanto concluir.

Exemplos: 1) Pelo critério de Dirichlet, podemos concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{\sqrt{n}}$$

converge. De facto, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente com limite 0; e as somas parciais referentes a $(\sin(n\pi/4))$, isto é, à sucessão periódica

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 0,\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1,\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 0,\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cdots$$

tomam apenas um número finito de valores (4), pelo que tais somas parciais constituem evidentemente uma sucessão limitada.

2) Vamos utilizar o critério de Dirichlet para mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

é convergente. Basta, para isso, provar que a sucessão de somas parciais $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ é limitada. Ora, utilizando a identidade trigonométrica

$$2\sin x\ \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

obtemos:

$$2\sin(1/2)B_n =$$

$$= \cos(\frac{1}{2}) - \cos(\frac{3}{2}) + \cos(\frac{3}{2}) - \cos(\frac{5}{2}) + \cdots + \cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2}),$$

isto é:

$$2\sin(1/2)B_n = \cos(\frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})$$

e concluímos

$$|B_n| \leq \frac{1}{\sin(1/2)} \quad \forall n$$

como se pretendia.

Este procedimento estende-se à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

que é mais interessante porque é uma série de Fourier (encontrá-la-emos numa posterior disciplina de Análise). Usando a mesma identidade trigonométrica de há pouco, temos, agora com $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$

$$2\sin(x/2)B_n = \cos(\frac{x}{2}) - \cos(n+\frac{1}{2})x.$$

Substituindo aqui x por $2x$ temos também

$$2\sin x \sum_{k=1}^{n} \sin(2kx) = \cos(x) - \cos(2n+1)x.$$

Com base nas duas últimas estimativas e atendendo a que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) - 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \sin(2kx)$$

(onde $[y]$ representa o maior inteiro $\leq y$) obtemos:

$$|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sin(kx)| \leq |\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) + 2|\sum_{k=1}^{[n/2]} \sin(2kx)| \leq$$

$$\frac{1}{\sin(x/2)} + \frac{2}{\sin x}$$

sempre que x não é múltiplo de π. Por conseguinte, a série (*) é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios: 1) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série cuja sucessão de somas parciais (A_n) é limitada.
(i) Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ é convergente para todo o $t > 0$.
(ii) Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ é convergente e tem a mesma soma que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(n+1)}$.

2) Calcular $\sum_{i=1}^{n} i2^i$ (por partes).

3) Seja (a_n) uma sucessão decrescente e de termos ≥ 0. Seja (b_n) uma sucessão tal que $b_{n+1} - b_n$ é majorada. Mostrar que a série.$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_n - a_{n+1})$ é convergente.

4) Seja (A_n) uma sucessão limitada. Mostrar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_n \ln(1+\frac{1}{n+1})}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$ é convergente e tem a mesma soma que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln(n+1)}$, onde (a_n) é definida por $a_1 = A_1$ e $a_n = A_n - A_{n-1}$ se $n > 1$.

5

SÉRIES: CONVERGÊNCIA SIMPLES VS. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Há operações simples que se podem executar com séries tal como se fossem somas finitas. Por exemplo, tomemos a soma da série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(Veremos mais tarde que $S = \pi^2/6$, mas isso não é relevante para o que pretendemos exemplificar agora.) Multiplicando a igualdade acima por $1/4$ obtemos

$$\frac{S}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Das duas igualdades anteriores sai então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3S}{4}.$$

E combinando os resultados das duas igualdades anteriores ficamos também a conhecer a soma da série alternada construída com base em $1/n^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{3S}{4} - \frac{S}{4} = \frac{S}{2}.$$

No exemplo anterior a justificação formal dos passos (usando somas parciais) não oferece dificuldade. Também é simples reconhecer que podemos associar termos de uma série convergente, obtendo-se uma série convergente com a mesma soma. Por exemplo: seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente com somas parciais A_n. Consideremos a série obtida associando alternadamente grupos de 2 e 3 termos:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \cdots$$

e designemos por B_n as repectivas somas parciais. Reconhece-se imediatamente que

$$B_1 = A_2,\ B_2 = A_5,\ B_3 = A_7, \cdots,$$

de modo que (B_n) é subsucessão de (A_n). Por isso, $\lim B_n = \lim A_n$.

Já a questão da comutatividade é muito mais delicada. Alterar a ordem dos termos de uma série pode alterar as propriedades da série.

Exemplo: Seja S a soma da série alternada construída a partir da série harmónica

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \qquad (a)$$

(tem-se $S = \ln 2$ mas isso é agora irrelevante). Alteremos a ordem dos termos juntando, de cada vez, dois termos negativos: obtemos a série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Calculemos a soma da nova série associando pares de termos consecutivos, começando no primeiro par, mas deixando invariante um termo entre cada dois pares. Obtemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots = \frac{S}{2}.$$

Exemplo: Ainda a partir da mesma série, consideremos a seguinte

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad (b)$$

onde agora colocamos de cada vez dois termos (positivos) de denominadores ímpares, surgindo os termos (negativos) intercalados entre cada ocorrência dos anteriores. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a série (a), formemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \qquad (c)$$

e ainda a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ onde (b_n) é a sucessão dos $(a_n/2)$ com zeros intercalados (o que, obviamente, não lhe altera as propriedades):

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

Facilmente se reconhece então que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, isto é, a série (b) (outra que se obtém alterando a ordem dos termos de (a)), tem soma $S + \frac{S}{2} = \frac{3S}{2}$.

Exercícios: 1) Como vimos, alterar a ordem de termos em séries simplesmente convergentes pode alterar a soma. Considere-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$$

Qual é a soma da série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots ?$$

Sugestão: associar os termos primeiro e segundo; quarto e quinto, etc, mantendo invariante um termo entre cada dois associados.

2) Estudar a convergência da série

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

Nota: É fácil ver que a soma é $S-T$, onde S e T são respectivamente as somas de

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

e

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

isto é: $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$. Para introduzir o cálculo da soma numa máquina, é útil observar que o termo geral da série pode ser escrito

$$\frac{|((n-1)\,mod\,4)-2|-|((n-1)\,mod\,4)-1|}{n}$$

onde $x\,mod\,y$ significa o resto da divisão inteira de x por y. (Alternativamente, o numerador pode ser escrito $\sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{4}+(n-1)\frac{\pi}{2})$.)

3) (*difícil) Estudar a convergência da série

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots$$

onde o número de termos com o mesmo sinal aumenta de uma unidade em cada novo bloco.

4) Estudar a convergência da série

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots$$

(onde alternam três termos positivos e três negativos da série (a)). Determinar a sua soma em termos da de (a). **Sugestão:** Observar que, sendo A_n a soma parcial da harmónica alternada e A'_n a desta série, tem-se $\forall n\ A'_{6n}=A_{6n}$; e, se $k\in\mathbb{N}$ é arbitrário, tomando n tal que $6n\le k\le 6(n+1)$, então $A'_k=A'_{6n}+t_n$ com $|t_n|\le 5/(6n)$.

Há, no entanto, situações em que alterar a ordem dos termos não afecta a natureza nem a soma da série. É o que estudamos em seguida. Para exprimir que numa série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ alteramos a ordem dos termos, consideramos uma bijecção $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e formamos a série $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ em que $b_n=a_{i(n)}$.

Facto 7. *(Comutatividade nas somas infinitas com termos positivos) Seja $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uma série de termos ≥ 0. Seja $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma bijecção. Então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i(n)}$ têm a mesma natureza e, em caso de convergência, têm a mesma soma.*

Demonstração : Sejam A_n e B_n as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i(n)}$, respectivamente. Como as séries de termos ≥ 0 convergem se, e só se, as suas somas parciais são majoradas (sendo a soma da série o supremo de tais somas), a propriedade enunciada resulta dos seguinte factos simples:

$$\forall p\in\mathbb{N}\ \exists q\in\mathbb{N}\quad B_p\le A_q$$

(basta tomar q como o maior dos números $i(1)$, ... $i(p)$);

$$\forall p \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{N} \quad A_p \leq B_q$$

(porque os papeis das duas séries podem, obviamente, ser trocados).

Seja agora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos reais arbitrários, e definamos a partir dela duas outras, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, onde $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0 \\ x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^- = \frac{-x+|x|}{2} = \begin{cases} |x|, & \text{if } x \leq 0 \\ 0, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Representemos por A_n, B_n e C_n, respectivamente, as somas parciais de ordem n de cada uma das três séries introduzidas. Sejam ainda $A*_n$ as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Facilmente se reconhece que

$$A_n = B_n - C_n, \quad A*_n = B_n + C_n \ \ \forall n.$$

Como $B_n \leq A*_n$ e $C_n \leq A*_n$, resulta do critério de convergência de sucessões crescentes que:
$A*_n$ tem limite finito se, e só se, B_n e C_n têm limite finito.
Daqui se conclui o seguinte

Facto 8. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é simplesmente (não absolutamente) convergente tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.*

Registamos também a "comutatividade" nas séries absolutamente convergentes:

Facto 9. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente. Seja $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijecção. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$ é também absolutamente convergente e tem soma igual à da primeira.*

Demonstração : A par das sucessões de somas parciais acima introduzidas B_n e C_n para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, consideremos as correspondentes B'_n e C'_n para $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$. Então, como todos os termos positivos de uma dada soma parcial da primeira série se encontram obrigatoriamente na segunda série,
$\forall p \exists q$ tal que $B'_p \leq B_q \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$
o que mostra que (B'_n) tem limite finito e $\leq \lim B_n$. Como na asserção anterior podemos trocar os papéis de B_n e B'_n, tem-se na verdade $\lim B'_n = \lim B'_n$. Procedendo do mesmo modo com C_n e C'_n vemos que o facto fica demonstrado.

6

CÓNICAS EM COORDENADAS POLARES E PARÂMETROS ASSOCIADOS

Há conveniência em reconhecer e manejar equações das cónicas que não sejam necessariamente as chamadas formas canónicas. Recordemos, com um exemplo, a técnica de “completação do quadrado" no reconhecimento da cónica, e as informações que daí podemos obter. Neste caso, tratar-se-á da equação de uma elipse. A partir de

$$x^2 + 3y^2 + x = 0$$

podemos reescrever

$$(x + \frac{1}{2})^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$$

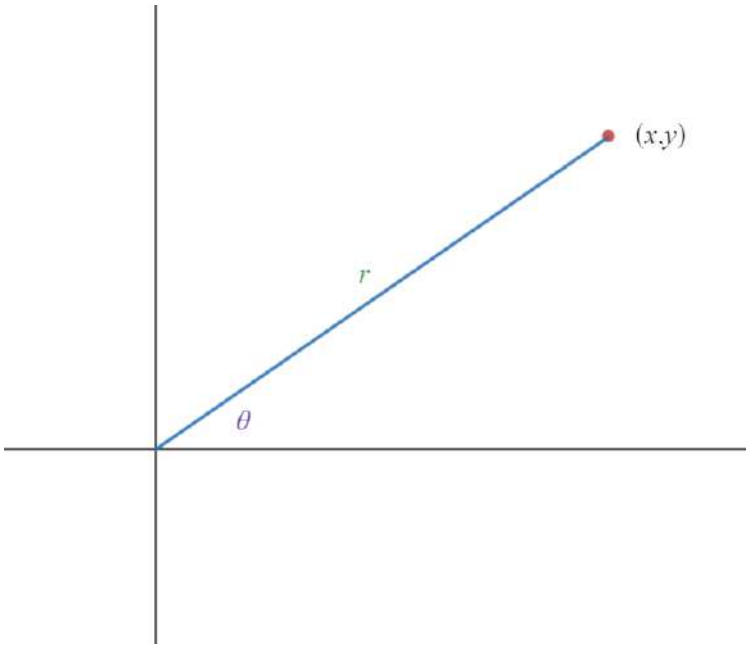
o que nos permite dizer imediatamente que estamos perante uma elipse centrada em $(-\frac{1}{2}, 0)$ e que todos os seus pontos satisfazem

$$|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Recordemos que um sistema de coordenadas polares no plano é uma semi-recta e (eixo) de origem O. Habitualmente associa-se-lhe um sistema de coordenadas cartesianas com origem O e tendo e como semi-eixo de abcissas positivas.

Para cada ponto do plano, a relação entre coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) é então

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



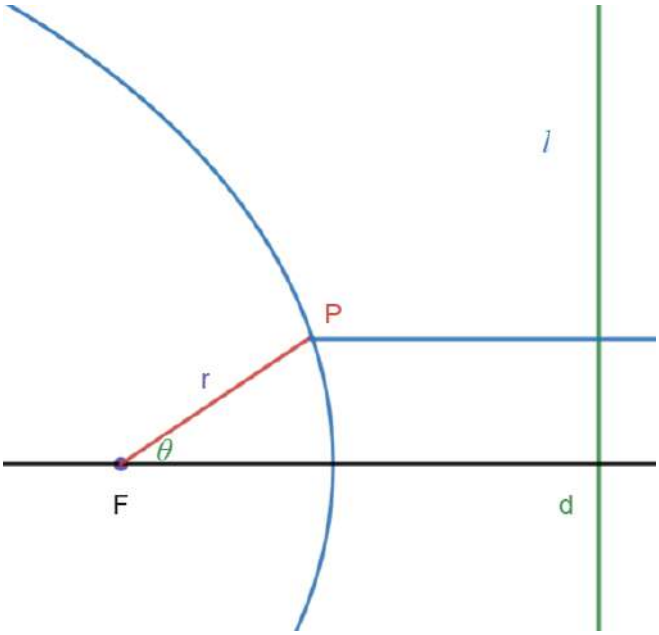
Vamos introduzir uma definição de cónicas que provavelmente é nova para o estudante principiante, e utilizar as coordenadas polares para obter as respectivas representações analíticas.

Consideremos, no plano, uma recta l e um ponto $F \notin l$ (a que chamaremos, no que segue, *directriz* e *foco*, respectivamente). Seja ainda dado um número real $e > 0$ (a que iremos chamar *excentricidade*). A *cónica* definida por estes elementos é o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$\frac{\|PF\|}{\text{dist}(P,l)} = e \qquad (C)$$

Considerando um sistema de coordenadas polares com origem F e eixo perpendicular a l (e supondo, para fixar ideias, que l tem abcissa $d > 0$ nesse eixo) esta condição reescreve-se

$$r = e(d - r\cos\theta).$$



Resulta

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \qquad (C')$$

Há lugar a algumas observações:

- Se $0 < e < 1$ todos os pontos P que satisfazem (C) ficam no semiplano determinado por l e F, como é óbvio. A expressão (C') está bem definida para todos os valores de θ (basta restringir θ a $[0, 2\pi]$ para obter a totalidade da curva) porque o denominador é sempre $\geq 1 - e$. A cónica diz-se então uma *elipse.* É fácil, de resto, reconhecê-la fazendo a mudança para as coordenadas cartesianas: de (C') resulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ed - ex$$

e, depois de elevar ao quadrado ambos os membros, obtemos uma equação do tipo que exemplificámos no início do capítulo.

Estamos em presença, evidentemente, de uma curva *limitada* porque $r \leq \frac{ed}{1-e}$.

Para incluir uma circunferência como caso particular, consideramos $e = 0$ em (C'). Podemos imaginá-la como elipse de foco no centro e com directriz a distância infinita.

- Se $e = 1$ também todos os pontos P que satisfazem (C) ficam no semiplano determinado por l e F. Mas agora a curva não é limitada. A expressão (C') fica bem definida para $-\pi < \theta < \pi$ mas o denominador anula-se nos extremos do intervalo e $\lim r(\theta) = \infty$ quando $\theta \to \pm\pi$. Dizemos então que se trata de uma *parábola.*

- Se $e > 1$ há pontos que satisfazem (C) no outro semiplano, mas para representar a condição desses pontos devemos reescrever (C) do seguinte modo

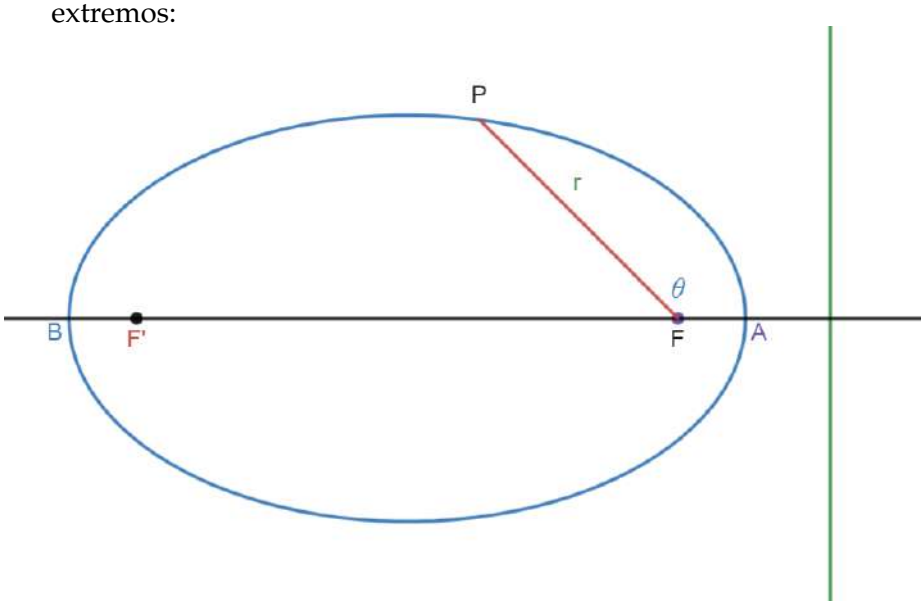
$$r = e(r\cos\theta - d),$$

e assim obtemos a representação

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1} \qquad (C'')$$

Trata-se agora de uma *hipérbole* com os dois ramos (C') e (C''), cujos domínios são: $|\theta| < \alpha$ com $\alpha = \arccos(-1/e)$ e $\alpha = \arccos(1/e)$, respectivamente.

Consideremos o caso geral da elipse. Os *vértices* são os pontos A e B onde r atinge valores extremos:



$$\|FA\| = \frac{ed}{1+e}, \quad \|FB\| = \frac{ed}{1-e}.$$

O segmento de recta AB é o *eixo maior*. Além da origem do sistema de coordenadas (F) há um outro ponto interessante: F', o ponto de AB tal que $\|BF'\| = \|AF\|$. Veremos adiante que a elipse tem precisamente F e F' como focos. Assim, $\|FF'\| = \frac{2e^2d}{1-e^2}$. A distância entre os focos costuma ser representada por $2c$, e representamos por $2a$ o comprimento do *eixo maior* $\|AB\|$. Temos então $2a = \frac{2ed}{1-e^2}$, $2c = \frac{2e^2d}{1-e^2}$ e portanto:

$$c = ea.$$

(C') pode reescrever-se

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad (a)$$

Outro parâmetro relevante é a *ordenada máxima* dos pontos da elipse, que é costume representar por b. Calculemos o seu valor, isto é, o máximo de $r\sin\theta$: como $r\sin\theta = \frac{ed\sin\theta}{1+e\cos\theta}$, e

$$\frac{e^2d^2\sin^2\theta}{1+e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta} = \frac{e^2d^2(1-t^2)}{1+e^2t^2+2et}$$

onde fizemos a substituição $\cos\theta = t$. O estudo da função $f(t) = \frac{e^2d^2(1-t^2)}{1+e^2t^2+2et}$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$ mostra imediatamente que o seu máximo é atingido em $t = -e$, de onde concluimos

$$b = \frac{ed\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = a\sqrt{1-e^2}.$$

Resulta agora

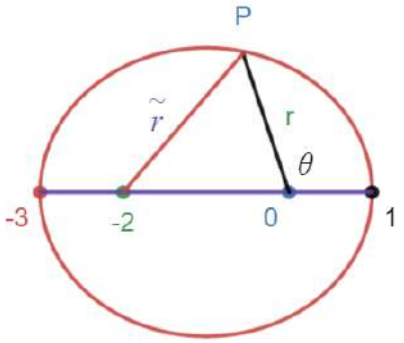
$$a^2 = b^2 + c^2$$

e tem-se também a expressão da excentricidade

$$e = \frac{c}{a}.$$

A elipse tem *centro*, isto é: há um ponto a respeito do qual ela é simétrica, que é o ponto médio do eixo maior e do segmento $F'F$. (A justificação é dada um pouco adiante.) Em particular, c representa também a distância do centro a cada um dos focos.

Exemplo: A equação $r = \frac{3}{2+\cos\theta}$ representa uma elipse. Os valores extremos de r são 1 (no ponto $(1,0)$) e 3 (no ponto $(-3,0)$) - aqui estamos a referir um sistema de coordenadas cartesianas associado ao sistema polar que a equação subentende. Sendo os vértices $(1,0)$ e $(-3,0)$ e sendo a origem um dos focos, o outro será $(-2,0)$. Representemos por $\tilde{r}$ a distância de um ponto genérico a $(-2,0)$. Vamos verificar neste exemplo, como exercício, que se realiza a propriedade característica da elipse, isto é, que para cada ponto se tem $r + \tilde{r} = 4$.



Tem-se

$$\tilde{r}^2 = r^2 + 4 + 4r\cos\theta = \frac{9}{(2+\cos\theta)^2} + 4 + \frac{12\cos\theta}{2+\cos\theta},$$

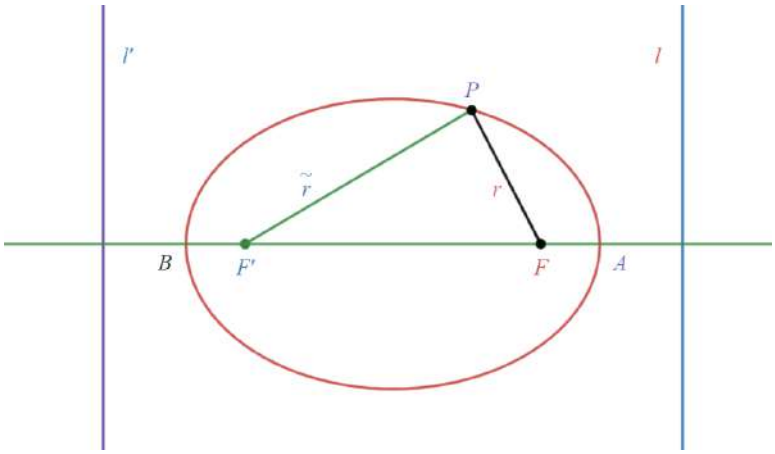
$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{9 + 4(2+\cos\theta)^2 + 12\cos\theta + (2+\cos\theta)}}{2+\cos\theta},$$

$$\tilde{r} = \frac{\sqrt{25 + 40\cos\theta + 16\cos^2\theta}}{2+\cos\theta} = \frac{5+4\cos\theta}{2+\cos\theta}$$

e resulta a conclusão pretendida.

Exercício: Identificar o tipo de cónica dado pelas equação polar nos casos: $r = \frac{8}{3+3\cos\theta}$; $r = \frac{4}{1+3\cos\theta}$. Identificar foco(s), directriz e dar as correspondentes equações cartesianas.

Voltemos a considerar uma elipse com foco F e a correspondente directriz, e a representação em coordenadas polares de origem F e eixo polar perpendicular à directriz: $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ (onde d é a distância de F à directriz).



Ao foco F' associamos uma directriz l' de tal modo que l', F' são obtidos de l, F pela simetria de centro no ponto médio de AB. Facilmente se reconhece, raciocinando como no primeiro caso, que a este par de foco e directriz corresponde a representação polar

$$\tilde{r} = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

(no sistema com origem F' e eixo polar dirigido de F' para F). Tem-se, obviamente, para todo o θ,

$$r(\theta) = \tilde{r}(\theta + \pi)$$

mostrando que os "raios vectores" $r(\theta)$ e $\tilde{r}(\theta + \pi)$, partindo de F e F', respectivamente, têm o mesmo comprimento e são paralelos com sentidos opostos; são, por isso, lados opostos de um paralelogramo que tem $F'F$ como uma das diagonais. Isto explica que os pontos correspondentes da elipse, digamos, P e $\tilde{P}$, são simétricos em relação ao ponto médio de $F'F$. Justifica-se, assim, a existência de centro da elipse.

Vamos agora mostrar que efectivamente os pontos F e F' desempenham o papel de focos. Precisamente, pretendemos mostrar que, para cada ponto P da curva,

$$r + \tilde{r} = 2a.$$

Mostraremos, equivalentemente (porque $r < 2a$), que

$$\tilde{r}^2 = (2a - r)^2.$$

Pelo teorema de Carnot para triângulos, temos

$$\tilde{r}^2 = 4c^2 + r^2 + 4cr\cos\theta$$

e ficamos reduzidos a provar que

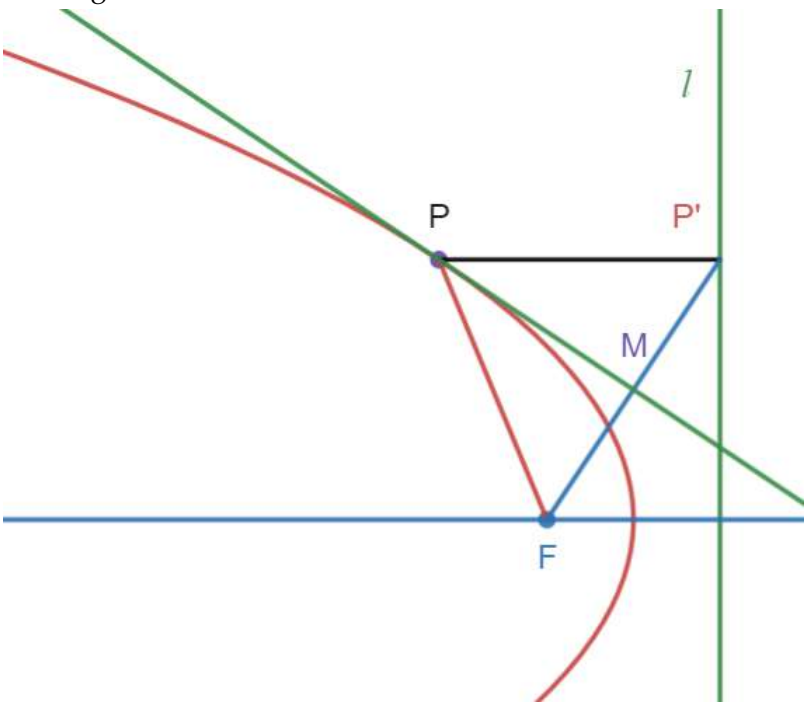
$$4c^2 + 4cr\cos\theta = 4a^2 - 4ar$$

ou seja

$$a^2(1 - e^2) = cr\cos\theta + ar$$

que é consequência imediata de (a).

A propriedade de reflexão na parábola: Na figura, ilustramos a justificação de que os raios incidentes num objecto parabólico, paralelos ao eixo, reflectem-se passando pelo foco. Com isto queremos dizer, precisamente, que, sendo P' a projecção ortogonal de um ponto P da parábola sobre a sua directriz d, o ângulo da recta PP' com a tangente à curva no ponto P é igual ao ângulo da tangente com a recta PF.



A justificação, usando argumentos essencialmente geométricos, pode fazer-se assim: consideremos o ponto médio M do segmento FP' e a mediatriz t deste segmento (perpendicular ao segmento que incide no ponto M); como P pertence à parábola, $P \in t$, já que é equidistante de F e P'. Afirmamos agora que esta recta t é a tangente à parábola em P. Para o reconhecer há que ter em conta:

(a) um ponto $Q \in t$ que seja distinto de P tem distância à diretriz menor que a distância a F, porque a projecção Q' de Q terá a propriedade $|QQ'| < |QP'| = |QF|$; assim, P é o único ponto comum à parábola e a t.

(b) todos os pontos da parábola ficam no semiplano determinado por t que contém F: com efeito, se X é um ponto do outro semiplano, tem-se $|XF| > \text{dist}(X, d)$. Para justificar este facto, observar que, dado um tal ponto X, existe um ponto Y comum ao segmento XF e a t. Então $\|XF\| = \|XY\| + \|YF\|$ e, sendo X' a projeção ortogonal de X sobre a diretriz d, tem-se, utilizando propriedades elementares da distância $\|XF\| = \|XY\| + \|YP'\| > \|XP'\| \geq \|XX'\|$.

A propriedade de reflexão na elipse: Também a elipse possui uma propriedade de reflexão, traduzida no seguinte facto: um raio emitido a partir de um dos focos reflecte-se de modo a passar no outro foco. Precisamente: para cada ponto P da elipse, usando uma notação já introduzida acima, os segmentos correspondentes a r e $\tilde{r}$ determinam ângulos iguais com a tangente à elipse no ponto P. Analogamente para a hipérbole.

6.1 UMA NOTA SOBRE AS ESFERAS DE DANDELIN

É bem conhecido o argumento de Dandelin e Quetelet para demonstrar que as secções planas de uma superfície cónica são as curvas que conhecemos com a designação de cónicas. Esse argumento baseia-se na construção de esferas tangentes interiormente à superfície cónica (chamadas esferas de Dandelin) que permitem localizar os focos da curva obtida como secção. Há muitas ilustrações de qualidade daquele argumento disponíveis na Internet.

Nesta secção vamos apenas abordar a questão da *existência* das esferas de Dandelin, e fá-lo-emos para o caso da elipse, usando técnicas elementares de geometria analítica, bem conhecidas nesta fase de estudos.

Facto 10. *Consideremos a folha de superfície cónica*

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2), \quad z > 0. \tag{a}$$

onde $k > 0$. O plano de equação

$$z = mx + d \tag{b}$$

intersecta todas as geratrizes de (a) se, e só se, $|m| < k$ e $d > 0$. Nestas condições, existem exatamente duas esferas que são tangentes (interiormente) à superfície cónica, isto é, cujos pontos comuns com a superfície constituem uma circunferência, e simultaneamente tangentes ao plano (b). Estas esferas estão situadas em semiespaços opostos determinados por aquele plano.

Demonstração: A intersecção de (a) com o plano $y = 0$ é formada pelas semi-retas $y = \pm kx$, $y \geq 0$, e (a) é, por sua vez, o resultado da rotação completa desta intersecção em torno do eixo Oz. Assim, a condição para que o plano encontre todas as geratrizes reduz-se à condição de encontrar as referidas semi-retas, do que resulta imediatamente a primeira afirmação.

Consideremos em seguida qualquer esfera tangente à superfície (a). Podemos identificá-la pelo centro $(0, 0, c)$ (onde $c > 0$), sendo o respetivo raio $\frac{c}{\sqrt{1+k^2}}$. Ora, uma tal esfera será tangente ao plano se o raio for a distância do centro ao plano, o que conduz imediatamente à condição

$$\frac{|c - d|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Ora, com $A = \frac{1}{1+m^2}$ e $B = \frac{1}{1+k^2}$, temos $A > B$ e a equação anterior escreve-se

$$(A - B)c^2 - 2Adc + Ad^2 = 0.$$

Esta equação tem duas soluções positivas, uma $> d$ e outra $< d$. A demonstração fica concluída.

Façamos uma observação final: na proposição anterior não é restritivo considerar um plano com equação da forma (b), isto é, perpendicular ao plano $y = 0$. Com efeito, dado um plano qualquer $z = mx + ny + d$, e escolhendo coordenadas polares para (m, n), digamos

$$m = r\cos\theta, \quad n = r\sin\theta$$

a mudança de variável (rotação no plano xy) dada por

$$x = (\cos\theta)\, u - (\sin\theta)\, v, \quad x = (\sin\theta)\, u + (\cos\theta)\, v$$

conduz à equação do plano $z = ru + d$, com $r = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Exercício: Nas condições do Facto 10, a intersecção de (a) e (b) é, como se sabe, uma elipse. Exprimir, em função de k, m e d, o centro e os semieixos a, b dessa elipse.

7

FACTOS MUITO BÁSICOS SOBRE POLINÓMIOS REAIS

7.1 RAÍZES; FACTORIZAÇÃO

Como sabemos, uma função real de variável real diz-se um polinómio se tiver uma expressão analítica da forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e os coeficientes a_i são constantes reais. Se $a_0 \neq 0$, dizemos que P tem grau n. Um número α tal que $P(\alpha) = 0$ diz-se uma raiz ou um zero de P.

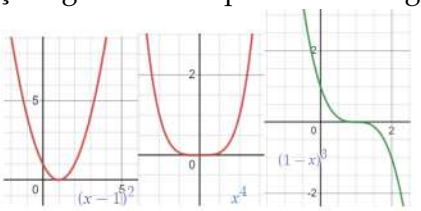
Facto 11. *O polinómio P tem a raiz α se, e só se, existe outro polinómio Q tal que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

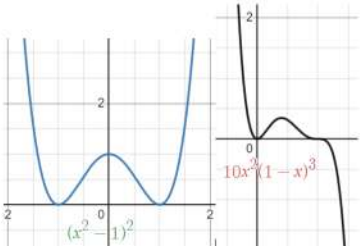
Mais geralmente, dizemos que α é raiz de P com multiplicidade k ($k \in \mathbb{N}$) se existe um polinómio Q tal que $P(x) = (x - \alpha)^kQ(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $Q(\alpha) \neq 0$. Quando $k = 1, 2, 3$ falamos de raiz simples, dupla ou tripla, respectivamente.

Facto 12. *São equivalentes as afirmações:*
(i) α é raiz de P com multiplicidade k
(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ e $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Facto 13. *Se α é raiz de P com multiplicidade $k > 1$, então α é raiz de P' com multiplicidade $k - 1$*

Comportamento do polinómio numa vizinhança de uma das suas raízes: Observemos as representações gráficas dos polinómios seguintes, em intervalos que incluem as suas raízes.





As várias situações ilustram o seguinte facto, cuja verificação é um exercício simples:

Facto 14. *Seja α uma raiz do polinómio P com multiplicidade k. Então:*
Se k é par, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x)$ mantém o sinal $\forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\setminus\{\alpha\}$. Trata-se do sinal de a_0.
Se k é ímpar, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x)$ tem o sinal a_0 em $]\alpha, \alpha+\varepsilon[$ e o sinal contrário ao de a_0 em $]\alpha-\varepsilon, \alpha[$.

O principal resultado que descreve a estrutura dos polinómios como funções de variável real é o seguinte, que não demonstraremos aqui mas que certamente soa familiar.

Facto 15. *(**(Decomposição de um polinómio em factores reais)** Dado o polinómio (1), com $n > 1$, existem números reais α_i, β_j, γ_j e números $k_i \in \mathbb{N}_0$, $p_j \in \mathbb{N}_0$ de modo que se tem a decomposição num produto de polinómios de graus 1 ou 2*

$$P(x) == a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{p_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{p_l}.$$

Os números α_i são as raízes reais de P, os números k_i são as suas multiplicidades. Os trinómios $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ não têm raízes reais. Tem-se $\sum_{i=1}^{m} k_i + 2\sum_{j=1}^{l} p_j = n$.

Este enunciado decorre facilmente do *Teorema fundamental da Álgebra*, que será estudado noutro curso. Esse teorema afirma que todo o polinómio de grau $n \geq 1$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ tem exatamente n raízes em $\mathbb{C}$ (cada uma contada de acordo com a sua multiplicidade). É um enunciado mais simples do que o que demos acima, pois não é necessário referir em separado os factores que contêm os trinómios, os quais dão conta das raízes complexas (não reais) do polinómio em causa.

Factorização em casos simples: Em certos casos podemos obter a factorização real sem passar pelo cálculo das raízes (reais ou complexas). Nos exemplos seguintes usamos a completação do quadrado ou uma mudança de variável:

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

O polinómio $f(x) = x^6 - 2x^2 + 1$ pode escrever-se como função composta: $f(x) = P(x^2)$ onde $P(x) = x^3 - 2x + 1$). Como $x^3 - 2x + 1) = (x-1)(x^2+x-1) = (x-1)(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$, temos, substituindo x por x^2:

$$x^6 - 2x^2 + 1 =$$
$$(x-1)(x+1)(x-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(x+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

Exercícios: 1) Discutir, em função de c, o número de raízes reais da equação $x^6 - x^2 = c$.

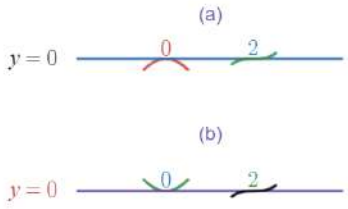
2) Fazer um esquema do gráfico de $x^6 + ax^5$, onde $a > 0$ é um número dado. Determinar a de modo que o valor mínimo do polinómio $x^6 + ax^5 + 1$ seja 0. Qual é a ordem da raiz de $x^6 + ax^5 + 1$ onde o mínimo é atingido?

3) Que factores aparecem na decomposição real de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$? (Recordar o valor da expressão $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x-1)$.)

4) Que factores aparecem na decomposição real de $x^n - 1$?

5) Mostrar que $\forall x \in \mathbb{C}\ 1 - x + x^2 = 0 \Rightarrow x^5 - x^4 - 1 = 0$. Em consequência, apresentar $x^5 - x^4 - 1$ como produto de dois polinómios reais, com graus 2 e 3 .

6) Dar a expressão analítica de um polinómio cujo comportamento em vizinhanças dos pontos 0 e 2 seja traduzido graficamente pelo esquema seguinte



Procurar, para as respostas, polinómios com o grau menor possível. No caso (b) pode o polinómio atingir um valor mínimo em $x = 1$?

7) Verificar que existem um polinómio P de grau 4 e um número $b > 1$ tais que $P(0) = P'(0) = P(1) = P(b) = 0$, $P(x) > 0\ \forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, e $\min_{x\in\mathbb{R}} P(x) = -\max_{x\in[0,1]} P(x)$.

Esquema da resolução do ex. 7: O polinómio pedido será qualquer múltiplo positivo de $P(x) = x^2(x-1)(x-b)$. As soluções de $P'(x) = 0$, além de $x = 0$, são as raízes $x_1(b)$ e $x_2(b)$ de uma equação do 2º grau, com $0 < x_1(b) < 1 < x_2(b)$. Trata-se então de estudar a função $g(b) = P(x_1(b)) + P(x_2(b))$ para concluir que ela tem um zero $b \in]1, +\infty[$.

8) Um polinómio P de grau 4 tem duas únicas raízes reais, 0 e 1, com $P'(0) > 0$ e $P'(1) < 0$. Para o polinómio $Q(x) = P(x)^3$ indicar os valores de $Q'(0)$, $Q'(1)$, $Q''(0)$, $Q''(1)$ e o sinal de $Q'''(0)$.

9) Dar a expressão analítica do polinómio P (de variável real) com as propriedades seguintes:
(1) $P(0) = 0$ e P tem um mínimo local em $x = 0$;
(2) $P(1) = P(3) = 0$;
(3) P tem mínimo absoluto com o valor -1.
(3) P tem grau mínimo entre os polinómios que satisfazem (1)-(2)-(3).

Terminamos a secção com o critério para a presença de raiz racional:

Facto 16. *Se em (1) os coeficientes a_i são inteiros e P tem uma raiz racional exprimível como fracção $\frac{p}{q}$ em que p e q não têm divisores comuns, então p é divisor de a_n e q é divisor de a_0.*

Demonstração: De $P(\frac{p}{q}) = 0$ resulta

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0.$$

Então a última parcela é divisível por p, mas como q e p são primos entre si, a_n é divisível por p, o que mostra a primeira afirmação. Um argumento análogo estabelece a segunda.

7.2 REGRA DE SINAIS DE DESCARTES

Consideremos um polinómio P como em (1) e a sequência finita dos seus coeficientes

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n.$$

Ignorando nesta sequência os termos nulos, designemos por $S = S(P)$ o número de mudanças de sinal que ocorrem pela ordem dada.

Facto 17. *(Regra de Descartes) Seja $Z = Z(P)$ o número de raízes* positivas *do polinómio P, contadas com as multiplicidades respectivas. Então $S(P) \geq Z(P)$ e a diferença $S(P) - Z(P)$ é um inteiro par.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, supomos que $a_0 > 0$ e $a_n \neq 0$. Então $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Se $a_n = P(0) > 0$, o número $S(P)$ é um inteiro par. E, tendo em conta o Facto 14, também $Z(P)$ é par: com efeito, cada raiz positiva α em que P passa de positivo a negativo determina a existência de uma outra $\beta > \alpha$ em que em que P passa de negativo a positivo, envolvendo portanto duas multiplicidades ímpares.

Se $a_n < 0$, o mesmo tipo de argumento mostra que tanto $S(P)$ como $Z(P)$ são ímpares.

Assim, em qualquer caso $S(P) - Z(P)$ é par.

Demonstremos em seguida que $S(P) \geq Z(P)$. Fá-lo-emos por indução no grau de P. Se $n = 1$ é evidente que $S(P) \geq Z(P)$ (ambos com o valor 0 ou 1). Admitamos em seguida que a desigualdade é verdadeira para os polinómios de grau $< n$ e tomemos P com grau n. Para o polinómio P', obtido derivando P, é claro que $S(P) \geq S(P')$ e, por outro lado, tendo em conta o Facto 13 e o teorema de Rolle, $Z(P') \geq Z(P) - 1$. Portanto, usando a hipótese de indução

$$S(P) \geq S(P') \geq Z(P') \geq Z(P) - 1,$$

mas, já que $S(P) - Z(P)$ é par, tem-se necessariamente $S(P) \geq Z(P)$.

Exercícios: 1) Enunciar uma "regra de Descartes" para o número de raízes negativas. (Sugestão: considerar o polinómio $P(-x)$).

2) Mostrar que, para toda a constante real c, o polinómio $x^5 + cx^2 + 1$ não pode ter apenas raízes reais.

3) Que se pode afirmar sobre o número de raízes positivas de

$$x^4 + x^3 - 5x^2 - 10x - 3\,?$$

E quanto ao número de raízes negativas?

4) Quantas raízes reais tem o polinómio $x^{13} + 2x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + 3x^3 + 20x^2 - 1$?

8

LIMITES NO INFINITO E EXISTÊNCIA DE EXTREMOS ABSOLUTOS

8.1 INTRODUÇÃO E PRIMEIROS EXEMPLOS

Recordemos o seguinte **Teorema de Weierstrass**, mencionado na disciplina de Análise Matemática II:

Se K é um subconjunto compacto (isto é, limitado e fechado) de $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com valores reais, então f tem um valor máximo e um valor mínimo em K; precisamente, existem x_1 e $x_2 \in K$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in K.$$

Não vamos aqui ocupar-nos da demonstração deste teorema, que será objecto de uma outra disciplina de Análise, mas vamos dar relevo a um seu corolário que passaremos a utilizar sistematicamente:

Facto 18. ***Corolário do teorema de Weierstrass*** *Sejam F um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty. \tag{i}$$

Então f tem um valor mínimo em F, isto é, existe $x_1 \in F$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Antes de prosseguir recordemos o que (i) significa exactamente:

$$\forall A > 0 \ \exists b \ \text{ tal que } \ \|x\| > b, \ \ x \in F \implies f(x) > A. \tag{ii}$$

Demonstração: Fixemos um ponto $z \in F$. Pela condição (i) ou a sua explicitação (ii), existe b tal que

$$\|x\| > b, \ \ x \in F \implies f(x) > f(z).$$

Definamos $K = \overline{B(0,b)} \cap F$. Então K é compacto e é claro que $z \in K$. Pelo teorema de Weierstrass, f tem mínimo em K, isto é, existe $x_1 \in K$ tal que

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in K.$$

Mas, se $x \in F \setminus K$, então $\|x\| > b$ e temos também $f(x) \geq f(z) \geq f(x_1)$. Conclui-se que $f(x_1) = \min f$.

Notas: 1) O mínimo referido neste enunciado é um mínimo *global* ou *absoluto*.

2) De modo simétrico, demonstra-se que Se F é um fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty. \qquad (iii)$$

Então f tem um valor máximo em F, isto é, existe $x_2 \in F$ tais que

$$f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in F.$$

3) Obviamente, para que as condições (i) ou (iii) tenham sentido não trivial, F deve ser um conjunto não limitado.

4) Em muitas aplicações, tem-se $F = \mathbb{R}^n$.

Comecemos por apresentar os exemplos mais simples de utilização do corolário.

Exemplos. 1) Qual é o valor mínimo de $f(x) = x^4 - 2x^3$ e $\mathbb{R}$?

Como $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$, sabemos que f tem mínimo (absoluto). Como $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3/2$ e num ponto de mínimo a derivada tem um zero, o mínimo só pode ser atingido em 0 ou $3/2$. Como $f(0) = 0$ e $f(3/2) = -27/16$, a resposta é $-27/16$.

2) Qual é o valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - y + 1$?

Como, para valores "grandes" de $\|(x, y)\|$, os termos do 2º grau são dominantes, somos levados a intuir que também aqui se tem a condição (i), a qual agora será escrita na forma

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x, y) = +\infty \qquad (a)$$

Logo, existe mínimo absoluto. Como o mínimo é necessariamente atingido num ponto crítico, vamos procurá-los: resolvendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ encontramos uma só solução: $(-1, 1/2)$. Concluimos que o mínimo pedido é $f(-1, 1/2) = -1/4$.

Mas justifiquemos cuidadosamente a afirmação (a). Escrevamos $\rho = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como é óbvio, tem-se

$$|x| \leq \rho, \quad |y| \leq \rho.$$

Então $f(x, y) \geq \rho^2 - 3\rho + 1$. Como a função de uma variável $\varphi(\rho) = \rho^2 - 3\rho + 1$, definida em $[0, +\infty[$, tem a propriedade $\lim_{\rho\to+\infty} \varphi(\rho) = +\infty$, obtemos imediatamente (a).

A justificação de (a) dada no exemplo acima enquadra-se num padrão geral: trata-se de exibir uma função contínua $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq \varphi(\rho) \ \ \forall (x, y) \text{ no domínio de } f$$

e

$$\lim_{\rho\to+\infty} \varphi(\rho) = +\infty.$$

Aqui estávamos a tratar de uma função de duas variáveis, mas é claro que o argumento tem sentido de um modo geral em $\mathbb{R}^n$.

Um procedimento ligeiramente diferente poderia consistir no seguinte: determinar duas funções contínuas φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x,y) \geq \varphi(x) + \psi(y) \ \ \forall (x,y) \text{ no domínio de } f$$

e

$$\lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{|y|\to+\infty} \varphi(y) + \infty.$$

Esta ideia poderia ser aplicada no mesmo exemplo, escolhendo $\varphi(x) = x^2 + 2x$ e $\psi(y) = y^2 - y + 1$.

A mesma ideia se aplica a uma função f definida em $\mathbb{R}^n$, devendo então f ser minorada por uma soma de n funções de uma variável.

3) Qual é o valor mínimo de $f(x,y) = x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - x + 3y$? Esta questão é ligeiramente mais delicada, porque a presença do termo $\frac{3}{2}xy$, que toma valores com os dois sinais, poderia perturbar a minoração por uma função de ρ que tenda para $+\infty$. Mas o termo é controlável através da desigualdade elementar

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \quad \forall x,y$$

de onde:

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - \frac{3(x^2+y^2)}{4} = \frac{x^2+y^2}{4}.$$

Assim, obtemos para a função em causa a minoração

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - x + 3y \geq \frac{x^2+y^2}{4} - x + 3y \geq \frac{\rho^2}{4} - 4\rho$$

que ainda tem a propriedade que conduz a (a). Portanto existe o valor mínimo de f. Calculando os pontos críticos, encontramos apenas um: $(26/7, -30/7)$. O valor mínimo pedido é, por isso, $f(26/7, -30/7) = -58/7$.

É natural perguntarmo-nos como é que os coeficientes dos termos quadráticos – e particularmente do termo misto – influencia o facto de se ter, ou não, o limite (a). Esta questão será esclarecida adiante.

Exercícios: 1) Justificar a existência de mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y$ em $\mathbb{R}^3$ e calculá-lo. (Sugestão: com $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tem-se $f(x,y,z) \geq \rho^2 - 2\rho$...)

2) Justificar que $x^2 + y^2 + 3z^2$ tem mínimo no plano $x + y - z = 1$ e calculá-lo. (Sugestão: o plano é um conjunto fechado... depois utilizar o multiplicador de Lagrange.)

Exemplo. Vamos mostrar que a função $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ tem mínimo no quadrante de $\mathbb{R}^2$

$$Q = \{(x,y) | \, x > 0. \, y > 0\}$$

e calculá-lo. Note-se que o corolário do teorema de Weierstrass não é directamente aplicável, porque Q não é fechado. Mas não é difícil adaptar o argumento do corolário:

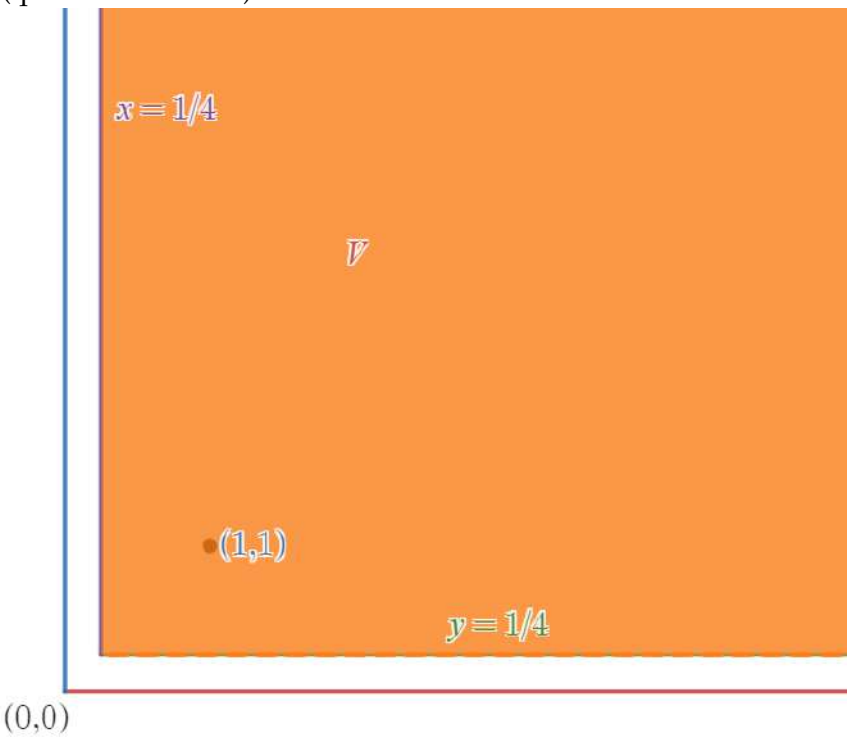
Comecemos por observar que f tem um único ponto crítico: $(1,1)$, com $f(1,1) = 3$. Por outro lado, se $(x,y) \in Q$,

$$0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } 0 < y < \frac{1}{4} \Longrightarrow f(x,y) > 4; \qquad (i)$$

e na parte do domínio

$$V = \{(x,y) \,|\, x \geq \frac{1}{4},\ y \geq \frac{1}{4}$$

(que é um fechado) tem-se



$$f(x,y) \geq \frac{1}{4}\max(x,y). \qquad (ii)$$

Utilizando a notação já introduzida acima, $\rho^2 \leq 2\max(|x|,|y|)^2$, de onde

$$\max(|x|,|y|) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\rho.$$

Deduz-se $f(x,y) \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\rho$. Portanto $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f|_V(x,y) = +\infty$. Pelo corolário de Weierstrass, $f|_V$ tem mínimo; devido a (i) esse é o mínimo em Q. É, portanto, atingido no único ponto crítico, com o valor 3.

Terminamos esta introdução com a resposta completa à questão seguinte: quando é que um polinómio homogéneo do 2º grau, com duas variáveis, tem a propriedade (i)?

Facto 19. *Dado o polinómio homogéneo do 2º grau $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ são equivalentes as condições*

(i) $\lim_{\rho\to\infty} P(x,y) = +\infty$

(ii) *Existe $\sigma > 0$ tal que, com $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,*

$$P(x,y) \ \geq\ \sigma\rho^2 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(iii) $b^2 < 4ac$ *e* $a > 0$.

Demonstração: $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Observemos que para qualquer número $\varepsilon > 0$

$$|bxy| = |b\varepsilon x\frac{1}{\varepsilon}y| \leq \frac{|b|\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{|b|y^2}{2\varepsilon^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

de onde, para todos os valores de x e y,

$$ax^2 + bxy + cy^2 \geq (a - \frac{|b|\varepsilon^2}{2})x^2 + (c - \frac{|b|}{2\varepsilon^2})y^2.$$

Assim, sendo

$$\sigma = \min\{a - \frac{|b|\varepsilon^2}{2},\ c - \frac{|b|}{2\varepsilon^2}\}$$

temos

$$ax^2 + bxy + cy^2 \geq \sigma(x^2 + y^2) = \sigma\rho^2$$

e resta ver que podemos tomar $\sigma > 0$ com uma escolha conveniente de ε. Se $b = 0$ isto é óbvio porque $\sigma = a$ ou c. Se $b \neq 0$, temos por hipótese $\frac{|b|}{2c} < \frac{2a}{|b|}$ e basta tomar ε tal que

$$\frac{|b|}{2c} < \varepsilon^2 < \frac{2a}{|b|}.$$

para garantir que $\sigma > 0$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: é óbvio.

$(i) \Longrightarrow (iii)$: Sob a hipótese (i) tem-se $a > 0$, porque $a \leq 0$ implica $P(x,0) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, o que é incompatível com (i). Por um argumento análogo, tem-se $c > 0$. Mostremos que também $b^2 < 4ac$. Mais uma vez o argumento é por contradição. Se fosse $b^2 = 4ac$ ter-se-ia $P(x,y) = ax^2 \pm 2\sqrt{ac}xy + cy^2 = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y)^2$, pelo que $P(x,y) = 0$ em todos os pontos da recta $\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y = 0$, o que é incompatível com (i). Se fosse $b^2 > 4ac$ teríamos, designando $d = b^2 - 4ac$,

$$P(x,y) = (\sqrt{a}x + \frac{by}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{d}{4a}y^2 =$$

$$= (\sqrt{a}x + \frac{b - \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y)(\sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y)$$

e então P anular-se-ia ao longo das rectas

$\sqrt{a}x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y = 0$ e $\sqrt{a}x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y = 0$, além de tomar valores negativos em dois dos quadrantes definidos por essas rectas, nova contradição com (i).

Exemplo: Para que valores de A se pode garantir que $f(x,y) = x^2 - 4xy + Ay^2 + 10x - 9y + 11\cos(x+y)$ tem mínimo absoluto?

A resposta baseia-se fortemente no comportamento da "parcela dominante" de grau 2, isto é, do polinómio $P(x,y) = x^2 - 4xy + Ay^2$. Se este polinómio satisfizer a condição (iii), isto é, se $A > 4$, sabemos que existe $\sigma > 0$ tal que

$$f(x,y) > \sigma\rho^2 - 19\rho - 11$$

justificando que f satisfaz (i). O mínimo de f pode então ser calculado através da obtenção dos pontos críticos, escolhendo aquele onde f toma o menor valor. A obtenção dos pontos críticos pode ser feita, eventualmente, por métodos numéricos ou com recurso a uma máquina.

Observação importante: Os polinómios homogéneos do 2º grau que temos estado a estudar são precisamente as "formas quadráticas" que conhecemos da Álgebra Linear, no caso particular de $\mathbb{R}^2$. Considerando a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

imediatamente se reconhece que a expressão $ax^2 + bxy + cy^2$ coincide com

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente, com

$$A\vec{u} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vamos ainda dar um exemplo em que os "termos dominantes" da função têm graus diferentes mas, ainda assim, não é difícil dar condições para a existência de mínimo.

Exemplo: Para que valores de A se tem

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} 2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 + x - 5y^3 = +\infty \ ?$$

A ideia aqui é absorver o termo de sinal indefinido $3xy^2$ pelos dois primeiros, visto que então os restantes termos terão crescimento de ordem inferior e não perturbarão o limite. Usando mais uma vez a desigualdade elementar $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, temos, para qualquer ε

$$3|x|y^2 \leq \frac{3\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{3y^4}{2\varepsilon^2}$$

de onde

$$2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 \geq (2 - \frac{3\varepsilon^2}{2})x^2 + (A - \frac{3}{2\varepsilon^2})y^4$$

Para obtermos limite $+\infty$, os dois coeficientes da última expressão devem ser positivos, pelo que a escolha de ε deve satisfazer

$$\frac{3}{2A} < \varepsilon^2 < \frac{4}{3}$$

de onde $A > \frac{9}{8}$. Para estes valores de A temos

$$2x^2 + Ay^4 + 3xy^2 + x - 5y^3 \geq \sigma_1 x^2 + x + \sigma_2 y^4 - 5y^3$$

com σ_1, $\sigma_2 > 0$, onde no 2º membro está a soma de duas funções de uma única variável com limite $+\infty$, o que termina a resposta à questão.

Observe-se que, em alternativa, poderíamos ter aplicado à função $2x^2 + Ay^4 + 3xy^2$ a mudança de variável $y^2 = z$, que a transforma numa forma quadrática em x e z, aplicando-se então o Facto 19.

Exercícios: 1) Mostrar que, dada qualquer constante $a > 0$, a função

$$x^4 + ay^2 + xy$$

tem um valor mínimo absoluto em $\mathbb{R}^2$ e determiná-lo. Sugestão: Estimando o módulo do termo xy como na demonstração do Facto 19 obtemos

$$x^4 + ay^2 + xy \geq x^4 - cx^2 + (a-d)y^2$$

onde $d > 0$ é arbitrariamente pequeno (em particular, podemos tomar $d < a$) e $c \in \mathbb{R}$.

2) Mostrar que, para toda a constante $a \in \mathbb{R}$, a função

$$x^3 + y^2 + axy$$

tem mínimo absoluto no semiplano $\{(x,y) \mid x \geq 0\}$ e calculá-lo. Observação: Se $a \neq 0$ facilmente se vê que a função toma valores negativos em pontos próximos da origem situados em certas retas $y = kx$.

8.2 COMPARAÇÃO DE FUNÇÕES HOMOGÉNEAS

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, onde $D = \mathbb{R}^n$ ou $D = \mathbb{R}^n \setminus 0$ diz-se homogénea de grau $\alpha (\in \mathbb{R})$ se $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)\ \forall x \in D,\ \ \lambda > 0$.

Exemplos: Os polinómios homogéneos do 2º grau estudados na secção anterior são funções homogéneas de grau 2. O polinómio $x^4 - 5xy^3 - 2y^4$ é uma função homogénea de grau 4. A função

$$\frac{x^4 - 5xy^3 - 2y^4}{x^2 + y^2}$$

é homogénea de grau 2. A função $\sqrt{|x| + |y| + 2|z|}$ é homogénea de grau $1/2$. As aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ são homogéneas de grau 1.

Facto 20. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, contínua e homogénea de grau α. Então valem as estimativas*

$$m\|P\|^\alpha \leq f(P) \leq M\|P\|^\alpha \quad \forall P \in D$$

onde $m = \min\{f(P) |\ \|P\| = 1\}$ e $M = \max\{f(P) |\ \|P\| = 1\}$

Demonstração: Como a fronteira $S = \{P |\ \|P\| = 1\}$ da bola unitária é um compacto de $\mathbb{R}^n$ e f é contínua, o mínimo m e o máximo M de f em S existem. Consideremos a desigualdade da esquerda. Por definição de mínimo temos

$$\|P\| = 1 \Longrightarrow m \leq f(P).$$

Portanto, $\forall P \neq 0$,

$$m \leq f(\frac{P}{\|P\|}) = \frac{1}{\|P\|^\alpha} f(P)$$

de onde resulta imediatamente a desigualdade $m\|P\|^\alpha \leq f(P)$.

Com um argumento análogo demonstra-se a outra desigualdade.

Observe-se que, se $\alpha > 0$, $D = \mathbb{R}^n$, então as desigualdades são mesmo igualdades para $P = 0$ (basta tomar limites quando $P \to 0$: pela continuidade de f obtém-se $f(0) = 0$).

O seguinte enunciado é consequência imediata do precedente mas vale a pena registá-lo:

Facto 21. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua e homogénea de grau $\alpha > 0$. Então $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ se, e só se, $f(x) > 0 \ \forall x \neq 0$.*

Exemplo: Determinar o valor mínimo de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^3 + 2xy^2$ em $\mathbb{R}^2$.
Sabemos que

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}\rho^4, \quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2})$$

e, como $|-4x^3 + 2xy^2|$ é homogénea de grau 3, existe $M > 0$ tal que $\forall (x,y)$

$$|-4x^3 + 2xy^2| \leq M\rho^3.$$

Assim,

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\rho^4 - M\rho^3$$

e concluímos que $\lim_{\rho\to\infty} f(x,y) = +\infty$. Pelo corolário de Weierstrass, f tem mínimo absoluto. O cálculo dos pontos críticos de f conduz a

$$(0,0),\ (3,0),\ (\frac{3-\sqrt{11}}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{11}-3}{2}}),\ (\frac{3-\sqrt{11}}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{11}-3}{2}}).$$

Facilmente se comprova que o valor mínimo é -27, atingido em $(3,0)$.

Seguidamente vamos generalizar a desigualdade $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ com o objectivo de compararmos termos de funções homogéneas de qualquer grau.

Facto 22. *(Desigualdade de Young) Dados números reais $p, q > 0$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

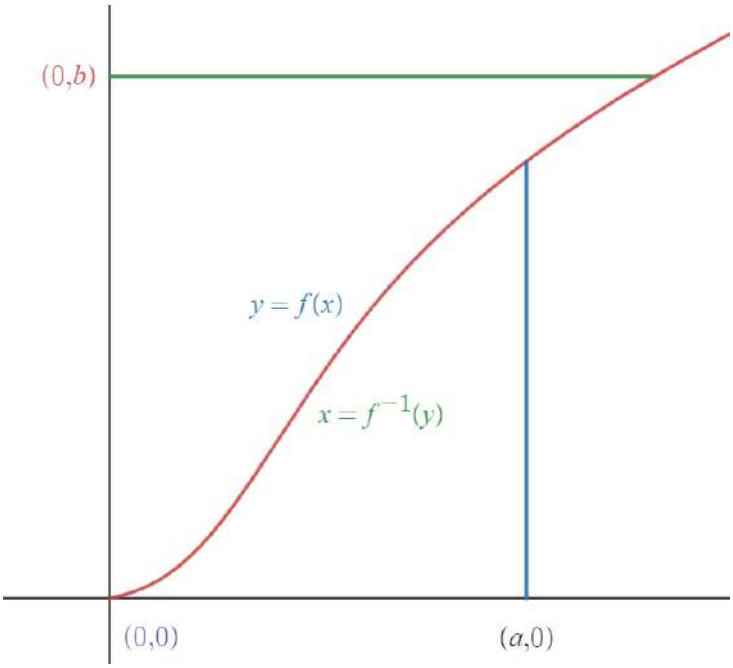
tem-se

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{Y}$$

Demonstração: É claro que basta demonstrar a desigualdade para $a, b > 0$. E na verdade vamos demonstrar um enunciado mais geral:

Facto 23. *Seja $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ uma função contínua, estritamente crescente e sobrejetiva. Então tem-se*

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(s)\,ds \quad \forall a, b > 0. \tag{Y2}$$



Demonstração: Usaremos um argumento geométrico (que não é difícil de formalizar). Consideremos a curva no 1º quadrante que é o gráfico de f; a mesma curva é gráfico da função inversa f^{-1}, bastando para isso inverter o papel habitual dos eixos coordenados. Fixados nos eixos os pontos de coordenadas a e b, ab representa a área de um rectângulo obviamente inferior à soma das áreas das duas regiões

$$\{(t,y)|\,0 \le t \le a,\ \ 0 \le y \le f(t)\}$$

e

$$\{(x,s)|\,0 \le s \le b,\ \ 0 \le x \le f^{-1}(s)\}.$$

Assim, fica demonstrada a desigualdade $(Y2)$.

Demonstração do Facto 22: Sendo p e q como no enunciado, definamos $f(t) = t^{p-1}$ para $t \ge 0$. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ é equivalente a $(p-1)(q-1) = 1$, tem-se $f^{-1}(s) = s^{q-1}$. O cálculo dos integrais que surgem em $(Y2)$ conduz imediatamente a (Y).

Exemplo: Para que valores de a podemos afirmar que $\lim_{\rho\to\infty}(|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 + x^2 - 2y^2 + 3xy + 20y) = +\infty$?

Por argumentos já utilizados, a resposta depende do comportamento dos termos de mais alto grau, isto é, da função homogénea de grau 3 $|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3$. Se estiver garantida uma desigualdade do tipo

$$|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 \ge k\rho^3 \quad \forall x,\, y \qquad (*)$$

com $k > 0$, a resposta será positiva. Para obter uma tal desigualdade utilizemos Young com $p = 3$, $q = 3/2$ e a introdução de um parâmetro:

$$|axy^2| = |a\varepsilon x\frac{1}{\varepsilon}y^2| \le \frac{|a|\varepsilon^3|x|^3}{3} + \frac{|a|2|y|^3}{3\varepsilon^{(3/2)}}.$$

Assim,

$$|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 \geq (1 - \frac{|a|\varepsilon^3}{3})|x|^3 + (4 - \frac{|a|2}{3\varepsilon^{(3/2)}})|y|^3. \qquad (**)$$

Em virtude do Facto 20, existe $m > 0$ tal que

$$|x|^3 + |y|^3 \geq m\rho^3 \quad \forall x, y.$$

Então, para obter (*), basta, ter em conta (**) e exigir

$$1 - \frac{|a|\varepsilon^3}{3} > 0, \quad 4 - \frac{2|a|}{3\varepsilon^{(3/2)}} > 0.$$

É fácil ver que um tal ε deve satisfazer

$$\varepsilon^3 > \frac{|a|^2}{36}, \quad \varepsilon^3 < \frac{3}{|a|}$$

de onde $|a|^3 < 108$, isto é, $|a| < \sqrt[3]{108}$ (aproximadamente 4.7622).

Vamos agora dar uma ligeira generalização do Facto 20 que tem interesse prático na obtenção de desigualdades de comparação.

Facto 24. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínuas e homogéneas de grau $\alpha > 0$. Suponha-se que*

$$g(P) > 0 \quad \forall P \neq 0 \qquad (+)$$

Então valem as estimativas

$$m\, g(P) \leq f(P) \leq M\, g(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}^n$$

onde $m = \min\{f(P)|\ g(P) = 1\}$ e $M = \max\{f(P)|\ g(P) = 1\}$

Demonstração: A demonstração faz-se imitando a do Facto 20, com a seguinte adaptação simples: $\forall P \neq 0$ tem-se $g(\frac{P}{g(P)^{1/\alpha}}) = \frac{g(P)}{g(P)} = 1$ e portanto, considerando o significado de M:

$$f\Big(\frac{P}{g(P)^{1/\alpha}}\Big) = \frac{f(P)}{g(P)} \leq M.$$

Do mesmo modo se obtém a desigualdade relativa a m.

Exemplo. Utilizando o Facto 24 damos outro argumento para resolver a questão de saber para que valores de a a função $|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3$ tem limite $+\infty$ no infinito. Seja M tal que

$$xy^2 \leq M(|x|^3 + 4|y|^3) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

que é obviamente equivalente a

$$|xy^2| \leq M(|x|^3 + 4|y|^3) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Sabemos que tal M existe e, com $f(x,y) = x^2y$, $g(x,y) = |x|^3 + 4|y|^3$, podemos tomar $M = \max\{f(P)|\ g(P) = 1\}$. Daqui resulta a estimativa $|axy^2| \leq |a|Mg(x,y)$ e portanto

$$|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3 \geq g(x,y) - |a|Mg(x,y) = (1 - |a|M)g(x,y). \qquad (i)$$

Pela definição de M temos também

$$Mg(x,y) - f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (ii)$$

e ainda

$$Mg(x_0,y_0) - f(x_0,y_0) = 0 \qquad (iii)$$

para certo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (um ponto onde M é atingido).

Assim, de (i) e (iii), e atendendo também ao Facto 21, temos: $|x|^3 + axy^2 + 4|y|^3$ tem limite $+\infty$ no infinito se, e só se, $|a| < \frac{1}{M}$. E, para calcular M, basta observar que (ii) e (iii) mostram que $Mg - f$ tem um ponto crítico distinto da origem (o ponto (x_0,y_0), que é ponto de mínimo absoluto). As equações que permitem obter o ponto crítico de $Mg - f$ resolvem então o problema e dão $M = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$. (Sobre esta argumentação ver também, mais adiante, o Facto 27.)

As conclusões anteriores podem ser enunciadas de modo um pouco diferente:

Facto 25. *Se f e g verificam as hipóteses do Facto anterior, e designando*

$$C = \{P|\ g(P) = 1\},$$

então, para todo o número real A tem-se a equivalência

$$f(P) \leq Ag(P)\ \ \forall P \iff \max f|_C \leq A$$

e do mesmo modo

$$f(P) \geq Ag(P)\ \ \forall P \iff \min f|_C \geq A.$$

Observação importante: Nas desigualdades do facto anterior a melhor informação obtém-se com os valores extremos $A = \max f|_C$ ou $A = \min f|_C$.

Exemplo: Para que valores de a se tem

$$\lim x^4 + 3y^4 + axy^3 - x^3 - 10x^2 = +\infty\,?$$

Como sabemos, a pergunta é equivalente a saber em que condições se tem

$$\lim x^4 + 3y^4 + axy^3 = +\infty$$

o que, por sua vez, é equivalente a saber em que condições se tem

$$x^4 + 3y^4 + axy^3 > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

em virtude do Facto 21. Consideremos o número $M = \max\{xy^3|\ x^4 + 3y^4 = 1\}$. Este número calcula-se pelo método do multiplicador de Lagrange, que conduz ao sistema seguinte:

$$y^3 + 4\lambda x^3 = 0,\ \ 3xy^2 + 12\lambda y^3 = 0,\ \ x^4 + 3y^4 = 1.$$

Das duas primeiras equações resulta, depois de isolar num dos membros o termo com λ e dividir membro a membro

$$\frac{y}{x} = \frac{x^3}{y^3}$$

de onde, com $\frac{y}{x} = t$, $t = \pm 1$, $y = \pm x$, $x^4 = \frac{1}{4}$. Logo, $M = \frac{1}{4}$.

Com cálculo análogo, ou simplesmente atendendo a que $-xy^3 = (-x)y^3$, encontramos também $\max\{-xy^3 |\, x^4 + 3y^4 = 1\} = \frac{1}{4}$. Conclui-se que $\forall (x, y)$

$$|axy^3| \leq \frac{|a|}{4}(x^4 + 3y^4).$$

Podemos então afirmar que

$$x^4 + 3y^4 + axy^3 \geq (1 - \frac{|a|}{4})(x^4 + 3y^4) > 0$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $|a| < 4$. São estes os valores de a que se procurava.

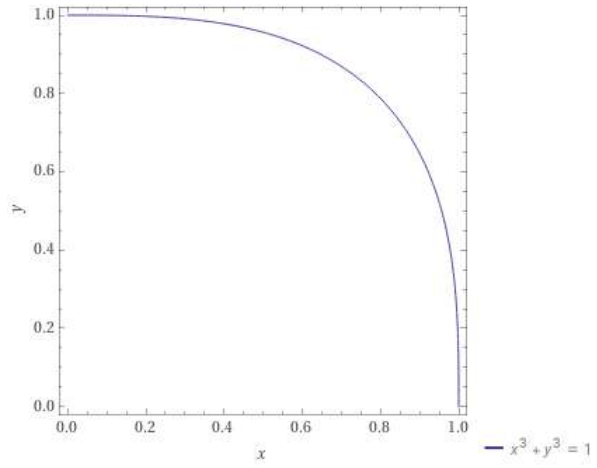
Exemplo: Calcular o valor mínimo de $\frac{xy^2 - y^3}{x^3 + y^3}$ em $Q \setminus (0, 0)$ on de $Q = \{(x, y) |\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Observemos que a existência do mínimo pode parecer à primeira vista problemática porque o domínio da função não é fechado nem limitado; mas, observando que a função é constante ao longo de cada semi-recta que parte da origem (por ser cociente de homogéneas do mesmo grau) imediatamente se conclui que o mínimo pedido coincide com o mínimo da mesma função no compacto (ver a figura)

$$K = \{(x, y) |\, x \geq 0,\ y \geq 0, x^3 + y^3 = 1\}$$

ou ainda, com o mínimo de $xy^2 - y^3$ em K; ou, finalmente, tal mínimo é o maior número m tal que $\frac{xy^2 - y^3}{x^3 + y^3} \geq m\ \forall (x, y) \in Q \setminus (0, 0)$; ou ainda, o maior número tal que

$$xy^2 - y^3 \geq m(x^3 + y^3) \quad \forall (x, y) \in Q \setminus (0, 0).$$



Escolhamos esta última caracterização: então m é tal que a função $xy^2 - y^3 - m(x^3 + y^3)$ atinge mínimo absoluto em $Q \setminus (0, 0)$ (com o valor 0). Se o mínimo é atingido num ponto interior ao 1º quadrante Q, esse ponto será crítico e portanto verificará o sistema

$$y^2 - 3mx^2 = 0,\ \ 2xy - 3y^2 = 3my^2.$$

Pondo $\frac{y}{x} = t$ obtemos para t o valor da raiz de $t^3 + 3t - 2 = 0$ e a partir daí podemos calcular um tal ponto crítico, que podemos "normalizar" introduzindo a condição que define K: $x^3 + y^3 = 1$. Mas não vale a pena completar o cálculo, porque esse ponto (x, y), tendo duas coordenadas positivas, vai conduzir a um valor de $xy^2 - y^3 \geq -y^3 > -1$, porque $y < 1$ (já que $x > 0$). Mas como $xy^2 - y^3$ toma os valores 1 e -1 nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente, os quais também petencem a K, na verdade o mínimo procurado é -1, não podendo ser atingido no interior.

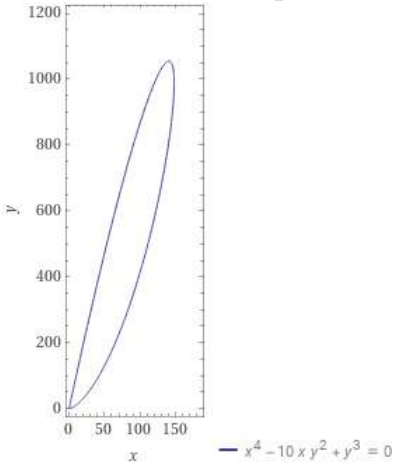
Exemplo: Mostrar que $C = \{(x, y) | x^4 + y^3 = 10xy^2,\ y \geq 0, \}$ é um compacto.

Seja $f(x, y) = x^4 + y^3 - 10xy^2$. Então, C é o conjunto dos pontos (x, y) que verificam simultaneamente as condições

$$f(x, y) = 0, \quad y \geq 0$$

Como f é obviamente uma função contínua, é imediato reconhecer que se trata de um conjunto fechado, a partir da caracterização de conjunto fechado em termos de sucessões (dada qualquer sucessão de elementos de C que tem limite, então o limite pertence a C).

A parte mais interessante do problema consiste em mostrar que se trata de um limitado, isto é, que as coordenadas de pontos de C têm um minorante e um majorante.



Utilizemos Young com $p = 3$, $q = 3/2$,

$$10xy^2 \leq \frac{10\varepsilon^3 x^3}{3} + \frac{20y^3}{3\varepsilon^{(3/2)}}$$

e, para fixar ideias, escolhamos $\varepsilon = 4$:

$$10xy^2 \leq \frac{640x^3}{3} + \frac{5y^3}{6}$$

o que permite a minoração vantajosa

$$x^4 + y^3 - 10xy^2 \geq x^4 - \frac{640x^3}{3} + \frac{y^3}{6}.$$

Logo, se $(x, y) \in C$,

$$x^4 - \frac{640x^3}{3} + \frac{y^3}{6} \leq 0.$$

Como $y \geq 0$, vem $x^4 \leq \frac{640x^3}{3}$, de onde

$$|x| \leq \frac{640}{3} < 214.$$

Finalmente, $y^3 \leq 1280x^3 - 6x^4$ e, como x pecorre um intervalo limitado, y tem um majorante positivo (grosseiramente, o valor máximo da função contínua $(1280x^3 - 6x^4)^{(1/3)}$ em $[-214, 214]$, que é $640\sqrt[3]{5}$).

Observamos que as estimativas efectuadas são as mesmas que serviriam para demonstrar que (supondo f restringida ao semiplano $y \geq 0$): $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$.

Exercício: Para que valores de A se pode afirmar que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} (x^6 + Ay^6 - 5x^2y^4) = +\infty \ ?$$

8.3 AINDA O CÁLCULO DAS CONSTANTES m E M; VALORES PRÓPRIOS

Vamos dar outro argumento para o cálculo dos números m e M referido no Facto 24. Consideremos o caso de m. Este número tem a propriedade seguinte:

(i) $f(x) - mg(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tal que $f(x_0) - mg(x_0) = 0$. (E, pela homogeneidade, também os pontos tx_0, com $t > 0$, verificam a mesma igualdade.)

Noutros termos: $f(x) - mg(x)$ atinge em x_0 um mínimo absoluto. Assim, podemos inferir

Facto 26. *Se, no Facto 24, f e g são de classe C^1, então a função $x \mapsto f(x) - mg(x)$ tem um ponto crítico não nulo, isto é, existe $x_0 \neq 0$ tal que*

$$\nabla(f - mg)|_{x=x_0} = 0.$$

É claro que o mesmo resultado vale para M, pois o raciocínio repete-se com a função $Mg(x) - f(x)$. Assim, podemos afirmar:

Facto 27. *Nas condições do Facto 24, com f e g de classe C^1, a equação vectorial*

$$\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0 \qquad (\lambda)$$

tem, para $\lambda = m$, pelo menos uma solução $x \neq 0$; e o mesmo vale para $\lambda = M$.

Este enunciado pode ser visto como um argumento alternativo ao método do multiplicador de Lagrange para o cálculo do extremo condicionado que envolve o par de funções f, g. No contexto desta discussão será útil o seguinte:

Facto 28. *(teorema de Euler para as funções homogéneas) Se f é de classe C^1 e homogénea de grau α, então*

$$\nabla f(x) \cdot x \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \right) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, definamos $\varphi(t) = f(tx)$ para $t \geq 0$. Então, pela regra da cadeia, $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Com $t = 1$ obtém-se o resultado.

Resulta que:

Facto 29. *Se a equação (λ) tem solução $x \neq 0$, então λ é valor de f em C (ver Facto 25).*

Demonstração: Com efeito, podemos supôr que $g(x) = 1$; fazendo o produto interno de ambos os membros de (λ) com x vem $\alpha f(x) = \lambda \alpha g(x)$.

Observação: Com a notação anterior, suponhamos em particular que $m < 0 < M$. Então facilmente se conclui que $M'g(P) - f(P) > 0$ e $f(P) - m'g(P) > 0 \; \forall P \neq 0$ desde que $M' > M$ e $m' < m$. Assim, resulta

$$\lim_{\|P\| \to \infty} g(P) - \alpha f(P) = +\infty$$

se (na verdade, se e só se, como não é difícil de verificar) $\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{M}$. Os números $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{M}$ são, como é óbvio, o menor e o maior valor de μ tal que

$$\nabla g(x) - \mu \nabla f(x) = 0$$

admite soluções $x \neq 0$.

Exemplo: O exemplo que surge a seguir à demonstração da desigualdade de Young pode ser tratado mais directamente com base na observação precedente: com $f(x,y) = xy^2$ e $g(x,y) = |x|^3 + 4|y|^3$, basta estudar a existência de pontos críticos não triviais de $|x|^3 + 4|y|^3 - \mu xy^2$. Somos conduzidos ao sistema

$$3|x|x - \mu y^2 = 0, \quad 12|y|y - 2\mu xy = 0.$$

Conclui-se que existem soluções $(x,y) \neq (0,0)$ se $\mu = \pm 3\sqrt[3]{4}$. Logo, $|x|^3 + 4|y|^3 - \mu xy^2$ tende para $+\infty$ quando $\|(x,y)\| \to \infty$ se $|\mu| < 3\sqrt[3]{4}$.

É de grande interesse reconsiderar aqui o caso em que f e g são formas quadráticas (portanto, um caso especial de funções homogéneas de grau 2), dadas por matrizes simétricas A e B:

$$f(x) = Ax \cdot x, \quad g(x) = Bx \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (*)$$

Notemos que, se $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$, as parcelas de f onde intervém uma dada variável x_k são

$$x_k \Big(\sum_{i \neq k}^n a_{ik} x_i + \sum_{j \neq k}^n a_{kj} x_j \Big) + a_{kk} x_k^2.$$

Logo, em cada ponto genérico x,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i, \quad k = 1, \cdots, n$$

que se pode condensar em notação vetorial como

$$\nabla f(x) = 2Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Facto 30. *Sejam A, B matrizes simétricas, sendo B definida positiva, e f, g as formas quadráticas que elas respectivamente definem, de acordo com (*). Então o sistema linear*

$$Ax - \lambda Bx = 0$$

tem soluções $x \neq 0$ para $\lambda = m$ ou $\lambda = M$, sendo m (respect. M) o mínimo (respect o máximo) de $f(x)$ sob a condição $g(x) = 1$. Se λ é tal que aquele sistema linear tem soluções $\neq 0$, então $m \leq \lambda \leq M$.

Merece referência especial o caso em que

$$g(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

em que $\nabla g(x) = 2x$ (ou, equivalentemente, $B = I$ (matriz identidade $n \times n$). O enunciado anterior pode então reescrever-se:

Facto 31. *Seja A uma matriz simétrica e f a forma quadrática que ela define. Então o mínimo m (e o máximo M) de $f(x)$ sob a condição $\|x\| = 1$ são valores próprios de A, isto é: para $\lambda = m$ ou $\lambda = M$ o sistema linear*

$$Ax - \lambda x = 0$$

tem soluções $x \neq 0$ Se λ é qualquer outro valor próprio de A, então $m \leq \lambda \leq M$.

8.4 FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO COROLÁRIO DO TEOREMA DE WEIERSTRASS

Facilmente se reconhece que o corolário de Weierstrass (Facto 18) admite a seguinte formulação mais geral, com a mesma demonstração:

Facto 32. *Sejam F um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que existe $x_0 \in F$ de modo que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) > f(x_0).$$

Então f tem um valor mínimo em F, isto é, existe $x_1 \in F$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Do mesmo modo, temos a versão simétrica

Facto 33. *Sejam F um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}$ uma função contínua com valores reais, tal que existe $x_0 \in F$ de modo que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) < f(x_0). \tag{i}$$

Então f tem um valor máximo em F, isto é, existe $x_1 \in F$ tais que

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Exemplo. A função $f(x, y) = (x^4 + y^4)e^{-x^2+xy-y^2}$ só toma valores positivos e tem-se

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = 0.$$

De facto, com $\rho = \|(x, y)\|$, temos $-x^2 + xy - y^2 \leq -\frac{\rho^2}{2}$ e $(x^4 + y^4) \leq \rho^4 \ \forall (x, y)$; pelo que

$$0 \leq f(x, y) \leq \rho^4 e^{-\frac{\rho^2}{2}}$$

e sabemos que $\lim_{\rho \to \infty} \rho^4 e^{-\frac{\rho^2}{2}} = 0$. Resulta que f tem um máximo absoluto em $\mathbb{R}^2$. Para o calcular, basta procurar os pontos críticos de f. Um cálculo simples mostra que eles são $(0, 0)$, $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, e que o máximo é atingido nos dois últimos.

8.5 FORMAS QUADRÁTICAS – CRITÉRIO DE SYLVESTER

Nesta secção vamos enunciar e demonstrar uma caracterização cómoda das formas quadráticas definidas positivas. Para isso, começaremos por recordar definições e estabelecer algumas propriedades gerais.

Uma *forma quadrática* em $\mathbb{R}^n$ é um polinómio homogéneo de grau 2 nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$, isto é, uma função do tipo

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

onde os a_{ij} são números reais que supomos, sem perda de generalidade, formar as entradas de uma matriz simétrica $A = [a_{ij}]$: $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \cdots, n$. É claro que uma tal função pode representar-se matricialmente assim:

$$f(x) = x^t A x$$

onde x é o vector coluna com coordenadas x_i e x^t é o seu transposto, ou seja o vector linha com as mesmas componentes. Podemos ainda escrever

$$f(x) = Ax \cdot x$$

usando a operação $\cdot$ (produto interno usual).

A forma quadrática f (ou a matriz simétrica A que a define) diz-se *definida positiva* (respectivamente *semi-definida positiva*) se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \quad Ax \cdot x > 0 \quad (\text{respect } \ Ax \cdot x \geq 0).$$

Se A é semidefinida positiva, a aplicação bilinear de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$

$$b(x, y) = Ax \cdot y$$

tem as propriedades de um produto interno (a simetria resulta de que $Ax \cdot y = Ay \cdot x \ \forall x, y$, por causa da simetria de A) excepto que $b(x, x) = 0$ não implica $x = 0$. Mas esta propriedade não intervém na demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz, e portanto vale para b esta desigualdade:

$$|Ax \cdot y| \leq \sqrt{Ax \cdot x}\,\sqrt{Ay \cdot y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{CS}$$

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tipo $n \times n$, recordemos que os seus *menores principais* são os determinantes das matrizes quadradas

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Facto 34. *A matriz simétrica A de tipo $n \times n$ é definida positiva se, e só se, os seus n menores principais são positivos.*

Demonstração: O facto é evidente se $n = 1$ e foi demonstrado atrás se $n = 2$ (ver Facto 21 e Facto 19). Completaremos a demonstração por indução finita. A matriz A pode escrever-se em termos de quatro blocos

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ u^t & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $B = A_{n-1}$, u é um vector coluna $(n-1) \times 1$, u^t é o seu transposto, e $\lambda = a_{nn}$ é um número real. Admitamos que os n menores principais de A são positivos e (em consequência da hipótese de indução) a matriz A_{n-1} é definida positiva.

Para cada vector x de $\mathbb{R}^n$, que decompomos na forma

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}$$

onde $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mu \in \mathbb{R}$, efectuemos a multiplicação por blocos

$$Ax = \begin{bmatrix} Bv + \mu u \\ u^t v + \lambda \mu \end{bmatrix}$$

e a partir dela o seguinte cálculo

$$Ax \cdot x = x^t Ax = v^t Bv + 2\mu\, u \cdot v + \lambda \mu^2. \qquad (a)$$

Em virtude de Cauchy-Schwarz, e introduzindo o factor $\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}$:

$$2|\mu\, u \cdot v| \leq \varepsilon^2 \|u\|^2 + \frac{\mu^2 \|v\|^2}{\varepsilon^2}.$$

Pela hipótese de indução, existe $m > 0$ tal que $v^t Bv \geq m\|v\|^2 \ \forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Combinando com a estimativa acima obtemos a minoração:

$$x^t Ax \geq (m - \varepsilon^2)\|v\|^2 + (\lambda - \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2})\mu^2.$$

Para sublinhar a dependência de A relativamente a λ passamos a escrever $A = A(\lambda)$.

Então, escolhendo ε suficientemente pequeno (por exemplo, $\varepsilon^2 = m/2$), podemos afirmar:

(i) Para λ suficientemente grande (por exemplo, $\lambda > \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2} = \frac{2\|u\|^2}{m}$) a matriz $A(\lambda)$ é definida positiva. Na verdade, por ser $\|x\|^2 = \|v\|^2 + \mu^2$,

$$x^t A(\lambda) x \geq \min(\frac{m}{2},\ \lambda - \frac{2\|u\|^2}{m})\|x\|^2.$$

Por outro lado, é evidente (desenvolvendo pela última linha) que

(ii) O determinante de $A(\lambda)$ é dado por $\det A(\lambda) = \lambda \det B + K$ onde K é uma constante independente de λ.

Portanto existe λ_0 tal que $\det A(\lambda)$ é positivo, nulo ou negativo conforme $\lambda > \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda < \lambda_0$.

Para concluir a demonstração vamos agora mostrar que:

(iii) $A(\lambda)$ é definida positiva se, e só se, $\lambda > \lambda_0$.

Comecemos por observar que

(iv) Se $A(\lambda)$ é definida positiva se, o mesmo sucede com $A(\lambda_1)$ $\forall \lambda_1 > \lambda$; e existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(\lambda - \varepsilon)$ é definida positiva.

Demonstração de (iv): A primeira afirmação é trivial por causa de (a). Demonstramos a segunda por absurdo: se não existe um tal ε então, $\forall k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{e} \quad x_k^t A(\lambda - \frac{1}{k}) x_k \leq 0.$$

Como a fronteira da bola unitária é um compacto, podemos supôr (passando a uma sucessão) que x_k converge, digamos, $x_k \to x$. Como a função $(x, \lambda) \mapsto x^t A(\lambda) x$ é contínua em $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos, por passagem ao limite, $\|x\| = 1$ e $x^t A(\lambda) x \leq 0$, o que contradiz a hipótese de (iv).

Facilmente reconhecemos agora que o conjunto dos λ tais que $A(\lambda)$ é definida positiva é um intervalo da forma $]\bar{\lambda}, +\infty[$, onde necessariamente $\bar{\lambda} \geq 0$, já que $A(0)$ não é definida positiva. Além disso, concluímos que

$$x^t A(\bar{\lambda}) x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

por passagem ao limite da desigualdade $x^t A(\lambda) x > 0$ (se $x \neq 0$) quando $\lambda \to \bar{\lambda}^+$. Em particular, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ com $\|x_0\| = 1$ e $x_0^t A(\bar{\lambda}) x_0 = 0$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz (CS) implica então, com $x = x_0$ e $y = A(\bar{\lambda}) x_0$,

$$\|A(\bar{\lambda}) x_0\|^2 \leq (A(\bar{\lambda}) x_0 \cdot x_0) \, (A(\bar{\lambda})^2 x_0 \cdot A(\bar{\lambda}) x_0) = 0,$$

de onde $A(\bar{\lambda}) x_0 = 0$. Já que $x_0 \neq 0$, conclui-se que $\det A(\bar{\lambda}) = 0$. Por conseguinte, $\bar{\lambda} = \lambda_0$, o que termina a demonstração da afirmação (iii).

9

INTEGRAIS IMPRÓPRIOS EM $\mathbb{R}^n$

Nas disciplinas de Análise estudadas até agora aprendemos a utilizar o integral de Riemann, tanto em intervalos de $\mathbb{R}$ como em certos domínios simples de $\mathbb{R}^n$. Também estudámos integrais impróprios para funções de uma variável. Neste capítulo introduzimos conceitos que permitem trabalhar com "integrais impróprios" em domínios multidimensionais.

9.1 DOMÍNIOS LIMITADOS

Utilizaremos as noções de *medida (de Jordan)*, *conjunto mensurável (à Jordan)* e *conjunto desprezável* utilizadas na disciplina de base.

Seja G um domínio mensurável (à Jordan) compacto. Vamos considerar funções contínuas definidas em $G \setminus Z$, onde Z é um conjunto desprezável.

É fácil ver que existe uma sucessão de conjuntos mensuráveis abertos

$$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \cdots$$

de modo que $\overline{Z} \subset Z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_n |Z_n| = 0$. (Representamos por $|X|$ a medida do conjunto mensurável X.) Uma tal sucessão diz-se *sucessão de encaixe para* Z. É claro que então

$$G \setminus Z_1 \subset G \setminus Z_2 \subset G \setminus Z_3 \subset \cdots$$

é uma sucessão crescente de compactos com

$$\lim_n |G \setminus Z_n| = |G|.$$

Suponhamos que $f \geq 0$ está definida e é contínua em $G \setminus Z$. Diremos que f é *integrável em* G se existe uma sucessão de encaixe de Z, digamos, Z_n, tal que a sucessão (crescente, por ser $f \geq 0$)

$$\int_{G \setminus Z_n} f \quad \text{é majorada.} \tag{a}$$

Como sabemos, esta condição é equivalente a

$$\text{existe e é finito o limite de } \int_{G \setminus Z_n} f. \tag{b}$$

Dizemos então que este limite é o *integral impróprio* de f em G e notamo-lo $\int_G f$. (Veremos já a seguir que o limite não depende da sucessão de encaixe; e que a notação não é ambígua, porque quando o integral à Riemann existe ele coincide com o integral impróprio.)

Facto 35. *Se $f \geq 0$ é limitada em G tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G\setminus Z_n} f = \int_G f.$$

Em particular, o integral (impróprio) de f existe e coincide com o integral de Riemann.

Demonstração. Sabemos que as funções contínuas limitadas são integráveis à Riemann. Como

$$\int_G f = \int_{G\setminus Z_n} f + \int_{Z_n} f$$

e, sendo M um majorante de f, vem $|\int_{Z_n} f| \leq M|Z_n|$, a afirmação resulta imediatamente de se ter $|Z_n| \to 0$.

Observação. Ver também, a este propósito, o último exercício do capítulo seguinte.

Exemplo. Seja $Q = [0,1] \times [0,1]$. O integral $\int_Q \frac{x}{x+y}\, dxdy$ existe porque a integranda é limitada e apenas não está definida na origem. É fácil calculá-lo como integral impróprio, usando integração sucessiva e tomando, por exemplo, o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{Q_\epsilon} \frac{x}{x+y}\, dxdy$$

onde $Q_\epsilon = [\epsilon, 1] \times [\epsilon, 1]$. Mas, tirando partido da simetria (de função e domínio), o cálculo é muito mais simples se observarmos que

$$\int_Q \frac{x}{x+y}\, dxdy + \int_Q \frac{y}{x+y}\, dxdy = \int_Q f(x,y)\, dxdy = 1$$

onde $f(x,y) = 1$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0)$ é definido como um número arbitrário. Obtém-se então o resultado $\int_Q \frac{x}{x+y}\, dxdy = \frac{1}{2}$.

Facto 36. *Se a condição (a) [ou (b)] é satisfeita com a sucessão de encaixe Z_n, também é satisfeita com qualquer outra sucessão de encaixe para Z e o valor do limite (b) é o mesmo.*

Demonstração. Pela hipótese, $\int_{G\setminus Z_n} f$ é sucessão de Cauchy e portanto

$$\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \;\; n > m > N \Longrightarrow \int_{G\setminus Z_n} f - \int_{G\setminus Z_m} f < \delta.$$

A diferença de integrais acima é o integral $\int_{G\cap(Z_m\setminus Z_n)} f$. Portanto, pela positividade de f, podemos aqui substituir G por um compacto arbitrário $C \subset G$, sendo a desigualdade válida a partir da mesma ordem para todos esses compactos.

Seja então W_n outra sucessão de encaixe para Z. Em virtude do facto anterior,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G\setminus W_n\setminus Z_k} f = \int_{G\setminus W_n} f$$

e, como $\int_{G\setminus W_n\setminus Z_k} f \leq \int_{G\setminus Z_k} f$, um majorante da sucessão $\int_{G\setminus Z_k} f$ é também majorante de $\int_{G\setminus W_n} f$. Assim, esta também converge. Mostremos que os limites são iguais. Seja $\delta > 0$. Como vimos acima, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad n > m \geq N \Longrightarrow \int_{G\setminus W_p\setminus Z_n} f - \int_{G\setminus W_p\setminus Z_m} f \leq \delta.$$

Tomando limites quando $n \to \infty$ e utilizando o Facto 35, temos

$$m \geq N \Longrightarrow \int_{G\setminus W_p} f - \int_{G\setminus W_p\setminus Z_m} f \leq \delta.$$

Seguidamente, tomando sucessivamente limites quando $p \to \infty$, quando $m \to \infty$ e quando $\delta \to 0$:

$$\lim_{p\to\infty} \int_{G\setminus W_p} f \leq \lim_{m\to\infty} \int_{G\setminus Z_m} f.$$

Como (W_n) e (Z_n) têm papéis simétricos no argumento, a desigualdade contrária é também válida e a demonstração fica concluída.

Este resultado legitima, pois, sob a condição (a), a definição do *integral de f em G*:

$$\int_G f = \lim_{n\to\infty} \int_{G\setminus Z_n}$$

onde Z_n é uma sucessão de encaixe de Z *arbitrária*. O conceito assim estendido de integral tem propriedades básicas análogas às que estudámos para funções limitadas. Registamo-las, observando que as demonstrações respetivas são imediatas:

Facto 37. *Sejam f, g funções contínuas fora de um conjunto desprezável (que podemos supor o mesmo para ambas), satisfazendo (a) ou (b). Então,*

$$\int_G (f+g) = \int_G f + \int_G g$$

e, se $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_G (cf) = c \int_G f.$$

Por outro lado, se f satisfaz (a) ou (b) e $0 \leq g \leq f$ em G, g também satisfaz a mesma propriedade e tem-se

$$\int_G g \leq \int_G f.$$

Exemplo. Seja f uma função contínua excepto num ponto $P_0 \in G$ e tal que

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \infty.$$

Dizemos então que f tem uma *singularidade* em P_0. Suponhamos mais, em particular, que G é a bola unitária, $P_0 = 0$ e f é o inverso da potência da distância à origem

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$$

onde α é um número positivo. Como sucessão de encaixe da origem, tomemos

$$Z_n = B_{1/n} = \{x| \ \|x\| < \frac{1}{n}\}.$$

Estudemos a integrabilidade de f. Para qualquer $\epsilon > 0$ calculemos os integrais

$$\int_{G\setminus B_\epsilon} = \int_{\epsilon\leq\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx.$$

Em $\mathbb{R}^2$ introduzamos coordenadas polares. Teremos, com a notação usual para estas coordenadas,

$$\int_{G\setminus B_\epsilon} = \int_{\epsilon\leq r\leq 1,\, 0\leq\theta\leq 2\pi} \frac{1}{r^\alpha} r dr\, d\theta = 2\pi \int_\epsilon^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr.$$

Como sabemos do estudo de integrais impróprios para funções de uma variável, o limite deste integral, quando $\epsilon \to 0$, é finito se, e só se, $\alpha < 2$.

Em $\mathbb{R}^3$, introduzindo coordenadas esféricas $(r,\, \theta,\, \varphi)$, obtemos

$$\int_{G\setminus B_\epsilon} = \int_{\epsilon\leq r\leq 1,\, 0\leq\theta\leq\pi,\, 0\leq\varphi\leq 2\pi} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \int_\epsilon^1 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$$

e concluímos que $\int_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha 72}}$ existe se e só se $\alpha < 3$.

De um modo geral, pode mostrar-se que em $\mathbb{R}^n$ o integral

$$\int_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx$$

existe se, e só se, $\alpha < n$.

Exemplo: O potencial Newtoniano, criado por uma distribuição de massa com densidade $\varphi(x, y, z)$ num domínio D de $\mathbb{R}^3$, é dado, em cada ponto (x_1, y_1, z_1), por

$$U(x_1, y_1, z_1) = \int_D \frac{\varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}}.$$

Supondo φ majorada, vemos que U tem sendido em todo o espaço porque, se $(x_1, y_1, z_1) \in D$, a integranda, sendo majorada por uma função da forma M/r, com $M > 0$ e onde r é a distância a (x_1, y_1, z_1), é integrável.

Exemplo: Seja $I = [a_1, b_1] \times \cdots\cdots [a_n, b_n]$ um intervalo de $\mathbb{R}^n$ e $f : I \to \mathbb{R}$ a função $f(x) =$ distância de x à face onde $x_1 = a_1$, isto é,

$$f(x) = |x_1 - a_1|.$$

Tem-e então

$$\int_I \frac{1}{f(x)^\alpha}\, dx = (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{|x_1 - a_1|^\alpha}\, dx_1$$

e concluimos que este integrl existe se, e só se, $\alpha < 1$.

Mais geralmente, pode-se demonstrar que, se $f(x)$ é a função distância a um hiperplano H, então, para todo o conjunto mensurável G que intersecta H, o integral $\int_G \frac{1}{f(x)^\alpha}\,dx$ existe sempre que $\alpha < 1$.

Passemos agora a estudar os integrais de funções *com sinal arbitrário.* Para cada função contínua $f : G \setminus Z \to \mathbb{R}$, recordemos as propriedades das funções *parte positiva* e *parte negativa* de f, isto é: $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = max(-f, 0) = -\min(f, 0)$: são também contínuas e

$$f^+ - f^- = f, \quad f^+ + f^- = |f|, \quad 0 \leq f^+,\ f^- \leq |f|.$$

Diremos que f é *integrável em* G se $|f|$ o for. Em virtude da comparação que observámos atrás, também f^+ e f^- são integráveis em G e podemos definir o integral de f em G:

$$\int_G f = \int_G f^+ - \int_G f^-.$$

O integral assim introduzido tem propriedades que se demonstram facilmente com base nas relativas a funções positivas:

Facto 38. *Se f e g são integráveis em G, o mesmo sucede com $f + g$ e cf, onde c é um número, e tem-se*

$$\int_G (f + g) = \int_G f + \int_G g,$$

$$\int_G (cf) = c \int_G f.$$

Por outro lado, se f é contínua em $G \setminus Z$, e existe g, contínua em $G \setminus Z'$ e integrável (onde Z' é também desprezável) tal que $|f| \leq g$ em $G \setminus (Z \cup Z')$,então f é integrável e

$$|\int_G f| \leq \int_G |f| \leq \int_G g.$$

Exemplo. Seja f contínua em $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Se existem constantes $M > 0$ e $\alpha < 3$ tais que $\forall (x, y, z) \neq 0$

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{M}{r^\alpha},$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, então f é integrável em qualquer mensurável compacto G.

9.2 DOMÍNIOS ILIMITADOS

Seja G um conjunto não limitado. Suponha-se que existe uma sucessão de mensuráveis compactos

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \cdots \subset G$$

tal que para todo o compacto $K \subset G$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset G_n$. Uma tal sucessão diz-se *sucessão exaustiva para* G.

Comecemos por considerar integrais de funções positivas. Seja f uma função ≥ 0 tal que cada restrição $f|_{G_n}$ é integrável no sentido da secção anterior. (Em particular, f pode não estar definida

em todos os pontos de G.) Diremos então que f é admissível em G. E diremos que f é *integrável em* G se for majorada a sucessão (obviamente crescente)

$$\int_{G_n} f.$$

O mesmo é dizer: se existe, e é finito, o limite desta sucessão. É fácil ver que este limite não depende da sucessão exaustiva: de facto, se H_n é outra sucessão exaustiva de G tem-se, por definição,

$$\forall n\ \exists m:\ \ G_n \subset H_m \subset H_{m+1} \subset \cdots$$

de modo que $\int_{G_n} f \leq \int_{H_k} f\ \forall k \geq m$. Então $\int_{G_n} f \leq \lim_{k\to\infty} \int_{H_k} f$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \int_{G_n} f \leq \lim_{k\to\infty} \int_{H_k} f$. O mesmo argumento prova a desigualdade contrária. O limite

$$\int_G f = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} f$$

chama-se *integral de* f em G.

Exemplo. Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ \|x\| \geq 1\}$ e $f(x) = \frac{1}{r(x)^\alpha}$. O mesmo cálculo que fizemos atrás mostra que

$$\text{em } \mathbb{R}^2: \quad \int_{1\leq\|x\|\leq n} f(x)dx = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr;$$

$$\text{em } \mathbb{R}^3: \quad \int_{1\leq\|x\|\leq n} f(x)dx = 4\pi \int_1^n \frac{1}{r^{\alpha-2}}\, dr,$$

pelo que f é integrável se, e só se, $\alpha > 2$ em $\mathbb{R}^2$, ou $\alpha > 3$ em $\mathbb{R}^3$. (Note-se que $G_n = \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ 1 \leq \|x\| \leq n\}$ constitui uma sucessão exaustiva de G.

Para estender a noção de integral a funções com sinal arbitrário, procede-se de modo inteiramente igual ao que usámos para domínios limitados, por decomposição em parte positiva e parte negativa. Obtêm-se então igualmente as propriedades elementares de linearidade e o critério de comparação.

9.3 UM TEOREMA DE INTEGRAÇÃO SUCESSIVA

Trataremos de duas situações em que vale um teorema de integração sucessiva em dimensão 2: um retângulo infinito e um quadrante.

Facto 39. *Seja $f(x,y)$ definida e contínua em $[a,b]\times[0,+\infty[$ e tal que*

$$f(x,y) \leq g(y) \quad \forall x \in [a,b],\ y \in [0,+\infty[.$$

e

$$\int_0^{+\infty} g(y)\, dy \quad \textit{converge.}$$

Então $f(x,y)$ é integrável em $[a,b]\times[0,+\infty[$ e tem-se

$$\int_{[a,b]\times[0,+\infty[} f = \int_a^b dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^{+\infty} dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Demonstração. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[a,b]\times[0,n]} |f| \leq \int_a^b dx \int_0^n g(y)\,dy \leq (b-a)\int_0^{+\infty} g(y)\,dy$$

e $[a,b]\times[0,n]$ é sucessão exaustiva para $[a,b]\times[0,+\infty[$, resulta que f é integrável em $[a,b]\times[0,+\infty[$. Seja $F_n(x) = \int_0^n f(x,y)\,dy$. Como

$$\int_{[a,b]\times[0,n[} f = \int_a^b dx \int_0^n f(x,y)\,dy = \int_a^b F_n(x)\,dx$$

e

$$\Big|\int_a^b F_n(x)\,dx - \int_a^b dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy\Big| = \Big|\int_a^b dx \int_n^{+\infty} f(x,y)\,dy\Big|$$

$$\leq \int_a^b dx \int_n^{+\infty} g(y)\,dy = (b-a)\int_n^{+\infty} g(y)\,dy \to 0 \quad (n\to\infty)$$

resulta

$$\int_{[a,b]\times[0,+\infty[} f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

A prova da outra igualdade é mais fácil.

Facto 40. *Seja $f(x,y)$ contínua, integrável em $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ e tal que $\forall a > 0$ existe uma função $g(y)$, integrável em $[0,+\infty[$, satisfazendo*

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \forall (x,y) \in [0,a]\times[0,+\infty[$$

e

$$\int_0^{+\infty} g(y)\,dy \quad \textit{converge.}$$

Então tem-se

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

Demonstração: Facilmente se reconhece que

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{a\to+\infty}\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} f(x,y)\,dx\,dy$$

(considerar em primeiro lugar o caso $f \geq 0$). Ora, para cada a,

$$\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

em virtude do resultado anterior. Passando ao limite quando $a \to +\infty$ conclui-se a demonstração.

Exemplo. Sejam f e g funções positivas, integráveis em $[0,+\infty[$ e $h(x,y)$ definida em $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ tal que

$$|h(x,y)| \leq f(x)g(y) \quad \forall (x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[.$$

Então, de acordo com o Facto 40, temos

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} h(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy.$$

Um caso particular importante é aquele em que $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$ e $h(x,y) = f(x)g(y)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{a\to\infty} \int_{x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}$$

(onde usámos mudança para coordenadas polares), concluímos que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Terminaremos com uma aplicação à *transformada de Laplace* (que será estudada noutra disciplina de Análise).

Sejam f, g funções contínuas em $[0,+\infty[$ tais que existem constantes $M > 0$, $a \in \mathbb{R}$ para as quais

$$|f(x)|,\ \ |g(x)| \le Me^{ax} \quad \forall x \ge 0.$$

Então existem as respetivas *transformadas de Laplace*,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx, \quad G(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\,dx, \quad \forall p > a.$$

Por outro lado, seja $f * g$ a função (chamada *convolução* de f e g)

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt.$$

Tem-se então:

Facto 41. *Sejam F, G as transformadas de Laplace de f e g respetivamente. Então $f * g$ tem também transformada de Laplace*

$$H(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\Big(\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt\Big)$$

para p suficientemente grande, e

$$H(p) = F(p)G(p).$$

Demonstração. O integral que define $H(p)$ tem sentido porque

$$H(p) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-px}\Big(\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt\Big)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_D e^{-p(u+v)} f(u)g(v)\,du\,dv$$

onde interpretámos o integral iterado como integral num domínio bidimensional e fizemos a mudança de variável $x - t = u,\ t = v$ e $D = \{(u,v) \mid u + v \leq A,\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$. Logo,

$$H(p) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-p(u+v)} f(u)g(v)\,du\,dv = \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)\,du \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v)\,dv$$

uma vez que $e^{-pu}f(u)$ e $e^{-pv}g(v)$ são integráveis em $\mathbb{R}_+$ para $p > a$.

Exercícios. 1) Seja B_a a bola de centro na origem e raio a em $\mathbb{R}^2$. Calcular $I_\epsilon = \int_{B_1\setminus B_\epsilon} \frac{|x|}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy$. Para que valores de α é finito o $\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon$?

2) Seja D o octante positivo de $\mathbb{R}^3$ (isto é, caracterizado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Calcular

$$\int_D e^{-(x+y+z)^2}\,dx\,dy\,dz$$

.

SUGESTÃO: Fixado $b > 0$, ponhamos $\Delta_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq b\}$. A ideia é exprimir o integral

$$I_b = \int_{\Delta_b} e^{-(x+y+z)^2}\,dx\,dy\,dz$$

em termos de um integral unidimensional e calcular $\lim_{b\to+\infty} I_b$. Começar pela mudança de variável: $x + y + z = u$, $y = v$, $z = w$, que é um isomorfismo linear:

$$I_b = \int_{\Delta'_b} e^{-u^2}\,du\,dv\,dw$$

onde $\Delta'_b = \{(u,v,w) \mid 0 \leq u \leq b,\ v \geq 0,\ w \geq 0,\ v + w \leq u\}$. Efectuar então uma integração sucessiva (integração nas varáveis (v,w) seguida da integração em u) para obter

$$I_b = \int_0^b e^{-u^2}\,du \int_{T_u} dv\,dw = \int_0^b e^{-u^2}\frac{u^2}{2}\,du$$

sendo T_u o triângulo dado por $v \geq 0$, $w \geq 0$, $v + w \leq u$. Finalmente, integrar por partes e passar ao limite quando $b \to +\infty$.

3) Sejam $\alpha > 0$ e $p > 0$, e $A_\alpha = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq \alpha,\ y^2 + z^2 \leq (1 + x^2)^{-2p}$. Mostrar que

$$I_\alpha := \int_{A_\alpha} (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^\alpha (1 + x^2)^{-4p}\,dx.$$

Para que valores de p existe e é finito o $\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha$?

4) Seja B a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Calcular $\int_B \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ e indicar para que valores reais de c existe o integral

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^c}\,dx\,dy\,dz.$$

5) Seja $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Calcular $\int_D \frac{x}{x+y}\,dx\,dy$. (Utlizar coordenadas polares.)

6) Seja $E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Para que valores de α existe o integral

$$\int_E \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}\, dx\, dy\, dz \ ?$$

10

ALGUNS OBJETOS MATEMÁTICOS MENOS COMUNS

10.1 DENSIDADE DOS ÂNGULOS INTEIROS NO CÍRCULO UNITÁRIO

Definição 1: Recordemos que, se $A \subset B$ são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, dizemos que A é denso em B se todo o elemento de B é limite de uma sucessão de elementos de A, isto é: $\forall b \in B$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ tal que $\|a - b\| < \varepsilon$.

Sabemos, por exemplo, que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$; que uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ privada de um diâmetro é densa na correspondente bola fechada, etc.

Vamos trabalhar com vectores de $\mathbb{R}^2$, que por vezes serão encarados como números complexos. Assim, não distinguiremos entre (a, b) e $a + ib$. Particularmente importantes no que segue são os vectores unitários, isto é, os números

$$u_t = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos estes elementos (a circunferência unitária centrada na origem) será representdo por S. A vantagem de olhar os vectores como números complexos é que podemos então multiplicá-los. Por outro lado, norma (euclidiana) de vector e módulo de número são o mesmo. Recordemos que

$$u_t u_s = u_{t+s}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$u_t^k = u_{kt}, \quad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

O objectivo desta nota é demonstrar os seguintes factos, que estão relacionados entre si.

Teorema 1. *O conjunto* $\{(\cos n, \sin n) | n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* S.

Teorema 2. *O conjunto* $\{\sin n | n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* $[-1, 1]$.

Na verdade, é fácil reconhecer que o teorema 2 é uma consequência simples do teorema 1.

Vamos então provar o teorema 1. Comecemos por efectuar cálculos simples: para quaisquer t, s

$$\|u_t - u_s\|^2 = 2 - 2\cos(t - s) \tag{a}$$

$$\|u_{t-s} - (1, 0)\|^2 = |u_{t-s} - 1|^2 = 2 - 2\cos(t - s) \tag{b}$$

Para verificar (a) basta observar que $(\cos t - \cos s)^2 + (\sin t - \sin s)^2 = 2 - 2(\cos t \cos s + \sin t \sin s)$. A verificação de (b) é ainda mais directa.

Consideremos então o conjunto $A = \{(\cos n, \sin n) | n \in \mathbb{Z}\}$. Trata-se do conjunto de termos de uma sucessão limitada; portanto há uma subsucessão convergente. E como a aplicação $n \mapsto (\cos n, \sin n)$ é injectiva, concluimos que $\forall \varepsilon > 0$ existem $m \neq n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon$$

ou, em virtude de (a), $2 - 2\cos(m-n) < \varepsilon^2$. Utilizando (b) vemos que

$$\|u_{m-n} - (1,0)\| < \varepsilon. \qquad (c)$$

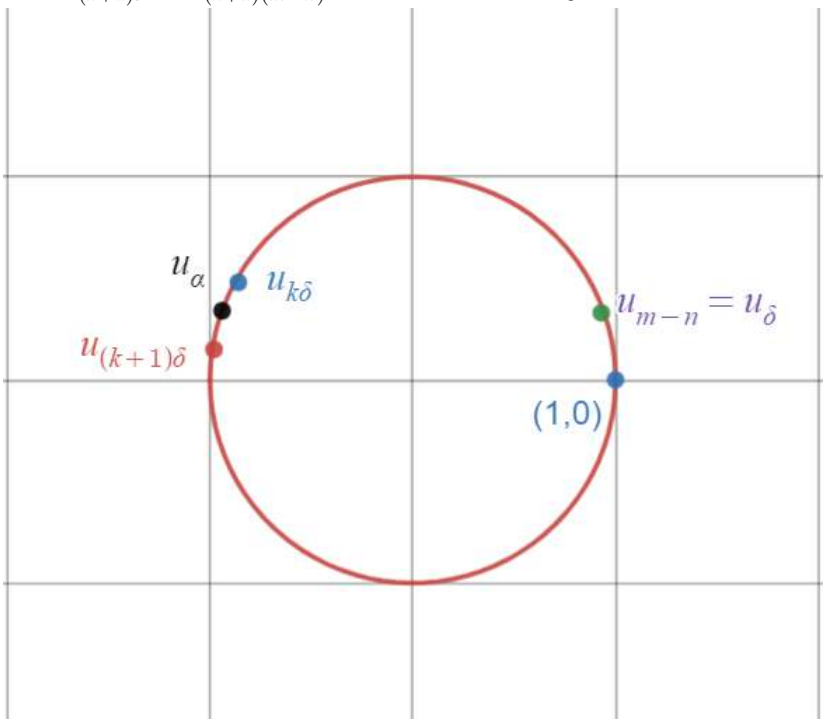
Seja agora u_α um ponto arbitrário de S, com $0 < \alpha < 2\pi$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, em particular $\varepsilon < \|u_\alpha - (1,0)\|$ e supondo, para fixar ideias, que em (c) se tem $u_{m-n} = u_\delta$ com $0 < \delta < 2\pi$, então $\delta < \alpha$; escolhamos o inteiro k tal que $k\delta \leq \alpha < (k+1)\delta$. Resulta que

$$u_\delta^k u_{m-n} = u_{(k+1)\delta}$$

e

$$\|u_\alpha - u_{(k+1)\delta}\|^2 = 2 - 2\cos(\alpha - (k+1)\delta) \leq 2 - 2\cos\delta = \|u_{m-n} - (1,0)\|^2 \leq \epsilon^2.$$

Como $u_{(k+1)\delta} = u_{(k+1)(m-n)} \in A$, a demonstração fica concluída.



Notas: 1) a demonstração do teorema 2 pode fazer-se também directamente com base no seguinte facto: *Se a é um número irracional, o conjunto dos números $m + na$, com m, $n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Não é difícil encontrar na internet demonstrações desta afirmação, que não são complicadas. Também se encontram demonstrações da irracionalidade de π, mas estas são mais elaboradas.

2) É fácil verificar, examinando a demonstração, que nos teoremas 1 e 2 $\mathbb{Z}$ pode ser substituído por $\mathbb{N}$.

3) Exercício: utilizando o facto (não trivial) de que o número π é transcendente, provar que o conjunto
$\{(\cos\sqrt{2}n, \sin\sqrt{2}n) | n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em S.

4) Exercício fácil: o conjunto
$\{z \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{N} \ z^n = 1\}$
é denso em S.

10.2 FUNÇÕES DE DIRICHLET E DE THOMAE

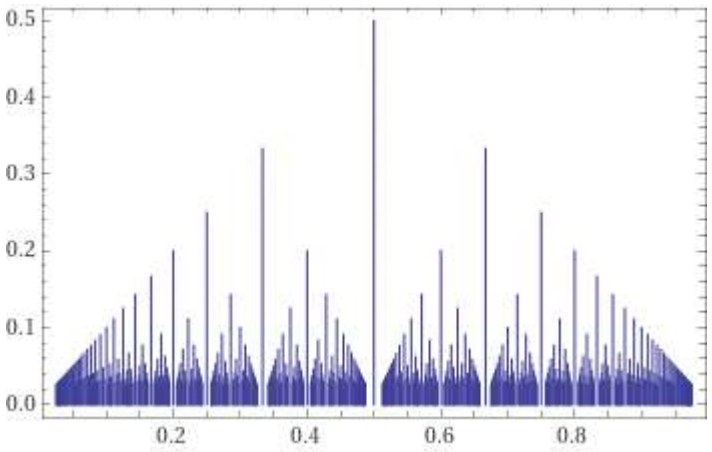
É bem conhecida a *função de Dirichlet*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

como exemplo de função limitada mas descontínua em todos os pontos do seu domínio.

É talvez mais interessante a seguinte variação em torno desta ideia, que conduz à *função de Thomae* $T : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ onde } 0 < p < q \in \mathbb{N} \text{ são primos entre si} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$



A função T é contínua nos pontos irracionais e também nos extremos do intervalo, e descontínua em todos os outros pontos. Demonstremos esta afirmação.

Seja x irracional em $[0,1]$ e tomemos uma sucessão de pontos do intervalo $x_n \to x$. Como $T(x_i) = 0$ sempre que x_i é irracional, basta considerar o caso em que (pelo menos para uma subsucessão, ainda representada pelo mesmo símbolo) se tem $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ com $0 < p_n < q_n$ com p_n, q_n primos entre si. Afirmamos então que $q_n \to \infty$, o que provará que $T(x_n) \to 0$, como se pretende. Se tal não se verifica, existe $M > 0$ tal que $p_n \leq M$ para uma infinidade de valores de n e, novamente passando a uma subsucessão (sempre representada pelo mesmo símbolo) podemos supor que $p_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Então os p_n são em número finito e, já que $p_n < q_n$, as fracções x_n assumem apenas um número finito de

valores. Logo, $\lim x_n$ tem de ser um destes valores, contradizendo o facto de o limite ser o irracional x.

Uma pequena modificação do argumento prova também a continuidade para $x = 0$ ou $x = 1$.

Se $x = \frac{p}{q}$ com $0 < p < q \in \mathbb{N}$ é óbvio que T é descontínua em x, porque podemos tomar uma sucessão $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com limite igual a x.

10.3 PROPRIEDADES DE INTEGRABILIDADE

A teoria de integração que conhecemos neste momento é a do integral de Riemann. Recordemos que afirmar que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem integral (no sentido dessa teoria), o qual é um número representado por $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\, dx$, significa que

$$S(P_n) \to \int_a^b f$$

para *qualquer* sucessão $S(P_n)$ de somas de Riemann para f determinadas por partições P_n onde $|P_n| \to 0$.

Recordemos que, para este efeito, uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \cdots k-1)$ com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$$

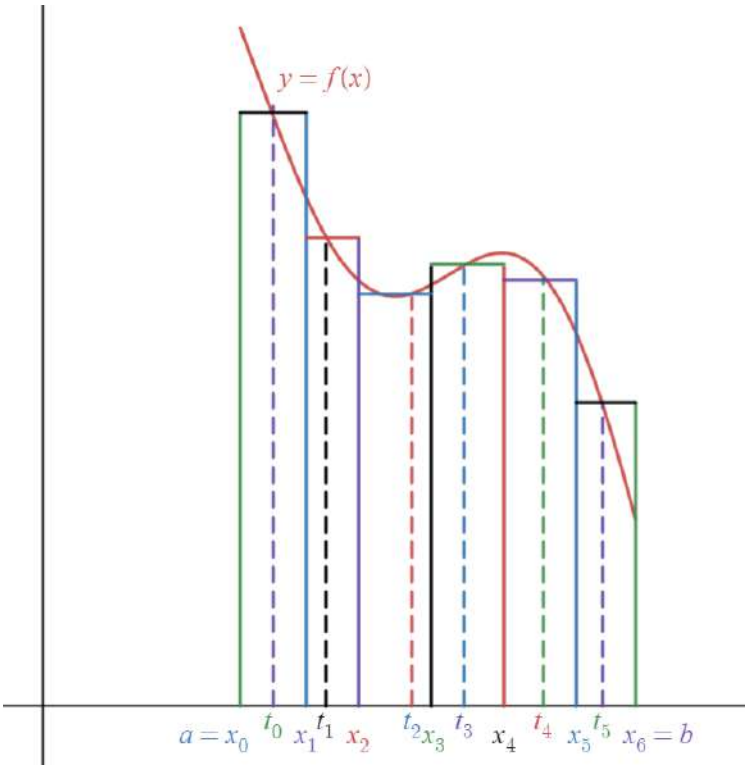
onde foi escolhida uma sequência de elementos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$; que a soma de Riemann associada a P é o número

$$S(P) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

e que designamos por $|P|$ o número $\max_{0 \le i \le k-1}(x_{i+1} - x_i)$.

Deve ser sublinhado que esta definição envolve uma condição muito forte, ao exigir que *todas* as sucessões de somas de Riemann nas condições indicadas tenham limite (necessariamente o mesmo); e que a definição só tem sentido quando aplicada a funções *limitadas* no intervalo considerado (para uma função ilimitada, facilmente se constroem sucessões de somas de Riemann que não têm limite finito).

A figura abaixo recorda o significado geométrico das somas de Riemann como aproximações à área de uma figura determinada pelo gráfico de f, no caso em que $f \ge 0$.



Exemplo: A função de Dirichlet não tem integral de Riemann no intervalo $[0,1]$. Com efeito, é trivial construir uma sucessão de somas $S(P_n)$ com o valor constante 0 e outra, $S(P'_n)$, com o valor constante 1 (e com $|P_n| \to 0$ e $|P'_n| \to 0$).

Exemplo: A função de Thomae tem integral de Riemann em $[0,1]$, sendo $\int_0^1 T = 0$. Vamos dar uma prova directa deste facto.

Seja $S(P_n)$ uma sucessão de somas de Riemann para T em $[0,1]$ com $|P_n| \to 0$. Mostraremos que $S(P_n) \to 0$. Podemos escrever

$$S(P_n) = \sum_{i=0}^{k_n-1} T(t_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$$

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, pelo argumento usado na secção anterior, o conjunto

$$F = \{y \in [0,1] \,|\, T(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

é finito, digamos: tem N_ε elementos. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, se tem $|P_n| < \frac{\varepsilon}{4N_\varepsilon}$. Decomponhamos $S(P_n)$ como

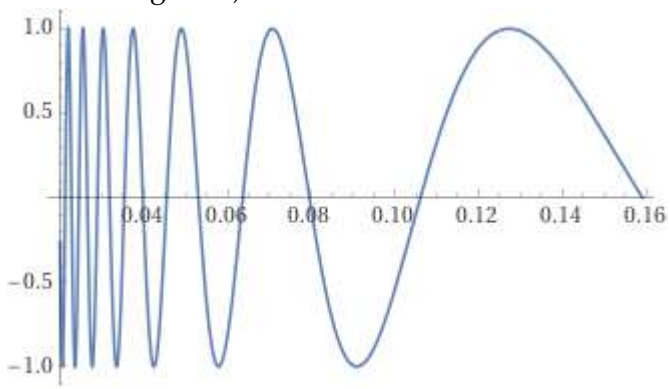
$$S(P_n) = A_n + B_n$$

onde A_n é a soma das parcelas em que os $t_i^{(n)}$ pertencem a F e B_n é a soma das restantes. Como $T \leq 1$ e $\sum_{i=0}^{k_n-1}(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) = 1$ tem-se

$$A_n \leq 2N_\varepsilon|S_n|, \quad B_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclui-se que, para $n \geq p$, $S(P_n) \leq \varepsilon$, que exprime o que se pretendia.

Exemplo São interessantes também as funções cujo comportamento exibe oscilações rápidas numa parte do domínio. O gráfico junto representa o gráfico de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ em $]0, 2\pi]$. É uma função habitualmente referida como exemplo de função contínua, limitada, mas sem limite num extremo do domínio ($x = 0$), o que torna impossível prolongá-la a $[0, 1]$ como função contínua. Esta função, prolongada com um valor arbitrário $f(0)$, tem integral de Riemann em qualquer intervalo $[0, a]$ (ver o exercício seguinte).



Exercício: Seja $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua em $]0, a]$. Então o integral $A = \int_0^a f(x)\, dx$ existe no sentido do integral impróprio (graças ao critério de comparação). Mostrar que o integral de f, no sentido de Riemann, existe e tem o mesmo valor.

Esquema da resolução: Tome-se uma sucessão de somas de Riemann para f, $S(P_n)$, com $|P_n| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $c \in]0, a]$ tal que $c \leq \varepsilon$ e $|A - \int_d^a f| < \varepsilon$ desde que $0 < d \leq c$. A subdivisão P_n consiste em pontos

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_j^{(n)} \leq c < x_{j+1}^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$$

onde destacamos os que estão à esquerda de c e os restantes. Decomponha-se $S(P_n) = A_n + B_n$ onde A_n contém as parcelas correspondentes a intervalos da decomposição P_n com extremos à esquerda de c, e B_n as restantes parcelas. Sendo M um número tal que $|f(x) \leq M \ \forall x \in]0, a]$, vem $|A_n| \leq M\varepsilon$. Por outro lado, os pontos

$$c < x_{j+1}^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$$

formam uma decomposição P_n' para $[c, b]$ e facilmente se vê que a correspondente soma de Riemann para $f|_{[c,b]}$ (onde no primeiro intervalo escolhemos, por exemplo, o ponto c caso o correspondente t_i esteja à esquerda de c) satisfaz $|S'(P_n') - B_n| \leq 2M|P_n|$. A partir de

$$S(P_n) - A = A_n + (B_n - S(P_n')) + (S(P_n') - \int_c^b f) + \int_0^c f$$

deduz-se

$$|S(P_n) - A| \leq M\varepsilon + 2M|P_n| + |(S(P_n') - \int_c^b f)| + \varepsilon.$$

Portanto existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, tem-se $|S(P_n) - A| \leq (3M + 2)\varepsilon$.

11

FUNÇÕES CONVEXAS EM DIMENSÃO 1

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se, para qualquer intervalo $[a, b] \subset I$, se tem

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \forall x \in [a, b]$$

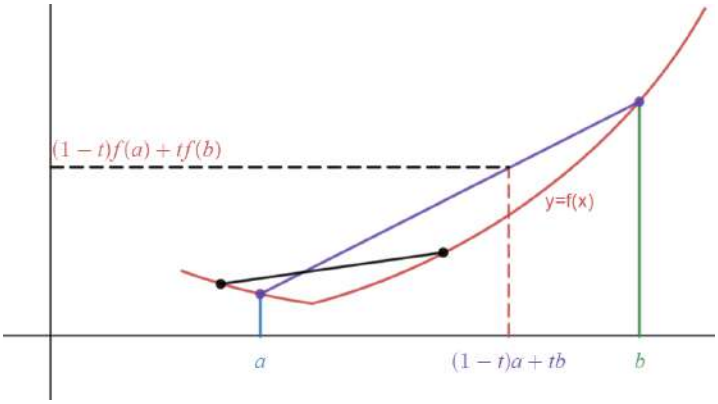
ou, equivalentemente

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Em linguagem geométrica esta condição afirma: para dois quaisquer pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$ do gráfico de f a parte do gráfico compreendida entre esses pontos está no semiplano inferior determinado pela recta PQ.

Como cada ponto $x \in [a, b]$ se pode representar na forma $x = (1 - t)a + tb$ (com $t = \frac{x-a}{b-a}$), imediatamente reconhecemos que a definição se pode reformular assim: f é *convexa* se $\forall a, b \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$



Fixada a função f, consideremos a família de declives

$$m(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Facto 42. *São afirmações equivalentes*

(*i*) *f é convexa em I*

(*ii*) *para cada $a \in I$ a função*

$$x \mapsto m(a, x)$$

é crescente em $I \setminus \{a\}$

(iii) *para quaisquer* $a < b < c < d$ *em* I *tem-se*

$$m(a,b) \leq m(a,c) \leq m(b,c) \leq m(c,d)$$

Demonstração: $(i) \Longrightarrow (ii)$. Mostremos que, por exemplo, $a < x < y$ implica $m(a,x) \leq m(a,y)$ (as restantes situações são análogas). Como $x = (1-t)a + ty$ com $t = \frac{x-a}{y-a}$, temos

$$m(a,x) \leq \frac{(1-t)f(a) + tf(y) - f(a)}{x-a} = \frac{t(f(y)-f(a))}{x-a} = m(a,y).$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Se $a < x < b$, a condição $m(x,a) \leq m(x,b)$ é precisamente a definição de convexidade.

Facto 43. *Se* f *é convexa em* I, f *tem derivadas laterais* finitas *em cada ponto interior de* I. *Em particular,* f *é contínua no interior de* I. *Além disso: se* $c < d$ *em* I, *tem-se* $f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d)$.

Demonstração: Mostremos, por exemplo, que $f'_+(c)$ existe se c é interior em I. Tem-se, por definição, $f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} m(c,x)$, e o limite existe e é igual ao ínfimo de $m(c,x)$ para $x > c$ porque a função $m(c,\cdot)$ é monótona crescente; o limite é finito porque, fixando em I um ponto $d < c$, tem-se $m(c,d) \leq m(c,x)\ \forall x > c$, mostrando que a mesma função tem um minorante. As desigualdades resultam de argumentos semelhantes, com base no Facto anterior.

Facto 44. *Se* f *é convexa em* I, $a \in I$ *e a derivada* $f'(a)$ *existe, tem-se*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in I.$$

Dito de outro modo, o gráfico de uma convexa fica acima do de qualquer das suas tangentes.

Demonstração: Trata-se e uma consequência imediata da passagem ao limite de $m(a,x)$ quando $x \to a$, tendo em conta a monotonia.

Facto 45. Para funções diferenciáveis, *são equivalentes*

(i) f *é convexa*

(ii) f' *é crescente*

(iii)

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x,\ a \in I.$$

Demonstração: $(i) \Longrightarrow (ii)$ por causa do Facto 43. $(ii) \Longrightarrow (iii)$: supondo $x > a$, pelo teorema do valor médio existe $d \in]a,x[$ tal que $f(x) - f(a) = f'(d)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$. Analogamente se trata o caso $x < a$. $(iii) \Longrightarrow (i)$: Se x, $a \in I$ temos, por hipótese, a desigualdade (iii) e do mesmo modo

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x).$$

Adicionando as duas desiguldades obtemos

$$(f'(a) - f'(x))(x-a) \leq 0$$

o que implica que f' é crescente. Então, se $a < x < b$, o teorema do valor médio implica $m(a,x) \leq m(x,b)$.

Facto 46. Para funções duas vezes diferenciáveis, *tem-se a equivalência*

(*i*) *f é convexa*

(*ii*) $f'' \geq 0$ *em I.*

Como obter novas funções convexas a partir de funções convexas dadas:

Facto 47. Se f e g são convexas num domínio comum, também o são $f+g$; cf com $c>0$ constante; $\max(f,g)$.

Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ além disso é crescente, a composição $g\circ f$ é convexa.

Se $f_n : I \to \mathbb{R}$ *é uma sucessão de funções convexas que converge pontualmente, isto é,* $\forall x \in I$ *existe*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

então f é convexa em I.

Uma função afim φ é trivialmente convexa. E, se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é convexa, a composição* $f\circ\varphi$ *é convexa.*

Facto 48. *(Desigualdade de Jansen) Se f é convexa em I, tem-se*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in I$, $\forall t_i$ *tais que* $t_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

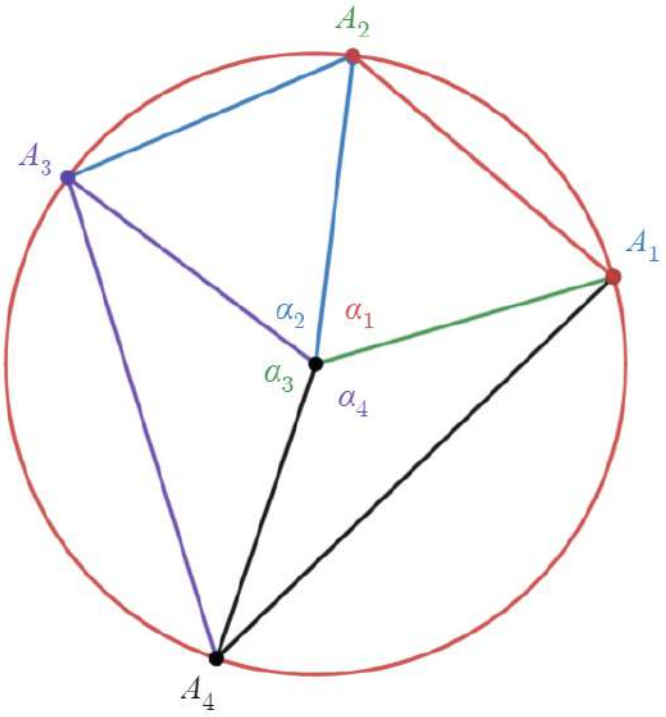
Demonstração: Ver o capítulo seguinte.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *côncava* se $-f$ é convexa. Obviamente, uma função côncava satisfaz desigualdades de sentido contrário às que caracterizam as convexas; as propriedades das funções côncavas resultam facilmente da simetrização das correspondentes propriedades das convexas.

Exemplo: A função sin é côncava em $[0,\pi]$. Portanto, se $a_i \in [0,\pi]$, $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, tem-se

$$\sin(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i \sin(a_i).$$

Esta desigualdade tem uma interpretação geométrica curiosa. Inscrevamos no círculo unitário um polígono caracterizado pelos ângulos ao centro α_1, α_2, ... α_n dos respectivos lados A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_1. O perímetro deste polígono é $P_n = 2\sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{a_i}{2})$. Como $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$, atendendo a que $\frac{\alpha_i}{2} \in [0,\pi]$ e considerando $t_i = \frac{1}{n}$, concluímos $P_n \leq 2n \sin\frac{\pi}{n}$: isto é, fixado n, o valor máximo possível para P_n corresponde ao polígono regular com n lados.



Exercícios: 1) Verificar que são convexas $|x|^\alpha$ com $\alpha \geq 1$; $x \ln x$; $\ln(1+e^x)$; $-\ln(\ln x)$ em $]1, +\infty[$.

2) Se f é convexa num intervalo ilimitado à direita, então existe o $\lim_{x\to+\infty)} \frac{f(x)}{x}$ (podendo ser infinito).

3) Se f é convexa num intervalo $[a, b]$ e possui um mínimo local num extremo do intervalo, então f é monótona.

4) Que condição devem satisfazer os números a, $b\,c$ para que a função seccionalmente afim $a|x+1| + b|x| + c|x-2|$ seja convexa?

5) Mesmo problema para $ax + b|x| + c|x-2| + 5$.

6)Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e convexa, então $-f^{-1}$ é também convexa.

7) Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Mostrar que

$$g\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big) \leq \int_0^1 g(f(x))\,dx.$$

(Sugestão: somas de Riemann e desigualdade de Jansen.)

12

FUNÇÕES CONVEXAS EM $\mathbb{R}^n$

12.1 GENERALIDADES. EXISTÊNCIA DE MÍNIMO

Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Recorde-se que isso significa, por definição, que $\forall a, b \in C$ o segmento de extremos a, b está contido em C, isto é, $(1-t)a + tb \in C \ \forall t \in [0,1]$.

É importante observar o seguinte facto que estende a propriedade dada pela definição:

Facto 49. *Seja C um convexo. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in C$, $\forall t_i$ tais que $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} t_i a_i \in C \qquad (*)$$

.

As somas da forma (*) chamam-se *combinações convexas* dos a_i.

Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se satisfizer: $\forall a, b \in C$ e $\forall t \in [0,1]$

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Uma consequência imediata da definição é o carácter unidimensional da propriedade de convexidade. Mais precisamente, consideremos uma recta de $\mathbb{R}^n$ com parametrização

$$r(t) = x + ty, \quad t \in \mathbb{R}$$

onde x, $y \in \mathbb{R}^n$; facilmente se reconhece que $I = \{t | r(t) \in C\}$ é um intervalo. Conclui-se que

Facto 50. *f é convexa em C se, e só se, para cada recta r, a função*

$$g : I \ni t \mapsto f(x + ty)$$

é convexa no correspondente intervalo I.

Demonstração: Se t_1, $t_2 \in I$ e $s \in [0,1]$ temos

$$g((1-s)t_1 + st_2) = f(x + ((1-s)t_1 + st_2)y) =$$
$$= f((1-s)(x + t_1 y) + s(x + t_2 y)) \leq$$
$$(1-s)g(t_1) + sg(t_2).$$

Reciprocamente, se x, $y \in C$ e $g(t) = f((1-t)x + ty)$ é convexa em $[0,1]$, vem

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(0) + tg(1) =$$
$$(1-t)f(x) + tf(y).$$

Facto 51. *(*Desigualdade de Jensen*) Se f é convexa em C, tem-se*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in C$, $\forall t_i$ tais que $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

A demonstração é fácil, por indução em n. Façamos a passagem de $n = 2$ para $n = 3$: aplicando duas vezes a definição de convexidade (e observando que $\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2} \in C$), temos

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3) = f((t_1 + t_2)\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2} + t_3 a_3)$$

$$\leq (t_1 + t_2) f(\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2}{t_1 + t_2}) + t_3 f(a_3) \leq$$

$$t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + t_3 f(a_3).$$

As funções afins

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

(onde os c_i são constantes reais) são trivialmente convexas. Na verdade, para uma tal função, imediatamente se reconhece que:

$$\varphi((1-t)a + tb) = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$$

Além disso, *se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e φ é afim, então $g \circ \varphi$ é convexa.*

Mantêm-se na dimensão n as propriedades descritas no facto 47, com I substituído pelo convexo C. Vale a pena observar adicionalmente que *qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é convexa.* Este facto é consequência imediata das propriedades triangular e homogénea das normas.

Vejamos agora como caracterizar as funções convexas *de classe* C^1.
Seja f de classe C^1 num aberto convexo C. Para cada $a \in C$, e cada $v \in \mathbb{R}^n$, a função

$$F(t) = f(a + tv)$$

está definida num intervalo aberto contendo $t = 0$ e tem-se

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) v_i = \nabla f(a + tv) \cdot v. \tag{1}$$

Como vimos, a convexidade de f é equivalente à convexidade de todas as funções de uma variável F assim construídas. Daqui resulta

Facto 52. *Se f é C^1 num aberto convexo C, são equivalentes:*
(i) *f é convexa*
(ii) *$\forall x, a \in C$ tem-se*

$$f(x) \geq f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$$

(iii) *$\forall x, y \in C$ tem-se*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq 0$$

Demonstração: $(i) \longrightarrow (ii)$ Usar a convexidade de $\varphi(t) = f(a + t(x - a), 0 \leq t \leq 1$ e $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$.
$(ii) \longrightarrow (iii)$ Escrever a desigualdade (ii) trocando os papéis de x e a e adicionar membro a membro as duas desiguldades.
$(iii) \longrightarrow (i)$ Reduzindo o problem a restrições a rectas, basta ver que F (com a notação acima) tem derivada crescente, isto é

$$(F'(t) - F'(s))(t - s) \geq 0 \quad t, s \in [0, 1].$$

Isto é imediato a partir de (iii).

Passemos a caracterizar as funções convexas *de classe* C^2.
Com a notação já introduzida, resulta do facto 46 que $f : C \to \mathbb{R}$ (de classe C^2) é convexa se e só se todas a funções $F(t)$ construídas restringindo f a rectas têm segunda derivada não negativa. Ora, a partir da equação (1) obtemos, derivando novamente

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + tv) v_i v_j$$

Assim, considerando em particular $t = 0$ podemos afirmar:

Facto 53. *$f : C \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é convexa se e só se $\forall a \in C$ e $\forall v \in \mathbb{R}^n$ se tem a desigualdade*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j \geq 0$$

Esta condição significa exactamente que em cada ponto $a \in C$ a matriz $n \times n$ (Hessiana)

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]$$

é *semi-definida positiva*.

Exercícios: Verificar que são convexas as seguintes funções de duas variáveis:
1)$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$;
2) x^2/y no semiplano dado por $y > 0$;
3) $x^4 + y^2 + 3$; $x^2 - xy + y^2$;
4) $-\sqrt{xy}$ no primeiro quadrante; 5) $\ln(e^x + e^y)$;
6)$-x^\alpha y^\beta$ com α, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta < 1$ no primeiro quadrante;
7) $-x^\alpha y^{1-\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$ no primeiro quadrante;

8) $(x-y)^2+|2-3x+y|$;
9) $(x^2+y^2)^2$.

Facto 54. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\{x \in C \,|\, f(x) \leq \alpha\}$ é um conjunto convexo.*

Seguidamente estudamos critérios de existência de mínimo para funções convexas.

Facto 55. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e tem um mínimo local em $a \in C$, então $f(a) = \min_C f$.*

Facto 56. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa, C^1 num aberto que contém C e tem um ponto crítico $a \in C$, então $f(a) = \min_C f$.*

Demonstração: Em virtude da condição (ii) do Facto 52, tem-se $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in C$.

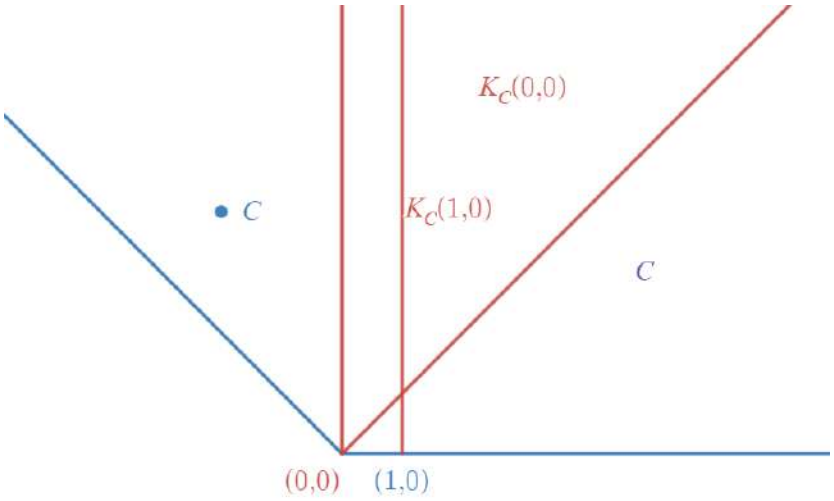
No entanto, tem-se o resultado seguinte mais geral. Antes de o enunciar, damos duas definições:
Seja C um convexo fechado. Chamamos *cone tangente a C num ponto $a \in C$*, e representamos por $T_C(a)$, a aderência do conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ da forma $t(x-a)$ com $t \geq 0$ e $x \in C$.
E chamamos *cone associado ao convexo C no ponto $a \in C$*: ao conjunto

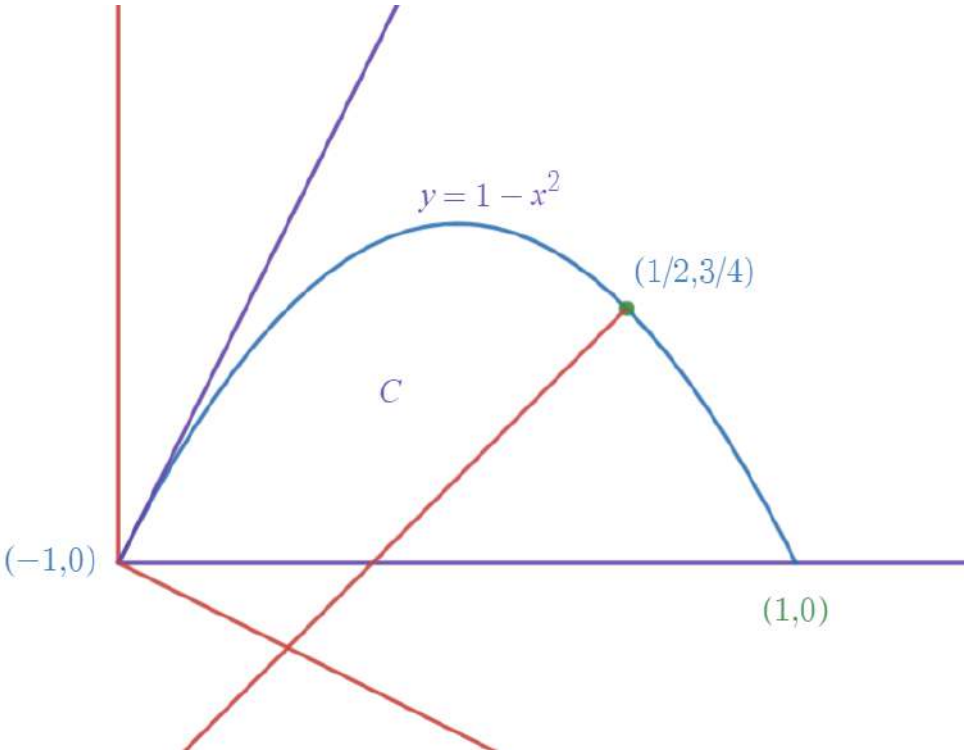
$$K_C(a) := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \cdot (x-a) \geq 0 \ \ \forall x \in C\}$$

que se verifica facilmente ser o mesmo que

$$\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \cdot w \geq 0 \ \ \forall w \in T_C(a)\}.$$

Exemplos: 1) Se a é interior a C, $T_C(a) = \mathbb{R}^n$ e $K_C(a) = \{0\}$. 2) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq \max(0,-x)\}$ e $a = (1,0)$, $T_C(a) = \{v | \, v_2 \geq 0\}$ e $K_C(a) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$; se $a = (0,0)$,$T_C(a) = C$ e $K_C(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x \geq 0\}$. (Ver a primeira figura abaixo) 3) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ e $a = (-1,0)$, $T_C(a)$ e $K_C(a)$ coincidem com o primeiro quadrante. 4) Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 1-x^2\}$ e $a = (-1,0)$, $T_C(a)$ é formado pelas semirectas de origem a que ficam dentro do ângulo cujos lados são o semieixo horizontal (partindo de a) e a semirecta $y = 2(x+1)$ $(x \geq -1)$. Na segunda figura abaixo esquematizamos $T_C(a)$ $K_C(a)$ a azul e vermelho, respectivamente; e ainda $K_C(1/2, 3/4)$.





Facto 57. *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa e C^1 num aberto que contém C, então $f(a) = \min_C f$ se e só se*

$$\nabla f(a) \in K_C(a).$$

Demonstração: A condição é necessária (pela convexidade de C; não intervém a de f) porque implica, para todo o $x \in C$, que a função $F(t) = f(a + t(x - a))$, definida em $[0, 1]$, tem mínimo em $t = 0$ e $\varphi'(0) = \nabla f(a) \cdot (x - a)$. A condição é suficiente pela afirmação (ii) do facto 52.

Exemplo: Calculemos o valor mínimo de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x - y$ no primeiro quadrante (incluindo os semieixos). Como f é convexa, não tem pontos críticos no interior do quadrante, e por outro lado

$$\nabla f(x, 0) = (4x^3 + 1, -1), \quad \nabla f(0, y) = (1, 4y^3 - 1)$$

concluimos que só pode ter-se $\nabla f(a) \in K_C(a)$ se $a = (0, y)$ com $4y^3 - 1 = 0$. A condição garante, pois, existência de mínimo absoluto atingido em $(0, 1/4^{1/3})$.

Exercícios: 1) Minimizar $x + 3y^2$ no paralelogramo de vértices $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
2) Que se pode afirmar de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é convexa e majorada?
3) (a) Indicar o domínio aberto do plano onde é (estritamente) convexa a função

$$g(x, y) = e^{x+y} - xy.$$

(b) Determinar os valores da constante a de modo que a função $g(x, y) + ax$, restringida ao convexo

$$\{(x, y) \mid x + y \geq 2, \quad x \leq 0\},$$

atinja o seu mínimo no ponto $(0, 2)$.

4) Seja C um convexo fechado de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que a norma Euclidiana $\|\cdot\|$ atinge um mínimo em C, e o (único) ponto $a \in C$ onde o mínimo é atingido é caracterizado por

$$a \cdot (x - a) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

5) Seja C um convexo fechado, não vazio, de $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Mostrar que existe um único $q \in C$ tal que

$$\|p - q\| = \min_{x \in C} \|p - x\|$$

($\|\cdot\|$ é a norma euclidiana) e que q é caracterizado por

$$(q - p) \cdot (x - p) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

(Diz-se que q é a projecção de p sobre C e escreve-se $q = P_C(p)$.) Concluir, a partir dessa caracterização, que $\forall p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\|P_C(p_1) - P_C(p_2) \leq \|p_1 - p_2\|.$$

6) Seja $B(t, r)$ a bola fechada de centro t e raio r em $\mathbb{R}^n$ e $P_{B(t,r)} : \mathbb{R}^n \to B(t, r)$ a projeção. Mostrar que, se $t_n \to t$ em $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$P_{B(t_n,r)}(z) \to P_{B(t,r)}(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

12.1.1 *Formas quadráticas semidefinidas*

Recordemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ é uma função da forma

$$u \mapsto Au \cdot u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz real simétrica. Sabemos (ver o critério de Sylvester, cap. 8.5) que a forma (ou A) é definida positiva quando $\min_{\|u\|=1} Au \cdot u > 0$ ou, equivalentemente: todos os valores próprios de A são > 0; ou ainda, quando os determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

($k = 1, \cdots, n$) são todos positivos. Analogamente, A é semidefinida positiva se $\min_{\|u\|=1} Au \cdot u \geq 0$, ou, equivalentemente, se todos os valores próprios de A são ≥ 0. O critério em termos de determinantes de submatrizes é menos imediato e vamos agora apresentá-lo.

Diremos que uma submatriz de A é *principal* e notamo-la $A_{\mathcal{J}}$ se resulta de A por supressão das linhas cujos índices formam um subconjunto $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ e das colunas com os mesmos índices. É claro que $A_{\mathcal{J}}$ é ainda simétrica.

Assim, há n submatrizes principais 1×1, $\binom{n}{2}$ submatrizes principais 2×2, etc, sendo o número total das submatrizes principais (excluído o caso $\mathcal{J} = \{1, 2, \cdots, n\}$) igual a $2^n - 1$.

Facto 58. *(Critério de Frobenius) A é semidefinida positiva se, e só se, os determinantes de todas as suas submatrizes principais são* ≥ 0.

A verificação deste facto apoiar-se-á nas asserções seguintes:

1. Se A é semidefinida positiva, qualquer submatriz principal é-o também.

2. A é semidefinida positiva se e só se $\forall \varepsilon > 0$ $A + \varepsilon I$ é definida positiva. (I é a matriz identidade $n \times n$.)

Demonstração de 1: Tomemos $A_{\mathcal{J}}$. Sejam $j_1 < \cdots < j_p$ os índices de 1 a n que não estão em $\mathcal{J}$. Então $A_{\mathcal{J}}$ é uma matriz $p \times p$. Para cada vector $w \in \mathbb{R}^p$ designemos por $z = z(w)$ o vector de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes de índices j_i são as de w pela mesma ordem, sendo nulas as componentes restantes (isto é, as de índices em $\mathcal{J}$). Um cálculo imediato mostra que

$$w^T A_{\mathcal{J}} w = z^T A z$$

(recorde-se que $z^T A z$ é outro modo de representar $Az \cdot z$.)

Demonstração de 2: A afirmação resulta imediatamente de se ter, para cada vector fixado $u \neq 0$,

$$(A + \varepsilon I)u \cdot u = Au \cdot u + \varepsilon \|u\|^2$$

(para obter um dos sentidos da implicação, tomar limite quando $\varepsilon \to 0^+$).

Demonstração do facto: Condição necessária: atendendo ao ponto 1 acima, basta mostrar que, se A é semidefinida positiva, tem-se $\det A \geq 0$. Ora, pelo ponto 2 e pelo critério de Frobenius para as matrizes definidas positivas, $\det(A + \varepsilon I) > 0$ $\forall \varepsilon > 0$. Como este determinante é uma função polinomial em ε, obtemos $\det A = \lim_{\varepsilon \to 0} \det(A + \varepsilon I) \geq 0$.

Condição suficiente: Em virtude de 1 e 2, e novamente invocando o critério que envolve determinantes para as definidas positivas, basta mostrar que qualquer submatriz do tipo

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} + \varepsilon & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} + \varepsilon \end{vmatrix}$$

tem, para $\varepsilon > 0$, determinante positivo. Ora, explicitando o determinante com os termos agrupados pondo em evidência as potências de ε, obtemos o polinómio

$$S_0 + S_1 \varepsilon + S_2 \varepsilon^2 + \cdots + S_{k-1} \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^k$$

onde $S_0 = \det A$ e S_i é a soma dos determinantes das submatrizes principais de tipo $(k - i) \times (k - i)$. Em virtude da hipótese, a conclusão pretendida é imediata.

Exercício: A forma quadrática $Ax \cdot x$ é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$ se, e só se, é semidefinida positiva.

12.2 ENVÓLUCRO CONVEXO. VALORES MÁXIMOS

Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ chamamos *envólucro convexo* de S e notamos $\text{co}(S)$ o menor (no sentido da inclusão) convexo que contém S. Podemos também dizer que $\text{co}(S)$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm S. E também

$$co(S) = \{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i \,|\, k \in \mathbb{N},\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ x_i \in S\ \ (i = 1, \cdots, k)\}.$$

Para justificar a última asserção basta ter em conta que:

(a) dado um convexo C que contém $x_1. \cdots, x_k$ então C contém qualquer combinação convexa destes k pontos. (Resulta do facto 49.)

(b) O conjunto definido no segundo membro é convexo

Justificação de (b): dadas duas combinações convexas da forma indicada, podemos supôr que envolvem os mesmos vectores

$$\sum_{i=1}^{k} t_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{k} t'_i x_i$$

bastando, para isso, juntar termos, se necessário, com alguns dos t_i ou t'_i nulos. Então, para todo o $s \in [0,1]$,

$$(1-s)\sum_{i=1}^{k} t_i x_i + s\sum_{i=1}^{k} t'_i x_i = \sum_{i=1}^{k}[(1-s)t_i + st'_i]x_i$$

com $\sum_{i=1}^{k}[(1-s)t_i + st'_i] = 1 - s + s = 1$, mostrando que o segmento definido pelas duas combinações convexas é uma combinação convexa do mesmo tipo.

Outro conceito útil é o de ponto extremo. Dado um convexo fechado C, um ponto $a \in C$ diz-se *extremo* se

$$a = (1-t)x + ty,\ \ x, y \in C,\ \ x \neq y,\ \ t \in [0,1] \Longrightarrow t = 0 \ \text{ ou } \ t = 1$$

(informalmente: se a não é "interior" a qualquer segmento com extremos distintos em C).

Em muitos casos simples, não é difícil identificar os pontos extremos de um convexo. Por exemplo, no convexo do exemplo 3 acima, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, os pontos extremos são os do arco de semicírculo.

Facto 59. *Seja $S = \{p_1, \cdots, p_k\}$ um conjunto finito em $\mathbb{R}^n$. Então:*
(i) $co(S)$ é compacto.
(ii) Se $\exists i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $p_i \in co(S \setminus \{p_i\})$, tem-se $co(S) = co(S \setminus \{p_i\})$.
(iii) Se $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$ $p_i \notin co(S \setminus \{p_i\})$, cada p_i é ponto extremo de $co(S)$.
(iv) Se $f : co(S) \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, tem-se $\max_{co(S)} f = \max_S f$.

Demonstração: (i). Observar que $\text{co}(S)$ é imagem, pela aplicação contínua de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^n$

$$(t_1, \cdots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} t_i p_i,$$

do compacto $\{(t_1, \cdots, t_k) \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\}$.

(ii) imediato.

(iii) Tomemos o ponto $p_1 \notin co(\{p_2, \cdots, p_k\})$. Se p_1 não é extremo, podemos representá-lo como $p_1 = \frac{1}{2}(a + a')$ onde a, $a' \in co(S) \setminus co\{p_2, \cdots, p_k\}$ (notemos que $co\{p_2, \cdots, p_k\}$ é compacto, e portanto fechado). Também facilmente reconhecemos que

$$a = tp_1 + (1-t)b, \quad b \in co\{p_2, \cdots, p_k\}$$

com $0 < t < 1$. Do mesmo modo, $a' = sp_1 + (1-s)c$ com $0 < s < 1$ e $c \in co\{p_2, \cdots, p_k\}$. Somando as expressões de a e a' resulta

$$(2 - t - s)p_1 = (1-t)b + (1-s)c$$

de onde se conclui imediatamente que p_1 pertence ao segmento de extremos b e c, e portanto a $co(\{p_2, \cdots, p_k\})$, o que contradiz a hipótese.

(iv) Da desigualdade de Jansen resulta imediatamente que, se $\max_S f = M$, então $f(x) \leq M$ $\forall x \in co(S)$.

Observação importante: Utilizando $(ii) - (iii) - (iv)$ podemos afirmar que o valor máximo de f (convexa) em $\mathrm{co}(S)$ é atingido num ponto extremo deste conjunto.

É verdade mais geralmente (não apenas para o envólucro convexo de um conjunto finito) o seguinte: se C é convexo e compacto e f é convexa em C, o máximo de f em C é atingido num ponto extremo de C. A demonstração segue a mesma ideia da anterior, tendo por base o seguinte teorema (de H. Minkowski): *se C é convexo e compacto em $\mathbb{R}^n$, então C é o envólucro convexo dos seus pontos extremos.* Não incluiremos aqui a prova deste facto, mas observamos que em casos simples é fácil de o reconhecer.

Exercícios: 1) A função $x^2 + y^4 + xy$ é convexa em algum domínio? Qual é o seu valor máximo no quadrilátero de vértices $(-3, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-2, 2)$?

2) Determinar o máximo de $x + 3y$ no domínio definido por

$$x^2 + 2y^2 \leq 1, \ \ x + y \geq 1, \ \ y \leq x.$$

3) (a) Verificar que a função $\frac{z^2+1}{z+2}$ é convexa e crescente num certo intervalo da forma $]c, +\infty[$.

(SUGESTÃO: para obter a convexidade de modo simples, reescrever a fracção usando a divisão de polinómios.)

(b) Utilizando a afirmação anterior, determinar o máximo da função $f(x, y) = \frac{(x+y-1)^2+1}{x+y+1}$ no domínio convexo definido pelas condições

$$|x - 3| \leq y \leq 3.$$

(Sugestão: composição de funções.)

12.3 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES CONVEXAS

Nesta secção usaremos vizinhanças de um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ do tipo

$$Q(a,\varepsilon) = [a_1-\varepsilon, a_1+\varepsilon] \times \cdots \times [a_n-\varepsilon, a_n+\varepsilon] =$$

$$= \{x \mid \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - a_i| \leq \varepsilon\}.$$

É fácil reconhecer que $Q(a,\varepsilon)$ é o envólucro convexo de 2^n pontos:

$$Q(a,\varepsilon) = co\{x \mid \forall i = 1,\cdots n \quad x_i = a_i \pm \varepsilon\}$$

Facto 60. *Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $Q(a,\varepsilon) \subset C$, então f é limitada em $Q(a,\varepsilon)$.*

Demonstração: Como $Q(a,\varepsilon)$ é envólucro convexo de um conjunto finito, existe $M = \max_{Q(a,\varepsilon)} f$.

Seja $x \in Q(a,\varepsilon)$, e seja x' o simétrico de x relativamente a a. Então $a = \frac{x+x'}{2}$, e pela convexidade de f temos

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x') \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{M}{2}$$

de onde

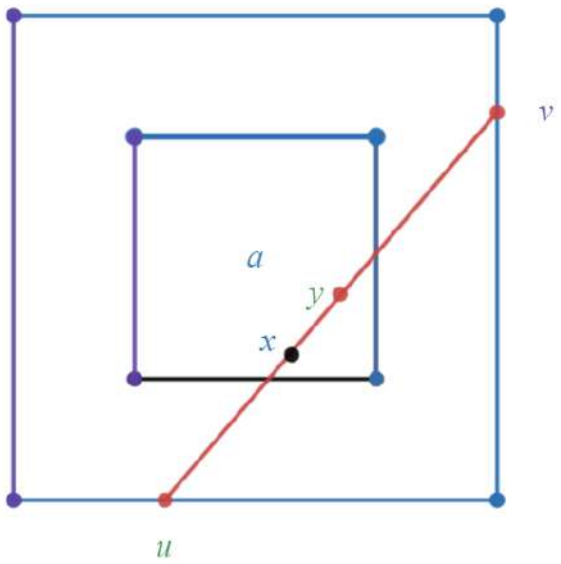
$$f(x) \geq 2f(a) - M \quad \forall x \in Q(a,\varepsilon)$$

o que conclui a demonstração.

Facto 61. *Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então f é contínua no interior de C. Mais precisamente, é localmente Lipschitziana no interior de C.*

Demonstração: Seja a um ponto interior a C. Seja $\varepsilon > 0$ um número tal que $Q(a,2\varepsilon) \subset C$. Pelo lema anterior, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq M$ em $Q(a,2\varepsilon)$. Vamos mostrar que f é Lipschitziana em $Q(a,\varepsilon)$, com constante de Lipschitz $2M/\varepsilon$: $\forall x \neq y \in Q(a,\varepsilon)$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \leq 2M/\varepsilon.$$



Consideremos a recta que contém x e y parametrizada por $t \mapsto P(t) := p + tw$ onde $p,\ w \in \mathbb{R}^n$ e $\|w\| = 1$. Esta recta tem dois pontos comuns com $\partial Q(a, 2\varepsilon)$; designemo-los por u e v e suponhamos, sem perda de generalidade, que os pontos u, x, y, v correspondem por via de $P(t)$ a valores do parâmetro $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, respectivamente. Como a função $\varphi(t) = f(p + tw)$ é convexa, resulta do lema dos declives

$$\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2} \leq \frac{\varphi(t_4) - \varphi(t_3)}{t_4 - t_3}.$$

Ora, $t_2 - t_1 = \|x - u\|$, $t_3 - t_2 = \|y - x\|$ e $t_4 - t_3 = \|v - y\|$, de onde

$$-\frac{2M}{\varepsilon} \leq \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \leq \frac{2M}{\varepsilon},$$

que é o que pretendíamos.

13

CONVERGÊNCIA UNIFORME - TRÊS PONTOS ADICIONAIS

13.1 SÉRIES DE POTÊNCIAS: CONVERGÊNCIA NUM INTERVALO COMPACTO

Comecemos por mencionar o seguinte facto elementar sobre somas ("soma por partes"): dadas duas sucessões numéricas, (a_n) e (b_n), se notarmos $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ as somas parciais da primeira, temos

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n =$$

$$= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n.$$

Resulta daqui o seguinte

Facto 62. *Se $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ e existe $K > 0$ tal que $|A_i| \leq K$ $(i = 1, \cdots, n)$, tem-se*

$$|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i| \leq Kb_1.$$

Teorema 3. *(Teorema de Abel) Suponhamos que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ converge se $x = r$ onde r é um número positivo dado. Então a série converge uniformemente em $[0, r]$.*

Demonstração: Pela hipótese, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq N \implies |\sum_{i=n+1}^{m} a_ir^i| < \varepsilon.$$

Portanto, em virtude do Facto 62 e de ser $(x/r)^k \leq 1$ e decrescente em $k\ \forall x \in [0, r]$:

$$m > n \geq N \implies \sup_{0\leq x\leq r} |\sum_{i=n+1}^{m} a_ix^i| = \sup_{0\leq x\leq r} |\sum_{i=n+1}^{m} a_ir^i(\frac{x}{r})^i| < \varepsilon.$$

Esta afirmação significa que a sucessão de somas parciais $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$ é de Cauchy em $C([0, r])$ e portanto converge uniformemente para a sua soma como função de x.

Observação: Se R é o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ e, por verificação directa, a série converge no extremo $x = R$ do intervalo aberto de convergência, resulta do que sabemos sobre séries de potências e do teorema anterior que a série converge uniformemente em qualquer intervalo $[a, R]$ com $a > -R$.

Podem fazer-se considerações "simétricas" das anteriores com respeito a um intervalo $[-r, 0]$.

Exemplos: 1) O desenvolvimento em série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (a)$$

é válido se $|x| < 1$. A série que figura no 2º membro converge em $x = 1$ (pelo critério de Dirichlet para séries alternadas). Portanto a convergência é uniforme em $[0, 1]$ e a soma é uma função contínua da variável x neste intervalo. Como $\ln(1+x)$ é também contínua, a igualdade (a) vale para $x = 1$. Assim,

$$\ln 2 = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2) Também para $|x| < 1$, tem-se:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (b)$$

sendo o 2º membro uma série convergente em $x = 1$. Com o mesmo argumento do exemplo anterior deduz-se que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

3) Da teoria da série binomial, sabemos que, se $|x| < 1$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2^2\, 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\, 3!}x^3 - \cdots$$

Escrevamos o 2º membro simplesmente como

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

notando que $b_n > 0\ \forall n \geq 1$. Vamos mostrar, usando um argumento de positividade, que a série converge também em $x = 1$. De facto

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}, \quad |x| < 1$$

implica, para todo o $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{p} b_n x^n < 1, \quad |x| < 1.$$

Com p fixado e tomando limite quando $x \to 1^-$ resulta

$$\sum_{n=1}^{p} b_n \leq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Tratando-se de uma série de termos positivos, existe o limite das somas quando $p \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 1$$

como se pretendia.

Concluímos então que $\sqrt{1-x}$ *é limite uniforme em* $[0,1]$ *de uma sucessão de polinómios* $P_n(x)$ (as somas parciais da série binomial). E, como $1-x^2$ toma valores em $[0,1]$ quando $|x| \leq 1$, podemos afirmar que a função

$$\sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$$

é também limite uniforme em $[0,1]$ *de uma sucessão de polinómios* (os polinómios $P_n(1-x^2)$). Na verdade, com uma mudança de variável do tipo $x = ct$, onde $c > 0$, temos:

Facto 63. *A função* $|x|$ *é, em qualquer intervalo da forma* $[-a,a]$*, limite uniforme de uma sucessão de polinómios.*

Com base neste facto ficamos a poucos passos de demonstrar o seguinte importante teorema:

Teorema 4. *(Teorema de aproximação de Weierstrass) Qualquer função* $f \in C([a,b]$ *é limite uniforme em* $[a,b]$ *de uma sucessão de polinómios.*

Noutros termos: o subespaço dos polinómios é ***denso*** *em* $C([a,b])$*.*

Exercícios: 1) Calcular a soma da série

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots .$$

Sugestão: começar pelo desenvolvimento em série de $\frac{1}{1+x^3}$.

2) Seja $0 < a < 1$. Mostrar que $\forall \varepsilon > 0$ existe um polinómio $P(x)$ tal que $|P(x)| < \varepsilon$ se $x \in [-1,0]$ e $|P(x)-1| < \varepsilon$ se $x \in [a,1]$. (Sugestão: a função seccionalmente linear em $[-1,1]$ que vale 0 no semieixo negativo e 1 em $[a,1]$ é combinação linear de um polinómio de grau 1, $|x|$ e $|x-a|$.)

13.2 CONVERGÊNCIA UNIFORME A PARTIR DE CONVERGÊNCIA PONTUAL

Teorema 5. *(Teorema de Dini) Seja* $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ *uma sucessão crescente de funções contínuas que converge pontualmente em* $[a,b]$ *para uma função* f *contínua em* $[a,b]$*. Então* $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a,b]$*.*

Demonstração: Antes de mais, notemos que, de acordo com a hipótese, $f_n(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Se a conclusão é falsa, então existe $\varepsilon > 0$ e existem infinitos valores de n tais que

$$\|f_n - f\|_\infty = max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon. \qquad (a)$$

Passando à subsucessão correspondente àqueles valores de n (que, por comodidade, representamos com o mesmo símbolo), existe para cada n um ponto $x_n \in [a,b]$ tal que

$$f(x_n) - f_n(x_n) = max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

De (x_n) podemos extrair uma subsucessão convergente: continuamos a representá-la pelo mesmo símbolo, isto é, supomos que é (x_n) que converge, digamos: $\lim x_n = x \in [a,b]$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal

que $f(x) - f_k(x) < \varepsilon/2$; pela continuidade de $f - f_k$ esta desigualdade estende-se a uma vizinhança de x, isto é: existe $\delta > 0$ tal que $t \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b] \implies f(t) - f_k(t) < \varepsilon/2$; finalmente, pela monotonia da sucessão f_n, podemos concluir

$$t \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b], \quad j \geq k \implies f(t) - f_j(t) < \varepsilon/2. \qquad (b)$$

Ora, como para n suficientemente grande temos $x_n \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$, o confronto de (a) e (b) com $t = x_n$ conduz a uma contradição.

Observação: A demonstração anterior é um de muitos exemplos de utilização de um "argumento de compacidade", traduzido aqui numa passagem ao limite em subsucessão. O mesmo argumento, no essencial, permite resolver os exercícios seguintes.

Exercícios: 1) Seja f_n uma sucessão de funções contínuas e crescentes em $[a,b]$ que converge pontualmente em $[a,b]$ para uma função contínua. Mostrar que a convergência da sucessão é uniforme. INDICAÇÃO: Imitar a demonstração do teorema de Dini até à passagem ao limite $\lim x_n = x \in [a,b]$. Em seguida, suponhamos para fixar ideias que $x_n > x$ para infinitos valores de n (o caso $x_n < x$ é análogo). Fixemos $z > x$ tão próximo de x que $f(x) \leq f(z) < f(x) + \varepsilon/4$ (notar que f é contínua e crescente). Ora, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m > p \quad |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/4, \quad |f_m(z) - f(z)| < \varepsilon/4.$$

Considerando o retângulo $R = \{(t,y) \,|\, x \leq t \leq z, \;\; f(x) - \varepsilon/4 \leq y \leq f(z) + \varepsilon/2$, facilmente se constata então que para $m > p$ o gráfico de $f_m|_{[x,z]}$ está contido em R. E obviamente o mesmo vale para f. Então (escolhendo x_m em $[x,z]$), $|f(x_m) - f_m(x_m)|$, que é a distância na vertical entre dois pontos dos gráficos de f e f_m, é inferior a $3\varepsilon/4$.

2) Seja f_n uma sucessão de funções Lipschitzianas em $[a,b]$, todas com a mesma constante de Lipschitz, que converge pontualmente em $[a,b]$ para uma função f. Mostrar que a convergência é uniforme. INDICAÇÃO: Imitar a demonstração do teorema de Dini até à passagem ao limite $\lim x_n = x \in [a,b]$. Depois, temos (sendo L a constante de Lipschitz)

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq L|y-x|, \;\; |f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$$

de onde

$$|f_n(y) - f(y)| \leq 2L|y-x| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Tomando n suficientemente grande, e escolhendo $y = x_n$, qualquer das duas últimas parcelas fica $< \varepsilon/2$, o que determina a contradição com a construção dos x_n.

3) Mostrar que uma função localmente Lipschitziana em $[a,b]$ é Lipschitziana em $[a,b]$.

4) Seja E o espaço das funções contínuas definidas em $[-1,1]$ cujo gráfico consiste em dois segmentos de recta com uma extremidade comum. Seja f_n uma sucessão em E tal que $f_n(x) \to 1 - |x|$ $\forall x \in [-1,1]$. Mostrar que esta convergência é uniforme.

5) Mostrar que existe uma sequência de polinómios P_n de grau 7 que converge uniformemente para $(x-1)^3(x-2)^2(x^2+x+1)$ em $[0,3]$ e tal que cada P_n possui 5 raízes reais *distintas*. SUGESTÃO: escolhida uma sucessão $\varepsilon \to 0$, substituir o factor $(x-1)^3$ por $(x-1)(x-1+\varepsilon_n)(x-1+2\varepsilon_n)$...

13.3 PASSAGEM AO LIMITE EM INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

Uma das consequências mais úteis da convergência uniforme é a seguinte: se $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f \qquad (Lim)$$

desde que os integrais tenham sentido (por exemplo, à Riemann).

Vamos dar alguns elementos para o tratamento do problema análogo quando os integrais em jogo são impróprios. Embora a abordagem satisfatória desta questão exija uma teoria mais sofisticada do integral (por exemplo, a teoria de Lebesgue, que será estudada numa disciplina posterior), veremos nesta secção como resolver a questão em casos particularmente simples, com o nível de conhecimentos já adquiridos.

Consideremos, para fixar ideias, o caso de integrais impróprios num intervalo $[a,b[$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. As funções que consideramos, definidas neste intervalo, serão seccionalmente contínuas (isto é, podem admitir um número finito de descontinuidades) e os seus integrais existem (pelo menos) no sentido do integral impróprio. (Não repetiremos este pressuposto nos enunciados.) Pretendemos saber sob que condições, a partir da convergência pontual

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b[\qquad (CP)$$

se pode inferir que é válida a passagem ao limite nos integrais (Lim).

Facto 64. *(Intervalo limitado) Suponhamos $b \in \mathbb{R}$. Seja $f_n : [a,b[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*
(1) Existe $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b[$, e $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$.
(2) $\forall \varepsilon > 0$ $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b-\varepsilon]$.
Então vale a passagem ao limite (Lim).

Facto 65. *(Intervalo ilimitado) Seja $f_n : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*
(1) Existe $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,+\infty[$, e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$.
(2) $\forall A > a$ $f_n \to f$ uniformemente em $[a,A]$.
Então vale a passagem ao limite (Lim).

Observação: Em linguagem sintética, estes enunciados garantem a passagem ao limite desde que a sucessão seja majorada em valor absoluto por uma função integrável e haja convergência uniforme nos subintervalos compactos de $[a,b[$. Obviamente, as hipóteses implicam, em particular, que se verifica (CP).

2) É fácil formular enunciados análogos para o caso de um intervalo $]a,b]$ ou outro tipo de intervalos. Como habitualmente ao trabalhar com integrais impróprios, também podemos considerar integrais em $\mathbb{R}$, os quais se reduzem por adição aos tipos anteriores. Por exemplo, se nos factos anteriores substituirmos o intervalo por $]a,+\infty[$ podemos tratar a convergência de integrais impróprios nete intervalo por meio do seguinte enunciado:

Facto 66. *(Intervalo ilimitado e funções ilimitadas no extremo finito) Seja $f_n :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e seja $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tais que:*

(1) Existe $g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]a, +\infty[$, *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$.
(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \ A > a + \varepsilon$ $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a + \varepsilon, A]$.
Então vale a passagem ao limite (Lim).

Demonstração: Vamos demonstrar o primeiro enunciado, sendo semelhante a demonstração do segundo, com adaptações óbvias.

Em virtude das hipóteses e do critério de comparação, o integral de f em $[a, b[$ existe (sendo absolutamente convergente. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq \int_a^b |f_n - f| = \int_a^{b-\varepsilon} |f_n - f| + \int_{b-\varepsilon}^b |f_n - f|.$$

Em virtude de (1), $|f_n - f| \leq 2g$ em $[a, b[$ para todo o n, e $2g$ é integrável em $[a, b[$; então, dado arbitrariamente $\delta > 0$ podemos fixar $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\int_{b-\varepsilon}^b |f_n - f| < \frac{\delta}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por causa de (2), $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b - \varepsilon]$, o que pemite afirmar

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow \int_a^{b-\varepsilon} |f_n - f| < \frac{\delta}{2}.$$

Resulta, para $n \geq p$, que $|\int_a^b f_n - \int_a^b f| < \delta$, o que conclui a demonstração.

Exemplos: (O símbolo lim representará sempre $\lim_{n\to\infty}$.) Tem-se $\lim \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+4}\,dx = \frac{1}{4}$ porque

$$\lim \frac{x^n + 1}{x^n + 4} = f(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{5} & x = 1 \end{cases}$$

sendo a sucessão limitada por 1 e convergindo para $\frac{1}{4}$ uniformemente em $[0, 1 - \varepsilon]$ para todo o $\varepsilon > 0$. O limite dos integrais é, pois, o integral de f, que coincide com o da constante $\frac{1}{4}$.

2) $\lim \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx = 0$. A sucessão das integrandas converge pontualmente para 0 em $[0, 1]$, mas não uniformemente; com efeito o máximo de $nx(1-x)^n$ naquele intervalo é $\frac{n^{n+1}}{(1+n)^{n+1}}$, atingido em $x = \frac{1}{1+n}$. Mas a conclusão resulta de a sucessão de integrandas ter majorante 1 e de a convergência ser uniforme nos intervalos da forma $[\varepsilon, 1]$, já que $nx(1-x)^n \leq n(1-\varepsilon)^n\ \forall x \in [\varepsilon, 1]$ e a sucessão numérica $n(1-\varepsilon)^n$ tem limite 0.

3) Seja $a > 1$. Então $\lim \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax}\,dx = \int_0^{\infty} e^{(1-a)x} = \frac{1}{a-1}$. Com efeito, sabemos que para $x \geq 0$ tem-se $\lim(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, sendo a sucessão crescente relativamente a n. Assim, as integrandas são majoradas pela função integrável $e^{(1-a)x}$; e a monotonia permite obter a convergência uniforme nos compactos, em virtude do teorema de Dini (Facto 5).

4) $\lim \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+nx^2}}\,dx = 0$. De facto, designando $f_n(x)$ a sucessão de integrandas, temos

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}\,dx := g(x);$$

a função g é integrável em $]0,+\infty[$ porque $g(x)\ \frac{1}{\sqrt{x}}$ quando $x \to 0$ e $g(x)\ \frac{1}{x^{3/2}}$ quando $x \to +\infty$; e dados $0 < \varepsilon < A$ tem-se $f_n \to 0$ uniformemente em $[\varepsilon, A]$, visto que

$$f(x) \leq \frac{1}{\varepsilon + n\varepsilon^3} \quad \forall x \geq \varepsilon.$$

5) $lim \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} \sin\frac{x}{n}\, dx = 0$, visto que, pondo $h_n(x) = (1+\frac{x}{n})^{-n}$, tem-se $\lim h_n(x) = e^{-x}$, $h_1(x) \geq h_2(x) \geq h_3(x) \geq \cdots$ e h_2 é integrável em $[0,+\infty[$. Assim, as integrandas são majoradas em módulo por uma integrável e está garantida a convergência uniforme nos compactos.

Exercícios 1) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{\sqrt{(1-x)(1+4n^2x^2)}}\, dx.$$

2) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\, dx.$$

Apresentar o resultado na forma de integral impróprio convergente. *Sugestão:* Começar por fazer a mudança de variável $x^n = t$.

3) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx}{2+n(x^3+x)}\, dx.$$

4) Calcular, justificando

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x+n^2x^2}\, e^{-x}}{n}\, dx.$$

14

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 1ª ORDEM - SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Sejam p, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas dadas. Seja $T > 0$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq T \\ y(0) = y(T) \end{cases} \tag{1}$$

que referiremos habitualmente como "problema periódico" referente ao período T.

Como todas as soluções de (1) se obtêm a partir da fórmula

$$y(x) = e^{-P(x)}(C + \int_0^x e^{P(s)} f(s)\, ds) \tag{2}$$

onde P é uma primitiva de p fixada e C uma constante real, vemos que se obtém uma solução de (1) se, e só se,

$$C(e^{-P(T)} - e^{-P(0)}) + e^{-P(T)} \int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0.$$

Daqui concluímos imediatamente:

Facto 67. *Se $P(T) \neq P(0)$, o problema (1) tem uma e uma só solução.*

Facto 68. *Se $P(T) = P(0)$, o problema (1) tem solução se, e só se, $\int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0$. Neste caso, cada escolha do número C dá uma solução.*

Observação: 1. A condição $\int_0^T e^{P(s)} f(s)\, ds = 0$ significa que cada solução z do problema homogéneo $y' - p(x)y = 0$ satisfaz $\int_0^T z(s) f(s) = 0$.

2. Em particular, uma função f de período T tem primitivas periódicas de período T se, e só se, $\int_0^T f(x)\, dx = 0$. (considerar a equação $y' = f(x)$).

Facto 69. *Suponhamos que p e f são funções contínuas e periódicas com período T. Então as soluções em $\mathbb{R}$ de (1) são periódicas de período T.*

Demonstração: Pretendemos provar que, se $y(x)$ é solução de $y'(x) + p(x)y = f(x)$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo $y(0) = y(T)$, então $y(x + T) = y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ora, atendendo à periodicidade de p e f imediatamente se verifica que a função

$$w(x) = y(x + T)$$

é ainda solução de $y'(x) + p(x)y = f(x)$. A condição $y(0) = y(T)$ implica $y(0) = w(0)$. Concluimos que $y \equiv w$.

Exercícios: 1) Verificar que a solução do problema $y' + 2xy = 1$, $y(0) = 0$ tem limite 0 quando $x \to +\infty$ e portanto tem máximo absoluto em $[0, +\infty[$. O máximo é atingido no único ponto x em que $y(x)$ coincide com $\frac{1}{2x}$.

2) Calcular a única solução periódica de $y' + (1 + \sin x)y = \cos \frac{x}{2}$.

3) Dado $T > 0$, a cada função contínua e $T-$periódica $p(t)$ associamos um número positivo $j = j(p)$ tal que para *qualquer* solução da equação homogénea $y' = p(t)y$ se tem

$$y(t + T) = j\, y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Verificar que a aplicação $p \mapsto j$ está bem definida no espaço (de Banach) C_T das funções contínuas e $T-$periódicas e que:

(a) $j(p + q) = j(p)j(q) \ \ \forall p, q \in C_T$

(b) j é contínua como aplicação de C_T (que tem a norma do supremo) em $\mathbb{R}$.

(c) $j(p) = 1$ se, e só se, as equações $y' \pm p(t)y = 0$ têm soluções T-periódicas não triviais (isto é, não identicamente nulas).

4) Seja $a > 0$ constante.

(a) Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ com $f(+\infty) = L$, verificar que qualquer solução de $y' + ay = f(x)$ tem limite em $+\infty$ e calculá-lo.

(b) Se f é uma função contínua e limitada em $[0, +\infty[$, verificar que existe uma solução de $y' = ay + f(x)$ que é limitada em $[0, +\infty[$.

5) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular a solução geral de $y' + y = |x - a|$. Sugestão para um cálculo rápido: como os coeficientes são constantes, a equação admite uma solução que é polinómio do 1º grau em cada intervalo onde o 2º membro é polinómio do 1º grau.

6) Seja p uma função T-periódica. Verificar que para toda a solução $y(x)$ de $y' + p(x)y = 0$ existem $m \in \mathbb{R}$ e uma função T-periódica B tal que $y(x) = e^{mx}B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. SUGESTÃO: decompôr p na forma $p = c + p_1$, onde $c \in \mathbb{R}$ e p_1 é T-periódica e $\int_0^T p_1(x)\, dx = 0$.

15

OBSERVAÇÕES SOBRE UNICIDADE NO PVI

Lema 1. *Se h é uma função diferenciável em $[a,b]$ e existe uma constante $K \geq 0$ tal que*

$$h'(t) \leq Kh(t) \ \ \forall t \in [a,b]$$

então

$$h(t) \leq h(a)e^{K(t-a)} \ \ \forall t \in [a,b].$$

Demonstração. Multiplicar por e^{-Kt}. Obtém-se $\frac{d}{dt}(e^{-Kt}h(t)) \leq 0$ e portanto $e^{-Kt}h(t) \leq e^{-Ka}h(a)$ $\forall t \in [a,b]$.

Corolário 1. ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Seja g uma função contínua e não negativa em $[a,b]$ tal que existem c, $d \geq 0$ verificando*

$$g(t) \leq c + d\int_a^t g(s)\,ds \ \ \forall t \in [a,b].$$

Então

$$g(t) \leq ce^{d(t-a)} \ \ \forall t \in [a,b].$$

Demonstração. Aplicar o lema com $h(t) = c + d\int_a^t g(s)\,ds$.

Começamos por considerar o problema de valor inicial

$$y' = f(x,y), \ \ y(x_0) = y_0 \tag{PVI}$$

Suponhamos que f é contínua numa faixa $I \times \mathbb{R}$ (I é intervalo), tem valores em $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, e ainda: existe $L \geq 0$ tal que

$$f(x,y) - f(x,\bar{y}) \leq L(y - \bar{y}), \quad \forall x \in I, \ \forall y \geq \bar{y} \tag{1}$$

(condição de Lipschitz unilateral).

Proposição 1. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x,y)$ em I e suponha-se que f satisfaz a condição de Lipschitz unilateral (1). Então*

$$|y(x) - z(x)| \leq e^{L(x-x_0)}|y(x_0) - z(x_0)|, \ \ \forall x \geq x_0.$$

Demonstração. Considerar a função $h(x) = (y(x) - z(x))^2$ e aplicar o Lema: obtém-se

$$h'(x) = 2(y(x) - z(x))(f(x, y(x)) - f(x, z(x)) \leq 2Lh(x)$$

(considerar separadamente os casos $y(x) > z(x)$ e $y(x) \leq z(x)$).

Nota importante: No caso em que $L = 0$ obtemos já o seguinte resultado notável: Se para cada x a função $y \mapsto f(x, y)$ é decrescente, então o problema PVI com condição inicial em $x = a$ tem solução única em $[a, b]$. De igual modo se pode afirmar que, se $y \mapsto f(x, y)$ é crescente, há solução única em $[a, b]$ para o problema com o valor inicial dado em $x = b$.

Proposição 2. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x, y)$ em I mas suponha-se agora que f é y-Lipschitziana, isto é:*

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall x \in I, \ \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Então

$$|y(x) - z(x)| \leq e^{L|x - x_0|}|y(x_0) - z(x_0)|, \ \ \forall x \in I.$$

Demonstração. Como (2) implica (1), a desigualdade a demonstrar, para $x \geq x_0$, resulta da proposição anterior. Por outro lado, a cada solução $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ corresponde a solução $y_1(x) := y(-x)$ de $y_1' = -f(-x, y_1)$ que está definida no intervalo $-I$ formado pelos simétricos dos elementos de I. Como (2) também implica (1) para a função $-f(-x, y)$, conclui-se a desigualdade para $x < x_0$. (Em alternativa: refazer directamente o cálculo.)

Observação. Se a condição (2) é válida apenas num rectângulo finito, produto de dois intervalos, $I \times J$, (i.e. substituindo $\mathbb{R}$ por J) a conclusão da Proposição 3.2 é válida para soluções com valores em J.

Observemos que a proposição anterior pode ser reenunciada do modo seguinte, evidenciando que as soluções dependem continuamente dos dados iniciais. Mais precisamente, a norma da solução em cada intervalo compacto depende de modo Lipschitziano (o modo mais simples de dependência contínua!) do dado inicial:

Proposição 3. *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções de $y' = f(x, y)$ em I com f y-Lipschitziana, isto é: verificando (2). Então para cada intervalo compacto $K \subset I$ existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in K} |y(x) - z(x)| \leq M|y(x_0) - z(x_0)|.$$

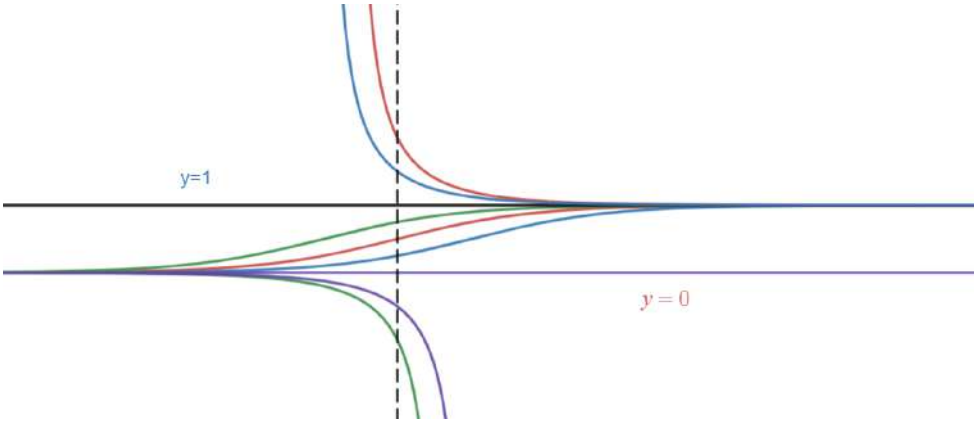
Proposição 4. *Sob a condição (1), o problema (PVI) tem no máximo uma solução em cada intervalo da forma $[x_0, x_1] \subset I$.*

Proposição 5. *Sob a condição (2), o problema (PVI) tem uma e uma só solução em cada intervalo* $[x_1, x_2] \subset I$, *com* $x_1 \leq x_0 \leq x_2$.

Observação. Da proposição 3 resulta a unicidade no enunciado acima. Para a existência de solução definida no intervalo $[x_1, x_2]$, ver adiante, no Capítulo "Problema de valores iniciais revisitado", o Facto 78.

Notas. 1) Se $y(t)$ é solução da equação *autónoma* $y' = f(y)$, então todas as translatadas $y(t-c)$, $c \in \mathbb{R}$, são também soluções.

2) As soluções da logística $y' = y(1-y)$ são, além das constantes 0 e 1: $\frac{e^t}{1+e^t}$ e as suas translatadas se $0 < y(0) < 1$; $\frac{2e^t}{2e^t-1}$ e as suas translatadas se $y(0) > 1$; $\frac{e^t}{e^t-2}$ e as suas translatadas se $y(0) < 0$. Na figura abaixo estão esquematizados os gráficos das soluções $y(t)$ com as condições iniciais $y(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/4$, $y(0) = 1/2$. $y(0) = 3/4$, $y(0) = 3/2$, $y(0) = 2$, $y(0) = -1/2$, $y(0) = -1$.



3) As soluções de $y' = \sqrt{y_+}$, além da solução trivial óbvia $y \equiv 0$, são: todas as constantes negativas; e, como se vê por separação de variáveis, a função

$$u(t) = \begin{cases} t^2/4 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

e, claro, todas as suas translatadas. Em particular, as soluções do PVI $y' = \sqrt{y_+}$, $y(0) = 0$ são todas as funções $u(t-c)$ com $c \geq 0$. Notar que neste problema há unicidade para $t \leq 0$.

Exercícios 1) Determinar as soluções do problema $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$. Resposta: 0 e todas as funções $u(t-c)$ com $c \geq 0$, onde

$$u(t) = \begin{cases} (2/3)^{3/2} t^{3/2} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

2) Determinar todas as soluções em $\mathbb{R}$ do problema: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. Observar que a equação e a condição inicial implicam que as soluções tomam valores ≤ 0 para $t < 0$. Facilmente se reconhece que as soluções são 0 e todas as funções da forma

$$u(t) = \begin{cases} (t-d)^2/4 & t \geq d \\ 0 & c \leq t \leq d \\ -(t-c)^2/4 & t \leq c \end{cases}$$

com $c \leq 0 \leq d$.

3) Determinar a (única) solução do problema

(a) $y' = \sqrt{y_+} + 1$, $y(0) = 0$. (Solução: é a função inversa de $t = 2\sqrt{y} - 2\ln(\sqrt{y}+1)$ para $t \geq 0$, e $y = t$ se $t \leq 0$).

(b) $y' = \sqrt{y_+} + t$, $y(0) = 0$. Notar que há uma solução óbvia para $t \geq 0$: $y = t^2$.

Detalhe da verificação da unicidade neste caso:

(A) Mostrar que para qualquer solução $y(t)$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{t^2} = 1$. Basta aplicar lim inf e lim sup à identidade

$$\frac{y'(t)}{t} = \sqrt{\frac{y(t)}{t^2}} + 1$$

e ter em conta o teorema de Cauchy.

(B) Se houver outra solução y, para $t \geq 0$, representemo-la na forma $y(t) = t^2 u(t)$ e deduzamos uma equação diferencial para u:

$$u' = \frac{\sqrt{u} - 2u + 1}{t} \qquad (*)$$

Do sinal do 2º membro resulta que as soluções $u(t) \neq 1$ de (*) não podem ter limite 1 quando $t \to 0$. Portanto, necessariamente $u \equiv 1$.

Para $t \leq 0$ a solução é do tipo at^2 com $a > 0$ e facilmente determinamos $a = 1/4$.

16

CONTINUAÇÃO DE SOLUÇÕES; COMPORTAMENTO NO INFINITO

Neste capítulo, que é dedicado a extensões e complementos de parte da matéria de Análise Matemática IV, consideramos uma equação $y' = f(x,y)$ com segundo membro contínuo e y-localmente Lipschitziano numa faixa infinita $D = I \times \mathbb{R}^n$, em que I é intervalo *aberto* real.

Proposição 6. *Se $y(x)$ é solução de $y' = f(x,y)$ definida e* limitada *em $[x_0, x_1)$, com $x_1 \in I$, então y é prolongável a $[x_0, x_1]$ como solução da equação.*

Proof. Tem-se $M = \sup_{x_0 \leq x < x_1} f(x, y(x)) < +\infty$. Se tomarmos uma sucessão qualquer $t_k \in [x_0, x_1)$, com $t_k \to x_1$, e escrevermos a equação em forma integral, obtemos, a partir do teorema de valor médio sob a forma de desigualdade, $|y(t_i) - y(t_j)| \leq M|t_i - t_j|$. O critério de Cauchy implica que $\lim_{x \to x_1^-} y(x)$ existe. Chamemos-lhe y_1. Prolongando $y(x)$ a $[x_0, x_1]$ com o valor y_1 em $x = x_1$ obtemos uma função diferenciável em x_1 (verificação simples, pela regra de Cauchy) e imediatamente se comprova (por passagem ao limite) que ela satisfaz a equação diferencial em $[x_0, x_1]$.

Uma solução $y(x)$ de $y' = f(x,y)$ definida num intervalo $[x_0, x_1)$ (respect. $(x_0, x_1]$) $\subset I$ diz-se **continuável à direita** (respect **à esquerda**) se existe um prolongamento $\tilde{y}$ de y que ainda é solução da equação diferencial e que está definida num intervalo $[x_0, x_2)$ (respect. $(x_2, x_1]$) com $x_2 > x_1$ (respect. $x_2 < x_0$). Por negação destas condições obtêm-se os conceitos de solução **não continuável â direita** ou **não continuável à esquerda**.

Uma solução definida num subintervalo aberto de I diz-se **não continuável** se é não continuável à direita e não continuável à esquerda.

Também é habitual utilizar a designação de **maximal** como sinónimo de **não continuável** .

Teorema 1. *Seja $y(x)$ uma solução de $y' = f(x,y)$ definida no intervalo $[x_0, x_1) \subset I$, não continuável à direita. Então, se $x_1 < \sup I$, tem-se*

$$\lim_{x \to x_1^-} |y(x)| = +\infty.$$

Proof. Admitamos, pois, que $x_1 < \sup I$. Em particular, $x_1 \in I$.

Afirmação 1:

$$\limsup_{x \to x_1^-} |y(x)| = +\infty.$$

Com efeito, se este limite superior for finito, e por ser $x \mapsto y(x)$ limitada nos intervalos compactos, resulta que $y(x)$ é limitada em $[x_0, x_1)$. Pela proposição acima, y prolonga-se como solução ao ponto

x_1, e portanto, pelo teorema de existência e unicidade, prolonga-se mesmo a um intervalo da forma $[x_0, x_1 + \delta)$ com $\delta > 0$. Obtemos uma contradição com a hipótese.

Ora, para provarmos que o limite infinito existe, temos de verificar que a condição

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in (x_1 - \varepsilon, x_1) \quad |y(x)| \leq M \tag{$*$}$$

não é verdadeira. Suponhamos que o é, com vista a uma contradição.

Consideremos as fronteiras S_M, S_{2M} das bolas de centro 0 e raios M e $2M$, respectivamente. Conjugando (*) e a Afirmação 1, construimos $t_1 < t_2$ tais que $x_0 < t_1 < t_2 < x_1$, t_1 tão próximo de x_1 quanto se pretenda, e

$$y(t_1) \in S_M, \;\; y(t_2) \in S_{2M}, \;\; M \leq |y(t)| \leq 2M \; \forall t \in (t_1, t_2).$$

E na verdade podemos repetir este raciocínio construindo analogamente $t_3 < t_4$ tais que $t_2 < t_3 < t_4 < x_1$ e t_3, t_4 gozam exactamente da mesma propriedade. (Verificar com cuidado este argumento.) Notemos ainda que também t_3 pode ser tomado tão próximo de x_1 quanto quisermos. Por indução, construimos uma sucessão

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots, \quad t_n \to x_1 \tag{a}$$

com a propriedade:

$$y(t_{2i-1}) \in S_M, \quad y(t_{2i}) \in S_{2M},$$
$$M \leq |y(t)| \leq 2M \;\; \forall t \in (t_{2i-1}, t_{2i}), \;\; i = 1, 2, \cdots$$

Ponhamos $K = \sup_{x_0 \leq x \leq x_1, \, M \leq |z| \leq 2M} |f(x, z)|$. Teremos

$$M \leq |y(t_{2i}) - y(t_{2i-1})| = \int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} |f(s, y(s))| \, ds \leq K(t_{2i} - t_{2i-1})$$

que implica que $t_{2i} - t_{2i-1}$ não tende para zero e portanto contradiz (a).

Demonstra-se analogamente:

Teorema 2. *Seja $y(x)$ uma solução de $y' = f(x, y)$ definida no intervalo $(x_0, x_1] \subset I$ e não continuável à esquerda. Então, se $x_0 > \inf I$, tem-se*

$$\lim_{x \to x_0^+} |y(x)| = +\infty.$$

Este resultado tem consequências importantes para o estudo do domínio da solução do problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{PVI}$$

Proposição 7. *Este problema tem uma solução não continuável, única.*

Demonstração. Consideremos a família de todos os pares (J, y) onde $J \ni x_0$ é subintervalo aberto de I e y é solução de (PVI) definida em J. Dados dois destes pares, (J_1, y_1) e (J_2, y_2), tem-se $y_1 \equiv y_2$ em $J_1 \cap J_2$ em virtude da Proposição 3. Assim, podemos definir uma solução z de (PVI) cujo domínio é a união dos intervalos que surgem naquela família de pares, pondo $z(x) = y(x)$ se existe um par (J, y) tal que $x \in J$. Pela construção, z é não continuável.

Corolário 2. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ a solução de (PVI) não continuável à direita. Suponhamos que $\forall b \in I$ tal que y está definida em $[x_0, b)$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que $|y(x)| \leq K$ $\forall x \in [x_0, b)$. Então o domínio de y contém $[x_0, \sup I)$.*

Demonstração. Seja $[x_0, x_1)$ o domínio de y, suposta não continuável à direita. Se $x_1 < \sup I$ o teorema anterior mostra que há uma contradição com a hipótese.

Corolário 3. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ a solução de $y' = f(x, y)$ não continuável à esquerda. Suponhamos que para todo o $b \in I$ tal que y está definida em $(b, x_0]$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que $|y(x)| \leq K$ $\forall x \in (b, x_0]$. Então o domínio de y contém $(\inf I, x_0]$.*

Corolário 4. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $y(x)$ solução não continuável de $y' = f(x, y)$. Suponhamos que para todo o intervalo (a, b) tal que $a, b \in I$ e y está definida em (a, b) existe um número K (dependente possivelmente de a e b) tal que $|y(x)| \leq K$ $\forall x \in (a, b)$. Então o domínio de y é I.*

Para aplicar os corolários anteriores é conveniente dispor de técnicas que permitam estimar as soluções. A desigualdade de tipo Gronwall fornece estimativas simples:

Corolário 5. *Se $D = I \times \mathbb{R}^n$ e existem funções contínuas não negativas $h, j : I \to \mathbb{R}$ tais que*

$$|f(x, y)| \leq h(x)|y| + j(x), \quad \forall (x, y) \in D \tag{$*$}$$

então qualquer solução não continuável de $y' = f(x, y)$ tem domínio I.

Demonstração: Sejam $a, b \in I$ tais que o domínio de y contém (a, b).
Fixemos $c \in (a, b)$. Ponhamos $M = \sup_{[c,b]} h < \infty$ e $N = \sup_{[c,b]} j < \infty$. Tem-se em $[c, b]$:

$$y(x) = y(c) + \int_c^x f(s, y(s)\, ds$$

e, por isso, usando a estimativa (*) da hipótese

$$|y(x)| \leq |y(c)| + N(b - c) + M \int_c^x |y(s)|\, ds \quad \forall x \in [c, b).$$

Da desigualdade de Gronwall deduzimos então que y é limitada em $[c, b)$.

De modo análogo se prova que y é limitada em $(a, c]$, utilizando a simetria de variável independente $x \mapsto -x$, para a qual $z(x) = y(-x)$ é solução, no intervalo simétrico, da equação $z' = -f(-x, z)$, à qual aplicamos o mesmo raciocínio.

OBSERVAÇÕES. 1) O caso particular em que f é linear em y (em que se verifica a hipótese deste último corolário) foi estudado em detalhe no curso de Análise Matemática IV, onde vimos que todas as soluções de um sistema linear estão definidas no intervalo I onde a equação tem sentido.

2) Para uma equação de ordem n, digamos

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \cdots, u^{(n-1)}) \qquad (e)$$

obtemos enunciados correspondentes aos anteriores por redução a um sistema de n equações de primeira ordem com variável dependente $y = (u, u', \cdots, u^{(n-1)})$. Deve notar-se, pois, que tudo o que envolva limitação ou limites se refere a esta função vectorial. Por exemplo:

Corolário 6. *Seja $D = I \times \mathbb{R}^n$ e $u(x)$ solução de (e) não continuável à direita. Suponhamos que $\forall b \in I$ tal que u está definida em $[x_0, b)$ existe um número K (dependente possivelmente de x_0 e b) tal que $\max\{|(u(x)|, |u'(x)|, \cdots, |u^{(n-1)}(x)|\} \leq K \ \forall x \in [x_0, b)$. Então o domínio de u contém $[x_0, \sup I)$.*

Vamos ainda referir aplicações úteis a equações autónomas escalares de primeira ordem.

Proposição 8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com um zero z, e suponhamos que existe $A < z$ (respectivamente $B > z$) tal que*

$$f(s) > 0 \ \ \forall s \in [A, z), \quad \textit{(respect. } f(s) < 0 \ \ \forall s \in (z, B]\textit{)}. \qquad (a)$$

Então o problema de valor inicial

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0, \qquad (**)$$

em que $A \leq y_0 < z$ (respect. $z < y_0 \leq B$), tem solução $y(x)$ definida e crescente (respect decrescente) em $[0, +\infty)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = z.$$

Demonstração: Consideremos a primeira afirmação (a segunda é análoga). Afirmamos que: se $[0, b)$ é um intervalo qualquer onde a solução $y(t)$ de (**) está definida, então $y_0 \leq y(t) < z \ \forall t \in [0, b)$.

Justifiquemos este facto: se existisse $t_1 \in [0, b)$ tal que $y(t_1) = z$, teríamos uma contradição com o teorema de unicidade para o problema de valores iniciais, já que a constante z é solução da equação diferencial e $y \neq z$. Como a imagem de y em $[0, b)$ é intervalo e y é crescente numa vizinhança de 0, resulta de (a) que y' não pode anular-se em $[0, b)$; portanto y é estritamente crescente e a sua imagem está contida em $[y_0, z)$.

Do corolário 2 deduz-se que o domínio da solução de (**), já suposta não continuável à direita, contém $[0, +\infty)$. Como $y(x)$ é crescente neste intervalo, tem limite quando $x \to +\infty$ e é claro que $y_0 < L = \lim_{x \to +\infty} \leq z$. Se fosse $L < z$ teríamos

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} f(y(x)) = f(L) > 0.$$

Pela definição de limite e pelo teorema de Weierstrass podemos escolher $C > 0$ tal que

$$y'(x) \geq C \ \ \forall x \in [0, \infty).$$

O teorema fundamental do Cálculo implica então

$$y(x) = y_0 + \int_0^x y'(t)\, dt \geq y_0 + Cx \ \to +\infty$$

quando $x \to +\infty$, contradizendo o facto de $y(x)$ ter limite finito e terminando a demonstração.

Analogamente se obteria uma afirmação sobre domínio e limites da solução de (**) alterando nas hipóteses o sinal de f:

$$f(x) < 0 \ \ \forall x \in [A, z), \quad (\text{respect. } \ f(x) > 0 \ \ \forall x \in (z, B] \ ).$$

Sugerimos ao leitor que redija o correspondente enunciado.

Neste caso surgem nas conclusões limites quando $x \to -\infty$.

Por outro lado, combinando enunciados deste tipo, obtemos

Proposição 9. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com dois zeros $z_1 < z_2$ tais que $f(s) > 0 \ \forall s \in (z_1, z_2)$. Então o problema de valor inicial*

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0, \tag{**}$$

em que $z_1 < y_0 < z_2$, tem solução com domínio $\mathbb{R}$ e tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = z_2, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = z_1.$$

Exemplo de cálculo de tempo de explosão. A solução $Y(t)$ do problema

$$y' = t(y^3 + 4y + 1), \ \ y(0) = 1$$

calcula-se pela técnica de separação de variáveis, sendo dada implicitamente por

$$\int_1^y \frac{1}{s^3 + 4s + 1}\, ds = t^2/2, \quad \forall y \geq 1, \ t \geq 0 \ \text{ tais que } \ y = Y(t).$$

Daqui resulta que o supremo de tais valores de t é o número $T > 0$ tal que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^3 + 4s + 1}\, ds = T^2/2$$

(é um número porque o integral é convergente). O domínio da solução Y, suposta não continuável à direita, é $[0, T)$. Tem-se

$$\lim_{t \to T} Y(t) = +\infty.$$

A solução não pode, obviamente, prolongar-se ao ponto $t = T$, e por isso o número T é referido como *tempo de explosão* de $Y(t)$.

Exemplo de ausência de unicidade: um zero atingido em tempo finito. Consideremos a situação seguinte.

(H) É dada uma função f contínua em $(A, z]$, C^1 e positiva em (A, z), com $f(z) = 0$, e

$$\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)}\, ds \quad \text{converge.}$$

(Exemplo: $\sqrt{1-x}$ para $x \leq 1$ (aqui $A = -\infty$, $z = 1$).)

A solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \tag{†}$$

onde $y_0 \in (A, z)$, é dada implicitamente, para $t \geq 0$, por

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)}\, ds = t, \quad \forall y \in [y_0, z),\ t \geq 0 \quad \text{tais que} \quad y = Y(t).$$

Resulta que o número real

$$\int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)}\, ds = T$$

tem as propriedades: a solução $y = Y(t)$ está bem definida para $t \in [0, T)$ e

$$\lim_{t \to T} Y(t) = z.$$

Portanto Y prolonga-se como solução da equação diferencial ao intervalo $[0, T]$, com o valor $Y(T) = z$ (ver o argumento da demonstração da Proposição 6). Como a constante z (definida em $\mathbb{R}$) é também solução, resulta que estamos numa situação de não unicidade – duas soluções distintas passam no ponto (T, z).

Podemos sumarizar as nossas conclusões com o seguinte enunciado.

Proposição 10. *Sob a hipótese (H), a solução $y(t)$ do problema de valor inicial $(\dagger)$ está definida em $[0, T]$, onde $T = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$ e $y(T) = z$.*

Também em contraponto com o caso C^1, uma solução pode "ligar" dois zeros consecutivos em tempo finito. Na verdade, utilizando os argumentos anteriores, prova-se analogamente.

Proposição 11. *Admitamos a hipótese*

(HH) É dada uma função f contínua em $[z_1, z_2]$, C^1 e positiva em (z_1, z_2), $f(z_1) = f(z_2) = 0$ e

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds \quad \textit{converge.}$$

Então, se $y_0 \in (z_1, z_2)$, a solução $y(t)$ do problema de valor inicial $(\dagger)$ está definida em $[S, T]$, onde $T = \int_{y_0}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$, $S = \int_{y_0}^{z_1} \frac{1}{f(s)}\, ds \in \mathbb{R}$, $y(S) = z_1$ e $y(T) = z_2$. Em particular, o comprimento do intervalo $[S, T]$ é igual a $\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{f(s)}\, ds$.

Exemplos de argumentos que envolvem soluções não prolongáveis e também a dependência contínua dos dados iniciais. 1) Seja $h(t)$ uma função periódica de período T e tal que $0 < h < 1$. Então a equação diferencial

$$u' = (1-u)^2 - h(t) \tag{p}$$

tem pelo menos uma solução T-periódica, isto é, uma solução u com $u(0) = u(T)$, tal que $0 \leq u \leq 1$.

Para justificar esta afirmação seja u_z a solução de (p) com condição inicial

$$u_z(0) = z.$$

Então, *afirmamos:* $0 < u_z(t) < 1\ \forall z \in [0,1]$ *e* $\forall t > 0$ *tal que a solução esteja tenha sentido em* t.

Começamos por ver que, se $z \in [0,1]$, a desigualdade $0 < u_z(t)$ verifica-se $\forall t > 0$ tal que $u_z(t)$ exista. De facto, se para algum $t_0 > 0$ se tivesse $u_z(t_0) = 0$ poderíamos supor que t_0 era o menor número positivo com essa propriedade e, como $u_z(t) > 0$ numa vizinhança esquerda de t_0, viria $u_z'(t_0) \leq 0$, em contradição com a equação diferencial.. De modo análogo se verifica que $u_z(t) < 1$ para $t > 0$.

Em virtude da teoria anterior, por ser limitada a solução u_z em qualquer eventual intervalo $[0, s)$ onde exista, então u_z, suposta já não continu ável, está definida em $[0, +\infty)$.

Resulta que a função $z \mapsto u_z(T) - u_z(0)$ está bem definida e é contínua no intervalo $[0,1]$. Pelo que acabamos de mostrar, esta função toma um valor positivo para $z = 0$ e um valor negativo para $z = 1$. O teorema do valor intermédio garante que existe z^* tal que $u_{z^*}(T) - u_{z^*}(0) = 0$. Como h é T-periódica, o mesmo sucede com u_{z^*}. (Recordar um argumento utilizado na demonstração do Facto 69).

Observação importante. Aplicámos neste exemplo, além da teoria da continuação de soluções, a teoria da respetiva continuidade relativamente à condição inicial, que vale para equações de 1ª ordem com segundo membro localmente Lipschitz na segunda variável. No presente texto tratámos a teoria da continuidade apenas no caso Lipschitziano (ver Proposição 3), que não se verifica na situação presente ($(1-u)^2$ não tem derivada limitada). Ora, para o efeito de procurar soluções com valores em $[0,1]$, podemos trabalhar com a equação modificada

$$v' = F(v) - h(t)$$

com

$$F(v) = \begin{cases} 1 - 2v, & v \leq 0 \\ (1-v)^2, & 0 \leq v \leq 1 \\ 0, & v \geq 1 \end{cases}$$

onde o 2º membro já é Lipschitz (e mesmo C^1). De facto, qualquer solução $v(t)$ desta equação diferencial tal que $0 \leq v \leq 1$ é obviamente solução da equação inicialmente dada. E o argumento acima pode ser refeito com a equação modificada.

Exercício: O argumento anterior conduziu a uma solução que tem valores em $[0,1]$. Mostrar que, na verdade, há outra solução periódica com valores em $[1,2]$. Sugestão: tomar valores iniciais ("finais"?) em $t = T$.

2) Sem resolver a equação

$$u' = (1 + x^2)u(1-u) \qquad (e)$$

podemos demonstrar que existe um número $a > 0$ tal que para cada $b \in (0, a)$ a equação (e) tem duas soluções tais que $u(10) - u(0) = b$.

Para isso, representemos por u_λ a solução (suposta já não prolongável) de (e) com condição inicial

$$u_\lambda(0) = \lambda.$$

Tem-se, evidentemente, $u_0 \equiv 0$ e $u_1 \equiv 1$. Se $0 < \lambda < 1$, u_λ é crescente e só pode tomar valores em $(0,1)$. Assim, u_λ tem domínio $\mathbb{R}$. A função

$$\lambda \mapsto u_\lambda(10) - u_\lambda(0)$$

está bem definida e é contínua em $[0,1]$, sendo positiva em $(0,1)$ e nula nos extremos. A afirmação é então verificada desde que se tome a como o máximo desta função.

17

SUB E SOBRE-SOLUÇÕES EM PROBLEMAS DE 1ª ORDEM

Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e consideremos o PVI

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = A \tag{1}$$

Uma função $v \in C^1[a,b]$ diz-se uma *sobre-solução estrita* de (1) em $[a,b]$ se

$$v'(x) > f(x,v(x)) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \text{e} \quad v(a) > A.$$

Facto 70. *Se $v(x)$ é uma sobre-solução estrita de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $v(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstração: Se a conclusão é falsa, existe $t_1 \in [a,b]$ tal que $v(t_1) = y(t_1)$ e, tomando um ínfimo se necessário, podemos supor que $v(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,t_1[$. Facilmente se conclui então $v'(t_1) \leq y'(t_1) = f(t_1,y(t_1)) = f(t_1,v(t_1)) < v'(t_1)$, uma contradição.

Dizemos que $v \in C^1[a,b]$ é uma *sobre-solução* de (1) em $[a,b]$ se

$$v'(x) \geq f(x,v(x)) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \text{e} \quad v(a) \geq A.$$

Facto 71. *Seja f localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. Se $v(x)$ é uma sobre-solução de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $v(x) \geq y(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstração: Fixemos $\varepsilon > 0$ e o compacto $S_\varepsilon = \{(x,z) |\ x \in [a,b],\ \ |z - y(x)| \leq \varepsilon\}$. Então f é Lipschitziana em relação à segunda variável em S_ε, com certa constante L. Para $\delta > 0$ definamos

$$w_\delta(x) = v(x) + \delta e^{2L(x-a)}.$$

Se δ é suficientemente pequeno, o gráfico de w_δ está contido em S_ε e portanto

$$w'_\delta(x) = v'(x) + 2L\delta e^{2L(x-a)} \geq f(x,v(x)) + 2L\delta e^{2L(x-a)} >$$

$$> f(x, v(x) + \delta e^{2L(x-a)}) = f(x, w_\delta(x))$$

$\forall x \in [a,b]$. Então w_δ é sobresolução estrita para (1).. Do resultado anterior deduz-se $w_\delta(x) > y(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Tomando limite quando $\delta \to 0$ obtém-se a desigualdade pretendida.

Definimos sub-solução estrita e sub-solução de (1) em $[a,b]$ invertendo o sentido das desigualdades que serviram para definir sobre-solução estrita e sobre-solução. E, do mesmo modo, demonstra-se que

Facto 72. *Seja f localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. Se $u(x)$ é uma sub-solução de (1) em $[a,b]$ e $y(x)$ é solução de (1), então $u(x) \leq y(x)\ \forall x \in [a,b]$.*

Se em (1) substituirmos a condição inicial $y(a)$ pela "condição final" $y(b) = B$ e, seguindo o esquema anterior, definirmos sobre-solução como uma função v tal que $v(b) \geq B$ e $v'(x) \leq f(x, v(x))$ $\forall x \in [a,b]$, obtemos um enunciado análogo ao anterior. Do mesmo modo, o conceito de subsolução que se adapta à condição final é: função u tal que $u(b) \leq B$ e $u'(x) \geq f(x, u(x))\ \forall x \in [a,b]$.

Exercícios: 1) Seja $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 < h(t) < \frac{1}{4}\ \forall t \in [0,T]$. Seja $y(t)$ solução de

$$y' = y(1-y) - h(t). \qquad (E)$$

Mostrar que, se $1/2 < y(0) < 1$, então $1/2 < y(T) < 1$. E, se $0 < y(T) < 1/2$, então $0 < y(0) < 1/2$.

Concluir que, se h está definida em $\mathbb{R}$ e é T-periódica, a equação (E) tem duas soluções periódicas.

2) Considere-se a solução de $y' = y^2 + \sin t$ tal que $y(0) = 2$. Usando as equações autónomas $y' = y^2 \pm 1$ para construir sub- e sobre-soluções* com a mesma condição inicial, mostrar que $y(t)$ tem tempo de explosão T tal que

$$\frac{\pi}{2} - \arctan 2 < T < \frac{\ln 3}{2}.$$

*Pelo método de resolução das separáveis, obtemos as funções: $\tan(t + \arctan 2)$ e $\frac{e^{2t}+3}{3-e^{2t}}$.

(Fazemos notar que a estimativa acima é de certo modo grosseira, mas pode ser melhorada com uma análise mais cuidadosa baseada na mesma ideia.)

3) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $a(t) \geq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Mostrar que a solução $y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = (y^2 - 2)a(t)(\frac{1}{2} + t), \quad y(0) = 2$$

tem tempo de explosão $T > 0$ finito, dando um majorante de T.

4) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $a(t) \geq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Mostrar que a solução $y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = (y^2 - 3)a(t)(3 + 2t), \quad y(0) = 2$$

tem tempo de explosão $T > 0$ finito, dando um majorante de T.

18

PROBLEMAS DE VALORES FRONTEIRA – EQUAÇÕES LINEARES DE 2ª ORDEM

Neste capítulo estudaremos um modelo simplificado de "problema com valores fronteira" linear. Precisamente, vamos considerar o problema de 2ª ordem

$$y'' + a(x)y = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{3}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{4}$$

onde a e f são funções contínuas no intervalo compacto $[0, l]$, com $l > 0$. Veremos que, ao contrário dos problemas de valores iniciais, problemas com condições deste tipo não gozam, em geral, das propriedades de existência e unicidade de solução. Tem um papel importante nesta discussão a equação homogénea associada

$$y'' + a(x)y = 0, \quad x \in [0, l] \tag{5}$$

e em particular quando lhe juntamos as condições (4).

Facto 73. *O conjunto de soluções $y(x)$ de (5)-(4) é um espaço vectorial de dimensão 0 ou 1.*

Demonstração: Se $y,\ z$ são soluções de (5)-(4), então, como o Wronskiano de $y,\ z$ tem uma linha nula, aquelas soluções são linearmente dependentes.

Vamos então ver que a resolução do problema (3)-(4) depende essencialmente do espaço de soluções de (5)-(4).

Facto 74. *São equivalentes as afirmações:*
(5)-(4) só tem a solução trivial ($y \equiv 0$);
$\forall f \in C([0, l])$ o problema (3)-(4) tem uma e uma só solução.

Demonstração: Sabemos que a solução geral de (3) admite a representação

$$y = y_p + c_1\varphi + c_2\psi$$

onde y_p é solução fixada de (3), $\varphi,\ \psi$ constituem uma base de soluções de (5) e $c_1,\ c_2$ são constantes reais. Uma tal solução satisfaz (4) se, e só se

$$\begin{cases} y_p(0) + c_1\varphi(0) + c_2\psi(0) = 0 \\ y_p(l) + c_1\varphi(l) + c_2\psi(l). \end{cases} \tag{6}$$

As constantes c_i que determinarão a solução procurada são, pois, soluções do sistema linear 2×2 (6) cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \varphi(l) & \psi(l) \end{bmatrix}$$

A solução de (6) existe e é única para qualquer vector coluna $[y_p(0), y_p(l)]^t$ se, e só se, a matriz é invertível, ou equivalentemente se o sistema homogéneo, em que $[y_p(0), y_p(l)]^t$ é substituído pelo vector nulo, só tem a solução $c_1 = 0 = c_2$ – o que, precisamente pelo cálculo que nos conduziu a (6), significa que (5)-(4) só admite a solução trivial.

Observação: A hipótese do Facto 74 é verificada se $a \leq 0$ em $[0, l]$. De facto, seja y uma solução de (5)-(4); multiplicando (5) por $y(x)$ e integrando por partes obtemos

$$[y(x)y'(x)]_0^l - \int_0^l y'(x)^2\,dx + \int_0^l a(x)y(x)^2\,dx = 0.$$

Em virtude de (4) tem-se $[y(x)y'(x)]_0^l = 0$. Resulta $0 \leq \int_0^l y'(x)^2\,dx - \int_0^l a(x)y(x)^2\,dx = 0$, de onde $y' \equiv 0$ e, novamente por (4), $y \equiv 0$.

Facto 75. *Suponhamos que (5)-(4) tem uma solução $\varphi \neq 0$ (isto é, uma solução não trivial). Então (3)-(4) tem soluções se, e só se*

$$\int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \tag{s}$$

e nesse caso tem uma infinidade de soluções.

Demonstração: Suponhamos que (5)-(4) tem uma solução $\varphi \neq 0$:

$$\varphi''(x) + a(x)\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \tag{$*$}$$

e que (3)-(4) tem uma solução y:

$$y'' + a(x)y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(l) = 0. \tag{$**$}$$

Multiplicando a equação de (**) por $\varphi(x)$ e integrando em $[0, l]$ (por partes no caso do 1º termo) obtemos

$$[y'(x)\varphi(x)]_0^l -$$
$$-\int_0^l y'(x)\varphi'(x)\,dx + \int_0^l a(x)y(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Pelas condições de φ nos extremos do intervalo, tem-se $[y'(x)\varphi(x)]_0^l = 0$. Integrando novamente por partes vem

$$-[y(x)\varphi'(x)]_0^l +$$
$$+\int_0^l y(x)\varphi''(x)\,dx + \int_0^l a(x)y(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Utilizando as condições de $y(x)$ nos extremos resulta

$$\int_0^l y(x)(\varphi''(x) + a(x)\varphi(x) = \int_0^l f(x)\varphi(x))\,dx.$$

e, pela equação em (*), conclui-se (s).

Suponhamos agora que f satisfaz (s). Vamos construir uma solução particular de (3) utilizando a fórmula de "variação das constantes". Em primeiro lugar, escolhamos uma base de soluções de (5) a partir de φ: basta considerar $\{\varphi, \psi\}$, onde ψ é qualquer solução de (5) que verifica $\psi(0) = 1$ (por exemplo, a solução do PVI $\psi(0) = 1,\ \psi'(0) = 0$) e que, portanto, é linearmente independente de φ. Como sabemos (ver Aula 9), uma solução particular de (3) é dada por

$$y_p(x) = c_1(x)\varphi(x) + c_2(x)\psi(x)$$

onde as derivadas das funções $c_i(x)$ são, para cada x, soluções do sistema linear 2×2

$$c_1'(x)\varphi(x) + c_2'(x)\psi(x) = 0$$
$$c_1'(x)\varphi'(x) + c_2'(x)\psi'(x) = f(x).$$

Resolvendo este sistema pelas fórmulas de Cramer ou por qualquer processo elementar encontramos

$$c_1'(x) = -\frac{\psi(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{\varphi(x)f(x)}{W(x)}$$

onde $W(x)$ é o determinante do sistema, isto é, o Wronskiano da base formada por φ e ψ. Obtemos finalmente

$$y_p(x) = \Big(-\int_0^x \frac{f(t)\psi(t)}{W(t)}\,dt \Big)\varphi(x) + \Big(\int_0^x \frac{f(t)\varphi(t)}{W(t)}\,dt \Big)\psi(x).$$

De $\varphi(l) = 0$ e (s) resulta imediatamente que y_p satisfaz (3)-(4). Além disso, é fácil ver que o conjunto de soluções de (3)-(4) é dado por

$$y_p(x) + A\varphi(x)$$

onde A é um número real arbitrário, o que termina a demonstração.

Observação: Na fórmula que usámos para a solução particular, o factor W pode sair dos integrais porque, para o tipo de equação que estamos a considerar (sem termo em y'), o wronskiano de duas soluções quaisquer é constante (exercício simples).

18.1 CÁLCULO DA SOLUÇÃO ÚNICA; FUNÇÃO DE GREEN

Vamos agora determinar uma expressão analítica da solução única a que se refere o Facto 74. Supomos, pois, que (5)-(4) só tem a solução $y \equiv 0$. Para este efeito, convém escolher uma base de soluções $\{\varphi, \psi\}$ de (5) da seguinte maneira:

φ é qualquer solução não nula de (5) tal que $\varphi(0) = 0$ (por exemplo, a solução do PVI $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1$);

ψ é qualquer solução não nula de (5) tal que $\psi(l) = 0$.

Em virtude da hipótese que estamos a admitir, $\varphi(l) \neq 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Assim, facilmente se conclui que efectivamente $\{\varphi, \psi\}$ é base de soluções e, incidentalmente, o seu Wronskiano é $W = W(0) = -\psi(0)\varphi'(0)$. Vamos recorrer à solução geral de (3) que tem a expressão

$$y(x) = y_p(x) + A\varphi(x) + B\psi(x), \qquad (*)$$

onde

$$y_p(x) = \Big(-\int_0^x \frac{f(t)\psi(t)}{W(t)}\,dt\Big)\varphi(x) + \Big(\int_0^x \frac{f(t)\varphi(t)}{W(t)}\,dt\Big)\psi(x). \qquad (**)$$

Impondo em (*) a condição $y(0) = 0$ imediatamente se conclui que $B = 0$. E A calcula-se a partir de $y(l) = 0$, resultando

$$A = \frac{1}{W}\int_0^l \psi(t)f(t)\,dt.$$

Logo, a solução de (3)-(4) é

$$y_p(x) + \frac{1}{W}(\int_0^l \psi(t)f(t)\,dt)\varphi(x)$$

que, por conveniência, vamos escrever na forma

$$y_p(x) + \frac{1}{W}(\int_0^x \psi(t)f(t)\,dt)\varphi(x) + \frac{1}{W}(\int_x^l \psi(t)f(t)\,dt)\varphi(x).$$

Inserindo a expressão (**), esta última simplifica-se para

$$\frac{1}{W}(\int_x^l \psi(t)f(t)\,dt)\varphi(x) + \frac{1}{W}(\int_0^x \varphi(t)f(t)\,dt)\psi(x).$$

A expresssão analítica que procuramos pode, pois, escrever-se

$$y(x) = \int_0^l G(x,t)f(t)\,dt \qquad (7)$$

onde

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{W}\varphi(t)\psi(x), & \text{se } 0 \le t \le x \le l \\ \frac{1}{W}\varphi(x)\psi(t), & \text{se } 0 \le x \le t \le l \end{cases} \qquad (8)$$

A função G aqui introduzida chama-se *função de Green* para o problema (3)-(4). Reconhece-se que é uma função contínua no quadrado $[0,l]\times[0,l]$ e nula na fronteira deste.

Facto 76. *Suponhamos que $a(x) \le 0\ \forall x \in [0.l]$. Então se $f \ge 0$, a solução (única) do problema (3)-(4) é ≤ 0.*

Demonstração: Suponhamos que $y(x)$, solução de (3)-(4), tem pelo menos um valor positivo. Então facilmente se reconhece que existe um intervalo $[c,d] \subset [0,l]$ tal que $y(c) = y(d) = 0$ e $y(x) > 0$ $\forall x \in]c,d[$. Multiplicando (3) por $y(x)$ e integrando (também por partes) em $[c,d]$ obtém-se

$$[y(x)y'(x)]_c^d - \int_c^d y'(x)^2\,dx + \int_c^d a(x)y(x)^2\,dx = \int_c^d f(x)y(x)\,dx.$$

Como a primeira parcela é nula, obtemos um valor ≤ 0 no primeiro membro e um valor ≥ 0 no segundo. Logo,

$$-\int_c^d y'(x)^2\,dx + \int_c^d a(x)y(x)^2\,dx = 0$$

de onde $y' \equiv 0$ em $[c,d]$, $y(x)$ constante em $[c,d]$, e, como $y(c) = 0$, temos $y(x) \equiv 0$ em $[c,d]$, contradizendo o que estamos a admitir.

Observemos que, em particular, repetindo o argumento com $f \equiv 0$, obtemos $y \leq 0$ e também $y \geq 0$ (porque $-y$ satisfaz a mesma equação). Estamos, pois, na situação em que (5)-(4) tem apenas a solução trivial, justificando a menção à solução única no enunciado. (Ver Observação a seguir ao facto 74.)

Exemplo: Consideremos o problema (3)-(4) com $a \equiv \lambda$ (constante) e $l = \pi$:

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad x \in [0, \pi] \tag{9}$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{10}$$

Do Facto anterior resulta imediatamente que, se $\lambda \leq 0$, o problema homogéneo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, \pi] \tag{11}$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{12}$$

só tem a solução trivial (nota: o mesmo se concluiria ensaiando as condições de fronteira na solução geral $y(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$ ou $y(x) = c_1 + c_2 x$) e portanto, se $f \geq 0$, a solução de (9)-(12) satisfaz $y \leq 0$.

Exemplo. Para o problema

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \tag{P_λ}$$

onde λ é um parâmetro real, é um exercício simples reconhecer que estamos nas condições de existência de solução única se λ não é quadrado de um inteiro positivo, isto é, $\lambda \neq n^2$ para $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se λ é também positivo, podemos tomar $\varphi(t) = \sin \sqrt{\lambda} t$, $\psi(t) = \sin \sqrt{\lambda}(\pi - t)$, e a função de Green vem dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)} \sin \sqrt{\lambda} t \sin \sqrt{\lambda}(\pi - x), & \text{se } 0 \leq t \leq x \leq \pi \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)} \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda}(\pi - t), & \text{se } 0 \leq x \leq t \leq \pi \end{cases} \tag{13}$$

Obtemos então uma conclusão interessante, que estende o facto 76 de um modo mais subtil: *Se* $0 < \lambda < 1$ *e* $f \geq 0$, *para a solução de* (P_λ) *tem-se* $y \leq 0$! Isto porque para tais λ se verifica imediatamente que $G(x,t) \leq 0\ \forall (x,t)$.

Exercícios: 1) Estudar, em função de λ, a existência de soluções não triviais do problema homogéneo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

2) Sob que condições é solúvel o problema

$$y'' + n^2 y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$?

3) Determinar os valores positivos de a tais que o problema

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0,\ \ y(a) = 0$$

não tem solução.

4) Determinar a função de Green para o problema (P_λ) no caso $\lambda \leq 0$.

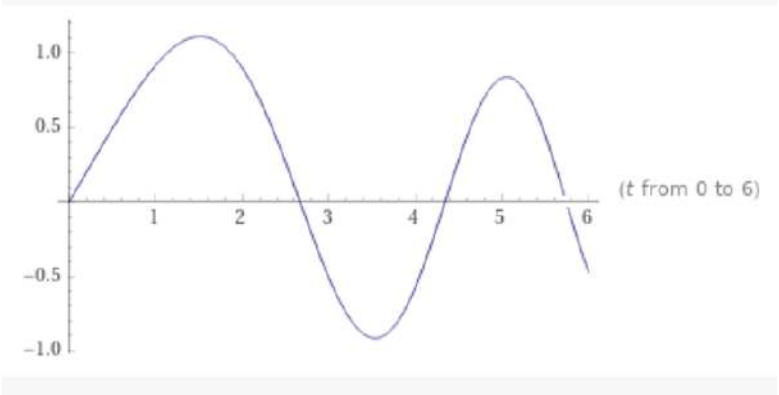
5) (a) A figura esquematiza o gráfico da solução $y_0(t)$ do problema de valores iniciais

$$y'' + t\,y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

obtido com o Wolframalpha. De acordo com o mesmo programa, y_0 tem uma sucessão de zeros $0 < z_1 < z_2 < z_3 < \cdots$, sendo

$$z_1 = 2.666..., \;\; z_2 = 4.342... \;\; z_3 = 5.741, \cdots$$

.



Qual dos seguintes problemas de valores fronteira tem solução para qualquer função contínua f que figura no segundo membro? Que há a dizer quanto ao outro problema?

$$y'' + t\,y = f(t), \quad y(0) = 0, \;\; y(z_2) = 0$$

$$y'' + t\,y = f(t), \quad y(0) = 0, \;\; y(2) = 0$$

(b) Verificar que a solução do problema

$$z'' - t\,z = 5t, \;\; t \in [0,1], \quad z(0) = 0, \;\; z(1) = 0$$

satisfaz

$$-5 \leq z(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

SUGESTÃO: Para (a) observar que o problema homogéneo correspondente ao primeiro problema tem a solução não nula cujo gráfico é dado; no 2º problema isto não sucede porque qualquer solução do problema homogéneo que se anula em $t = 0$ é múltipla da que está representada no gráfico (pelo teorema de existência e unicidade), logo só se anula em $t = 2$ se for identicamente nula.

Para (b) observar que a desigualdade da direita decorre imediatamente do Facto 76. A da esquerda obtém-se diretamente da equação diferencial: seja t^* o ponto de $[0,1]$ onde $z(t)$ atinge o seu mínimo; então, como $z''(t^*) \geq 0$, vem $-t^* z(t^*) \leq 5t^*$.

18.2 UM EXEMPLO DE PROBLEMA NÃO LINEAR MUITO SIMPLES

Vamos agora utilizar a função de Green para ilustrar a existência de solução para o problema não linear

$$y'' + a(x)y = \varepsilon g(x,y), \quad x \in [0,l] \tag{14}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{15}$$

onde ε é um parâmetro real e $g : [0,l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e Lipschitz em relação à segunda variável: existe $L > 0$ tal que

$$|g(x,u) - g(x,v)| \leq L|u - v| \quad \forall x \in [0,l], \;\; u, v \in \mathbb{R}. \tag{Lip}$$

Facto 77. *Admitamos (Lip) e também que $a(x)$ é tal que (5)-(4) só tem a solução trivial ($y \equiv 0$). Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ o problema (14)-(15) tem solução única.*

Demonstração: Graças à hipótese sobre a função a (o problema linear homogéneo subjacente só possui a solução trivial) podemos invocar a existência da função de Green G e, com base na expressão (7) que obtivemos na secção anterior, afirmar que (14)-(15) é equivalente à equação integral

$$y(x) = \varepsilon \int_0^l G(x,t) g(t, y(t))\, dt, \quad x \in [0,l] \tag{int}$$

ou, de modo mais abstracto,

$$y = \varepsilon T(y) \tag{int*}$$

onde $T : C[0,l] \to C[0,l]$ é o operador (não linear) definido por

$$(T(y))(x) = \int_0^l G(x,t) g(t, y(t))\, dt, \quad y \in C[0,l].$$

Ora, se u, $v \in C[0,l]$ facilmente calculamos

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\int_0^l G(x,t)(f(t,u(t)) - f(t,v(t)))\, dt \leq$$

$$\int_0^l |G(x,t)| L |u(t) - v(t)|\, dt.$$

Ponhamos $M = \max_{0 \leq x,t \leq l} G(x,t)$ e representemos por $\|\cdot\|_\infty$, como habitualmente, a norma do máximo em espaços de funções contínuas. Tomando o máximo em x na desigualdade precedente obtemos

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq ML \|u - v\|_\infty.$$

Assim, o operador εT é uma contração em $C[0,l]$ se $\varepsilon < \varepsilon_0$, onde $\varepsilon_0 = 1/(ML)$. Da formulação do problema na forma $(int*)$ resulta então, invocando o teorema de ponto fixo para as contrações, que a solução existe e é única.

Exercícios: 1) Qual é a solução de

$$y'' + y = e^y - 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,?$$

2) Mostrar que

$$y'' + y = y^2 + 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

não tem solução.

3) Adaptando o argumento do Facto anterior, dar um majorante para $|\mu|$ de tal modo que o problema

$$y'' + \lambda y = \mu \arctan y + 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

onde $0 \leq \lambda < 1$, tenha solução. (O majorante dependerá de λ.)

Resolução do caso $\lambda = 0$: Considere-se a função de Green do problema

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \ \ y(1) = 0 :$$

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & \text{se } 0 \leq t \leq x \leq l \\ t(x-1), & \text{se } 0 \leq x \leq t \leq l. \end{cases} \tag{16}$$

Então o problema proposto (com $\lambda = 0$) é equivalente à equação integral

$$y(x) = \mu \int_0^1 G(x,t)((\arctan y(t)) + 1)\, dt, \quad x \in [0,1].$$

Designando $T : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador definido por

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,t)((\arctan u(t)) + 1)\, dt$$

a equação anterior lê-se como o problema de ponto fixo

$$y = \mu T(y).$$

Ora, como $\max |G| = 1/4$ e arctan é uma função com constante de Lipschitz igual a 1, facilmente obtemos, com uma estimativa rápida em que o integral em $[0,1]$ fica majorado pelo valor máximo da integranda

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|u - v\|_\infty.$$

Portanto o operador μT é contração se $|\mu| < 4$ e nessa condição o problema tem solução única.

Vamos observar, no entanto, que esta estimativa pode ser melhorada procedendo de modo mais cuidadoso:

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |G(x,t)| \|u - v\|_\infty \, dt$$

Ora, imediatamente se calcula: $\int_0^1 |G(x,t)|\, dt = \frac{1}{2}(x - x^2)$. Assim,

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u - v\|_\infty$$

de onde concluímos que na verdade o problema tem solução única se $|\mu| < 8$.

4) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada, digamos: existem m, $M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq g(s) \leq M \ \forall s \in \mathbb{R}$. Mostrar que, se f é contínua em $[0,\pi]$ e o problema

$$y'' + y + g(y) = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tem uma solução $y(x)$, então

$$2m \leq \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \leq 2M.$$

19

O PROBLEMA DE VALORES INICIAIS REVISITADO

No capítulo anterior vimos como o estudo de certas equações integrais, interpretadas como problemas de ponto fixo, permite obter existência (e unicidade) de soluções de problemas de valores fronteira. Vamos agora rever o teorema de existência e unicidade para o PVI (problema de valores iniciais) com recurso a uma equação integral. Comecemos por estudar a equação integral simples

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)g(t,u(t))\,dt \tag{17}$$

onde $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Note-se que, ao contrário das equações integrais encontradas no final do capítulo anterior, o extremo do integral não é uma constante, mas coincide com a variável independente da função incógnita u.

Exemplos: 1) Se $K \equiv 1$, (17) é equivalente ao problema de valor inicial de primeira ordem

$$u' = g(x,u), \quad u(a) = 0.$$

2) Observemos que o PVI de 2ª ordem

$$u'' = f(x), \quad u(a) = 0. \quad u'(a) = 0$$

tem a solução que se obtém quando se utiliza a fórmula para encontrar uma solução particular

$$u(x) = (\int_a^x f(t)\psi(t)\,dt)\varphi(x) - (\int_a^x f(t)\varphi(t)\,dt)\psi(x)$$

onde se usou a base de soluções de $y'' = 0$: $\varphi(x) = x - a$ e $\psi(x) = 1$, que tem wronskiano igual a -1.

Portanto, com $K(x,t) = x - t$, (17) é equivalente ao problema de valor inicial de segunda ordem

$$u'' = g(x,u), \quad u(a) = 0, \quad u'(a) = 0.$$

3) O problema de 2ª ordem

$$u'' + u = f(x), \quad u(0) = 0. \quad u'(0) = 0$$

tem a solução

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$$

como imediatamente se conclui através da fórmula de uma solução particular. Assim, o problema não linear

$$u'' + u = g(x,u), \quad u(0) = 0. \quad u'(0) = 0$$

é equivalente a (17) com $K(x,t) = \sin(x-t)$.

Facto 78. *Suponhamos que g é contínua nas duas variáveis e Lipschitziana relativamente à segunda, isto é: existe $L > 0$ tal que*

$$|g(x,u) - g(x,v)| \leq L|u-v| \quad \forall x \in [a,b], \ \ u,v \in \mathbb{R}. \tag{Lip}$$

Então (17) tem solução única em $[a,b]$.

Demonstração: Introduzamos em $C[a,b]$ a norma (aqui representada simplesmente pelo símbolo $\|\cdot\|$)

$$\|u\| = \sup_{x\in[a,b]} e^{-\lambda(x-a)}|u(x)|$$

onde λ é um número positivo que será fixado adiante. (É muito simples ver que se trata de uma norma e que é equivalente à norma usual do máximo, no sentido em que as sucessões convergentes para uma das duas normas são também convergentes para a outra, já que

$$e^{-\lambda(b-a)}\|u\|_\infty \leq \|u\| \leq \|u\|_\infty \quad \forall u \in C[a,b]).$$

Consideremos o operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ tal que Tu é a função dada pelo 2º membro de (17). Então, se u, $v \in C[a,b]$, tem-se, para $x \in [a,b]$:

$$e^{-\lambda(x-a)}|Tu\,(x) - Tv\,(x)| \leq$$

$$e^{-\lambda(x-a)}\int_a^x K(x,t)|g(t,u(t)) - g(t,v(t))|\,dt \leq e^{-\lambda(x-a)}ML\int_a^x |u(t)-v(t)|\,dt$$

onde $M = \max_{a\leq x,t\leq b}|K(x,t)|$. Como, por definição da norma introduzida, se tem

$$e^{-\lambda(t-a)}|u(t)-v(t)| \leq \|u-v\|, \quad \forall t \in [a,b]$$

concluímos

$$e^{-\lambda(x-a)}|(Tu\,(x) - Tv\,(x)| \leq$$

$$e^{-\lambda(x-a)}ML\|u-v\|\int_a^x e^{\lambda(t-a)}\,dt = ML\frac{1-e^{-\lambda(x-a)}}{\lambda}\|u-v\|.$$

Assim, basta escolher $\lambda > ML$ para que T seja uma contração relativamnte à norma $\|\cdot\|$, o que perrmite concluir.

Vamos agora utilizar o método exposto para estudar a *dependência contínua* das soluções de uma equação diferencial em relação aos dados iniciais e a eventuais parâmetros presentes na equação. Comecemos por ilustrar a questão com dois exemplos:

Exemplo: Consideremos o PVI

$$u' = g(x,u,\mu), \quad x \in [0,l] \tag{18}$$

$$u(0) = \alpha \tag{19}$$

onde o 2º membro da equação é uma função contínua $g : [0.l] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$. A variável k-dimensional μ e o valor inicial α constituem os *parâmetros* presentes na equação, de modo que as soluções são funções de x, α e μ. Imediatamente reconhecemos que este problema é equivalente à equação integral

$$u(x) = \alpha + \int_0^x g(t, u(t), \mu)\, dt.$$

Como a solução depende de α e μ é mais rigoroso escrever

$$u(x, \alpha, \mu) = \alpha + \int_0^x g(t, u(t, \alpha, \mu), \mu)\, dt.$$

Exemplo: O PVI

$$u'' = g(x, u, \mu), \quad x \in [0, l] \tag{20}$$
$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta \tag{21}$$

(onde g é como no exemplo precedente) reduz-se, introduzindo a nova função incógnita $v(x)$ através de

$$u(x) = \alpha + \beta x + v(x),$$

a este outro:

$$v'' = g(x, \alpha + \beta x + v, \mu), \quad x \in [0, l] \tag{22}$$
$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \tag{23}$$

o qual, por sua vez, é equivalente à equação integral

$$v(x) = \int_0^x (x - t) g(t, \alpha + \beta t + v(t), \mu)\, dt.$$

Tal como no exemplo anterior, é mais apropriado escrever

$$v(x, \alpha, \beta, \mu) = \int_0^x (x - t) g(t, \alpha + \beta t + v(t, \alpha, \beta, \mu), \mu)\, dt.$$

Alternativamente, se quiséssemos manter a incógnita inicial u, consideraríamos a equação

$$u(x, \alpha, \beta, \mu) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x - t) g(t, u(t, \alpha, \beta, \mu), \mu)\, dt.$$

Exercício: O PVI de 2ª ordem

$$u'' = x^2 u' + 3xu, \quad u(0) = 1, \;\; u'(0) = 0$$

é equivalente à equação integral

$$u(x) = 1 + \int_0^x (x + t) u(t)\, dt.$$

Com motivação nestes exemplos, propomo-nos considerar a seguinte equação integral geral, com parâmetros

$$y(x,\lambda,\mu) = \phi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)g(t,y(t,\lambda,\mu),\mu)\,dt \tag{24}$$

onde todas as funções que surgem se supõem contínuas; a variável independente x percorre um intervalo fixado $[0,l]$ e há dependência de parâmetros $\lambda \in \mathbb{R}^k$ (por via da função ϕ) e $\mu \in \mathbb{R}^p$ (pela presença na expressão de g).

Mais precisamente, temos então:

Teorema 6. *Seja $\phi : [0,l] \times A \to \mathbb{R}$ contínua, em que $A \subset \mathbb{R}^k$ é compacto; seja $g : [0,l] \times \mathbb{R} \times B$ contínua, onde B é um compacto de $\mathbb{R}^p$; e suponha-se que g é uniformemente Lipschitziana na 2ª variável, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$|g(x,u,\mu) - g(x,v,\mu)| \leq L|u-v| \qquad \forall x \in [0,l],\ \ u,v \in \mathbb{R}, \mu \in B. \tag{Lipuni}$$

Então a equação (24) tem uma solução única que é contínua em $[0,l] \times A \times B$.

Demonstração: A demonstração imita a do Facto anterior mas utiliza um espaço de funções diferente. Seja $X = C([0,l] \times A \times B)$ o espaço de Banach das funções contínuas em $[0,l] \times A \times B$ com a norma do máximo. Introduzamos em X a norma equivalente

$$\|u\| = \sup_{x\in[0,l],\,\lambda\in A,\,\mu\in B} e^{-kx}|u(x,\lambda,\mu)|$$

onde k é um número positivo a escolher.

Define-se um operador $T : X \to X$ designando por $(Ty)(x,\lambda,\mu)$ o 2º membro de (24), para cada $y \in X$.

Tal como na demonstração do Facto 78 e com o mesmo significado de M vem então

$$\|Tu - Tv\| \leq ML\frac{1}{k}\|u-v\|.$$

Escolhendo $k > ML$, T é contração em X e daí resulta a conclusão.

Observação: O significado deste teorema é que a solução da equação (24) varia continuamente com os parâmetros. O mesmo se aplica aos problemas de valores iniciais redutíveis a uma equação integral deste tipo. Por outro lado, é fácil reconhecer que vale uma versão "vectorial" do teorema, com $\mathbb{R}$ substituído por $\mathbb{R}^n$; ϕ e g tomam então valores em $\mathbb{R}^n$ e o mesmo sucede com a solução y. A demonstração é a mesma, com o sinal de valor absoluto a significar norma euclidiana.

Exercício: Seja $y(t) = y(t,\lambda,\beta)$ a solução do problema de valores iniciais com parâmetros

$$y'' + \lambda y + (1-\lambda)\frac{y}{1+y^2} = \cos(2t), \quad y(0) = -1/3,\ y'(0) = \beta$$

que, como sabemos, está bem definida e é contínua para todos os valores reais das suas variáveis. Determinar

$$\lim_{(\lambda,\beta)\to(1,0)} y(t,\lambda,\beta)$$

para $t = 0.5$ e $t = 0.9$ e concluir que $\exists \varepsilon > 0$ tal que, se $\|(\lambda, \beta) - (1, 0)\| < \varepsilon$, a função $t \mapsto y(t, \lambda, \beta)$ tem uma raiz em $[0.5, 0.9]$. (Para abreviar cálculos, observar que $y'' + y = \cos(2t)$ tem uma solução que é múltiplo de $\cos(2t)$.)

Vejamos, finalmente, o aspecto que assume a continuidade das soluções relativamente aos parâmetros no caso geral do PVI para uma equação diferencial ordinária (sistema de equações de 1ª ordem)

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y(0) = \alpha \tag{25}$$

onde, para fixar ideias e simplificar a escrita, tomamos $x = 0$ como "instante inicial". Podemos querer escrever (25) na forma mais explícita (com o símbolo y' a representar a derivação em ordem à 1ª variável)

$$y'(x, \alpha, \lambda) = f(x, y(x, \alpha, \lambda), \lambda), \quad y(0, \alpha, \lambda) = \alpha.$$

Faremos a seguinte hipótese, habitual no tratamento deste problema:

(H) $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua num aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, e é localmente Lipschitziana em relação à 2ª variável, isto é: para cada ponto $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega$ há uma vizinhança V desse ponto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ e um número $L > 0$ tais que, se (x, y_1, λ), $(x, y_2, \lambda) \in V$ tem-se

$$|f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

O símbolo $y(x, \alpha, \lambda)$ pressupõe que $x \mapsto y(x, \alpha, \lambda)$ é uma solução de (25) definida em algum intervalo não reduzido a um ponto, ao qual pertence 0. O nosso objectivo é provar que $y(x, \alpha, \lambda)$ é função contínua do conjunto das suas variáveis, num domínio conveniente onde esteja bem definida. O enunciado útil a este respeito (e que resolve a questão porque a continuidade é uma propriedade local) é o seguinte.

Teorema 3. *Suponhamos que se verifica (H), e que, para certos $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ está bem definida a solução*

$$x \mapsto y(x, \alpha_0, \lambda_0) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

no intervalo compacto $[a, b] \ni 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in [a, b]$, a função $y(x, \alpha, \lambda)$ está definida e é contínua nas três variáveis.

Demonstração: Por hipótese, o compacto

$$\{(x, y(x, \alpha_0, \lambda_0), \lambda_0) \,|\, x \in [a, b]\}$$

está contido em Ω. Com um argumento de compacidade semelhante aos que estudámos no capítulo 12, facilmente concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{(x, z, \mu) | x \in [a, b],\ |z - y(x, \alpha_0, \lambda_0)| \leq \varepsilon,\ |\mu - \lambda_0| \leq \varepsilon\} \subset \Omega.$$

O primeiro membro desta inclusão é compacto, e por isso f é Lipschitziana relativamente à segunda variável neste conjunto (Cap. 12). Representemos por $B(P, \rho)$ a bola fechada de centro P e raio ρ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^p$). Recordemos (ver 11.1) que a projeção $P_{B(P,\rho)} : \mathbb{R}^n \to B(P, \rho)$ tem

a propriedade $|P_{B(P,\rho)}(z) - P_{B(P,\rho)}(w)| \leq |z - w|$, $\forall z,\, w \in \mathbb{R}^n$. Posto isto, consideremos a equação diferencial modificada

$$z' = f(x, P_{B(y(x,\alpha_0,\lambda_0),\varepsilon)}(z), \lambda) \tag{26}$$

Em virtude das afirmações acima, o 2º membro desta equação, que está bem definido em $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times B(\lambda_0, \varepsilon)$, é Lipschitziano na variável de $\mathbb{R}^n$. Também é fácil ver que se trata de um campo contínuo em (x, z, λ), usando ainda argumentos de compacidade e o último exercício da secção 12.1. Considerando a condição inicial $z(0) = \alpha$ em (26), obtemos a equação integral equivalente

$$z(x, \alpha, \lambda) = \alpha + \int_0^x f(t, P_{B(y(t,\alpha_0,\lambda_0),\varepsilon)} z(t, \alpha, \lambda), \lambda)\, dt$$

Em virtude do Teorema 6 este problema tem uma solução $z = z(x, \alpha, \lambda)$ (única) no espaço $C([a,b] \times B(\alpha_0, \varepsilon) \times B(\lambda_0, \varepsilon))$. Em particular, da unicidade resulta

$$z(x, \alpha_0, \lambda_0) = y(x, \alpha_0, \lambda_0). \tag{$*$}$$

Pela continuidade, por compacidade, e invocando (*), existe $\delta > 0$ tal que, se $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in [a,b]$, tem-se

$$z(x, \alpha, \lambda) \in B(y(x, \alpha_0, \lambda_0), \varepsilon).$$

Logo, para tais valores de α, λ e x,

$$z(x, \alpha, \lambda) = y(x, \alpha, \lambda)$$

o que conclui a demonstração.

Observação: Em particular, o teorema afirma que, dada uma solução de (25) em $[a,b]$, para pequenas variações de valores iniciais e de parâmetros obtém-se uma solução cujo domínio de definição inclui *o mesmo* intervalo.

20

PROBLEMAS DE FRONTEIRA E MÉTODO DE TIRO

20.1 NÃO LINEARIDADE LIMITADA

Vamos ilustrar neste capítulo o argumento conhecido como *método de tiro*, que utiliza a teoria do PVI para resolver problemas de valores fronteira.

Vamos considerar a seguinte variante não linear do problema estudado no capítulo 17:

$$y'' + a(x)y + g(y) = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{27}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{28}$$

A novidade é que o primeiro membro da equação inclui agora uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em geral não linear. Para manter o problema acessível com as técnicas que estudámos, apenas consideraremos funções localmente Lipschitzianas e limitadas.

Facto 79. *Sejam $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ contínua, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana e limitada. Suponhamos que o problema linear homogéneo (5)-(4) admite apenas a solução trivial $y \equiv 0$. Então o problema (27)-(28) tem pelo menos uma solução.*

Demonstração: Consideremos o PVI

$$y'' + a(x)y + g(y) = f(x), \quad x \in [0, l] \tag{29}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \tag{30}$$

Como sabemos, este problema tem solução única $y(x, \alpha)$ em $[0, l]$, e a solução depende continuamente de (x, α). Propomo-nos mostrar que existe α tal que

$$y(l, \alpha) = 0. \tag{$*$}$$

Seja φ a solução do PVI

$$\varphi'' + a(x)\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Em virtude da hipótese, $\varphi(l) \neq 0$. Decomponhamos a solução de (29)-(30):

$$y(x, \alpha) = \alpha\varphi(x) + z(x, \alpha) \tag{a}$$

de modo que fica definida a função z que satisfaz

$$z'' + a(x)z + g(\alpha\varphi(x) + z) = f(x), \quad z(0) = z'(0) = 0. \tag{b}$$

Facilmente se reconhece (recordar a fórmula de variação das constantes) que z é dada implicitamente por

$$z(x,\alpha) = \varphi(x)\int_0^x \psi(t)(-f(t)+g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt+$$
$$+\psi(x)\int_0^x \varphi(t)(f(t)-g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt \qquad (c)$$

onde ψ é outra solução não trivial de (5) tal que $\psi(l)=0$ e normalizada de modo que o Wronskiano de φ, ψ seja igual a 1. Em particular, $z(l,\alpha)$ é uma função contínua de α, e limitada. Atendendo a (a), a equação (*) fica equivalente a

$$\alpha + \int_0^l \psi(t)(-f(t)+g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt = 0.$$

Como o primeiro membro tende para $\pm\infty$ quando $\alpha \to \pm\infty$, resulta do teorema de Bolzano que existe α tal que $y(l,\alpha)=0$. A demonstração fica completa.

Por fim, vamos estudar o caso em que (5)-(28) admite uma solução não trivial φ. Mas limitamo-nos a considerar o caso em que os únicos zeros de φ são os extremos do intervalo $[0,l]$.

Exercício: Suponha-se que $m \le g(s) \le M\ \forall s \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(x) > 0\ \forall x \in]0,l[$. Então, se (27)-(28) tem uma solução $y(x)$, tem-se:

$$mI \le \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx \le MI$$

onde $I = \int_0^l \varphi(x)\,dx$. (Comparar com o exercício 4 de 17.2)

O próximo resultado pode ser visto como um "recíproco" (muito) parcial do enunciado do exercício precedente.

Facto 80. *Sejam $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ contínua, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitziana e limitada; ponhamos*

$$g_+ = \liminf_{u\to+\infty} g(u), \quad g_- = \limsup_{u\to-\infty} g(u).$$

Suponhamos que o problema linear homogéneo (5)-(4) admite uma a solução φ com $\varphi(x) > 0\ \forall x \in]0,l[$. Então, se

$$g_- I < \int_0^l f(x)\varphi(x)\,dx < g_+ I \qquad (**)$$

onde $I = \int_0^l \varphi(x)\,dx$, o problema (27)-(28) tem pelo menos uma solução.

Demonstração: O argumento começa como na demonstração do facto anterior: pretende-se resolver a equação $(*)$ e usamos a decomposição (a) que conduz a (b) e (c). No entanto, a função φ anula-se agora em 0 e l; a função ψ é por isso escolhida de modo que $\psi(l) \neq 0$ para que $\{\varphi, \psi\}$ constitua uma base de soluções da equação linear homogénea. No caso presente, $(*)$ é equivalente a $z(l,\alpha)=0$, e portanto a

$$\int_0^l \varphi(t)(f(t)-g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)))\,dt = 0. \qquad (*')$$

Se mostrarmos que

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} \int_0^l g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt \geq g_+ I,$$

$$\limsup_{\alpha\to-\infty} \int_0^l g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt \leq g_- I,$$

então, da hipótese $(**)$ resulta que existem $\alpha_1 < \alpha_2$ tais que

$$\int_0^l g(\alpha_1\varphi(t)+z(t,\alpha_1))\varphi(t)\,dt < \int_0^l \varphi(t)f(t)\,dt <$$

$$\int_0^l g(\alpha_2\varphi(t)+z(t,\alpha_2))\varphi(t)\,dt$$

e o teorema de Bolzano permite concluir que $(*')$ tem pelo menos uma solução.

Façamos então a verificação referente ao caso de g_+ (o caso de g_- é análogo).

Para cada $\delta \in]0,l[$, decomponhamos o integral na forma

$$\int_0^l g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt = A_\delta + B_\delta \qquad (d)$$

onde

$$A_\delta = \int_\delta^{l-\delta} g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha))\varphi(t)\,dt$$

e B_δ é o integral com a mesma função integranda no domínio $[0,\delta]\cup[l-\delta,l]$.

Da limitação de g, admitida por hipótese, e da expressão (c) para z resulta que podemos fixar uma constante $M>0$ que majora z e também a referida integranda:

$$|z(t,\alpha)| \leq M, \quad |g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha))\varphi(t)| \leq M \ \ \forall t\in[0,l],\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Dado $\varepsilon>0$, por ser $|B_\delta| \leq 2M\delta$, para $\delta>0$ suficientemente pequeno tem-se

$$|B_\delta| \leq \varepsilon I, \quad (g_+-\varepsilon)\int_\delta^{l-\delta} \varphi(x)\,dx \geq (g_+-2\varepsilon)I. \qquad (e)$$

Fixemos um tal δ e seja $m_\delta = \min_{x\in[\delta,l-\delta]}\varphi(x)$. Por definição de lim inf existe $A>0$ tal que

$$s \geq A \Longrightarrow g(s) \geq g_+ - \varepsilon.$$

Então

$$\alpha \geq \frac{A+M}{m_\delta} \Longrightarrow g(\alpha\varphi(t)+z(t,\alpha)) \geq g_+-\varepsilon \quad \forall t\in[\delta,l-\delta]. \qquad (f)$$

Resulta que, se $\alpha \geq \frac{A+M}{m_\delta}$, de acordo com (d)-(e)-(f),

$$\int_0^l g(\alpha\varphi(x)+z(x,\alpha))\varphi(x) \geq (g-2\varepsilon)I - \varepsilon I = (g_+-3\varepsilon)I$$

que é o que pretendíamos.

Observação: Nas condições do enunciado tem-se obviamente $g_- < g_+$. Facilmente se reconhece que vale uma outra versão do teorema em que, em $(**)$, $<$ passa a $>$ e os papéis de lim inf e lim sup são trocados.

Exercícios. 1) Mostrar que, se $\lambda < 1$, o problema

$$u'' + \lambda u + \frac{u}{1+u^2} = e^x, \quad u(0) = 0, \;\; u(\pi) = 0$$

tem uma solução que é negativa em $]0, \pi[$.

2) Indicar um intervalo de valores de c tais que o problema

$$u'' + u + \arctan u = c\, e^x, \quad u(0) = 0, \;\; u(\pi) = 0$$

admita pelo menos uma solução.

20.2 SUB E SOBRE-SOLUÇÕES EM PROBLEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Nesta secção voltaremos a utilizar o método de tiro para apresentar a técnica das *sub e sobre-soluções* para problemas de valores fronteira de segunda ordem, num contexto elementar. Concretizando, vamos estudar o problema não linear

$$y'' = f(x, y(x)), \quad x \in [0, l] \tag{31}$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{32}$$

onde $f : [0, l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. (O leitor que prosseguir estudos nesta área verá que a propriedade de Lipschitz é na verdade dispensável.)

Diremos que $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}$ é uma subsolução de (31-32) se é C^2 e satisfaz as desigualdades

$$\alpha''(x) \geq f(x, \alpha(x)), \quad \forall x \in [0, l], \quad \alpha(0) \leq 0, \quad \alpha(l) \leq 0. \tag{33}$$

E diremos que $\beta : [0, l] \to \mathbb{R}$ é sobre-solução de (31-32) se é C^2 e satisfaz as desigualdades

$$\beta''(x) \leq f(x, \beta(x)), \quad \forall x \in [0, l], \quad \beta(0) \geq 0, \quad \beta(l) \geq 0. \tag{34}$$

Facto 81. *Suponhamos que (31-32) tem sub-solução α e sobre-solução β tais que $\alpha \leq \beta$ em $[0, l]$. Então (31-32) tem uma solução $y(x)$ tal que*

$$\alpha(x) \leq y(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [0, l]. \tag{$*$}$$

Demonstração: Comecemos por modificar o problema. Definamos a função $F : [0, l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = f(x, \min(\max(y, \alpha(x)), \beta(x))) +$$
$$+ \arctan(y - \beta(x))_+ - \arctan(\alpha(x) - y)_+$$

(onde $t_+ = \max(t, 0)$). Recordando que max, min e $g(t) = t_+$ são exprimíveis como combinações lineares de funções valor absoluto, imediatamente se reconhece que F é contínua e localmente Lipschitz em relação à segunda variável. Consideremos então o problema modificado

$$y'' = F(t, y), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \tag{P}$$

Como o conjunto

$$E = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq l,\ \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

é compacto, f é limitada em E e portanto F é limitada em $[0,l] \times \mathbb{R}$. Em virtude do Facto 79, (P) admite pelo menos uma solução $y(x)$. Iremos mostrar que esta solução satisfaz (*), o que implica $F(x,y(x)) = f(x,y(x))$, mostrando que y resolve o problema original e portanto conclui a demonstração.

Vamos verificar a desigualdade da direita; a outra demonstra-se analogamente. Raciocinamos por absurdo: se a desigualdade não vale para todo o $x \in [0,l]$, e tendo em conta que $y(0) = 0 \leq \beta(0)$, $y(l) = 0 \leq \beta(l)$, conclui-se que existe $[a,b] \subset [0,l]$ tal que $y(x) - \beta(x) > 0 \ \ \forall x \in]a,b[$, $y(a) - \beta(a) = 0$, $y(b) - \beta(b) = 0$. Então $y - \beta$ atinge um máximo positivo num ponto $t_0 \in]a,b[$. Resulta $\min(\max(y(t_0), \alpha(t_0)), \beta(t_0)) = \beta(t_0)$, $y''(t_0) \leq \beta''(t_0)$ e

$$f(t_0, \beta(t_0)) + \arctan(y(t_0) - \beta(t_0)) =$$

$$y''(t_0) \leq \beta''(t_0) \leq f(t_0, \beta(t_0)),$$

uma contradição.

Exemplo: Se f é contínua em $[0,l]$ e $f(0) < 0$, $f(l) > 0$, então o problema

$$y'' = f(y), \quad y(0) = 0 = y(l)$$

tem pelo menos uma solução $y(x)$ tal que $a \leq y(x) \leq b \ \forall x \in [0,l]$. Na verdade, as constantes a e b são, neste caso, sub-solução e sobre-solução, respetivamente.

Com uma modificação simples do argumento da demonstração anterior obtemos a seguinte variante do resultado:

Facto 82. *Suponhamos que (31-32) tem sub-solução α e que f é limitada em $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq l,\ \ \alpha(x) \leq y\}$. Então (31-32) tem uma solução $y(x)$ tal que*

$$\alpha(x) \leq y(x) \quad \forall x \in [0,l]. \tag{$*$}$$

E, obviamente, vale um enunciado semelhante onde se parte da existência de sobre-solução. O leitor facilmente formulará a afirmação e a respectiva demonstração.

Exercícios: 1. Considere-se o problema

$$y'' + y = g(y), \quad y(0) = 0 = y(\pi)$$

onde g é contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo: (a) existe um intervalo $[0,\varepsilon]$ onde $g \leq 0$; (b) existe $c > 0$ tal que $g(c) \geq c$. Mostrar que o problema acima tem uma solução $y(x)$ tal que $y(x) > 0 \ \forall x \in]0,\pi[$, $y'(0) > 0$ e $y'(\pi) < 0$. SUGESTÃO: há uma sub-solução que é um múltiplo de $\sin x$.

2. Considere-se o problema

$$y'' + \lambda y = g(y), \quad y(0) = 0 = y(\pi)$$

onde $1 < \lambda \leq 2$, e: (a) existe um intervalo $[-\varepsilon,\varepsilon]$ onde $g \leq 0$; (b) existe $c > 0$ tal que $g(c) \geq \lambda c$. Mostrar que o problema admite uma solução com $y'(0) > 0$.

3. Mostrar que o problema

$$y'' = -\frac{2y}{1+y^2}, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

tem uma solução y tal que $y(x) > 0\ \forall x \in [0, \pi]$. SUGESTÃO: há sub-soluções que são múltiplos de $\sin x$.

4. Mostrar que o problema

$$y'' = \sqrt{y^2+1} - y - 2, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$$

tem uma solução y tal que $y(x) > 0\ \forall x \in [0, \pi]$.

5. Seja $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, localmente Lipschitz, e tal que

$$f(x,s) \leq -2 \quad \forall (x,s) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{4}].$$

Mostrar que o problema

$$y'' = f(x,y), \quad x \in [0,1],\ \ y(0) = 0 = y(1)$$

tem uma solução $y(x)$ tal que $y(x) \geq x(1-x)$ em qualquer dos seguintes casos: (a) f é limitada em $[0,1] \times \mathbb{R}_+$; (b) $\exists c > \frac{1}{4}$ tal que $f(x,c) \geq 0\ \forall x \in [0,1]$.

21

NOTA SOBRE O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Neste curto capítulo recordamos o caso mais simples do teorema da função implícita (de carácter local), exemplificamos o seu uso em certos problemas de extremo, e consideramos uma sua versão global. Usaremos a notação F_x, F_y para representar as derivadas parciais de uma função $F(x,y)$ em ordem, respetivamente, à primeira e à segunda variável.

Facto 83. *(Teorema da função implícita) Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}$ uma função C^1, $(x_0, y_0) \in U$ tais que*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existem intervalos abertos $I \ni x_0$, $J \ni y_0$ e uma função $g : I \to J$ de classe C^1 tais que

$$\forall x \in I \quad (x, g(x)) \in U \quad e \quad F(x, g(x)) = 0;$$

e

$$\text{se } F(x,y) = 0 \ \ e \ \ (x,y) \in I \times J, \ \ \text{então } y = g(x).$$

É importante observar que as condições deste teorema implicam que a solução (x_0, y_0) da equação $F(x,y) = 0$ não é isolada: ela mergulha num conjunto de soluções $(x, g(x))$ que constituem um arco de curva C^1. É claro que vale um enunciado análogo em que os papeis das variáveis são permutados.

Por outro lado, o teorema fornece argumentos alternativos para resolver certos problemas de extremo, como exemplificamos a seguir.

Exemplo. Qual é o ponto de ordenada máxima da curva plana $x^4 + xy + y^4 = 0$? Notemos que o problema está bem posto: a curva não é vazia – contém, por exemplo, a origem, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e o simétrico deste. Além disso o conjunto das soluções é compacto (porquê?) e portanto a função $(x,y) \mapsto y$ atinge nele um valor máximo. Consideremos $F(x,y) = x^4 + xy + y^4$. Ora, um ponto (x_0, y_0) numa vizinhança do qual os pontos de $F(x,y) = 0$ sejam representáveis como arco de curva $(h(y), y)$ com y a variar num intervalo aberto contendo y_0, não é, obviamente, ponto de extremo para y. Logo, de acordo com o teorema da função implícita, devemos procurar o ponto de ordenada máxima entre os que satisfazem $F_x(x,y) = 0$, isto é:

$$4x^3 + y = 0 \quad \text{e} \quad x^4 + xy + y^4 = 0.$$

Os pontos que satisfazem este sistema são $(-\frac{3^{1/8}}{2}, \frac{3^{3/8}}{2})$ e o seu simétrico. O primeiro é, pois, o de ordenada máxima.

A derivada da função g a que se refere o enunciado anterior obtém-se facilmente a partir da regra de derivação da função composta. Tem-se, como sabemos

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

sempre que $F_y(x, g(x)) \neq 0$, o que sucede pelo menos se x está numa vizinhança conveniente de x_0. Na verdade, de um modo recíproco, podemos afirmar o seguinte:

Facto 84. *Seja F como no enunciado anterior e consideremos o problema de valor inicial para a equação diferencial de primeira ordem*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}, \quad y(x_0) = y_0. \tag{i}$$

Se $x \mapsto y(x)$ é solução deste problema num intervalo $I \ni x_0$, então

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Demonstração. O facto de $y(x)$ ser solução da equação diferencial em I subentende que $(x, y(x)) \in U$ e $F_y(x, y(x)) \neq 0 \; \forall x \in I$. Então imediatamente se calcula

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

pelo que $F(x, y(x))$ é constante em I; e como, pela hipótese sobre F, $F(x_0, y(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$, a conclusão é imediata.

A "função implícita" $g(x)$ pode, pois, ser procurada como solução de um problema de valor inicial. (Poderemos também referir-nos ao par (x_0, y_0) como "condição inicial" da função implícita.) Esta não é a única conexão que existe entre os dois assuntos. Também para as funções implícitas é significativa a questão de saber se admitem extensão a um domínio "maximal" em termos do que é permitido pelos dados do problema. No enunciado seguinte damos atenção a um enquadramento simples onde se obtém uma resposta positiva:

Facto 85. *Sejam I, J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $F : I \times J \to \mathbb{R}$ uma função C^1, tais que*

$$(A) \quad \forall (x, y) \in I \times J \quad F(x, y) = 0 \Longrightarrow F_y(x, y) \neq 0,$$

e, para qualquer intervalo compacto $K \subset I$ existe um intervalo compacto $L \subset J$ de modo que

$$(B) \quad x \in K, \;\; y \in J \;\; e \;\; F(x, y) = 0 \Longrightarrow y \in L.$$

Então, dado $(x_0, y_0) \in I \times J$ satisfazendo $F(x_0, y_0) = 0$, existe $g : I \to J$ de classe C^1 tal que

$$F(x, g(x)) = 0 \;\; \forall x \in I \quad e \quad g(x_0) = y_0. \tag{ii}$$

Demonstração. Pela hipótese (A) podemos aplicar o teorema da função implícita (Facto 83) para obter $a < x_0 < b$ e uma função C^1 $x \mapsto y(x) :]a, b[\to J$ tal que

$$F(x, y(x)) = 0 \ \ \forall x \in]a, b[\quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0. \tag{iii}$$

Vamos provar a seguinte aformação:

(C) Se $I_i \subset I$ $(i = 1, 2)$ são intervalos abertos contendo x_0 onde estão definidas funções C^1 $x \mapsto y_i(x)$ com a propriedade (iii), então $y_1 \equiv y_2$ em $I_1 \cap I_2$.

Demonstração de (C): Se a afirmação é falsa, existe $w \in I_1 \cap I_2$ com $y_1(w) \neq y_2(w)$. Se $w > x_0$, atendendo a (iii) vemos que existe $z \in]x_0, w[$ tal que $y_1(z) = y_2(z)$ mas $y_1 \neq y_2$ em $]z, w]$. Pela hipótese (A), $F_y(z, y_1(z)) \neq 0$ e, pelo facto 83, há um intervalo aberto $I_3 \ni z$ e outro $I_4 \ni y_1(z)$ tais que, se $x \in I_3$, a equação $f(x, y)$ só tem uma solução $y \in I_4$. Por continuidade, os pontos $y_1(x)$ e $y_2(x)$ estão em I_4 quando se escolhe $x > z$ suficientemente próximo de z, o que contradiz $y_1(x) \neq y_2(x)$. Obtém-se uma contradição análoga se $w < x_0$, e a afirmação fica provada.

Podemos agora definir um intervalo $I^* \subset I$ e uma função $g : I^* \to J$ do seguinte modo: $x \in I^*$ se existe uma função $y_1 : I_1 \to J$ com a propriedade (iii) tal que $x \in I_1$; e $g(x) = y_1(x)$. Em virtude de (C), g fica definida sem ambiguidade e satisfaz (ii). Resta mostrar que $I^* = I$, o que faremos novamente por contradição. Suponhamos então que $c = \sup I^* < \sup I$ (o caso $\inf I^* > \inf I$ é análogo). Tomemos $K = [x_0, c]$ e o correspondente intervalo L de acordo com a condição (B), e uma sucessão $x_n < c$ tal que $x_n \to c$; tem-se (passando a uma subsucessão se necessário) $y_n = g(x_n) \to \tilde{y} \in L$. Por passagem ao limite, $F(c, \tilde{y}) = 0$ e, em virtude de (A), $F_y(c, \tilde{y}) \neq 0$. O teorema da função implícita garante de novo que existem $\varepsilon > 0$ e uma função $h :]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\to J$ de classe C^1 de modo que $F(x, h(x)) = 0$ $\forall x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ e $h(c) = \tilde{y}$. Além disso, a última afirmação do Facto 83 implica que, para um índice n suficientemente grande, $h(x_n) = g(x_n)$. Tendo em conta (C) e a condição inicial (x_n, y_n) para aplicar o teorema da função implícita, obtemos que $h \equiv g$ em $[c - \varepsilon, c[$. Em particular $g(x)$, ao coincidir com uma função C^1 à esquerda de c, tem limite igual a $\tilde{y}$ quando $x \to c$. Assim, $h(x)$ prolonga $g(x)$ como solução de (ii) ao intervalo $[x_0, c + \varepsilon[$, o que contradiz a definição de c. A demonstração fica concluída.

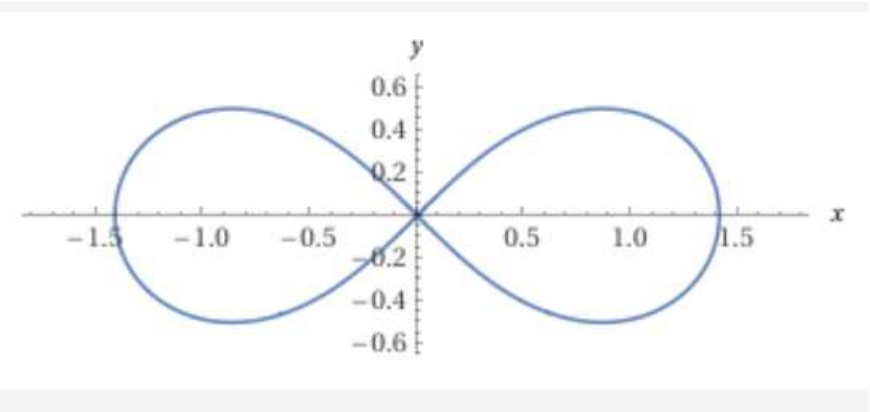
Exemplo. Por vezes, a partir da proposição precedente, é possível obter informação sobre a estrutura de uma curva de nível na vizinhança de um ponto onde o teorema da função implícita não é aplicável. É o que exemplificamos a seguir para o caso de

$$F(x, y) := ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2) = 1. \tag{C}$$

Tem-se $F(0, 0) = 1$ mas $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$. Os pontos $(1, \pm\sqrt{\sqrt{5} - 2})$ pertencem à curva de nível e numa vizinhança de cada um deles a curva admite uma representação C^1 da forma $y = y(x)$. Os únicos pontos onde uma representação deste tipo não é, em princípio, possível são os do eixo dos xx, isto é, $(0, 0)$ e $(\pm\sqrt{2}, 0)$, que são pontos onde

$$\frac{\partial F}{\partial y} = ((x + 1)^2 + (x - 1)^2 + 2y^2)2y$$

se anula.



Consideremos a restrição de $F(x.y) - 1$ ao retângulo $]0, \sqrt{2}[\times]0. + \infty[$. É então fácil de verificar que neste domínio valem as condições (A) e (B): a primeira resulta da própria escolha do domínio, que exclui $(0,0)$ e $(0.\sqrt{2})$; para a segunda, é um exercício simples mostrar que, dados $0 < a < b < \sqrt{2}$ existem $0 < c < d < +\infty$ tais que $F(x,y) = 1$ e $a \leq x \leq b$ implica $c \leq y \leq d$. Com efeito, se uma sucessão (x_n, y_n) satisfaz $F(x_n, y_n) = 1$ e $a \leq x_n \leq b$, $y_n > 0$, não pode ter-se $y_n \to 0$ nem $y_n \to +\infty$.

Conclui-se que qualquer função implícita $y = h(x)$ definida por $F(x,y) = 1$ localmente – por exemplo, a partir da condição inicial $h(1) = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ – é na verdade prolongável ao intervalo $]0, \sqrt{2}[$ como função C^1 tomando valores positivos e, necessariamente, a $[0, \sqrt{2}]$ como função contínua que se anula nos extremos.

Repare-se então que, apesar de o teorema da função implícita não ser aplicável neste caso ao ponto $(0,0)$, ainda assim pudemos concluir que qualquer vizinhança de $(0,0)$ contém pontos de (C) distintos da origem, quer no semiplano $y > 0$ (como acabemos de ver) quer no semiplano $y < 0$ (por um argumento análogo, ou simplesmente por simetria).

Observemos, no entanto (ou talvez devêssemos tê-lo feito em primeiro lugar...) que a expressão explícita de $y = h(x)$ é fácil de obter:

$$y = \sqrt{\sqrt{1 + 4x^2} - 1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Exercícios. 1) Determinar os pontos de ordenada máxima e mínima da elipse $x^2 + xy + y^2 = 27$.

2) Mostrar que os pontos de ordenada máxima e mínima da curva $x^4 + y^4 + 4x + 4y = 0$ são as (duas únicas) soluções reais da equação $y^4 + 4y - 3 = 0$.

3) Verificar que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, definida por

$$y = f(x) \iff y^5 + 2y + x + x^3 = 0$$

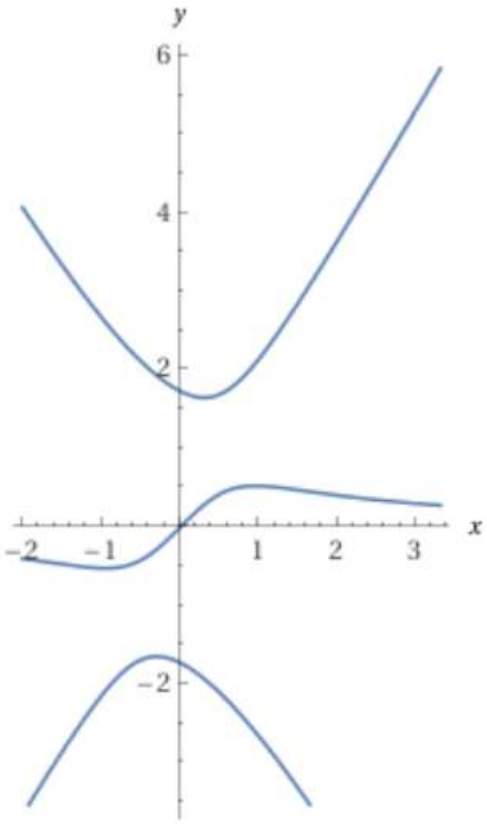
e que f é estritamente decrescente.

4) Estudar os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por $x^3 + xy + x^3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (onde a é uma constante não nula) com o objetivo de reconhecer que consistem numa união de gráficos de funções contínuas.

5) Seja a um número tal que $|a| < \sqrt{3}$. Mostrar que o conjunto de pontos do plano definido por

$$\frac{y^3}{3} - (1 + x^2)y + ax = 0$$

é união de três gráficos, disjuntos dois a dois, de funções C^∞ cujos domínios são a recta real. (A figura abaixo é um esboço correspondente ao caso em que $a = 1$.)



6) Seja $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que existe $c > 0$ de modo que $F_y(x, y) \geq c \ \forall (x, y) \in I \times \mathbb{R}$. Mostrar que se $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ satisfaz $F(x_0, y_0) = 0$, existe $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$F(x, g(x)) = 0 \ \ \forall x \in I \quad \text{e} \quad g(x_0) = y_0.$$