FRACÇÕES CONTÍNUAS

NUNO DA COSTA PEREIRA

2024

PREFÁCIO

Neste texto o autor procurou fazer uma apresentação rigorosa e sistemática de alguns dos aspectos mais relevantes da teoria das fracções contínuas, começando com definições básicas e resultados elementares para terminar com o conceito recentemente introduzido de convergência geral.

As chamadas fracções contínuas simples constituem um instrumento indispensável no estudo da aproximação de números irracionais por racionais e são habitualmente tratadas em livros sobre Teoria dos Números. No entanto, a teoria analítica geral das fracções contínuas tem sido bastante negligenciada nos livros de Análise Matemática e esta foi uma das razões que motivaram o autor a redigir o presente texto.

Para além de conduzirem a algumas das representações mais atraentes que se conhecem de várias constantes matemáticas, foram as fracções contínuas que permitiram a Lambert apresentar a primeira demonstração da irracionalidade de π e das potências de base e com expoente racional não nulo. Usando fracções contínuas é também possível obter representações de funções meromorfas não inteiras que são válidas em todo o seu domínio, o que não sucede com a correspondente representação por séries de potências pois estas têm raio de convergência finito. Foi aliás o estudo da representação de funções meromorfas por fracções contínuas que motivou a descoberta de alguns teoremas notáveis de Análise Complexa, como o teorema de Vitali sobre convergência uniforme de funções analíticas.

Embora se ouça por vezes dizer que o século XIX foi a idade do ouro das fracções contínuas, o progresso da teoria desde então está bem reflectido nas datas dos teoremas aqui apresentados.

ÍNDICE

1 - Definições e propriedades elementares 1

2 - Fracções contínuas simples 20

3 - Fracções contínuas periódicas 49

4 - O teorema de Pringsheim 59

5 - A série de Stern-Stolz de uma fracção contínua 70

6 - Domínios próprios 89

7 - Domínios próprios e fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$.....102

8 - Os teoremas da parábola e o teorema de Hillam e Thron 116

9 - C-fracções 139

10 - Desenvolvimentos de funções meromorfas 154

11 - O conceito de convergência geral 183

Apêndice - A métrica cordal 209

Bibliografia e referências 212

Lista de símbolos 213

Índice remissivo 216

1- Definições e propriedades elementares

No estudo das fracções contínuas é necessário usar funções com domínio $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e na definição destas funções usam-se as convenções habituais

$$\begin{aligned} |\infty| &= +\infty,\ a+\infty=\infty \text{ se } a \in \mathbb{C},\ a \times \infty = \infty \text{ se } a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}, \\ \frac{a}{0} &= \infty \text{ se } a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \text{ e } \frac{a}{\infty} = 0 \text{ se } a \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Para uma função $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ a continuidade num ponto $c \in \mathbb{C}_\infty$ é definida como habitualmente pela condição

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c).$$

Dadas duas sucessões de números complexos $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$, consideremos a sucessão de funções $(s_n)_{n\geq 0}$ definidas em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$s_0(z) = b_0 + z \text{ e } s_n(z) = \begin{cases} a_n/(b_n+z) & se\ \ z \neq -b_n \\ \infty & se\ z = -b_n\ e\ a_n \neq 0 \\ 0 & se\ z = -b_n\ e\ a_n = 0 \end{cases} \text{ se } n \geq 1, \quad (1.1)$$

onde a definição de $s_n(-b_n)$ quando $a_n = 0$ é adoptada de modo a que s_n permaneça contínua no ponto $-b_n$.

Definindo agora as funções S_n para cada $n \geq 0$ por

$$S_n = s_0 \circ \cdots \circ s_n, \quad (1.2)$$

temos

$$S_n(z) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots \cfrac{}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n + z}}}}$$

e por conveniência tipográfica o segundo membro desta identidade escreve-se habitualmente na forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n + z}.$$

No que se segue, e sempre que não houver ambiguidade, usaremos as notações s_n e S_n para representar as funções definidas respectivamente por (1.1) e (1.2).

Dado um inteiro $n \geq 1$, se for $a_k \neq 0$ para todo o k tal que $1 \leq k \leq n$, cada s_k é uma aplicação injectiva e contínua de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$ e o mesmo sucede

portanto com S_n. Se para algum $m \geq 0$ for $a_{m+1} = 0$ pode ver-se que S_n é constante quando $n > m$. Efectivamente, como s_{m+1} é identicamente nula tem-se então $(s_{m+1} \circ \cdots \circ s_n)(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ pelo que

$$S_n(z) = S_m(0) \quad \text{se } n > m \quad \text{e } z \in \mathbb{C}_\infty. \tag{1.3}$$

Usando uma notação introduzida por Pringsheim em 1898, a expressão

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$$

de $S_n(0)$ é representada por

$$b_0 + \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}.$$

As funções S_n dizem-se as *funções aproximantes* da *fracção contínua*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots$$

que na notação de Pringsheim se representa por

$$b_0 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

e os termos da sucessão $S_n(0)$ dizem-se os *aproximantes* ou *convergentes* desta fracção contínua.

Atendendo a que $S_0(0) = b_0$ adoptaremos ainda a convenção

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{0} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

de modo a que a relação formal

$$S_m(0) = b_0 + \operatorname*{K}_{k=1}^{m} \frac{a_k}{b_k}$$

se conserve quando $m = 0$. Usaremos ainda as convenções padrão de a soma e o produto vazios terem respectivamente os valores 0 e 1, o que conduz a relações do tipo

$$\sum_{n=1}^{0} u_n = 0 \quad \text{e} \quad \prod_{n=1}^{0} u_n = 1.$$

Exemplo 1.1 - *Dados uma fracção contínua* $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *e um inteiro* $m \geq 1$ *tem-se*

$$S_m(\infty) = S_{m-1}(0).$$

Efectivamente isto resulta de ser

$$S_m(z) = S_{m-1}\left(\frac{a_m}{b_m + z}\right) \quad \text{se } z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Exemplo 1.2 - *Dados uma fracção contínua* $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *e um inteiro* $m \geq 1$, *se para todo o índice* $k \leq m$ *for* $a_k \neq 0$ *tem-se* $S_m(0) \neq S_{m-1}(0)$.

Efectivamente, como S_m é injectiva, do exemplo anterior resulta

$$S_m(0) \neq S_m(\infty) = S_{m-1}(0).$$

Dada uma fracção contínua $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, se existir em $\mathbb{C}_\infty$ o limite de $S_n(0)$ diz-se que *a fracção contínua tem o valor* $\lambda = \lim S_n(0)$ e escreve-se

$$b_0 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Diz-se ainda que a fracção contínua

$$b_0 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

converge ou diverge em $\mathbb{C}_\infty$ consoante $\lim S_n(0)$ existir ou não em $\mathbb{C}_\infty$. Diz-se também que uma fracção contínua é *convergente* se $S_n(0)$ tiver limite em $\mathbb{C}$ e *divergente* se isto não suceder. Como a parcela b_0 não afecta a natureza de $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ o estudo da convergência de fracções contínuas pode reduzir-se às fracções contínuas da forma

$$\operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Exemplo 1.3 - *Dada uma fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, *se para algum inteiro* $m \geq 0$ *for* $a_{m+1} = 0$ *tem-se*

$$\operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = S_m(0).$$

Efectivamente nestas condições é válida a relação (1.3).

Nota 1.4 - De acordo com o resultado anterior são trivialmente convergentes em $\mathbb{C}_\infty$ as fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ em que algum dos a_n é nulo, e como elas se podem reduzir a expressões que envolvem apenas um conjunto finito de operações de adição e divisão muitos autores excluem-nas expressamente do conceito de fracção contínua. No entanto bastantes teoremas sobre

fracções contínuas mantêm-se trivialmente válidos para estas fracções finitas e em algumas situações, como no estudo das C-fracções (cf. secção 9), a sua exclusão revela-se artificial e comparável ao que seria excluir do conceito de série todas as séries que se reduzem a uma soma finita. Para distinguir estas fracções contínuas usaremos aqui a designação *fracções contínuas singulares.*

De acordo com as convenções habituais sobre o uso de índices, dado um inteiro $m \geq 0$ o símbolo

$$\operatorname*{K}_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

representa a fracção contínua

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+m}}{b_{n+m}}.$$

O teorema seguinte relaciona as fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n$.

Teorema 1.5 - *Sejam $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua e $m \geq 0$ um inteiro. Se*

$$\operatorname*{K}_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{C}_\infty$$

então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b$ converge em $\mathbb{C}_\infty$ e tem-se

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = S_m(\lambda).$$

Reciprocamente, se os a_n não se anularem para $n \leq m$ e $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ for convergente em $\mathbb{C}_\infty$ o mesmo sucede com $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n$.

Demonstração. Pondo

$$S_n^{(m)} = s_{m+1} \circ \cdots \circ s_n$$

para cada $n > m$, se $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n = \lambda$ é $\lim_{n\to+\infty} S_n^{(m)}(0) = \lambda$. Como

$$S_n(0) = S_m\left(S_n^{(m)}(0)\right),$$

da continuidade de S_m resulta $\lim S_n(0) = S_m(\lambda)$.

Se os a_n não se anulam para $n \leq m$ a função S_m é uma aplicação injectiva e contínua de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$ pelo que da relação $S_n(0) = S_m\left(S_n^{(m)}(0)\right)$ resulta $S_n^{(m)}(0) = S_m^{-1}(S_n(0))$. Se $\lim S_n(0)$ existir em $\mathbb{C}_\infty$ o mesmo sucede então com

$$\lim S_n^{(m)}(0) = \operatorname*{K}_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}. \qquad \blacksquare$$

O teorema seguinte traduz uma identidade básica na teoria das fracções contínuas.

Teorema 1.6 - *Sejam $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua e $(r_n)_{n\geq 0}$ uma sucessão de complexos não nulos. Para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se então*

$$\underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{r_0} \underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \frac{r_{n-1} r_n a_n}{r_n b_n}.$$

Além disso as fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e $K_{n=1}^{+\infty} r_{n-1} r_n a_n/(r_n b_n)$ têm a mesma natureza e se convergirem em $\mathbb{C}_\infty$ é

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{r_0} \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{r_{n-1} r_n a_n}{r_n b_n}.$$

Demonstração. Sendo S_n e S_n^* as funções aproximantes respectivamente de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e $K_{n=1}^{+\infty} r_{n-1} r_n a_n/(r_n b_n)$, a primeira relação do enunciado é consequência da identidade

$$S_n(z) = \frac{1}{r_0} S_n^*(r_n z) \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } n \geq 1$$

que estabeleceremos por indução. Para $n = 1$ é

$$S_1(z) = \frac{a_1}{b_1 + z} = \frac{1}{r_0} \frac{r_0 r_1}{r_1 b_1 + r_1 z} = \frac{1}{r_0} S_1^*(r_1 z),$$

e se a identidade for válida para um dado $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= S_n\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + z}\right) = S_n\left(\frac{1}{r_n} \frac{r_n r_{n+1} a_{n+1}}{r_{n+1} b_{n+1} + r_{n+1} z}\right) \\ &= \frac{1}{r_0} S_n^*\left(\frac{r_n r_{n+1} a_{n+1}}{r_{n+1} b_{n+1} + r_{n+1} z}\right) = \frac{1}{r_0} S_{n+1}^*(r_{n+1} z) \end{aligned}$$

pelo que a identidade permanece válida para $n+1$. A segunda parte do enunciado resulta agora por passagem ao limite.

■

Em particular, se for $r_0 = 1$ o teorema anterior mostra que as fracções contínuas

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{e} \quad \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{r_{n-1} r_n a_n}{r_n b_n}$$

têm a mesma sucessão de aproximantes. Diz-se então que estas são *fracções contínuas equivalentes.*

No teorema seguinte estabelece-se uma forma explícita para a função aproximante de uma fracção contínua.

Teorema 1.7 - *Dada uma fracção contínua* $b_0+K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ *sejam* $(A_n)_{n\geq -1}$ *e* $(B_n)_{n\geq -1}$ *as sucessões definidas por*

$$A_{-1}=1,\ A_0=b_0,\ A_n=b_nA_{n-1}+a_nA_{n-2} \quad se \quad n\geq 1 \tag{1.4}$$

e

$$B_{-1}=0,\ B_0=1,\ B_n=b_nB_{n-1}+a_nB_{n-2} \quad se \quad n\geq 1. \tag{1.5}$$

Para cada $n\geq 0$ *tal que* $a_1...a_n\neq 0$ *tem-se então*

$$S_n(z)=\frac{A_{n-1}z+A_n}{B_{n-1}z+B_n} \ se\ z\in\mathbb{C}_\infty, \tag{1.6}$$

com a convenção de continuidade

$$\left[\frac{A_{n-1}z+A_n}{B_{n-1}z+B_n}\right]_{z=\infty}=\lim_{z\to\infty}\frac{A_{n-1}z+A_n}{B_{n-1}z+B_n}=\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

Além disso, se para algum inteiro $m\geq 0$ *for* $a_{m+1}=0$ *a relação* (1.6) *permanece válida quando* $n>m$ *desde que o segundo membro não tenha a forma* $0/0$.

Demonstração. O enunciado é verdadeiro para $n=0$ pois temos

$$S_0(z)=z+b_0=\frac{A_{-1}z+A_0}{B_{-1}z+B_0} \text{ se } z\in\mathbb{C},$$

e também

$$S_0(\infty)=\infty=\frac{1}{0}=\frac{A_{-1}}{B_{-1}}.$$

Dado $n\geq 0$ suponha-se agora que $a_1...a_na_{n+1}\neq 0$ e seja $z\in\mathbb{C}\setminus\{-b_{n+1}\}$. Admitindo que a relação (1.6) é válida para n temos

$$S_{n+1}(z)=S_n\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+z}\right)=\frac{A_{n-1}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+z}+A_n}{B_{n-1}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+z}+B_n},$$

pelo que

$$S_{n+1}(z)=\frac{A_{n-1}a_{n+1}+A_nb_{n+1}+A_nz}{B_{n-1}a_{n+1}+B_nb_{n+1}+B_nz}=\frac{A_nz+A_{n+1}}{B_nz+B_{n+1}}$$

e a relação permanece válida para $n+1$. Fazendo agora sucessivamente $z\to\infty$ e $z\to -b_{n+1}$, a continuidade da função definida pelo segundo membro de (1.6) permite concluir que esta relação é também válida quando $z=\infty$ ou $z=-b_{n+1}$.

Suponha-se finalmente que para algum $m\geq 0$ é $a_{m+1}=0$. Sendo $(c_k)_{k\geq -1}$ a sucessão definida por

$$c_{-1}=0, c_0=1 \text{ e } c_k=b_{m+k}c_{k-1}+a_{m+k}c_{k-2} \text{ se } k\geq 1$$

e usando indução em k, as relações (1.4) e (1.5) conduzem às identidades

$$A_{m+k}=c_kA_m \text{ e } B_{m+k}=c_kB_m \text{ se } k\geq 0.$$

Dado $k > 0$ e supondo $c_{k-1}z + c_{k-2} \neq 0$, de (1.3) resulta então que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tem

$$\frac{A_{m+k-1}z + A_{m+k}}{B_{m+k-1}z + B_{m+k}} = \frac{(c_{k-1}z + c_k)\,A_m}{(c_{k-1}z + c_k)\,B_m} = \frac{A_m}{B_m} = S_m(0) = S_{m+k}(z).$$

Sendo $z = \infty$ e supondo $c_k \neq 0$ temos do mesmo modo

$$\left[\frac{A_{m+k-1}z + A_{m+k}}{B_{m+k-1}z + B_{m+k}}\right]_{z=\infty} = \frac{A_{m+k}}{B_{m+k}} = \frac{c_k A_m}{c_k B_m} = \frac{A_m}{B_m} = S_{m+k}(z).$$

■

Os A_n e B_n definidos no teorema anterior dizem-se respectivamente os *numeradores* e os *denominadores canónic*os da fracção contínua

$$b_0 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Nota 1.8 - O teorema 1.7 permite interpretar o resultado do teorema 1.6 em termos dos denominadores e numeradores canónicos das fracções contínuas envolvidas. Efectivamente, representando por A_n^* e B_n^* respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n-1}r_n a_n}{r_n b_n}$$

e atendendo a (1.4) e (1.5), por indução obtém-se

$$A_n^* = r_0 r_1 \cdots r_n A_n \;\text{ e }\; B_n^* = r_1 \cdots r_n B_n \;\text{ se } n \geq 1,$$

em que os A_n e B_n são os numeradores e denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$.

No que se segue, e sempre que não houver ambiguidade, representaremos por A_n e por B_n respectivamente os numeradores e denominadores canónicos da fracção contínua em estudo.

Corolário 1 - *Dada uma fracção contínua* $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, *para cada inteiro* $n \geq 0$ *é*

$$S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} \;\; se \;\; a_1 ... a_n \neq 0, \;\; ou \;\; A_n \neq 0, \;\; ou \;\; B_n \neq 0. \tag{1.7}$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior fazendo $z = 0$.
■

Nota 1.9 - O corolário anterior pode ser usado para determinar o valor de $S_n(0)$ aplicando as fórmulas de recorrência (1.4) e (1.5) no cálculo de A_n e B_n.

Este é o chamado *método da recorrência progressiva*, e excluindo adições requer uma divisão e $4n-3$ multiplicações pois $A_1 = b_1A_0 + a_1$ e $B_1 = b_1$.

A determinação de $S_n(0)$ com base na definição faz-se começando com o cálculo de $s_n(0)$, prosseguindo com o cálculo de $s_{n-1}(s_n(0))$ e assim sucessivamente até se chegar a $(s_0 \circ \cdots \circ s_n)(0)$. Este é o chamado *método da recorrência regressiva*, e excluindo adições necessita apenas de n divisões. É um método habitualmente mais rápido mas tem a desvantagem de os resultados intermédios não poderem ser usados para calcular $S_k(0)$ com $k < n$.

Corolário 2 - *Seja $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular e convergente em $\mathbb{C}_\infty$. Se para todo o inteiro $m \geq 0$ for $b_{2m+1} = 0$ é então*

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Demonstração. Efectivamente, como $B_{-1} = 0$ e a relação (1.5) mostra que $B_{2m+1} = a_{2m+1}B_{2m-1}$ para cada $m \geq 0$, segue-se que todos os B_{2m+1} são nulos. O enunciado resulta agora de ser

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim S_{2m+1}(0) = \lim \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}}.$$

■

O teorema seguinte traduz uma propriedade fundamental dos numeradores e denominadores canónicos de uma fracção contínua, conhecida por *fórmula do determinante*.

Teorema 1.10 - *Dada uma fracção contínua $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, para cada inteiro $n \geq 0$ tem-se*

$$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Demonstração. Para cada $n \geq 0$ seja $D_n = A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n$. Dado $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} D_n &= (b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2})\,B_{n-1} - A_{n-1}\,(b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}) \\ &= a_n\,(A_{n-2}B_{n-1} - A_{n-1}B_{n-2}) \quad = -a_nD_{n-1.}, \end{aligned}$$

e como $D_0 = A_0B_{-1} - A_{-1}B_0 = -1$ o enunciado resulta por indução.

■

Corolário 1 - *Dada uma fracção contínua $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, se para um dado inteiro $n \geq 1$ for $B_{n-1}B_n \neq 0$ tem-se*

$$S_n(0) - S_{n-1}(0) = \frac{(-1)^{n-1}a_1...a_n}{B_{n-1}B_n}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Atendendo à condição $B_{n-1}B_n \neq 0$, de (1.7) resulta

$$S_n(0) - S_{n-1}(0) = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$$

e (1.8) deduz-se imediatamente do teorema anterior.

■

Corolário 2 - *Dada uma fracção contínua* $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, *para cada inteiro* $n \geq 1$ *é*

$$A_n B_{n-2} - A_{n-2} B_n = (-1)^n b_n \prod_{k=1}^{n-1} a_k,$$

e se $n \geq 2$ *e* $B_{n-2}B_n \neq 0$ *tem-se*

$$S_n(0) - S_{n-2}(0) = \frac{(-1)^n a_1 ... a_{n-1} b_n}{B_{n-2} B_n}. \tag{1.9}$$

Demonstração. Para cada inteiro $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} A_n B_{n-2} - A_{n-2} B_n &= (b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) B_{n-2} - A_{n-2} (b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}) \\ &= b_n (A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}). \end{aligned}$$

Do teorema anterior deduz-se então a primeira parte do enunciado e a segunda parte resulta como na demonstração do corolário 1.

■

A identidade (1.8) conduz a uma relação importante entre fracções contínuas e séries que se traduz pelo teorema seguinte.

Teorema 1.11 (Euler, 1748) - *Dada uma fracção contínua* $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *suponha-se que existe uma ordem* $m \geq 0$ *tal que os seus denominadores canónicos nunca se anulam quando* $n \geq m$. *Tem-se então*

$$S_n(0) - S_m(0) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} a_1 ... a_k}{B_{k-1} B_k} \quad se \quad n \geq m,$$

e é válida a identidade

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = S_m(0) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_1 ... a_k}{B_{k-1} B_k}$$

se algum dos seus membros estiver definido em $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Atendendo ao corolário 1 do teorema anterior, para cada $n \geq m$ temos

$$S_n(0) - S_m(0) = \sum_{k=m+1}^{n} S_k(0) - S_{k-1}(0) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} a_1 ... a_k}{B_{k-1} B_k}$$

e a segunda parte do enunciado obtém-se tomando o limite quando $n \to +\infty$.

■

Corolário 1 - *Dada uma sucessão complexa* $(a_n)_{n\geq 1}$ *seja*

$$b_1 = 1 \text{ e } b_n = 1 - a_n \text{ se } n \geq 2.$$

Para cada inteiro $m \geq 0$ *tem-se então*

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} a_1 ... a_n$$

e é válida a identidade

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_1 ... a_n$$

se algum dos seus membros estiver definido em $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Efectivamente as relações (1.5) mostram que é $B_n = 1$ para todo o $n \geq 0$ pelo que o enunciado resulta directamente do teorema anterior.

■

Corolário 2 - *Dada uma sucessão complexa* $(c_n)_{n\geq 1}$*tem-se*

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{c_n}{1 - c_n} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} (-1)^n c_1 ... c_n} - 1 \quad \text{se } m \geq 0 \tag{1.10}$$

e é válida a identidade

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{1 - c_n} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n c_1 ... c_n} - 1$$

se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n c_1 ... c_n$ *tiver um valor definido em* $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Pondo

$$S_m(0) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{c_n}{1 - c_n} \quad \text{se} \quad m \geq 0$$

temos

$$\frac{1}{1 + S_m(0)} = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m+1} \frac{a_n}{b_n}$$

com $a_1 = 1$, $a_n = c_{n-1}$ se $n \geq 2$, $b_1 = 1$ e $b_n = 1 - c_{n-1}$ se $n \geq 2$. Atendendo à primeira parte do corolário anterior é então

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m+1} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{m+1} (-1)^{n-1} a_1 ... a_n = 1 + \sum_{n=1}^{m} (-1)^n c_1 ... c_n$$

o que estabelece a relação (1.10). A demonstração conclui-se agora passando ao limite esta identidade.

■

O teorema seguinte relaciona fracções contínuas com séries de potências.

Teorema 1.12 - *Sejam $(d_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão complexa de termos não nulos e $z \in \mathbb{C}$. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n z^n/d_n$ tiver um valor definido em $\mathbb{C}_\infty$ é*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{d_n} = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

com $a_1 = z$, $a_n = d_{n-1}^2 z$ se $n \geq 2$, $b_1 = d_1$ e $b_n = d_n - d_{n-1} z$ se $n \geq 2$.

Demonstração. Sejam $d_0 = 1$, $\alpha_n = d_{n-1} z/d_n$ se $n \geq 1$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_n = 1 - \alpha_n$ se $n \geq 2$. Como

$$\alpha_1 ... \alpha_n = \frac{z^n}{d_n} \text{ se } n \geq 1,$$

do corolário 1 do teorema anterior resulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{d_n} = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

e o enunciado obtém-se agora aplicando o teorema 1.6 com $r_n = d_n$ se $n \geq 0$.

■

Corolário 1 - *Se $|z| \leq 1$ e $z \neq -1$ tem-se*

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} + \frac{1^2 z}{2-z} + \frac{2^2 z}{3-2z} + \cdots + \frac{n^2 z}{n+1-nz} + \cdots$$

e em particular

$$\ln 2 = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1} + \cdots + \frac{n^2}{1} + \cdots .$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior ao desenvolvimento em série de potências

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \text{ se } |z| \leq 1 \text{ e } z \neq -1.$$

■

Corolário 2 - *Se $|z| \leq 1$ e $z \neq \pm i$ tem-se*

$$\arctan z = \frac{z}{1} + \frac{1^2 z^2}{3-z^2} + \frac{3^2 z^2}{5-3z^2} + \cdots + \frac{(2n-1)^2 z^2}{2n+1-(2n-1)z^2} + \cdots$$

e em particular

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \cdots \quad \text{(Brouncker, 1656)}.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior ao desenvolvimento em série de potências

$$z \arctan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(z^2\right)^n}{2n-1} \quad \text{se} \quad |z| \leq 1 \text{ e } z \neq \pm i.$$

■

Corolário 3 - *Tem-se*

$$e = 2 + \operatorname*{K}_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n}.$$

Demonstração. Partindo do desenvolvimento

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!},$$

o teorema anterior conduz a

$$e^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{(2!)^2}{3!-2!} + \frac{(3!)^2}{4!-3!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(n+1)!-n!} + \cdots$$

pelo que

$$e = 2 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n+2)!-(n+1)!}.$$

Aplicando agora o teorema 1.6 com

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

obtém-se

$$e = 2 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)} = 2 + \operatorname*{K}_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n}.$$

■

O teorema seguinte permite exprimir sucessões complexas na forma de fracções contínuas.

Teorema 1.13 - *Sejam* $(A_n)_{n\geq 0}$ *e* $(B_n)_{n\geq 0}$ *duas sucessões de números complexos tais que* $B_0 = 1$ *e* $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq 0$ *para cada inteiro* $n \geq 1$.

Existe então uma e uma só fracção contínua não singular $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *tal que os* A_n *e* B_n *são os respectivos numeradores e denominadores canónicos, e pondo* $A_{-1} = 1$ *e* $B_{-1} = 0$ *tem-se*

$$b_0 = A_0, \;\; a_n = -\frac{A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n}{A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}} \;\; e \;\; b_n = \frac{A_n B_{n-2} - A_{n-2} B_n}{A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}}$$

para cada $n \geq 1$.

Demonstração. Sejam $A_{-1} = 1$ e $B_{-1} = 0$. Como $B_0 = 1$, a definição de numeradores de denominadores canónicos de uma fracção contínua mostra que $b_0 + K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ verifica as condições do enunciado sse $b_0 = A_0$ e para cada $n \geq 1$ os a_n e b_n forem soluções do sistema

$$\begin{cases} b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} = A_n \\ b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} = B_n \end{cases} .$$

Notando que o determinante deste sistema é

$$D_n = A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}$$

temos $D_1 = -1$ e portanto $D_n \neq 0$ para cada $n \geq 1$. Assim as soluções destes sistemas são únicas e são dadas pelas fórmulas do enunciado.

■

Como aplicação deste teorema provaremos a seguinte relação entre fracções contínuas e produtos infinitos:

Teorema 1.14 - *Dada uma sucessão* $(c_n)_{n \geq 1}$ *de complexos não nulos e tais que* $c_n \neq -1$, *sejam* (a_n) *e* (b_n) *as sucessões definidas por*

$$a_1 = c_1, \; a_n = -\frac{c_n}{c_{n-1}} (1 + c_{n-1}) \;\; se \; n \geq 2, \; b_1 = 1 \;\; e \;\; b_n = 1 - a_n \;\; se \; n \geq 2.$$

É então válida a identidade

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + c_n) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

se algum dos seus membros estiver definido em $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Pondo

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k) \;\; \text{e} \;\; B_n = 1 \;\; \text{se } n \geq 0$$

temos

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = A_n - A_{n-1} = A_{n-1} c_n \neq 0 \;\; \text{se } n \geq 1.$$

Aplicando o teorema anterior, para cada $m \geq 1$ resulta então

$$\frac{A_m}{B_m} = b_0 + \operatorname*{K}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$$

com $b_0 = A_0 = 1$, $a_1 = c_1$, $b_1 = 1$,

$$a_n = -\frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1} - A_{n-2}} = -\frac{(1 + c_{n-1})\, c_n}{c_{n-1}} \quad \text{se } n \geq 2$$

e

$$b_n = \frac{A_n - A_{n-2}}{A_{n-1} - A_{n-2}} = \frac{c_{n-1} + c_n + c_{n-1}c_n}{c_{n-1}} = 1 - a_n \ \text{ se } n \geq 2.$$

■

O teorema anterior conduz a uma nova representação de π na forma de fracção contínua:

Corolário (Euler, 1750) - *Tem-se*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1} \ + \ \frac{1 \times 2}{1} \ + \ \frac{2 \times 3}{1} \ + \cdots + \ \frac{n(n+1)}{1} \ + \cdots \ .$$

Demonstração. O produto de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n \times 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

pode escrever-se na forma

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + c_n)$$

com

$$c_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \ \text{ e } \ c_{2n} = -\frac{1}{2n+1}.$$

O teorema anterior conduz então a

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

com $a_1 = b_1 = 1$,

$$a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \ \text{ e } \ b_{2n} = b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \ \text{ se } \ n \geq 1.$$

Aplicando agora o teorema 1.6 com $r_{2n} = r_{2n+1} = 2n + 1$ se $n \geq 0$, obtém-se a fórmula pretendida.

■

O teorema seguinte descreve o comportamento de uma classe particularmente simples de fracções contínuas.

Teorema 1.15 - *Dado $a \in \mathbb{C}$, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a/1$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ se $a \in]-\infty, -1/4[$. Se isto não suceder a fracção contínua converge e tem-se*

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{1} = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

em que $\sqrt{1+4a}$ representa o valor principal da potência de base $1+4a$ e expoente $1/2$.

Demonstração. Se $K_{n=1}^{+\infty} a/1 = \lambda \in \mathbb{C}$ então λ verifica a condição

$$\lambda = \frac{a}{1+\lambda}$$

e é portanto uma raiz da equação $\lambda^2 + \lambda - a = 0$. Por outro lado, supondo que $a \in \mathbb{R}$ também λ seria um número real mas a equação anterior só admite raizes reais se $a \geq -1/4$. Na hipótese $a \in]-\infty, -1/4[$ também não pode ser $K_{n=1}^{+\infty} a/1 = \infty$ pois $\lambda = \infty$ não verifica a relação $\lambda = a/(1+\lambda)$.

Suponha-se agora que $a \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4[$. Se $a = 0$ a fórmula do enunciado resulta da relação trivial $K_{n=1}^{+\infty} a/1 = 0$. Seja então $a \neq 0$ e escolham-se as raizes u e v da equação $\lambda^2 + \lambda - a = 0$ de modo a ter-se $|u| \leq |v|$. Pondo

$$\sqrt{1+4a} = p + iq \quad \text{com } p, q \in \mathbb{R},$$

a definição de valor principal de uma potência de base complexa mostra que $p \geq 0$. Como as raízes de $\lambda^2 + \lambda - a = 0$ são dadas por

$$\frac{-1 \pm (p+iq)}{2}$$

é então necessariamente

$$u = \frac{-1+p+iq}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

e

$$v = \frac{-1-p-iq}{2} = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Por outro lado, atendendo às relações $u+v=-1$ e $uv=-a$ tem-se

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{1} = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{-uv}{-u-v}$$

e como $v \neq 0$ pode agora aplicar-se o teorema 1.6 com $r_n = -1/v$. Atendendo ainda ao corolário 2 do teorema 1.11 resulta então

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{1} = -v \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{-u/v}{1+u/v} = v - \frac{v}{\sum_{n=0}^{+\infty} (u/v)^n}$$

se a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(u/v)^n$ tiver um valor definido em $\mathbb{C}_\infty$. Na hipótese $|u/v|<1$ é

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u/v)^n=\frac{1}{1-u/v}$$

e conclui-se

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{1}=u=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Finalmente a relação $|u|=|v|$ exige $p=0$ pelo que $1+4a\in\mathbb{R}_0^-$ e da condição $a\geq -1/4$ resulta $1+4a=0$. Neste caso temos então $u=v$ donde vem $\sum_{n=0}^{+\infty}(u/v)^n=+\infty$ e conclui-se ainda

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{1}=v=u=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

■

Tomando $a=1$ no teorema anterior obtém-se o desenvolvimento em fracção contínua do chamado *número de ouro* φ:

Exemplo 1.16 - *Tem-se*

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

Nota 1.17 - Os *números de Fibonacci* F_n definem-se pelas relações

$$F_0=0, F_1=1 \text{ e } F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \text{ se } n\geq 2.$$

Sendo A_n e B_n respectivamente os numeradores e os denominadores canónicos da fracção contínua $1+K_{n=1}^{+\infty}1/1$, das relações de recorrência dos A_n e B_n resulta então

$$A_n=F_{n+2} \text{ e } B_n=F_{n+1} \text{ se } n\geq -1,$$

pelo que

$$\lim\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi.$$

Atendendo ao teorema 1.10 obtemos também a chamada *identidade de Cassini*

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n \text{ se } n\geq 1,$$

e do teorema de Euler 1.11 resulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+1}} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

O teorema anterior pode ser generalizado na seguinte forma:

Corolário - *Dados $a, b \in \mathbb{C}$, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a/b$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ se $b = 0$ e $a \neq 0$, ou $a/b^2 \in]-\infty, -1/4[$. Se isto não suceder a fracção contínua converge e tem-se*

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a}{b} = \frac{-b + b\sqrt{1+4a/b^2}}{2}$$

em que $\sqrt{1+4a/b^2}$ representa o valor principal da potência de base $1+4a/b^2$ e expoente $1/2$.

Demonstração. Se $b \neq 0$ o enunciado resulta imediatamente do teorema anterior aplicando o teorema 1.6 com $r_n = 1/b$. Supondo $a \neq 0$ e $b = 0$, uma relação da forma $K_{n=1}^{+\infty} a/0 = \lambda \in \mathbb{C}_\infty$ implicava $\lambda = a/\lambda$ mas aplicando o teorema 1.6 com $r_n = -1$ teríamos também $\lambda = -\lambda$ e estas duas condições são incompatíveis. Finalmente, se for $a = b = 0$ a relação (1.3) mostra que para todo o $n \geq 0$ é $S_n(0) = S_0(0) = 0$ e a identidade do enunciado permanece válida.

■

Exemplo 1.18 - *Tem-se*

$$\sqrt{2} = 1 + \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{2}.$$

Efectivamente basta tomar $a = 1$ e $b = 2$ no corolário anterior.

Nota 1.19 - Historicamente o desenvolvimento em fracção contínua de $\sqrt{2}$ foi obtido a partir da relação

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2}-1\right)}$$

cuja iteração conduz a

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

No entanto, para a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/2$ esta relação traduz-se por

$$S_n\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2} - 1 \text{ se } n \geq 1$$

e, dada uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, uma relação da forma

$$S_n(c) = c \text{ se } n \geq 1$$

não implica necessariamente

$$\lim S_n(0) = c$$

mesmo que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ seja convergente. Assim, para a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/2$ temos

$$-\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \left(-\sqrt{2} - 1\right)}$$

e iterando esta relação resulta

$$S_n\left(-\sqrt{2} - 1\right) = -\sqrt{2} - 1 \text{ se } n \geq 1,$$

embora seja

$$\lim S_n(0) = \sqrt{2} - 1.$$

Dada uma fracção contínua não singular com funções aproximantes S_n, a relação entre a convergência de $S_n(0)$ e o comportamento das sucessões da forma $S_n(z_n)$ com $z_n \in \mathbb{C}$ será analisada na secção 11. Independentemente do comportamento de $S_n(0)$ podemos desde já assinalar que para cada $\sigma \in \mathbb{C}_\infty$ existem sucessões $S_n(z_n)$ que têm por limite σ pois basta para isso tomar $z_n = S_n^{-1}(\sigma)$. No entanto veremos posteriormente que sucessões (z_n) deste tipo são excepcionais num sentido bem preciso. Uma situação particularmente simples é tratada no teorema seguinte.

Teorema 1.20 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua convergente em $\mathbb{C}_\infty$ e suponha-se que os a_n e os b_n são não negativos a partir de uma certa ordem. Dada uma sucessão (u_n) de números não negativos, para cada subsucessão (S_{α_n}) de (S_n) tem-se*

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim S_{\alpha_n}(u_n).$$

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar que todos os a_n e b_n são não negativos. A definição dos s_n mostra então que estas funções são decrescentes em $[0, +\infty]$ pelo que o mesmo sucede com as funções S_n. Para cada $n \geq 1$ temos assim

$$S_{n-1}(0) = S_n(+\infty) \leq S_{\alpha_n}(u_n) \leq S_n(0)$$

pelo que

$$\lim S_{\alpha_n}(u_n) = \lim S_n(0) = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Suponha-se agora que existe um ordem $m \geq 1$ tal que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ se $n > m$. Se $a_1 ... a_m = 0$ o enunciado resulta de que para todo o n tal que $\alpha_n > m$ é

$$S_{\alpha_n}(u_n) = S_m(0) = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Se nenhum dos a_n se anula quando $n \leq m$, a função S_m é injectiva e as funções aproximantes de $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n$ são dadas por $S_m^{-1} \circ S_n$ com $n > m$. Sendo $\lambda = K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ é então

$$\operatorname*{K}_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = S_m^{-1}(\lambda),$$

e como a parte do enunciado já estabelecida mostra que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(S_m^{-1} \circ S_{\alpha_n}\right)(u_n) = S_m^{-1}(\lambda)$$

conclui-se que $\lim S_{\alpha_n}(u_n) = \lambda$.

■

2- Fracções contínuas simples

A expressão

$$c_0 + \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{c_n}$$

em que os c_n são inteiros e $c_n > 0$ quando $n \geq 1$, diz-se uma *fracção contínua simples* ou *regular,* e pode representar-se abreviadamente pela notação

$$[c_0; c_1, ..., c_n, ...] .$$

Para estas fracções contínuas os correspondentes numeradores e denominadores canónicos são números inteiros que se costumam representar respectivamente por p_n e q_n. Com estas notações temos

$$\frac{p_n}{q_n} = c_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{1}{c_k} \text{ se } n \geq 0$$

e as relações (1.4) e (1.5) traduzem-se respectivamente por

$$p_{-1} = 1,\ p_0 = c_0,\ p_n = c_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ se } n \geq 1$$

e

$$q_{-1} = 0,\ q_0 = 1,\ q_n = c_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ se } n \geq 1.$$

Da expressão dos q_n resulta $q_n > 0$ se $n \geq 0$ pelo que

$$q_n - q_{n-1} = (c_n - 1)\, q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-2} > 0 \text{ se } n \geq 2$$

e portanto

$$q_n - q_{n-1} \geq 1 \text{ se } n \geq 2, \tag{2.1}$$

o que implica

$$q_n \geq n \text{ se } n \geq 1. \tag{2.2}$$

Uma minoração mais precisa de q_n pode obter-se usando o número de ouro $\varphi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 = 1.6180...$ introduzido no exemplo 1.16:

Exemplo 2.1 - *Tem-se*

$$q_n \geq \varphi^{n-1} \text{ se } n \geq 0$$

valendo a igualdade sse $n = 1$.

Efectivamente temos $q_0 = 1 > \varphi^{-1}$ e $q_1 = c_1 \geq 1 = \varphi^0$ pelo que

$$q_1 + q_0 > \varphi^0 + \varphi^{-1}.$$

Seja agora $n \geq 1$ e suponha-se que para todo o índice k tal que $0 \leq k \leq n$ é

$$q_k \geq \varphi^{k-1} \quad \text{e} \quad q_k + q_{k-1} > \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2}.$$

Notando que $\varphi + 1 = \varphi^2$ temos

$$q_{n+1} = c_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1} > \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = \varphi^n$$

pelo que também $q_{n+1} > \varphi^n$ e $q_{n+1} + q_n > \varphi^n + \varphi^{n-1}$, e o resultado fica estabelecido por indução.

O teorema 1.10 traduz-se agora pela relação

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1} \text{ se } n \geq 1, \tag{2.3}$$

e daqui deduz-se imediatamente que os inteiros p_n e q_n não têm factores comuns pelo que as fracções p_n/q_n são irredutíveis. Dos corolários 1 e 2 deste teorema resultam ainda as relações

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \text{ se } n \geq 1, \tag{2.4}$$

e

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n} c_n}{q_n q_{n-2}} \text{ se } n \geq 2. \tag{2.5}$$

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 - *A fracção continua simples $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ é convergente, o seu valor é um número irracional ξ, e para cada inteiro $n \geq 1$ tem-se*

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \xi < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Atendendo às definições e a (2.4), para cada inteiro $m \geq 0$ temos

$$\frac{p_m}{q_m} = c_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) = c_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

e de (2.2) resulta

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{n\,(n-1)} \text{ se } n \geq 2.$$

Então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

é convergente pelo que a fracção contínua converge para um certo número real ξ e temos

$$\xi = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

A relação (2.5) mostra que a sucessão (p_{2n}/q_{2n}) é estritamente crescente e que a sucessão (p_{2n-1}/q_{2n-1}) é estritamente decrescente. Como estas sucessões convergem ambas para ξ as desigualdades (2.6) ficam estabelecidas.

Suponha-se finalmente que ξ é um número racional e seja $\xi = k/l$ com k e l inteiros. Escolhendo um inteiro n tal que $2n+1 > l$, de (2.6) resulta

$$0 < \frac{k}{l} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} \leq \frac{1}{q_{2n}\,(2n+1)}$$

e multiplicando estas desigualdades por lq_{2n} obtém-se

$$0 < kq_{2n} - lp_{2n} < \frac{l}{2n+1} < 1,$$

o que é absurdo pois $kq_{2n} - lp_{2n}$ é um número inteiro.

■

Corolário 1 - *Nas condições do teorema anterior tem-se*

$$\frac{1}{q_n\,(q_n + q_{n+1})} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad se \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior e separando os casos n par e n ímpar, temos

$$\left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

De (2.4) e (2.5) resulta então

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

e

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{c_{n+2}}{q_n q_{n+2}}.$$

Como

$$\frac{c_{n+2}}{q_n q_{n+2}} = \frac{c_{n+2}}{q_n\,(q_{n+1}c_{n+2} + q_n)}$$

e $c_{n+2} \geq 1$, é

$$\frac{c_{n+2}}{q_n\,(q_{n+1}c_{n+2} + q_n)} \geq \frac{1}{q_n\,(q_{n+1} + q_n)}$$

e obtém-se a primeira desigualdade do enunciado.

■

Exemplo 2.3 - *Nas condições do teorema anterior para cada inteiro $n \geq 0$ tem-se*

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{2q_n}\left(\frac{1}{q_n + q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + \delta_n \quad com \quad |\delta_n| < \frac{1}{2q_{n+1}\left(q_n + q_{n+1}\right)}.$$

Efectivamente, pondo

$$\rho_n^- = \frac{1}{q_n\left(q_n + q_{n+1}\right)} \quad \text{e} \quad \rho_n^+ = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

de acordo com o corolário anterior é

$$\rho_n^- < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \rho_n^+.$$

Pondo ainda

$$\delta_n = \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| - \frac{\rho_n^+ + \rho_n^-}{2}$$

é então

$$\frac{\rho_n^- - \rho_n^+}{2} < \delta_n \ < \frac{\rho_n^+ - \rho_n^-}{2}$$

pelo que

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{\rho_n^+ + \rho_n^-}{2} + \delta_n = \frac{1}{2q_n}\left(\frac{1}{q_n + q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + \delta_n,$$

com

$$|\delta_n \ | < \frac{\rho_n^+ - \rho_n^-}{2} = \frac{1}{2q_{n+1}\left(q_n + q_{n+1}\right)}.$$

Corolário 2 - *Nas condições do teorema anterior, para cada inteiro $n \geq 0$ tem-se*

$$|q_{n+1}\xi - p_{n+1}| < |q_n\xi - p_n| \quad e \quad \left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Demonstração. Atendendo ao corolário anterior é efectivamente

$$|q_{n+1}\xi - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}}$$

e

$$|q_n\xi - p_n| > \frac{1}{q_n + q_{n+1}} \geq \frac{1}{q_n + c_{n+2}q_{n+1}} = \frac{1}{q_{n+2}},$$

o que estabelece a primeira desigualdade do enunciado. Notando que (2.1) mostra que $q_{n+1} > q_n$, a segunda desigualdade resulta agora de ser

$$\left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}}\left|q_{n+1}\xi - p_{n+1}\right| < \frac{1}{q_{n+1}}\left|q_n\xi - p_n\right| < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|. \quad \blacksquare$$

O teorema seguinte assegura a existência e a unicidade da representação de qualquer número irracional sob a forma de fracção contínua simples.

Teorema 2.4 - *Dado* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sejam* $(\xi_n)_{n\geq 0}$ *e* $(c_n)_{n\geq 0}$ *as sucessões definidas por* $\xi_0 = \xi$, $c_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor$,

$$\xi_n = \frac{1}{\xi_{n-1} - \lfloor \xi_{n-1} \rfloor} \quad e \quad c_n = \lfloor \xi_n \rfloor \quad se \quad n \geq 1.$$

Tem-se então

$$\xi = c_0 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}$$

e esta é a única representação de ξ *sob a forma de fracção contínua simples.*

Demonstração. Como ξ é irracional e os c_n são inteiros, para todo o $n \geq 0$ é $\xi_n > c_n$ pelo que as sucessões (ξ_n) e (c_n) estão bem definidas. Da definição resulta $c_{n-1} > \xi_{n-1} - 1$ se $n \geq 1$ pelo que $c_n \geq 1$, e tem-se

$$\xi = \xi_0 = c_0 + \frac{1}{\xi_1} \quad \text{e} \quad \xi_n = c_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \quad \text{se } n \geq 0.$$

Sendo S_n as funções aproximantes da fracção contínua $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$, as relações (1.1) e (1.2) conduzem a

$$\xi = S_0\left(\frac{1}{\xi_1}\right)$$

e

$$S_{n-1}\left(\frac{1}{\xi_n}\right) = S_{n-1}\left(\frac{1}{c_n + 1/\xi_{n+1}}\right) = S_n\left(\frac{1}{\xi_{n+1}}\right) \quad \text{se } n \geq 1$$

pelo que

$$\xi = S_n\left(\frac{1}{\xi_{n+1}}\right) \quad \text{se} \quad n \geq 0.$$

De (1.6) resulta assim

$$\xi = \frac{p_{n-1} + p_n \xi_{n+1}}{q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}} \quad \text{se } n \geq 0 \tag{2.7}$$

e atendendo a (2.3) obtém-se

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1} + p_n \xi_{n+1}}{q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\left(q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}\right)}.$$

Como

$$q_n\left(q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}\right) > q_n\left(q_{n-1} + q_n c_{n+1}\right) = q_n q_{n+1}$$

temos

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{n\,(n+1)} \quad \text{se } n \geq 1$$

pelo que $\lim p_n/q_n = \xi$, e portanto

$$\xi = c_0 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}.$$

Suponha-se agora que uma certa fracção contínua simples $c'_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c'_n$ tem também o valor ξ, e para cada $n \geq 0$ seja

$$\xi'_n = c'_n + \operatorname*{K}_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{c'_k}.$$

Temos então

$$\xi'_n = c'_n + \frac{1}{c'_{n+1} + K_{k=n+2}^{+\infty} 1/c'_k},$$

ou seja,

$$\xi'_n = c'_n + \frac{1}{\xi'_{n+1}}.$$

Como $\xi'_{n+1} > c'_{n+1} \geq 1$, é $c'_n < \xi'_n < c'_n + 1$ pelo que $c'_n = \left\lfloor \xi'_n \right\rfloor$ se $n \geq 0$. Dado que $\xi'_0 = \xi = \xi_0$ conclui-se assim que as sucessões $\left(\xi'_n\right)$ e (c'_n) coincidem respectivamente com (ξ_n) e (c_n) o que completa a demonstração.

■

Corolário - Sejam $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $(\xi_n)_{n\geq 0}$ *a sucessão definida no teorema anterior. Se* ξ *for representado pela fracção contínua simples* $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$, *para cada inteiro* $k \geq 0$ *é então*

$$\xi_k = c_k + \operatorname*{K}_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}.$$

Demonstração. Resulta directamente de aplicar o teorema anterior a cada número irracional ξ_k.

■

Atendendo ao teorema anterior os convergentes da fracção contínua simples que representa um dado número irracional são abreviadamente designados por convergentes desse número irracional.

Uma fracção contínua simples $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ diz-se *puramente periódica* se existir um inteiro $m \geq 1$ tal que

$$c_{m+j} = c_j \text{ para todo o } j \geq 0,$$

o que equivale a ser

$$c_{mn+j} = c_j \quad \text{se} \quad 0 \leq j \leq m-1 \text{ e } n \geq 1.$$

O menor inteiro m que verifica esta condição diz-se o *comprimento do período* da fracção contínua, e para indicar que a fracção contínua é puramente periódica com período de comprimento m usa-se a notação

$$[\overline{c_0; c_1, ..., c_{m-1}}].$$

Mais geralmente uma fracção contínua simples diz-se *periódica com período de comprimento m a partir da ordem k* se a fracção contínua $c_k + K_{n=k+1}^{+\infty} 1/c_n$ for puramente periódica com período de comprimento m. Esta condição traduz-se por

$$c_{m+j} = c_j \text{ para todo o } j \geq k,$$

e a fracção contínua é agora representada pela notação

$$[c_0; c_1, ..., \overline{c_k, ..., c_{k+m-1}}].$$

Nota 2.5 - Nos textos em que apenas são tratadas as fracções contínuas simples como sucede na generalidade dos livros sobre Teoria dos Números, as fracções contínuas aqui designadas por "periódicas a partir de uma certa ordem" são habitualmente referidas como "fracções contínuas periódicas" (cf. Adler & Coury ou Hardy & Wright). No entanto, na teoria geral das fracções contínuas o conceito de fracção contínua periódica corresponde ao que aqui chamamos "fracções periódicas a partir da ordem 1" (cf. secção 3).

Vamos agora provar que os números irracionais representados pelas fracções contínuas periódicas a partir de uma certa ordem são os chamados *irracionais quadráticos*. Estes são os números irracionais que verificam uma condição do tipo $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ com a, b, c inteiros (necessariamente $a \neq 0$), e são portanto representáveis na forma $r + s\sqrt{d}$ em que r, s são números racionais e d é um inteiro positivo que não seja quadrado perfeito.

Teorema 2.6 (Lagrange, 1769) - *Uma fracção contínua simples representa um número irracional quadrático sse for periódica a partir de uma certa ordem.*

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que um dado número irracional ξ é representado por uma fracção contínua puramente periódica com período de comprimento m. Sendo $(\xi_n)_{n\geq 0}$ a sucessão definida no teorema 2.4, o respectivo corolário mostra que é então $\xi = \xi_m$ e de (2.7) resulta

$$\xi = \frac{p_{m-2} + p_{m-1}\xi}{q_{m-2} + q_{m-1}\xi}.$$

Temos assim

$$q_{m-1}\xi^2 + (q_{m-2} - p_{m-1})\,\xi - p_{m-2} = 0$$

pelo que ξ é um irracional quadrático. Suponha-se agora que a fracção contínua simples que representa ξ é periódica a partir de uma ordem $k \geq 1$. Atendendo a (2.7) temos

$$\xi = \frac{p_{k-2} + p_{k-1}\xi_k}{q_{k-2} + q_{k-1}\xi_k},$$

e como a fracção contínua $c_k + K_{n=k+1}^{+\infty} 1/c_n$ é puramente periódica segue-se que ξ_k é um irracional quadrático. Obtemos assim uma relação da forma

$$\xi = \frac{r_1 + s_1\sqrt{d}}{r_2 + s_2\sqrt{d}} = \frac{\left(r_1 + s_1\sqrt{d}\right)\left(r_2 - s_2\sqrt{d}\right)}{r_2^2 - s_2^2 d}$$

com $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$ e $d > 0$ inteiro, o que prova que ξ é também um número irracional quadrático.

Reciprocamente suponha-se que $\xi = c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ é um número irracional quadrático que verifica a relação

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0 \text{ com } a, b, c \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

e para cada $k \geq 1$ seja ainda $\xi_k = c_k + K_{n=k+1}^{+\infty} 1/c_n$. Temos então

$$\xi = \frac{p_{k-2} + p_{k-1}\xi_k}{q_{k-2} + q_{k-1}\xi_k}$$

e substituindo esta expressão de ξ em (2.8) obtemos uma relação da forma

$$A_k^2\xi_k^2 + B_k\xi_k + C_k = 0 \tag{2.9}$$

com

$$\begin{aligned} A_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2, \\ B_k &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b\left(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}\right) + 2cq_{k-1}q_{k-2} \end{aligned}$$

e

$$C_k = ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2.$$

Usando agora a identidade $p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1} = (-1)^k$ deduz-se a relação

$$B_k^2 - 4A_kC_k = b^2 - 4ac, \tag{2.10}$$

e como a irracionalidade de ξ exige $b^2 - 4ac \neq 0$ conclui-se que o polinómio $A_kx^2 + B_kx + C_k$ não é identicamente nulo.

Por outro lado, atendendo à segunda desigualdade do corolário 1 do teorema 2.2 e à relação $q_k > q_{k-1}$, podemos escrever

$$p_{k-1} = \xi q_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}} \text{ com } |\delta_{k-1}| < 1$$

pelo que

$$\begin{aligned} A_k &= a\left(\xi q_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2 + bq_{k-1}\left(\xi q_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right) + cq_{k-1}^2 \\ &= \left(a\xi^2 + b\xi + c\right)q_{k-1}^2 + 2a\xi\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1} \\ &= 2a\xi\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1}, \end{aligned}$$

e daqui resulta

$$|A_k| < 2\,|a\xi| + |a| + |b|\,.$$

Como $C_k = A_{k-1}$ é então também

$$|C_k| < 2\,|a\xi| + |a| + |b|\,,$$

e de (2.10) deduz-se agora

$$\begin{aligned} B_k^2 &\leq 4\,|A_k C_k| + \left|b^2 - 4ac\right| \\ &< 4\,(2\,|a\xi| + |a| + |b|)^2 + \left|b^2 - 4ac\right|. \end{aligned}$$

Vemos assim que as sucessões (A_k), (B_k) e (C_k) são todas limitadas, e como os seus termos são números inteiros o conjunto dos polinómios $A_k x^2 + B_k x + C_k$ é necessariamente finito. Dado que (2.9) mostra que cada ξ_k é raiz da equação $A_k x^2 + B_k x + C_k = 0$ segue-se que o conjunto dos ξ_k também é finito. Pondo ainda $\xi_0 = \xi$, para algum $k \geq 0$ existe então um inteiro $m \geq 1$ tal que $\xi_k = \xi_{m+k}$, e pela unicidade da representação dos irracionais isto exige

$$c_j = c_{m+j} \text{ se } j \geq k$$

donde se conclui que a fracção contínua é periódica a partir da ordem k.

■

As identidades

$$\varphi = 1 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1}$$

e

$$\sqrt{2} = 1 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2},$$

deduzidas respectivamente nos exemplos 1.16 e 1.18, são casos particulares de desenvolvimentos de números irracionais quadráticos em forma de fracção contínua simples. O exemplo seguinte generaliza estes desenvolvimentos.

Exemplo 2.7 - *Dados dois números inteiros positivos a, b tem-se*

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4b/a}}{2} = \left[0; \overline{a, b}\right].$$

Efectivamente, sendo ξ o número representado pela fracção contínua $\left[0; \overline{a, b}\right]$ temos

$$\xi = \frac{1}{a + 1/\,(b + \xi)}$$

e isto mostra que ξ é a raiz positiva da equação $\xi^2 + b\xi - b/a = 0$.

Em particular, dado um inteiro positivo n e tomando $b = 2n$ resulta

$$\sqrt{n^2 + 2n/a} = \left[n; \overline{a, 2n}\right].$$

Fazendo agora sucessivamente $a = 2n$, $a = n$, $a = 1$ e $a = 2$ obtemos os desenvolvimentos

$$\sqrt{n^2+1} = \left[n; \overline{2n}\right], \quad \sqrt{n^2+2} = \left[n; \overline{n, 2n}\right],$$

$$\sqrt{n^2+2n} = \left[n; \overline{1, 2n}\right] \quad \text{e} \quad \sqrt{n^2+n} = \left[n; \overline{2, 2n}\right].$$

Dado um número irracional quadrático $\xi = r + s\sqrt{d}$ com $r, s \in \mathbb{Q}$ e $d > 0$ inteiro, representaremos por $\overline{\xi}$ o seu conjugado $r - s\sqrt{d}$. Podemos agora caracterizar os irracionais cujas fracções contínuas simples são puramente periódicas:

Teorema 2.8 (Galois, 1828) - *Um número irracional quadrático ξ é representado por uma fracção contínua simples puramente periódica sse $\xi > 1$ e $-1 < \overline{\xi} < 0$.*

Demonstração. Suponha-se que ξ é representado por uma fracção contínua simples $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$, puramente periódica com período de comprimento m. É então $c_j = c_{m+j}$ se $0 \leq j \leq m-1$ pelo que $c_0 = c_m \geq 1$, e como $\xi > c_0$ segue-se que $\xi > 1$. Por outro lado, como na demonstração do teorema 2.6 temos

$$\xi = \frac{p_{m-2} + p_{m-1}\xi}{q_{m-2} + q_{m-1}\xi},$$

e pondo

$$f(x) = q_{m-1}x^2 + (q_{m-2} - p_{m-1})\, x - p_{m-2}$$

segue-se que $f(\xi) = 0$. Temos também $f(0) = -p_{m-2} < 0$, e como

$$f(-1) = q_{m-1} - q_{m-2} + p_{m-1} - p_{m-2},$$

separando os casos $m = 1$ e $m \geq 2$ verifica-se que $f(-1) > 0$. Existe então $x_0 \in \,]-1, 0[$ tal que $f(x_0) = 0$, e por $\overline{\xi}$ ser a outra raiz da equação $f(x) = 0$ conclui-se que $\overline{\xi} \in \,]-1, 0[$.

Reciprocamente suponha-se que ξ verifica as condições do enunciado e seja m o comprimento do período da fracção contínua simples que o representa. Sendo (ξ_n) a sucessão definida no teorema 2.4 podemos verificar que $\overline{\xi_n} \in \,]-1, 0[$ para todo o $n \geq 0$. Efectivamente $\overline{\xi_0} = \overline{\xi} \in \,]-1, 0[$ e se $\overline{\xi_n} \in \,]-1, 0[$ para algum $n \geq 0$, tomando conjugados na relação

$$\frac{1}{\xi_{n+1}} = \xi_n - c_n$$

obtém-se

$$\frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} = \overline{\xi_n} - c_n < -c_n \leq -1$$

pelo que também $\overline{\xi_{n+1}} \in]-1,0[$. Sendo k o menor dos inteiros tais que $c_j = c_{m+j}$ para todo o $j \geq k$, o teorema fica provado se se mostrar que $k = 0$. Supondo $k \geq 1$ temos

$$\xi_k = \frac{1}{\xi_{k-1} - c_{k-1}} \quad \text{e} \quad \xi_{m+k} = \frac{1}{\xi_{m+k-1} - c_{m+k-1}},$$

e como $\xi_{m+k} = \xi_k$ segue-se que

$$\xi_{m+k-1} - \xi_{k-1} = c_{m+k-1} - c_{k-1} \in \mathbb{Z}.$$

Então também

$$\overline{\xi_{m+k-1}} - \overline{\xi_{k-1}} \in \mathbb{Z},$$

e como $-1 < \overline{\xi_{m+k-1}} < 0$ e $0 < -\overline{\xi_{k-1}} < 1$, isto implica

$$-1 < \overline{\xi_{m+k-1}} - \overline{\xi_{k-1}} < 1$$

pelo que $\overline{\xi_{m+k-1}} = \overline{\xi_{k-1}}$. É assim $\xi_{m+k-1} = \xi_{k-1}$ o que contraria a hipótese, pois a unicidade da representação dos ξ_n mostra que daqui resulta $c_j = c_{m+j}$ para todo o $j \geq k-1$.

■

Corolário - *Um número irracional quadrático ξ da forma*

$$\frac{\sqrt{d}+a}{b} \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{Z}^+$$

é representado por uma fracção simples puramente periódica sse

$$0 < a < \sqrt{d} \quad e \quad \sqrt{d} - a < b < \sqrt{d} + a.$$

Demonstração. O teorema anterior mostra que ξ admite uma representação deste tipo sse $\xi > 1$ e $-1 < \overline{\xi} < 0$, o que equivale a ser

$$0 < \frac{\sqrt{d}-a}{b} < 1 < \frac{\sqrt{d}+a}{b}, \tag{2.11}$$

e estas desigualdades são claramente válidas se a e b verificarem as condições do enunciado.

Reciprocamente, de (2.11) resulta $2\sqrt{d}/b > 0$ o que exige $b > 0$, e por ser então $\sqrt{d} + a > \sqrt{d} - a > 0$ isto implica $0 < a < \sqrt{d}$. As desigualdades $\sqrt{d} - a < b < \sqrt{d} + a$ são agora imediatas.

■

Os desenvolvimentos em fracção contínua simples de números irracionais que são raízes quadradas de inteiros, têm características próprias que iremos estabelecer com base no lema que se segue.

Lema 2.9 - *Seja ξ um número irracional quadrático representado por uma fracção contínua simples $c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ puramente periódica com período de comprimento m. Então $-1/\overline{\xi}$ é representado por uma fracção contínua simples $c'_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c'_n$ que também é puramente periódica com período de comprimento m, e tem-se*

$$c'_n = c_{m-1-n} \quad se \quad 0 \leq n \leq m-1.$$

Demonstração. Sendo $(\xi_n)_{n\geq 0}$ a sucessão definida no teorema 2.4 temos

$$\xi_0 = \xi = \xi_m, \;\; \xi_n = c_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \;\; \text{e } c_n = \lfloor \xi_n \rfloor \;\; \text{se} \;\; n \geq 0.$$

Daqui resulta

$$-\frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} = c_n - \overline{\xi_n} \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m-1,$$

e como o corolário do teorema 2.4 mostra que cada ξ_n ainda é representado por uma fracção contínua puramente periódica temos também $-1 < \overline{\xi_n} < 0$ se $n \geq 0$. Pondo

$$\eta_n = -\frac{1}{\overline{\xi_{m-n}}} \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m$$

é então $\eta_n > 1$ e

$$\eta_n = c_{m-1-n} + \frac{1}{\eta_{n+1}} \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m-1$$

pelo que

$$c_{m-1-n} = \lfloor \eta_n \rfloor \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m-1.$$

Sendo agora $\xi' = -1/\overline{\xi}$ e $\left(\xi'_n\right)_{n\geq 0}$ a sucessão definida por

$$\xi'_n = c'_n + \frac{1}{\xi'_{n+1}} \;\; \text{e } c'_n = \left\lfloor \xi'_n \right\rfloor,$$

temos $\eta_0 = -1/\overline{\xi}_m = \xi' = \xi'_0$, e como

$$\xi'_{n+1} = \frac{1}{\xi'_n - \left\lfloor \xi'_n \right\rfloor} \;\; \text{e} \;\; \eta_{n+1} = \frac{1}{\eta_n - \lfloor \eta_n \rfloor} \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m-1,$$

por indução resulta $\eta_n = \xi'_n$ se $0 \leq n \leq m$. É pois

$$c'_n = c_{m-1-n} \;\; \text{se} \;\; 0 \leq n \leq m-1,$$

e dado que $\xi'_m = \eta_m = -1/\overline{\xi}_0 = \xi'_0$ segue-se que a fracção contínua simples que representa ξ' é puramente periódica com período de comprimento m.

■

Podemos agora demonstrar o resultado que tínhamos referido.

Teorema 2.10 (Legendre, 1797) - *Dado um número irracional da forma* $\sqrt{d}$ *com* $d > 0$ *inteiro, a fracção contínua simples que o representa é periódica a partir da ordem* 1. *Além disso, se o comprimento do seu período for* m *tem-se* $c_m = 2\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$ *e* $c_k = c_{m-k}$ *quando* $1 \leq k \leq m-1$.

Demonstração. Sendo $\sqrt{d} = c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ o número $\xi = c_0 + \sqrt{d}$ verifica as condições do teorema 2.8 pelo que a fracção contínua $2c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ é puramente periódica. Se o seu período tiver comprimento m é então

$$c_m = 2c_0 = 2\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor.$$

Supondo agora sem perda de generalidade $m \geq 2$ e atendendo ao teorema anterior, temos

$$-\frac{1}{\overline{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{d}-c_0} = c_{m-1} + \frac{1}{c_{m-2}} \ +\cdots+ \ \frac{1}{c_1} \ + \ \frac{1}{2c_0} \ +\cdots$$

mas como

$$\sqrt{d} - c_0 = \ \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \ \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c_1 + K_{n=2}^{+\infty} 1/c_n}$$

é também

$$\frac{1}{\sqrt{d}-c_0} = c_1 + \frac{1}{c_2} \ +\cdots+ \ \frac{1}{c_{m-1}} \ + \ \frac{1}{2c_0} \ +\cdots \ .$$

A segunda parte do enunciado resulta agora da unicidade do desenvolvimento de $1/\left(\sqrt{d}-c_0\right)$ em fracção contínua simples.

■

Nota 2.11 - A segunda parte do teorema anterior pode também provar-se sem recorrer ao lema 2.9. Supondo sem perda de generalidade $m \geq 2$, como

$$\sqrt{d} = S_{m-1}\left(K_{n=m}^{+\infty} 1/c_n\right) = S_{m-1}\left(\frac{1}{c_m + K_{n=m+1}^{+\infty} 1/c_n}\right)$$

e

$$\underset{n=m+1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \ \frac{1}{c_n} = \ \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \ \frac{1}{c_n} = \sqrt{d} - c_0,$$

por ser $c_m = 2c_0$ obtemos a identidade

$$\sqrt{d} = S_{m-1}\left(\frac{1}{c_0 + \sqrt{d}}\right)$$

que se traduz por

$$\sqrt{d} = \frac{p_{m-2} + p_{m-1}\left(c_0 + \sqrt{d}\right)}{q_{m-2} + q_{m-1}\left(c_0 + \sqrt{d}\right)}.$$

Temos então

$$(q_{m-2} + q_{m-1}c_0 - p_{m-1})\sqrt{d} = p_{m-2} + p_{m-1}c_0 - q_{m-1}d,$$

e por $\sqrt{d}$ ser irracional daqui resulta $q_{m-2} + q_{m-1}c_0 - p_{m-1} = 0$, ou seja,

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} = c_0 + \frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, como $q_0 = 1$, $q_1 = c_1$ e

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = c_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \text{ se } n \geq 1,$$

usando indução deduz-se

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = c_n + \frac{1}{c_{n-1}} + \frac{1}{c_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{c_1}.$$

A relação (2.12) traduz-se assim por

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_{m-1}} = \frac{1}{c_{m-1}} + \frac{1}{c_{m-2}} + \cdots + \frac{1}{c_1}$$

e esta identidade exige $c_k = c_{m-k}$ se $1 \leq k \leq m-1$. Efectivamente, se k fosse o menor índice para o qual $c_k \neq c_{m-k}$ teríamos

$$c_k + \frac{1}{u} = c_{m-k} + \frac{1}{v}$$

com

$$u = c_{k+1} + \frac{1}{c_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{c_{m-1}} \geq 1$$

e

$$v = c_{m-k+1} + \frac{1}{c_{m-k+2}} + \cdots + \frac{1}{c_1} \geq 1.$$

Supondo por exemplo $u < v$, seria então $0 < 1/u - 1/v \leq 1 - 1/v < 1$, o que é incompatível com a condição

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = c_{m-k} - c_k \in \mathbb{Z}.$$

O algoritmo descrito no teorema 2.4 só permite obter a sucessão completa dos convergentes de um número irracional ξ se for conhecido o valor exacto de ξ. No entanto, no caso de ξ ser um irracional quadrático da forma $r + s\sqrt{d}$ é possível obter o seu desenvolvimente em fracção contínua simples através de um algoritmo que apenas envolve a parte inteira de $\sqrt{d}$. Começaremos por provar um resultado auxiliar:

Lema 2.12 - *Dados $x \in \mathbb{R}$ e um inteiro positivo n, tem-se*

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Demonstração. Sejam $m = \lfloor x \rfloor$, $\delta = x - m$ e $q = \lfloor m/n \rfloor$. Temos então

$$0 \leq \frac{m}{n} - q < 1,$$

e como $m - nq$ é inteiro daqui resulta $0 \leq m - nq \leq n - 1$. Dado que $0 \leq \delta < 1$ é assim

$$0 \leq x - nq \leq n + \delta - 1 < n$$

e portanto

$$0 \leq \frac{x}{n} - q < 1$$

pelo que

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor .$$

■

Podemos agora descrever o algoritmo que tínhamos referido:

Teorema 2.13 (Euler, 1759) - *Dado um número irracional da forma $\xi = r + s\sqrt{d}$ com r, s racionais e $d > 0$ inteiro, sejam $c_0 = \lfloor \xi \rfloor$ e a_0 e b_0 inteiros tais que*

$$\xi = \frac{a_0 + \sqrt{d}}{b_0} \quad e \quad \frac{d - a_0^2}{b_0} \in \mathbb{Z}.$$

Definindo sucessões $(a_k)_{k\geq 0}$, $(b_k)_{k\geq 0}$ e $(c_k)_{k\geq 0}$ por

$$a_{k+1} = c_k b_k - a_k,\ b_{k+1} = \frac{d - a_{k+1}^2}{b_k} \ e\ c_{k+1} = \left\lfloor \frac{a_{k+1} + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor}{b_{k+1}} \right\rfloor ,$$

os a_k e b_k são inteiros e tem-se

$$\xi = c_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}.$$

Demonstração. Comecemos por ver que é possível escolher inteiros a_0 e b_0 que verifiquem as condições do enunciado. Efectivamente, como ξ tem a forma $\left(-b \pm \sqrt{d}\right)/2a$ com $d = b^2 - 4ac$ e $a, b, c \in \mathbb{Z}$, basta tomar $a_0 = -b$ e $b_0 = 2a$, ou $a_0 = b$ e $b_0 = -2a$, consoante seja $\xi = \left(-b + \sqrt{d}\right)/2a$ ou $\xi = \left(-b - \sqrt{d}\right)/2a$.

Vamos agora usar indução para provar que os a_k e b_k são inteiros, $b_k \neq 0$ e $\left(d - a_k^2\right)/b_k$ é inteiro. Como estas propriedades são válidas para $k = 0$, tome-se

$k \geq 0$ e suponha-se que elas também são válidas para k. Das definições resulta então directamente que a_{k+1} é inteiro, e como $a_{k+1} + a_k = c_k b_k$ resulta também

$$b_{k+1} = \frac{d - a_{k+1}^2}{b_k} = \frac{d - a_k^2 - \left(a_{k+1}^2 - a_k^2\right)}{b_k} = \frac{d - a_k^2}{b_k} - c_k \left(a_{k+1} - a_k\right)$$

pelo que b_{k+1} é inteiro. O facto de d não ser um quadrado perfeito implica $b_{k+1} \neq 0$, e como $\left(d - a_{k+1}^2\right)/b_{k+1} = b_k \in \mathbb{Z}$ conclui-se que aquelas propriedades se conservam válidas para $k+1$.

Sendo agora (ξ_k) a sucessão definida no teorema 2.4 vamos provar que para todo o $k \geq 0$ é

$$\xi_k = \frac{a_k + \sqrt{d}}{b_k}. \tag{2.13}$$

Como $\xi_0 = \xi$ esta relação é efectivamente válida para $k = 0$. Tomando $k \geq 0$ e admitindo que ela é válida para k, atendendo ao lema anterior e à definição de c_k temos

$$\xi_{k+1} = \frac{1}{\xi_k - \lfloor \xi_k \rfloor} = \frac{1}{\xi_k - c_k}$$

o que implica

$$\xi_{k+1} = \frac{b_k}{a_k - b_k c_k + \sqrt{d}} = \frac{b_k}{\sqrt{d} - a_{k+1}} = \frac{b_k \left(\sqrt{d} + a_{k+1}\right)}{d - a_{k+1}^2} = \frac{\sqrt{d} + a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

e a relação mantém-se válida para $k+1$. É então

$$c_k = \left\lfloor \frac{a_k + \sqrt{d}}{b_k} \right\rfloor = \lfloor \xi_k \rfloor \text{ se } k \geq 0,$$

pelo que (c_n) coincide com a sucessão definida no teorema 2.4 e o desenvolvimento de ξ resulta agora desse teorema.

■

Exemplo 2.14 - *Dado um inteiro $n \geq 2$ tem-se*

$$\sqrt{n^2 + 2n - 1} = \left[n; \overline{1, n-1, 1, 2n}\right].$$

Efectivamente, aplicando o algoritmo do teorema anterior, para $0 \leq k \leq 5$ os tripletos (a_k, b_k, c_k) obtidos são

$$(0,1,n), (n, 2n-1, 1), (n-1, 2, n-1), (n-1, 2n-1, 1), (n, 1, 2n), (n, 2n-1, 1).$$

Temos então $(a_5, b_5, c_5) = (a_1, b_1, c_1)$ e isto mostra que a fracção contínua é periódica a partir da ordem 1 com período de comprimento 4.

Corolário 1 - *Seja ξ um irracional quadrático e suponha-se que o seu desenvolvimento em fracção contínua simples é periódico a partir da ordem k. Então*

as constantes a_n, b_n definidas no teorema anterior são positivas para todo $n \geq k$ e tem-se

$$0 < a_n < \sqrt{d},\ \sqrt{d} - a_n < b_n < \sqrt{d} + a_n \ e \ \ c_n \leq 2\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor .$$

Demonstração. Nas condições do enunciado a relação (2.13) e o corolário do teorema 2.4 mostram que para cada $n \geq k$ o número

$$\xi_n = \frac{\sqrt{d} + a_n}{b_n}$$

é representado por uma fracção contínua simples puramente periódica. As desigualdades que envolvem a_n e b_n resultam então directamente do corolário do teorema 2.8, e atendendo ao teorema anterior temos agora

$$c_n = \left\lfloor \frac{a_n + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor}{b_n} \right\rfloor \leq a_n + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \leq 2\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor .$$

■

Exemplo 2.15 - *O desenvolvimento em fracções simples de um irracional quadrático da forma $\xi = r + s\sqrt{d}$ com r, s racionais e $d > 0$ inteiro, tem um período cujo comprimento não excede $\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$.*

Efectivamente, se o desenvolvimento for periódico a partir da ordem k, para cada $n \geq k$ o par (a_n, b_n) verifica as condições

$$1 \leq a_n \leq \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \quad \text{e} \quad b_n = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor - a_n + j \ \ \text{com } 1 \leq j \leq 2a_n.$$

O número de pares distintos deste tipo não excede então

$$l = \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{d} \rfloor} 2j = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$$

pelo que dados $l + 1$ pares consecutivos (a_n, b_n) existem índices j e $m + j$ tais que $(a_j, b_j) = (a_{m+j}, b_{m+j})$. Conclui-se assim que o comprimento do período do desenvolvimento é inferior a $l + 1$.

Nota 2.16 - O teorema 2.13 mostra que além de se verificarem as desigualdades referidas no corolário 1, cada b_n é um divisor de $d - a_n^2$. Usando estimativas sobre o comportamento assimptótico do número de divisores de um número inteiro prova-se que para cada $\varepsilon > 0$ o comprimento T do período destes desenvolvimentos verifica a condição $T = O\left(d^{1/2+\varepsilon}\right)$ quando $d \to +\infty$, e prova-se também que a constante $1/2$ é aqui a menor possível (cf. Hickerson, 1973).

Corolário 2 - *Sejam ξ um número irracional da forma $\sqrt{d}$ com $d > 0$ inteiro, e m o comprimento do período da fracção contínua simples que o representa. Com as notações do teorema anterior é então $b_n = 1$ sse n for múltiplo de m, e $c_n \leq c_0$ se isso não suceder.*

Demonstração. Como o desenvolvimento de $\sqrt{d}$ é periódico a partir da ordem 1 o corolário anterior mostra que os b_n são positivos. Se n for múltiplo de m, do teorema 2.10 resulta $c_n = 2c_0$ pelo que as relações $a_n \leq \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = c_0$ e

$$c_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{d} + a_n}{b_n} \right\rfloor$$

exigem então $b_n = 1$ e $a_n = c_0$. Atendendo a (2.13) temos assim $\xi_n = c_0 + \sqrt{d}$ e em particular é

$$\xi_m = c_0 + \sqrt{d}.$$

Reciprocamente, supondo $b_n = 1$ o corolário anterior implica

$$\sqrt{d} > a_n > \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor - 1$$

pelo que $a_n = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = c_0$. De (2.13) resulta assim

$$\xi_n = c_0 + \sqrt{d} = \xi_m,$$

e isto mostra que n é múltiplo do comprimento m do período. Se n não for múltiplo de m é então necessariamente $b_n \geq 2$ o que implica

$$c_n \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{d} + a_n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = c_0.$$

■

O número e está na base de alguns desenvolvimentos notáveis em forma de fracção contínua simples que serão estabelecidos na secção 10 e foram obtidos por Euler em 1737. Temos efectivamente (cf. teorema 10.9)

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, ..., 1, 1, 2n, ...],$$

e para cada inteiro $m \geq 2$,

$$\sqrt[m]{e} = [1; m-1, 1, 1, 3m-1, 1, 1, 5m-1, ..., (2n-1)m-1, 1, 1, ...].$$

No corolário 2 do teorema 10.6 obtém-se ainda o desenvolvimento

$$\frac{e^{1/m} - 1}{e^{1/m} + 1} = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2m\,(2n-1)} \quad \text{com } m \in \mathbb{Z}^+.$$

Não se conhece o desenvolvimento completo de π sob a forma de fracção contínua simples mas o algoritmo descrito no teorema 2.4 conduz a

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, ...],$$

o que corresponde aos convergentes

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, ...$$

Para esta fracção contínua, o convergente

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3.142857...$$

foi reconhecido por Arquimedes como fornecendo uma boa aproximação de π. A aproximação

$$\pi \simeq \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3.\,14159292...$$

era já conhecida dos matemáticos chineses do século V, e do corolário 1 do teorema 2.2 deduz-se

$$\left|\frac{355}{113} - \pi\right| < \frac{1}{113 \times 33102} < 2.7 \times 10^{-7}.$$

Usando a estimativa indicada no exemplo 2.3 obtém-se ainda

$$\pi \simeq \frac{355}{113} - \frac{1}{2 \times 113}\left(\frac{1}{113 + 33102} + \frac{1}{33102}\right) = 3.\,141\,592\,653\,466\,...$$

com um erro de módulo inferior a

$$\frac{1}{2 \times 33102\,(113 + 33102)} < 4.6 \times 10^{-10}.$$

O teorema seguinte e os respectivos corolários esclarecem o motivo porque é tão eficaz a aproximação de um número irracional pelos convergentes da fracção contínua simples que o representa.

Teorema 2.17 - *Sejam ξ um número irracional e (p_n/q_n) a sucessão dos convergentes respectivos. Dados inteiros p e $q > 0$, se para algum índice k for*

$$|q\xi - p| < |q_k\xi - p_k|$$

tem-se necessariamente $q \geq q_{k+1}$.

Demonstração. Suponha-se que a desigualdade do enunciado é válida e que $q < q_{k+1}$. Sendo m e n as soluções do sistema

$$\begin{cases} mp_k + np_{k+1} = p \\ mq_k + nq_{k+1} = q \end{cases}, \tag{2.14}$$

de (2.3) deduz-se

$$m = (-1)^{k+1} (pq_{k+1} - qp_{k+1})$$

e

$$n = (-1)^{k} (pq_k - qp_k)$$

pelo que m e n são inteiros.

Se $m = 0$ temos então $pq_{k+1} = qp_{k+1}$, e como q_{k+1} é primo com p_{k+1} isto implica que q seja múltiplo de q_{k+1}, o que contraria a hipótese $q < q_{k+1}$. Supondo $n = 0$, de (2.14) resulta $p = mp_k$ e $q = mq_k$ pelo que

$$|q\xi - p| = |m| \, |q_k\xi - p_k| \geq |q_k\xi - p_k|$$

o que contraria a hipótese $|q\xi - p| < |q_k\xi - p_k|$. Como q_k, q_{k+1} e q são positivos e $q < q_{k+1}$, a segunda das identidades (2.14) mostra que m e n têm sinais opostos. Por ser

$$(q_k\xi - p_k)(q_{k+1}\xi - p_{k+1}) = q_k q_{k+1} \left(\xi - \frac{p_k}{q_k}\right)\left(\xi - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) < 0$$

segue-se que $m(q_k\xi - p_k)$ e $n(q_{k+1}\xi - p_{k+1})$ têm o mesmo sinal, e de (2.14) resulta então

$$\begin{aligned} |q\xi - p| &= |m(q_k\xi - p_k) + n(q_{k+1}\xi - p_{k+1})| \\ &= |m(q_k\xi - p_k)| + |n(q_{k+1}\xi - p_{k+1})| \\ &\geq |m(q_k\xi - p_k)| \geq |q_k\xi - p_k|, \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese $|q\xi - p| < |q_k\xi - p_k|$.

■

Corolário 1 - *Sejam ξ um número irracional e p e $q > 0$ dois inteiros. Então para todos os inteiros m e n tais que $0 < n < q$ tem-se*

$$|q\xi - p| < |n\xi - m|$$

sse p/q for um convergente de ξ.

Demonstração. Se p/q for um convergente p_k/q_k de ξ e $1 \leq n < q = q_k$, é necessariamente $k \geq 1$ e tem-se

$$|q_{k-1}\xi - p_{k-1}| \leq |n\xi - m|$$

pois do teorema anterior resulta que a relação $|n\xi - m| < |q_{k-1}\xi - p_{k-1}|$ exige $n \geq q_k$. Como o corolário 2 do teorema 2.2 mostra que

$$|q_k\xi - p_k| < |q_{k-1}\xi - p_{k-1}|$$

conclui-se a desigualdade $|q\xi - p| < |n\xi - m|$.

Reciprocamente, se p/q não for um convergente de ξ e $q_k < q < q_{k+1}$, do teorema anterior resulta

$$|q_k\xi - p_k| \leq |q\xi - p|$$

e a condição do enunciado não se verifica com $n = q_k$.

■

Corolário 2 - *Sejam ξ um número irracional e (p_n/q_n) a sucessão dos convergentes respectivos. Dados dois inteiros p e $q > 0$, se para algum índice k for*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right|,$$

tem-se necessariamente $q > q_k$.

Demonstração. Supondo que a desigualdade do enunciado é válida e $q \leq q_k$ teríamos

$$|q\xi - p| = q\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q_k\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| = |q_k\xi - p_k|$$

o que contraria o teorema anterior.

■

Nota 2.18 - No corolário anterior a conclusão $q > q_k$ não pode ser substituída por $q \geq q_{k+1}$ como sucede no teorema 2.17. Um contra-exemplo é dado pelo número π para o qual se tem

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}$$

e

$$\left|\pi - \frac{179}{57}\right| < \left|\pi - \frac{22}{7}\right|.$$

Pode no entanto verificar-se que as condições do corolário anterior implicam $q > q_{k+1}/2$. Temos efectivamente

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\frac{p}{q} - \xi\right| + \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < 2\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{2}{q_k q_{k+1}}$$

e multiplicando por qq_k obtém-se

$$0 < |pq_k - p_k q| < \frac{2q}{q_{k+1}}.$$

Como $|pq_k - p_k q|$ é um inteiro, isto exige $2q/q_{k+1} > 1$ e portanto $q > q_{k+1}/2$.

Se $\xi - p/q$ e $\xi - p_k/q_k$ tiverem o mesmo sinal pode ainda concluir-se que as condições do corolário anterior exigem $q > q_{k+1}$. Com efeito, da relação $|\xi - p/q| < |\xi - p_k/q_k|$ resulta agora

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

o que conduz à desigualdade

$$0 < |pq_k - p_k q| < \frac{q}{q_{k+1}}.$$

Teorema 2.19 (Legendre, 1797) - *Dados dois convergentes consecutivos de um número irracional ξ, um deles é uma fracção p/q tal que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Reciprocamente, se p e $q > 0$ são inteiros que verificam esta desigualdade então p/q é um convergente de ξ.

Demonstração. Dados dois convergentes consecutivos p_n/q_n e p_{n+1}/q_{n+1} de ξ temos

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

e da relação

$$\left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}}\right)^2 > 0$$

vem

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Por outro lado, como $\xi - p_n/q_n$ e $\xi - p_{n+1}/q_{n+1}$ têm sinais opostos, é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|$$

e daqui resulta

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

A desigualdade do enunciado não pode então ser falsa para os dois aproximantes p_n/q_n e p_{n+1}/q_{n+1}.

Reciprocamente suponha-se que p/q verifica a relação do enunciado. Sendo m e $n > 0$ inteiros tais que

$$|n\xi - m| \leq |q\xi - p| \tag{2.15}$$

é então

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{m}{n} - \xi\right| + \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{|q\xi - p|}{n} + \frac{|q\xi - p|}{q}$$

e obtém-se a desigualdade

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2nq} + \frac{1}{2q^2}.$$

Por outro lado, se n não é múltiplo de q tem-se $mq \neq np$ pelo que

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{nq}$$

e portanto

$$\frac{1}{2nq} + \frac{1}{2q^2} > \frac{1}{nq},$$

o que implica $n > q$. Assim a relação (2.15) exige $n \geq q$ e o corolário 1 do teorema anterior mostra que p/q é um convergente de ξ.

■

Provaremos agora um teorema que aprofunda o resultado obtido no teorema anterior.

Teorema 2.20 (Hurwitz, 1891) - *Dados três convergentes consecutivos de um número irracional ξ, um deles é uma fracção p/q tal que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Demonstração. Supondo que para um certo índice n a relação do enunciado é falsa quando $p/q = p_{n-1}/q_{n-1}$ e $p/q = p_n/q_n$, temos

$$\left|\xi - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_{n-1}^2} + \frac{1}{q_n^2}\right),$$

Como $\xi - p_{n-1}/q_{n-1}$ e $\xi - p_n/q_n$ têm sinais opostos é também

$$\left|\xi - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n-1}q_n},$$

pelo que

$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_{n-1}^2} + \frac{1}{q_n^2}\right).$$

Pondo

$$h_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

temos então

$$\sqrt{5} \geq h_n + h_n^{-1}. \tag{2.16}$$

Como a função f definida para $x \geq 1$ por $f(x) = x + x^{-1}$ é estritamente crescente e

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$$

segue-se que a condição (2.16) exige

$$h_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

o que equivale a

$$h_n^{-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Sendo $\xi = c_0 + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ e atendendo à relação $q_{n+1} = c_{n+1}q_n + q_{n-1}$, temos assim

$$h_{n+1} = c_{n+1} + h_n^{-1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

mas se a condição do enunciado fosse também falsa para $p/q = p_{n+1}/q_{n+1}$ a desigualdade correspondente a (2.16) seria agora

$$\sqrt{5} \geq h_{n+1} + h_{n+1}^{-1},$$

o que exige

$$h_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

Do teorema de Hurwitz resulta imediatamente o seguinte resultado:

Corolário - *Para cada número irracional ξ existe uma infinidade de números racionais p/q tais que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

■

Podemos ainda provar que o resultado anterior seria falso se $\sqrt{5}$ fosse substituído por uma constante superior:

Teorema 2.21 - *Se $C > \sqrt{5}$ existe um número irracional ξ tal que a relação*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Cq^2}$$

não é válida para qualquer conjunto infinito de números racionais p/q.

Demonstração. Vamos provar que se ξ for o úmero de ouro $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ existe um inteiro $k \geq 0$ tal que a relação do enunciado é falsa se p/q não for um convergente de ξ com ordem inferior a k. Atendendo ao exemplo 1.16, para o desenvolvimento de ξ em fracção contínua simples tem-se $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$

se $n \geq 1$ e $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ se $n \geq 0$. Como é $q_0 = 1 = p_{-1}$ e $q_1 = 1 = p_0$ conclui-se então $q_n = p_{n-1}$ se $n \geq 0$, pelo que

$$\lim \frac{q_{n-1}}{q_n} = \lim \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{1}{\xi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Definindo agora uma sucessão (ξ_n) por

$$\xi_0 = \xi \ \text{ e } \ \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - 1} \text{ se } n \geq 0,$$

e usando indução, verifica-se imediatamente que para todo $n \geq 0$ é

$$\xi_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, como na demonstração do teorema 2.4 temos

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|S_n\left(\frac{1}{\xi_{n+1}}\right) - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2\left(\xi_{n+1} + q_{n-1}/q_n\right)} \text{ se } n \geq 0.$$

Atendendo a que

$$\lim\left(\xi_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = \sqrt{5},$$

dado $C > \sqrt{5}$ existe então uma ordem k tal que

$$\xi_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} < C \ \text{ se } n \geq k$$

pelo que

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{Cq_n^2} \ \text{ se } n \geq k.$$

Conclui-se assim que é finito o conjunto dos números racionais p/q para os quais

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Cq^2}$$

pois o teorema 2.19 mostra que esta condição exige que p/q seja um convergente de ξ.

■

Os resultados obtidos sobre os convergentes dos números irracionais quadráticos permitem determinar as soluções das chamadas *equações de Pell*, que são as equações da forma

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2.17}$$

em que $d \in \mathbb{Z}^+$ não é um quadrado perfeito e se procuram soluções $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.22 (Lagrange, 1768) - *As soluções (x, y) da equação (2.17) são os pares (p_n, q_n) em que p_n/q_n é o convergente de ordem n do desenvolvimento de $\sqrt{d}$ em fracção contínua simples e $n+1$ é um múltiplo par do comprimento do respectivo período.*

Demonstração. Suponha-se que p, q são inteiros positivos que verificam a condição $p^2 - q^2 d = 1$. Como $p > q\sqrt{d}$ temos

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q\left(p + q\sqrt{d}\right)} < \frac{1}{2q^2\sqrt{d}} < \frac{1}{2q^2}$$

e o teorema 2.19 mostra então que p/q é necessariamente um convergente de $\sqrt{d}$.

Sejam agora $\xi = \sqrt{d}$ e $(\xi_k), (a_k), (b_k)$ e (c_k) as sucessões definidas nos teoremas 2.4 e 2.13. Atendendo às relações (2.7) e (2.13), para cada $n \geq 0$ temos

$$\sqrt{d} = \frac{p_{n-1} + p_n \xi_{n+1}}{q_{n-1} + q_n \xi_{n+1}} = \frac{p_{n-1} b_{n+1} + p_n a_{n+1} + p_n \sqrt{d}}{q_{n-1} b_{n+1} + q_n a_{n+1} + q_n \sqrt{d}}$$

donde vem

$$\sqrt{d}\left(q_{n-1} b_{n+1} + q_n a_{n+1} - p_n\right) = p_{n-1} b_{n+1} + p_n a_{n+1} - q_n d.$$

Dado que $\sqrt{d}$ é irracional isto exige

$$q_{n-1} b_{n+1} + q_n a_{n+1} - p_n = p_{n-1} b_{n+1} + p_n a_{n+1} - q_n d = 0$$

e eliminando a_{n+1} entre estas equações obtém-se a identidade

$$p_n^2 - q_n^2 d = \left(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n\right) b_{n+1},$$

que atendendo a (2.3) equivale a

$$p_n^2 - q_n^2 d = (-1)^{n-1} b_{n+1}. \tag{2.18}$$

Como b_{n+1} é um inteiro positivo conclui-se que o par (p_n, q_n) é solução da equação de Pell sse $n+1$ for par e $b_{n+1} = 1$. O enunciado resulta agora directamente do corolário 2 do teorema 2.13.

■

A solução (p_n, q_n) da equação de Pell (2.17) em que $n+1$ é o menor múltiplo positivo par do comprimento do período do desenvolvimento de $\sqrt{d}$ diz-se a *solução fundamental* da equação.

Exemplo 2.23 - *Dado um número inteiro positivo n, a solução fundamental da equação de Pell*

$$x^2 - \left(n^2 + 1\right) y^2 = 1$$

é $(x,y) = \left(2n^2+1, 2n\right)$.

Efectivamente o desenvolvimento $\sqrt{n^2+1} = \left[n; \overline{2n}\right]$ tem período de comprimento 1 pelo que a solução fundamental da equação é

$$(x,y) = (p_1, q_1) = \left(2n^2+1, 2n\right).$$

A relação (2.18) permite ainda estudar a equação

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{2.19}$$

em que $d \in \mathbb{Z}^+$ não é um quadrado perfeito e se procuram soluções $x, y \in \mathbb{Z}^+$. É válido o seguinte resultado:

Teorema 2.24 - *A equação* (2.19) *tem soluções $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sse o comprimento do período do desenvolvimento de $\sqrt{d}$ em fracção contínua simples for ímpar. Neste caso as soluções são os pares (p_n, q_n) em que p_n/q_n é o convergente de ordem n deste desenvolvimento e $n+1$ é um múltiplo ímpar do comprimento do respectivo período.*

Demonstração. Se p e q são inteiros positivos tais que $p^2 - dq^2 = -1$ temos $p^2 \geq 2q^2 - 1 \geq q^2$ pelo que $p \geq q$. Como é também

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{q\left(p + q\sqrt{d}\right)} < \frac{1}{q\left(p+q\right)}$$

conclui-se a desigualdade

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

e o teorema 2.19 mostra que p/q é um convergente de $\sqrt{d}$. O enunciado resulta agora aplicando o corolário 2 do teorema 2.13 à relação (2.18).

■

Exemplo 2.25 - *Dado um inteiro positivo n, o desenvolvimento de $\sqrt{4n-1}$ em fracção contínua simples tem período de comprimento par.*

Efectivamente, dado um inteiro m temos $m^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $m^2 \equiv 1 \pmod 4$ consoante m for par ou ímpar. Em particular isto mostra que $d = 4n-1$ não é um quadrado perfeito e basta agora provar que a equação (2.19) não tem soluções inteiras. Ora tomando um par de inteiros (p,q), como $-dq^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $-dq^2 \equiv 1 \pmod 4$, a condição (2.19) exigia $p^2 \equiv -1 \pmod 4$ ou $p^2 \equiv 2 \pmod 4$ o que é impossível.

Teorema 2.26 - *Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, se $4n+1$ for um número primo o desenvolvimento de $\sqrt{4n+1}$ em fracção contínua simples tem período de comprimento ímpar.*

Demonstração. Pondo $p = 4n+1$ e atendendo ao teorema 2.24 basta provar que a equação $x^2 - py^2 = -1$ tem soluções $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Sendo (m, n) a solução fundamental da equação $x^2 - py^2 = 1$, se n fosse ímpar então $n^2 \equiv 1 \pmod 4$ pelo que $-pn^2 \equiv -1 \pmod 4$ e isto exigia $m^2 \equiv 2 \pmod 4$ o que é impossível. Segue-se que n é par e m ímpar pelo que, pondo $n = 2v$ e $m = 2u+1$, de (2.17) resulta $u(u+1) = pv^2$. Como p é primo e divide o produto $u(u+1)$, necessariamente p divide u ou $u+1$. Supondo que p divide u e sendo $u = pk$ temos $k\,(u+1) = v^2$ mas como u é primo com $u+1$ também k e $u+1$ não têm factores comuns e esta relação exige que k e $u+1$ sejam ambos quadrados perfeitos. Sendo $k = s^2$ e $u+1 = r^2$ era então $u = ps^2$ pelo que $r^2 - ps^2 = 1$ com $r \leq u+1 < m$ e $s < v < n$, o que contradiz a hipótese de (m, n) ser a solução fundamental da equação $x^2 - py^2 = 1$. Conclui-se assim que p divide $u+1$, e como anteriormente verifica-se que isto implica a existência de inteiros r e s tais que $u = r^2$ e $u+1 = ps^2$, pelo que $r^2 - ps^2 = -1$.

■

Teorema 2.27 (Legendre, 1797) - *Dado um inteiro positivo d que não seja quadrado perfeito suponha-se que o desenvolvimento de $\sqrt{d}$ em fracção contínua simples tem período de comprimento ímpar. Então d é a soma dos quadrados de dois inteiros primos entre si.*

Demonstração. Seja $m = 2k+1$ o comprimento do período do desenvolvimento em fracção contínua simples $\sqrt{d} = c_0 + K_{n=1}^{+\infty}\, 1/c_n$. Atendendo ao teorema 2.10 temos

$$c_{k-j} = c_{k+1+j} \quad \text{se} \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

e por ser $c_{k-j} = c_{m+k-j}$ se $0 \leq j \leq k-1$, é então

$$c_{k+1+j} = c_{m+k-j} \quad \text{se } 0 \leq j \leq k-1. \tag{2.20}$$

Seja agora $\xi_{k+1} = c_{k+1} + K_{n=k+2}^{+\infty}\, 1/c_n = c_0^* + K_{n=1}^{+\infty} 1/c_n^*$. Dado que o desenvolvimento de ξ_{k+1} é puramente periódico com período m, o lema 2.9 mostra que os coeficientes c_n' do desenvolvimento de $-1/\overline{\xi_{k+1}}$ verificam a condição

$$c_n' = c_{m-1-n}^* \quad \text{se} \quad 0 \leq n \leq m-1.$$

No entanto, como $c_n^* = c_{k+1+n}$, de (2.20) resulta $c_n^* = c_{m+k-n} \; = c_{m-1-n}^*$ se $0 \leq n \leq k-1$ pelo que $c_n^* = c_{m-1-n}^*$ para todo o $n \in \{0, 1, ..., m-1\}$. É então $c_n' = c_n^*$ se $0 \leq n \leq m-1$ e conclui-se que $-1/\overline{\xi_{k+1}} = \xi_{k+1}$.

Por outro lado, sendo (a_n) e (b_n) as sucessões definidas no teorema 2.13, de (2.13) resulta

$$\xi_{k+1} = \frac{\sqrt{d} + a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

pelo que

$$-\overline{\xi_{k+1}} = \frac{\sqrt{d} - a_{k+1}}{b_{k+1}},$$

e da relação $-1/\overline{\xi_{k+1}} = \xi_{k+1}$ deduz-se

$$d = a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2.$$

Suponha-se finalmente que a_{k+1} e b_{k+1} não são primos entre si e seja p um divisor primo de a_{k+1} e b_{k+1}. Como p também divide d, de (2.18) deduz-se que p divide p_k^2 e é portanto um divisor de p_k. Por outro lado, atendendo à definição dos a_n e b_n temos

$$b_k b_{k+1} = d - a_{k+1}^2 = b_{k+1}^2$$

pelo que $b_k = b_{k+1}$. Então p também divide b_k e de (2.18) resulta que p divide p_{k-1}. Conclui-se assim que p seria um divisor primo de

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{n-1}$$

o que é impossível.

■

Nota 2.28 - O recíproco do teorema anterior é falso como mostra o caso $d = 34$. Temos efectivamente $34 = 3^2 + 5^2$ e $\sqrt{34} = \left[5; \overline{1, 4, 1, 10}\right]$.

Como consequência dos dois teoremas anteriores obtemos um resultado célebre de Teoria dos Números, anunciado por Fermat em 1640 e demonstrado por Euler em 1749:

Teorema 2.29 (Fermat–Euler) - *Todo o número primo da forma* $4n + 1$ *é a soma dos quadrados de dois inteiros.*

■

3 - Fracções contínuas periódicas

Procurando generalizar o corolário do teorema 1.15, vamos agora estudar as fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ para as quais existe um inteiro $m \geq 1$ tal que

$$a_{mn+k} = a_k \text{ e } b_{mn+k} = b_k, \text{ se } n \geq 1 \text{ e } 1 \leq k \leq m.$$

Uma fracção contínua deste tipo diz-se *periódica* (cf. nota 2.5) e o menor inteiro m que verifica a condição anterior diz-se o *comprimento do período* da fracção contínua. Para as funções definidas por (1.1) e (1.2) temos assim

$$s_{mn+k} = s_k \text{ se } n \geq 1 \text{ e } 1 \leq k \leq m,$$

$$S_{mn+k} = S_{mn} \circ S_k \text{ se } 1 \leq k \leq m \text{ e } n \geq 1,$$

e também

$$S_{mn} = S_m \circ S_m \circ \cdots \circ S_m \text{ se } n \geq 1,$$

em que a composição de S_m é iterada n vezes.

Exemplo 3.1 - *Se uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ com período de comprimento m tem o valor $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$ então λ é um ponto fixo de S_m.*

Efectivamente temos então

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} S_{m+mn} = \lim_{n\to+\infty} \left(S_m\left(S_{mn}\right)\right) = S_m\left(\lim_{n\to+\infty} S_{mn}\right) = S_m\left(\lambda\right).$$

No estudo da convergência destas fracções contínuas desempenha assim um papel central a análise dos pontos fixos de S_m, e atendendo ao exemplo 1.3 podemos limitar-nos a tratar fracções contínuas não singulares.

Exemplo 3.2 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m. Então ∞ é ponto fixo de S_m sse $B_{m-1} = 0$.*

Efectivamente temos

$$S_m\left(\infty\right) = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$$

e do teorema 1.10 resulta que a condição $B_{m-1} = 0$ implica $A_{m-1} \neq 0$.

Exemplo 3.3 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua com período de comprimento m. Se ∞ é ponto fixo de S_m então a fracção contínua diverge.*

Efectivamente é então $S_{m-1}\left(0\right) = S_m\left(\infty\right) = \infty$ pelo que

$$S_{mn+m-1}(0) = S_{mn}\left(S_{m-1}\left(0\right)\right) = S_{mn}\left(\infty\right) = \infty \text{ se } n \geq 1,$$

e conclui-se que a sucessão $S_n(0)$ diverge.

Seja agora $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m e tal que $B_{m-1} \neq 0$. Atendendo ao Teorema 1.7 a condição $S_m(z) = z$ traduz-se por

$$\frac{A_{m-1}z + A_m}{B_{m-1}z + B_m} = z$$

que equivale a

$$B_{m-1}z^2 + (B_m - A_{m-1})\, z - A_m = 0,$$

e os pontos fixos de S_m são então dados por

$$\frac{A_{m-1} - B_m \pm \sqrt{(A_{m-1} - B_m)^2 + 4A_m B_{m-1}}}{2B_{m-1}}.$$

Pondo $D_m = A_{m-1}B_m - A_m B_{m-1}$ esta expressão pode ainda escrever-se na forma

$$\frac{A_{m-1} - B_m \pm \sqrt{(A_{m-1} + B_m)^2 - 4D_m}}{2B_{m-1}} \tag{3.1}$$

e o teorema 1.10 mostra que $D_m \neq 0$.

Os dois lemas seguintes permitem exprimir S_{mn} em termos dos pontos fixos de S_m.

Lema 3.4 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m, e suponha-se que $x \in \mathbb{C}$ é o único ponto fixo de S_m. Sejam ainda*

$$h = \frac{2B_{m-1}}{A_{m-1} + B_m},$$

e λ e φ_n as funções definidas em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$\lambda(z) = \frac{1}{z - x} \;\; e \;\; \varphi_n(z) = z + nh \;\; se \;\; n \geq 1.$$

Então $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e para cada $n \geq 1$ é

$$S_{mn} = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \lambda.$$

Demonstração. Nas condições do enunciado a relação (3.1) mostra que

$$(A_{m-1} + B_m)^2 = 4D_m \neq 0 \tag{3.2}$$

e

$$x = \frac{A_{m-1} - B_m}{2B_{m-1}}. \tag{3.3}$$

Em particular as relações $B_{m-1} \neq 0$ e $A_{m-1} + B_m \neq 0$ mostram que $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, dado $z \in \mathbb{C}$ e atendendo a (1.6) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_m(z)-x} &= \frac{1}{S_m(z)-S_m(x)} = \frac{(B_{m-1}x+B_m)(B_{m-1}z+B_m)}{D_m(z-x)} \\ &= \frac{B_{m-1}x+B_m}{D_m}\left(B_{m-1}+\frac{B_{m-1}x+B_m}{z-x}\right),\end{aligned}$$

e como (3.3) implica

$$B_{m-1}x+B_m = \frac{A_{m-1}+B_m}{2},$$

de (3.2) resulta

$$\frac{B_{m-1}x+B_m}{D_m} = \frac{2}{A_{m-1}+B_m} \quad \text{e} \quad \frac{(B_{m-1}x+B_m)^2}{D_m} = 1.$$

Obtém-se assim

$$\frac{1}{S_m(z)-x} = \frac{1}{z-x}+h \ \text{ se } \ z \in \mathbb{C},$$

e como esta relação se mantém válida por continuidade quando $z=\infty$, para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$ é

$$(\lambda \circ S_m)(z) = \frac{1}{z-x}+h = \varphi_1\left(\frac{1}{z-x}\right) = (\varphi_1 \circ \lambda)(z),$$

o que implica

$$S_m = \lambda^{-1} \circ \varphi_1 \circ \lambda.$$

A fórmula do enunciado é então válida para $n=1$, e admitindo que ela é válida para um dado $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}S_{m(n+1)} &= S_{mn} \circ S_m = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \lambda \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_1 \circ \lambda = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \varphi_1 \circ \lambda \\ &= \lambda^{-1} \circ \varphi_{n+1} \circ \lambda\end{aligned}$$

pelo que ela é ainda válida para $n+1$.

■

Lema 3.5 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m e suponha-se que os pontos fixos de S_m são $x, y \in \mathbb{C}$ com $x \neq y$. Sejam ainda*

$$R = \frac{B_{m-1}y+B_m}{B_{m-1}x+B_m},$$

e λ e φ_n as funções definidas em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$\lambda(z) = \frac{z-x}{z-y} \quad e \quad \varphi_n(z) = R^n z \quad se \quad n \geq 1.$$

Então $R \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *e para cada* $n \geq 1$ *é*

$$S_{mn} = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \lambda.$$

Demonstração. Atendendo a (3.1) é

$$\begin{aligned} & (B_{m-1}x + B_m)\,(B_{m-1}y + B_m) \\ = \quad & \frac{(A_{m-1} + B_m)^2 - \left(\sqrt{(A_{m-1} + B_m)^2 - 4D_m}\right)^2}{4} \end{aligned}$$

e portanto

$$(B_{m-1}x + B_m)\,(B_{m-1}y + B_m) = D_m \neq 0 \tag{3.4}$$

pelo que $R \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dado $z \in \mathbb{C}$ temos por outro lado

$$\frac{S_m(z) - x}{S_m(z) - y} = \frac{S_m(z) - S_m(x)}{S_m(z) - S_m(y)},$$

e a relação (1.6) conduz a

$$\frac{S_m(z) - S_m(x)}{S_m(z) - S_m(y)} = \frac{(B_{m-1}y + B_m)\,(z - x)}{(B_{m-1}x + B_m)\,(z - y)}.$$

É então

$$\frac{S_m(z) - x}{S_m(z) - y} = R\frac{z - x}{z - y} \quad \text{se } z \in \mathbb{C}$$

e por continuidade esta relação permanece válida quando $z = \infty$. Para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ é assim

$$\frac{S_m(z) - x}{S_m(z) - y} = \lambda\,(S_m(z))$$

pelo que

$$(\lambda \circ S_m)\,(z) = R\lambda\,(z) = (\varphi_1 \circ \lambda)\,(z) \quad \text{se } z \in \mathbb{C}_\infty,$$

e portanto

$$S_m = \lambda^{-1} \circ \varphi_1 \circ \lambda.$$

A fórmula do enunciado é então válida para $n = 1$, e como na demonstração do teorema anterior prova-se que se ela for válida para um dado $n \geq 1$ é também válida para $n + 1$.

■

Como consequência do lema 3.4 obtemos imediatamente o resultado seguinte.

Teorema 3.6 - *Seja* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *uma fracção contínua não singular com período de comprimento* m. *Se* $x \in \mathbb{C}$ *for o único ponto fixo de* S_m *então a fracção contínua converge e tem-se* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = x$.

Demonstração. Aplicando o lema 3.4, para cada $k \in \{1, ..., m\}$ temos

$$S_{mn+k}(0) = S_{mn}\left(S_k\left(0\right)\right) = \lambda^{-1}\left(S_k\left(0\right) + nh\right) \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

com $\lambda\left(z\right) = 1/\left(z - x\right)$ e $h \neq 0$. É então

$$\lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}\left(\infty\right) = x$$

e isto mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = x$.

■

O lema 3.5 conduz por sua vez aos dois teoremas seguintes.

Teorema 3.7 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m. Se os seus pontos fixos $x, y \in \mathbb{C}$ forem distintos e*

$$\left|B_{m-1}x + B_m\right| = \left|B_{m-1}y + B_m\right|,$$

então a fracção contínua diverge em $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Com as notações do lema 3.5 temos

$$R = e^{i\theta} \ \text{ com } 0 < |\theta| \leq \pi,$$

e para cada $k \in \{1, ..., m\}$ é então

$$S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}\left(e^{in\theta}\frac{S_k\left(0\right) - x}{S_k\left(0\right) - y}\right) \quad \text{se} \quad n \geq 1.$$

Isto mostra que $S_{mn+k}(0)$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ se $S_k\left(0\right) \notin \{x, y\}$, pois uma relação da forma

$$\lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0) = a \in \mathbb{C}_\infty$$

exigia

$$\lim_{n \to +\infty} e^{in\theta}\frac{S_k\left(0\right) - x}{S_k\left(0\right) - y} = \lambda\left(a\right),$$

o que é impossível.

Como $S_m\left(x\right) = x$, $S_m\left(y\right) = y$ e $x, y \in \mathbb{C}$, a injectividade de S_m implica que $S_m\left(\infty\right) \notin \{x, y\}$. Dado que $S_{m-1}\left(0\right) = S_m\left(\infty\right)$, se $m \geq 2$ conclui-se então que $S_{mn+k}\left(0\right)$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ quando $k = m - 1$ e isto mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$. Finalmente, se $m = 1$ é $S_m(0) = a_1/b_1 \neq 0$ pelo que 0 não é ponto fixo de S_m e portanto $S_m(0) \notin \{x, y\}$. Então $S_{mn+k}\left(0\right)$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ quando $k = m$, o que implica ainda a divergência em $\mathbb{C}_\infty$ de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$.

■

Teorema 3.8 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m. Supondo que os pontos fixos x, y de S_m são finitos e verificam a condição*

$$|B_{m-1}x + B_m| \neq |B_{m-1}y + B_m|,$$

se x e y forem escolhidos de modo a que

$$|B_{m-1}y + B_m| < |B_{m-1}x + B_m|,$$

então

1 - Para cada $k \in \{1, ..., m\}$ é $\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = x$ se $S_k(0) \neq y$, e $\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = y$ se $S_k(0) = y$.

2 - A fracção contínua converge sse $S_k(0) \neq y$ para todo o $k \in \{1, ..., m\}$, e neste caso tem-se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = x$.

Demonstração. Com as notações do lema 3.5 é agora $|R| < 1$, e para cada $k \in \{1, ..., m\}$ temos

$$S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}\left(R^n \frac{S_k(0) - x}{S_k(0) - y}\right) \quad \text{se} \quad n \geq 1.$$

É então

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(0) = x \quad \text{se} \quad S_k(0) \neq y$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(\infty) = y \quad \text{se} \quad S_k(0) = y,$$

o que estabelece a primeira parte do enunciado.

Se $S_k(0) \neq y$ para todo o $k \in \{1, ..., m\}$, resulta então que a fracção contínua converge e tem o valor x. Se para algum k for $S_k(0) = y$ conclui-se que a fracção contínua diverge pois a relação $S_k(0) = y$ não pode ser verdadeira para todo o $k \in \{1, ..., m\}$. Efectivamente, se $m \geq 2$ o exemplo 1.2 mostra que $S_{m-1}(0)$ e $S_m(0)$ são distintos, e se $m = 1$ temos $S_m(0) = a_1/b_1 \neq 0$ pelo que $y \neq 0$ e portanto $S_1(0) \neq S_1(y) = y$.

■

Exemplo 3.9 - *Uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ com período de comprimento 2 é convergente se $b_1 b_2 \neq 0$.*

Efectivamente, atendendo ao exemplo 1.3 podemos supor $a_1 a_2 \neq 0$. Como $B_1 = b_1 \neq 0$, os pontos fixos x e y de S_2 são finitos e o teorema 3.6 mostra que basta considerar o caso $x \neq y$. Dado que x e y são soluções da equação

$$B_1 z^2 + (B_2 - A_1) z - A_2 = 0$$

e se tem $A_2 = a_1 b_2 \neq 0$, segue-se que $xy \neq 0$. Da injectividade de S_2 resulta então $S_2(0) \neq S_2(y) = y$ e também $S_1(0) = S_2(\infty) \neq S_2(y)$ pelo que é satisfeita a condição de convergência dada pelo teorema anterior.

Nota 3.10 - O teorema 1.15 pode ser facilmente interpretado em termos dos três teoremas anteriores. A fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a/1$ tem período de comprimento 1, e como

$$S_1(z) = \frac{a}{1+z}$$

os pontos fixos de S_1 são

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Pondo $\sqrt{1+4a} = p + iq$ com $p, q \in \mathbb{R}$ e $p \geq 0$, segue-se que

$$|1+y| \leq |1+x|$$

e que a igualdade é válida sse $p = 0$, o que equivale a $a \in]-\infty, -1/4]$. Excluindo o caso trivial $a = 0$, como $x = y$ equivale a $a = -1/4$, os teoremas 3.6 e 3.7 mostram respectivamente que $K_{n=1}^{+\infty} a/1 = x$ se $a = -1/4$ e que há divergência quando $a \in]-\infty, -1/4[$. Notando ainda que a condição $a \neq 0$ implica $y \neq 0$, é $S_1(0) \neq S_1(y) = y$ e do teorema 3.8 resulta $K_{n=1}^{+\infty} a/1 = x$ se $a \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, -1/4]$.

Quando uma fracção contínua não singular tem período de comprimento m e ∞ é ponto fixo de S_m, dos exemplos 3.2 e 3.3 resulta que é necessariamente $m \geq 2$ e que a fracção contínua diverge. No teorema seguinte analisa-se com mais detalhe o comportamento desta classe de fracções contínuas.

Teorema 3.11 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m, e suponha-se que $x = \infty$ é ponto fixo de S_m. Tem-se então*

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

se for verificada alguma das seguintes condições:

1 - *∞ é o único ponto fixo de S_m.*

2 - *S_m tem outro ponto fixo u, $|A_{m-1}| > |B_m|$ e $S_k(0) \neq u$ para todo o $k \in \{1, ..., m\}$.*

Se isto não suceder a fracção contínua diverge em $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Como ∞ é ponto fixo de S_m temos $B_{m-1} = 0$, e a condição $A_{m-1}B_m - A_m B_{m-1} \neq 0$ exige $A_{m-1} \neq 0$ e $B_m \neq 0$. É pois

$$S_m(z) = \frac{A_{m-1}}{B_m} z + \frac{A_m}{B_m}$$

e como a condição $S_m(z) = z$ com $z \in \mathbb{C}$ equivale a

$$(A_{m-1} - B_m) z + A_m = 0,$$

a hipótese de ∞ ser o único ponto fixo de S_m implica $A_{m-1} - B_m = 0$ e $A_m \neq 0$. Neste caso é então

$$S_m(z) = z + h \text{ com } h = \frac{A_m}{B_m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{3.5}$$

e portanto

$$S_{mn}(z) = z + nh \text{ se } n \geq 1.$$

Temos assim

$$S_{mn+k}(0) = S_k(0) + nh \text{ se } n \geq 1 \text{ e } k \in \{1, ..., m\}$$

pelo que $\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \infty$ e conclui-se que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \infty$.

Suponha-se agora que S_m tem um segundo ponto fixo u. Se S_m for a função identidade a fracção contínua diverge em $\mathbb{C}_\infty$ pois neste caso tem-se $\lim_{n\to\infty} S_{mn}(0) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} S_{mn+1}(0) = S_1(0) = a_1/b_1 \neq 0$.

Se S_m não for a função identidade é então $A_{m-1} \neq B_m$ e S_m toma a forma

$$S_m(z) = rz + h \text{ com } r = \frac{A_{m-1}}{B_m} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ e } h \in \mathbb{C}.$$

Sejam agora λ e φ_n as funções definidas em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$\lambda(z) = z - u \text{ e } \varphi_n(z) = r^n z \text{ se } n \geq 1. \tag{3.6}$$

Para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$ temos então

$$(\lambda \circ S_m)(z) = S_m(z) - u = S_m(z) - S_m(u) = r(z - u) = (\varphi_1 \circ \lambda)(z)$$

pelo que $\lambda \circ S_m = \varphi_1 \circ \mu$. É pois $S_m = \lambda^{-1} \circ \varphi_1 \circ \lambda$ e por indução em n obtém-se

$$S_{mn} = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \lambda \text{ se } n \geq 1, \tag{3.7}$$

o que implica

$$S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(r^n(S_k(0) - u)) \text{ se } k \in \{1, ..., m\}. \tag{3.8}$$

Se $|r| < 1$, para cada $k \in \{1, ..., m\}$ temos assim

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(0) = u \text{ se } S_k(0) \neq \infty \tag{3.9}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(\infty) = \infty \text{ se } S_k(0) = \infty. \tag{3.10}$$

Como $S_m(0) \neq S_m(\infty) = \infty$, $S_{m-1}(0) = S_m(\infty) = \infty$ e $m - 1 \geq 1$, é então

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn}(0) = u \in \mathbb{C} \text{ e } \lim_{n\to+\infty} S_{mn+m-1}(0) = \infty,$$

o que implica a divergência em $\mathbb{C}_\infty$ de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$.

Se $|r| = 1$ é $r = e^{i\theta}$ com $0 < |\theta| \leq \pi$ pelo que

$$S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}\left(e^{in\theta}\left(S_k(0) - u\right)\right) \quad \text{se } k \in \{1, ..., m\}$$

e isto mostra que $\lim_{n\to+\infty} S_{mn}(0)$ não existe se $S_m(0) \neq u$. Temos ainda

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn}(0) = \lambda^{-1}(0) = u \ \text{ se } S_m(0) = u$$

mas como $S_{m-1}(0) = S_m(\infty) = \infty$ e $m - 1 \geq 1$, é também

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+m-1}(0) = \lambda^{-1}(\infty) = \infty \neq u$$

pelo que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$.

Supondo finalmente $r > 1$, de (3.8) resulta

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(\infty) = \infty \ \text{ se } S_k(0) \neq u \tag{3.11}$$

e conclui-se que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \infty$ se for válida a segunda condição do enunciado. Se para algum k for $S_k(0) = u$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(0) = \lambda^{-1}(0) = u \tag{3.12}$$

e isto implica que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ diverge em $\mathbb{C}_\infty$ pois, como $m - 1 \geq 1$, o exemplo 1.2 mostra que não pode ser $S_k(0) = u$ para todo o $k \in \{1, ..., m\}$.

■

Dada uma fracção contínua não singular com período de comprimento m suponha-se que os pontos fixos de S_m são $x, y \in \mathbb{C}$. Então a fracção contínua diz-se *parabólica* se $x = y$, e se $x \neq y$ diz-se que a fracção contínua é *elíptica* ou *loxodrómic*a consoante $|B_{m-1}x + B_m|$ e $|B_{m-1}y + B_m|$ sejam iguais ou distintos.

Se a fracção contínua for loxodrómica, escolhendo x e y de modo que

$$|B_{m-1}y + B_m| < |B_{m-1}x + B_m|$$

diz-se que x é o seu *ponto fixo atractor* (ingl. attracting) e que y é o seu *ponto fixo repulsor* (ingl. repelling).

Supondo agora que ∞ é ponto fixo de S_m, se este ponto fixo for único diz-se ainda que a fracção contínua é parabólica, e na demonstração do teorema anterior provou-se que isto sucede sse $A_{m-1} = B_m$ e S_m não for a função identidade. Se $A_{m-1} \neq B_m$ a fracção contínua diz-se elíptica ou loxodrómica consoante se tenha respectivamente $|A_{m-1}| = |B_m|$ ou $|A_{m-1}| \neq |B_m|$. Para as fracções contínuas loxodrómicas definem-se agora os pontos fixos atractor x e repulsor y por

$$x \in \mathbb{C} \text{ e } y = \infty \text{ se } |A_{m-1}| < |B_m|$$

e

$$x = \infty \text{ e } y \in \mathbb{C} \text{ se } |A_{m-1}| > |B_m|.$$

Nota 3.12 - As definições de ponto fixo atractor e repulsor quando ∞ é ponto fixo de S_m podem justificar-se analisando o comportamento dos pontos fixos de S_m quando esta função depende do parâmetro B_{m-1}. Com efeito, fazendo $B_{m-1} \to 0$ verifica-se que os pontos fixos atractor x e repulsor y têm limites respectivamente $x \in \mathbb{C}$ e ∞ se $|A_{m-1}/B_m| < 1$, enquanto os seus limites são respectivamente ∞ e $y \in \mathbb{C}$ se $|A_{m-1}/B_m| > 1$ (cf. teorema 11.27).

Com estas definições podemos resumir os resultados obtidos sobre a convergência das fracções contínuas periódicas no enunciado seguinte.

Teorema 3.13 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular com período de comprimento m. Se S_m for a função identidade a fracção contínua diverge em $\mathbb{C}_\infty$. Se isto não suceder, e sendo x e y os pontos fixos de S_m, então*

1- Se a fracção contínua for parabólica é $x = y$ e $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = x$.

2- Se $x \neq y$ e a fracção contínua for elíptica ela diverge em $\mathbb{C}_\infty$.

3 - Se a fracção contínua for loxodrómica e x e y forem respectivamente os seus pontos fixos atractor e repulsor, para cada $k \in \{1, ..., m\}$ tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0) = x \text{ se } S_k(0) \neq y \quad e \quad \lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0) = y \text{ se } S_k(0) = y.$$

Neste caso a fracção contínua converge em $\mathbb{C}_\infty$ sse $S_k(0) \neq y$ para cada $k \in \{1, ..., m\}$, e é então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = x$.

Demonstração. A parte do enunciado relativa à transformação identidade e às fracções contínuas parabólicas e elípticas ficou estabelecida nos teoremas 3.6, 3.7 e no teorema anterior. Quanto às fracções contínuas loxodrómicas o teorema 3.8 trata o caso em que $x, y \in \mathbb{C}$. Quando ∞ é ponto fixo de S_m o comportamento de $\lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0)$ resulta das relações (3.9) a (3.12). O teorema anterior estabelece ainda a convergência em $\mathbb{C}_\infty$ de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ quando $x = \infty$ e $S_k(0) = y$ para cada $k \in \{1, ..., m\}$, pois é então $|A_{m-1}| > |B_m|$. Finalmente, se $|A_{m-1}| < |B_m|$ é $y = \infty$ e na demonstração do teorema anterior provou-se que a condição $S_k(0) \neq y$ falha para $k = m - 1 \geq 1$, por ser então $S_{m-1}(0) = S_m(\infty) = \infty$.
■

Nota 3.14 - Nas fracções contínuas loxodrómicas o comportamento de $\lim_{n \to +\infty} S_{mn+k}(0)$ descrito no teorema anterior é conhecido por *oscilação de Thiele.*

4 - O teorema de Pringsheim

O teorema seguinte traduz um critério básico de convergência de fracções contínuas.

Teorema 4.1 (Pringsheim, 1898) - Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *uma fracção contínua tal que*

$$|b_n| \geq |a_n| + 1 \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Então a fracção contínua é convergente e tem-se

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} \right| \leq 1,$$

valendo a desigualdade estrita se para algum inteiro $n \geq 1$ *for* $|b_n| > |a_n| + 1$.

Demonstração. Tomando $n \geq 1$, da relação de recorrência

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}$$

vem

$$|B_n| \geq |b_n|\,|B_{n-1}| - |a_n|\,|B_{n-2}| \geq (|a_n| + 1)\,|B_{n-1}| - (|a_n|)\,|B_{n-2}|$$

pelo que

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq |a_n|\,(|B_{n-1}| - |B_{n-2}|)\,.$$

Como para $n = 1$ é

$$|B_{n-1}| - |B_{n-2}| = B_0 - B_{-1} = 1,$$

por indução resulta imediatamente

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq |a_1 ... a_n| \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{4.1}$$

Isto mostra que a sucessão $(|B_n|)_{n\geq 1}$ é crescente, o que implica $|B_n| \geq |B_0| = 1$ se $n \geq 1$. Para cada $n \geq 1$ temos então

$$\frac{|a_1 ... a_n|}{|B_n B_{n-1}|} \leq \frac{|B_n| - |B_{n-1}|}{|B_n B_{n-1}|},$$

ou seja,

$$\frac{|a_1 ... a_n|}{|B_n B_{n-1}|} \leq \frac{1}{|B_{n-1}|} - \frac{1}{|B_n|} \text{ se } n \geq 1. \tag{4.2}$$

Como a sucessão $(1/|B_n|)_{n\geq 0}$ converge, o mesmo sucede com a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{|B_{n-1}|}-\frac{1}{|B_n|}\right)$$

e conclui-se que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_1...a_n}{B_nB_{n-1}}$$

é absolutamente convergente. O teorema de Euler 1.11 mostra então que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ converge, e da desigualdade (4.2) resulta

$$\left|\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{a_n}{b_n}\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_1...a_n|}{|B_nB_{n-1}|}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{|B_{n-1}|}-\frac{1}{|B_n|}\right)\leq\frac{1}{|B_0|}=1.$$

Supondo finalmente que para algum $m\geq 1$ se tem $|b_m|>|a_m|+1$, como $|B_{m-1}|>0$ é então

$$|B_m|-|B_{m-1}|>|a_m|\left(|B_{m-1}|-|B_{m-2}|\right),$$

e nas relações (4.1) e (4.2) valem agora as desigualdades estritas quando $n=m$. Daqui resulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{|B_{n-1}|}-\frac{1}{|B_n|}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_1...a_n|}{|B_nB_{n-1}|}\geq\frac{1}{|B_{m-1}|}-\frac{1}{|B_m|}-\frac{|a_1...a_m|}{|B_mB_{m-1}|}>0$$

e conclui-se que a desigualdade do enunciado é estrita.

■

Nota 4.2 - O resultado anterior tinha já sido obtido por Sleszynski em 1889 e por isso é também referido como o *teorema de Sleszynski-Pringsheim*.

Exemplo 4.3 - *Dada uma fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ *tal que*

$$|b_n|\geq|a_n|+1 \text{ para todo o } n\geq 1,$$

tem-se

$$\left|\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{a_n}{b_n}\right|\geq\frac{|a_1|}{|b_1|+1}.$$

Efectivamente, aplicando o resultado do teorema anterior à fracção contínua $K_{n=2}^{+\infty}a_n/b_n$ obtém-se

$$\left|\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{a_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_1}{b_1+K_{n=2}^{+\infty}a_n/b_n}\right|\geq\frac{|a_1|}{|b_1|+\left|K_{n=2}^{+\infty}a_n/b_n\right|}\geq\frac{|a_1|}{|b_1|+1}.$$

Corolário 1 - *Uma fracção contínua da forma* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *converge se*

$$|b_n| \geq 2 \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior tomando $a_n = 1$ para cada $n \geq 1$.

■

Nota 4.4 - A constante 2 no resultado anterior é a melhor possível pois o corolário do teorema 1.15 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} 1/ib$ diverge se $b \in]-2, 2[$.

Corolário 2 (Worpitzky, 1865) - *Uma fracção contínua da forma* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ *converge se*

$$|a_n| \leq \frac{1}{4} \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Demonstração. Aplicando o teorema 1.6 com a sucessão constante $r_n = 2$ verifica-se que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ e $K_{n=1}^{+\infty} 4a_n/2$ têm a mesma natureza. O teorema anterior garante então a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ se para cada $n \geq 1$ for

$$2 \geq 1 + 4\,|a_n|\,,$$

o que equivale a $|a_n| \leq 1/4$.

■

Nota 4.5 - A constante $1/4$ no teorema de Worpitzky não pode ser melhorada pois o teorema 1.15 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a/1$ diverge se $a \in]-\infty, -1/4[$.

O teorema de Worpitzky admite a seguinte generalização:

Corolário 3 - *Seja* $(g_n)_{n\geq 0}$ *uma sucessão tal que* $0 < g_n \leq 1$ *para cada* $n \geq 0$. *Então uma fracção contínua da forma* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ *converge se*

$$|a_n| \leq g_{n-1}\,(1 - g_n) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Demonstração. Tomando $r_n = 1/g_n$ para todo o $n \geq 0$, o teorema 1.6 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ tem a mesma natureza de

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{g_{n-1}^{-1} g_n^{-1} a_n}{g_n^{-1}}.$$

O teorema 4.1 garante então a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ desde que

$$\frac{1}{g_n} \geq 1 + \frac{|a_n|}{g_{n-1} g_n} \quad \text{se } n \geq 1,$$

o que equivale a $|a_n| \leq g_{n-1}(1-g_n)$.

■

O resultado anterior pode ainda ser generalizado a fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$:

Corolário 4 - *Seja $(g_n)_{n\geq 0}$ uma sucessão tal que $0 < g_n \leq 1$ para cada $n \geq 0$. Se $b_0 = 1$ e $b_n \neq 0$ para todo o $n \geq 1$, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge desde que*

$$\left|\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}\right| \leq g_{n-1}(1-g_n) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Demonstração. Tomando $r_n = 1/b_n$ para cada $n \geq 0$, o teorema 1.6 mostra que as fracções contínuas

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{e} \quad \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}^{-1} b_n^{-1} a_n}{1}$$

têm a mesma natureza. Basta agora aplicar o corolário anterior a esta nova fracção contínua.

■

O resultado seguinte generaliza o corolário 1.

Corolário 5 (Pringsheim, 1898) - *Uma fracção contínua da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge se*

$$\frac{1}{|b_{2n-1}|} + \frac{1}{|b_{2n}|} \leq 1 \text{ para cada } n \geq 1.$$

Demonstração. Tomando $g_0 = b_0 = 1$ e $g_{2n-1} = g_{2n} = 1/|b_{2n}|$ se $n \geq 1$, da condição do enunciado resulta $0 < g_n < 1$ para cada $n \geq 1$ e pode ver-se que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ verifica as condições do corolário anterior. Temos efectivamente

$$\frac{1}{|b_{2n-1}|} \leq 1 - \frac{1}{|b_{2n}|} \text{ se } n \geq 1$$

e

$$\frac{1}{|b_{2n+1}|} \leq 1 - \frac{1}{|b_{2n+2}|} \text{ se } n \geq 0,$$

donde vem

$$\frac{1}{|b_{2n-1}b_{2n}|} \leq \frac{1}{|b_{2n}|}\left(1 - \frac{1}{|b_{2n}|}\right) = g_{2n-1}(1-g_{2n}) \quad \text{se } n \geq 1$$

e

$$\frac{1}{|b_{2n}b_{2n+1}|} \leq \frac{1}{|b_{2n}|}\left(1 - \frac{1}{|b_{2n+2}|}\right) = g_{2n}(1-g_{2n+1}) \quad \text{se } n \geq 0. \blacksquare$$

Dada uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ que verifique as condições do teorema de Pringsheim, o erro cometido ao aproximar $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ por uma fracção finita

$$S_m(0) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$$

pode ser estimado usando o teorema seguinte.

Teorema 4.6 (Beardon & Lorentzen, 2001) - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua tal que*

$$|b_n| \geq |a_n| + 1 \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Pondo

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (|b_k| - 1) \quad se \quad n \geq 0$$

e

$$L_m = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} P_n} - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n} \quad se \quad m \geq 0,$$

para cada $m \geq 0$ é então

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{-|a_n|}{|b_n|} - \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{-|a_n|}{|b_n|} \leq L_m. \tag{4.3}$$

Além disso a segunda destas desigualdades é estrita se os a_n nunca se anularem e para algum $n \geq 1$ for $|a_n| < |b_n| - 1$.

Demonstração. Sendo B_n e B_n^* os denominadores canónicos respectivamente de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e de

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{-|a_n|}{|b_n|},$$

vamos começar por estabelecer as desigualdades

$$|B_n| \geq B_n^* > 0 \text{ se } n \geq 0. \tag{4.4}$$

Dado $n \geq 1$ é

$$B_n^* = |b_n|\, B_{n-1}^* - |a_n|\, B_{n-2}^*, \tag{4.5}$$

e admitindo que $B_{n-1}^* \geq B_{n-2}^* \geq 0$, de $|b_n| \geq 1 + |a_n|$ resulta

$$B_n^* - B_{n-1}^* \geq |a_n| \left(B_{n-1}^* - B_{n-2}^* \right) \geq 0$$

pelo que a hipótese $B_{n-1}^* \geq B_{n-2}^* \geq 0$ implica $B_n^* \geq B_{n-1}^* \geq 0$. Como $B_0^* = 1$ e $B_{-1}^* = 0$ conclui-se então que para todo o $n \geq 0$ é $B_n^* \geq B_{n-1}^*$, e portanto

$$B_n^* \geq B_0^* > 0 \text{ se } n \geq 0.$$

Pondo agora $D_n = |B_n| - B_n^*$, as relações

$$|B_n| \geq |b_n|\,|B_{n-1}| - |a_n|\,|B_{n-2}| \quad \text{e} \quad B_n^* = |b_n|\,B_{n-1}^* - |a_n|\,B_{n-2}^*$$

implicam

$$D_n \geq |b_n|\,D_{n-1} - |a_n|\,D_{n-2}.$$

Raciocinando como para B_n^*, se $D_{n-1} \geq D_{n-2} \geq 0$ temos

$$D_n - D_{n-1} \geq |a_n|\,(D_{n-1} - D_{n-2}) \geq 0$$

pelo que também $D_n \geq D_{n-1} \geq 0$. Como $D_{-1} = D_0 = 0$, usando indução obtém-se $D_n \geq D_{n-1} \geq 0$ para todo o $n \geq 0$ e portanto $D_n \geq 0$ se $n \geq 0$. É pois $|B_n| \geq B_n^*$ se $n \geq 0$ o que acaba de estabelecer (4.4).

Atendendo agora ao teorema de Euler 1.11, para cada $m \geq 0$ temos

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{-|a_n|}{|b_n|} - \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{-|a_n|}{|b_n|} = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_1 ... a_n|}{B_n^* B_{n-1}^*} \tag{4.6}$$

e também

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_1 ... a_n|}{|B_n B_{n-1}|}$$

pelo que a primeira das desigualdades (4.3) resulta directamente de (4.4).

Por ser $|a_n| \leq |b_n| - 1$, de (4.5) resulta ainda

$$B_n^* - B_{n-1}^* \geq (|b_n| - 1)\left(B_{n-1}^* - B_{n-2}^*\right) \quad \text{se } n \geq 1,$$

e como $B_0^* - B_{-1}^* = 1$, iterando esta desigualdade obtemos

$$B_n^* - B_{n-1}^* \geq \prod_{k=1}^{n} (|b_k| - 1) = P_n \quad \text{se } n \geq 1.$$

Da identidade

$$B_n^* = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(B_k^* - B_{k-1}^*\right)$$

resulta assim

$$B_n^* \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} P_k \text{ se } n \geq 1, \tag{4.7}$$

e por ser $B_0^* = 1$ esta relação mantém-se válida para $n = 0$. Como é também

$$|a_1 ... a_n| \leq (|b_1| - 1) ... (|b_n| - 1) = P_n, \tag{4.8}$$

pondo

$$\sigma_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} P_k \quad \text{se} \quad n \geq 0$$

para cada $m \geq 0$ temos então

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_1 ... a_n|}{B_n^* B_{n-1}^*} &\leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{P_n}{\sigma_n \sigma_{n-1}} = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\sigma_n \sigma_{n-1}} \\ &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma_{n-1}} - \frac{1}{\sigma_n} \right) = \frac{1}{\sigma_m} - \lim \frac{1}{\sigma_n},\end{aligned}$$

e de (4.6) deduz-se a segunda das desigualdades (4.3).

Finalmente, se os a_n nunca se anulam e para algum $k \geq 1$ for $|a_k| < |b_k| - 1$, em (4.8) vale a desigualdade estrita para todo o $n \geq k$. Como na demonstração do teorema 4.1 verifica-se agora que daqui resulta que a segunda das desigualdade (4.3) seja estrita.

■

Corolário 1 - *Dada uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ tal que*

$$|b_n| \geq |a_n| + 1 \text{ para todo o } n \geq 1,$$

e pondo

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (|b_k| - 1) \quad se \quad n \geq 0,$$

tem-se

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} \right| \leq - \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{-|a_n|}{|b_n|} \leq 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n}.$$

Além *disso na segunda das relações anteriores vale a desigualdade estrita se os a_n nunca se anularem e para algum $n \geq 1$ for $|a_n| < |b_n| - 1$.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior tomando $m = 0$.

■

Corolário 2 - *Seja $(g_n)_{n \geq 0}$ uma sucessão tal que $0 < g_n < 1$ para cada $n \geq 0$. Dada uma sucessão complexa $(a_n)_{n \geq 1}$ tal que*

$$|a_n| \leq g_{n-1} (1 - g_n) \quad se \quad n \geq 1,$$

e pondo

$$u_n = \frac{(1 - g_1) ... (1 - g_n)}{g_1 ... g_n} \quad se \quad n \geq 1,$$

tem-se

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| \leq g_0 \left(\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} u_n} - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n} \right) \quad se \quad m \geq 0.$$

Demonstração. Aplicando o teorema 1.6 com $r_n = 1/g_n$ e pondo

$$a_n^* = g_{n-1}^{-1} g_n^{-1} a_n \quad \text{e} \quad b_n^* = g_n^{-1},$$

tem-se

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{1} = g_0 \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{a_n^*}{b_n^*} \quad \text{se} \quad m \geq 1.$$

Representando por $S_m^*(0)$ os aproximantes de $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$ é então

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| = g_0 \left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^*}{b_n^*} - S_m^*(0) \right| \quad \text{se} \quad m \geq 0$$

pelo que o enunciado resulta directamente de (4.3) notando que para cada $n \geq 1$ é

$$P_n = (b_1^* - 1) \ldots (b_n^* - 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - g_k}{g_k} = u_n$$

e

$$\frac{|a_n^*|}{b_n^* - 1} = \frac{|a_n|}{g_{n-1}(1 - g_n)} \leq 1.$$

■

Em particular, para as fracções contínuas que verificam a condição de convergência do teorema de Worpitzky obtêm-se as estimativas seguintes:

Corolário 3 - *Dada uma sucessão complexa* $(a_n)_{n \geq 1}$ *suponha-se que existe* $\theta \in]0, 1]$ *tal que*

$$|a_n| \leq \frac{\theta}{4} \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| &\leq \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{\theta}{1 + \sqrt{1 - \theta}} \right)^{m+1} \leq \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{\theta}{2 - \theta} \right)^{m+1} \\ &\leq \frac{\theta^{m+1}}{2(m+1)} \quad \textit{se} \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Sendo

$$g = \frac{1 - \sqrt{1 - \theta}}{2},$$

temos $g(1 - g) = \theta/4$ pelo que $|a_n| \leq g(1 - g)$ para cada $n \geq 1$. Pondo agora

$$r = \frac{1 - g}{g} = \frac{1 + \sqrt{1 - \theta}}{1 - \sqrt{1 - \theta}} \geq 1$$

e aplicando o corolário anterior com $g_n = g$ para todo o $n \geq 0$, obtém-se então

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| \leq \frac{g}{\sum_{n=0}^{m} r^n} = \frac{g(r-1)}{r^{m+1}-1} = \frac{\sqrt{1-\theta}}{r^{m+1}-1} \ .$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{m+1}-1} &= \frac{\left(1-\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1}}{\left(1+\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1} - \left(1-\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1}} \\ &= \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1} - \left(1-\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1}} \left(\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}}\right)^{m+1}, \end{aligned}$$

o enunciado resulta das desigualdades

$$\left(1+\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1} - \left(1-\sqrt{1-\theta}\right)^{m+1} \geq 2(m+1)\sqrt{1-\theta}$$

e $\sqrt{1-\theta} \geq 1-\theta$.

■

Dada uma família $\mathcal{F}$ de fracções contínuas, para cada fracção contínua $F \in \mathcal{F}$ representemos por $\lambda_n(F)$ a sucessão dos respectivos aproximantes. Diz-se que $\mathcal{F}$ é *uniformemente convergente* se para cada $F \in \mathcal{F}$ a sucessão $\lambda_n(F)$ tiver limite $\lambda(F) \in \mathbb{C}$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{F \in \mathcal{F}} |\lambda_n(F) - \lambda(F)| = 0.$$

Nas aplicações mais frequentes $\mathcal{F}$ é uma família de fracções da forma

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n(z)}{b_n(z)}$$

em que os a_n e b_n são funções da variável complexa z.

Teorema 4.7 - *Dada uma sucessão $(c_n)_{n\geq 1}$ de números não negativos, a família das fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ que verificam as condições*

$$|a_n| \leq c_n \leq |b_n| - 1 \text{ para todo o } n \geq 1$$

é uniformemente convergente.

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ a família das fracções contínuas nas condições do enunciado e tome-se $F = K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n \in \mathcal{F}$. Então o teorema 4.1 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge para um limite $\lambda(F) \in \mathbb{C}$, e pelo teorema de Euler 1.11 tem-se

$$|\lambda_n(F) - \lambda(F)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{a_1 \ldots a_k}{B_{k-1} B_k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{c_1 \ldots c_k}{|B_{k-1}|\,|B_k|} \quad \text{se } n \geq 0.$$

Atendendo a (4.4), (4.7) e à hipótese do enunciado, temos por outro lado

$$|B_n| \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} (|b_1| - 1) \dots (|b_k| - 1) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} c_1 \dots c_k \text{ se } n \geq 0,$$

e como na demonstração da segunda das desigualdades (4.3) obtém-se

$$|\lambda_n(F) - \lambda(F)| \leq \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} c_1 \dots c_k} - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_1 \dots c_k}.$$

A convergência uniforme de $\mathcal{F}$ resulta agora por o segundo membro da desigualdade anterior não depender de F e ter limite nulo.

■

Corolário 1 - *É uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *em que* $|b_n| \geq 2$ *para todo o* $n \geq 1$ *.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior com $c_n = 1$ para cada $n \geq 1$.

■

Corolário 2 - *Seja* $(g_n)_{n \geq 0}$ *uma sucessão tal que* $0 < g_n \leq 1$ *para cada* $n \geq 0$. *Então é uniformemente convergente a família das fracções contínuas* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ *que verificam as condições*

$$|a_n| \leq g_{n-1}(1 - g_n) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior à família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} a'_n/b'_n$ com

$$a'_n = g_{n-1}^{-1} g_n^{-1} a_n,\ b'_n = g_n^{-1} \text{ e } c_n = (1 - g_n)/g_n,$$

notando que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1 = g_0 K_{n=1}^{+\infty} a'_n/b'_n$.

■

Em particular, tomando $g_0 = 1$ e $g_n = 1/2$ se $n \geq 2$ obtém-se a versão uniforme do teorema de Worpitzky:

Corolário 3 - *É uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ *em que* $|a_n| \leq 1/4$ *para todo o* $n \geq 1$.

■

Nota 4.8 - Pode ver-se que a família das fracções contínuas que verificam as condições do teorema de Pringsheim não é uniformemente convergente. Com efeito, para cada $h > 0$ sejam

$$a_1(h) = -h,\ a_n(h) = -1 \text{ se } n > 1 \text{ e } b_n(h) = 1 - a_n(h) \text{ se } n \geq 1.$$

Temos então

$$a_1(h)...a_n(h) = (-1)^n h \ \text{ se } \ n \geq 1,$$

e pondo

$$\lambda_n(h) = \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{a_k(h)}{b_k(h)},$$

da identidade (1.10) resulta

$$\lambda_n(h) = \frac{1}{1+nh} - 1 \quad \text{se } n \geq 1.$$

Pondo agora

$$\lambda(h) = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n(h)$$

é então $\lambda(h) = -1$ pelo que

$$|\lambda_n(h) - \lambda(h)| = \frac{1}{1+nh} \ \text{ se } n \geq 1.$$

Para cada $n \geq 1$ temos assim

$$\sup_{h>0} |\lambda_n(h) - \lambda(h)| = 1$$

e isto mostra que a família das fracções contínuas

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(h)}{b_n(h)} \ \text{ com } \ h \in \mathbb{R}^+$$

não é uniformemente convergente.

5 - A série de Stern-Stolz de uma fracção contínua

Para as fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ é válida a seguinte condição necessária de convergência em $\mathbb{C}_\infty$, obtida independentemente por Stern (1848) e Stolz (1886):

Teorema 5.1 (Stern-Stolz) - *Dada uma sucessão complexa* $(b_n)_{n\geq 1}$, *se a fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *convergir em* $\mathbb{C}_\infty$ *então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$$

é divergente.

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ é convergente. Existe então uma ordem m tal que para cada $n \geq m$ o denominador canónico B_n não se anula, e do teorema de Euler 1.11 resulta que a série

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}}$$

é convergente, o que implica

$$\lim |B_n B_{n-1}| = +\infty.$$

Por outro lado, pondo

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + |b_k|) \quad \text{se} \quad n \geq 0$$

podemos ver que é $|B_n| \leq Q_n$ para cada $n \geq 0$. Temos efectivamente

$$|B_0| = 1 = Q_0 \quad \text{e} \quad |B_1| = |b_1| < Q_1,$$

e se para um certo $n \geq 2$ for

$$|B_{n-2}| \leq Q_{n-2} \quad \text{e} \quad |B_{n-1}| \leq Q_{n-1},$$

de (1.5) resulta

$$|B_n| \leq |b_n|\,|B_{n-1}| + |B_{n-2}| \leq |b_n|\,Q_{n-1} + Q_{n-2} \leq |b_n|\,Q_{n-1} + Q_{n-1} = Q_n$$

pelo que a relação permance válida para n. É pois

$$|B_n B_{n-1}| \leq Q_n Q_{n-1} \leq Q_n^2 \quad \text{se } n \geq 1,$$

e a condição $\lim |B_n B_{n-1}| = +\infty$ exige $\lim Q_n = +\infty$. Das desigualdades

$$e^{|b_k|} \geq 1 + |b_k| \quad \text{com } k \geq 1$$

resulta então

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \geq \ln Q_n \quad \text{se } n \geq 1$$

e conclui-se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| = +\infty.$$

Finalmente, se $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n = \infty$ temos $K_{n=2}^{+\infty} 1/b_n = -b_1$ pelo que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} |b_n|$ diverge e o mesmo sucede com $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$.

■

Corolário - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, seja (c_n) a sucessão definida por*

$$c_0 = 1 \text{ e } c_n = \frac{1}{c_{n-1} a_n} \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{5.1}$$

Se a fracção contínua convergir em $\mathbb{C}_\infty$ então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n c_n|$$

é divergente.

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior pois o teorema 1.6 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ tem a mesma natureza de

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1} c_n a_n}{b_n c_n} = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n c_n}.$$

■

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n c_n|$$

referida no corolário anterior diz-se a *série de Stern-Stolz* da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$.

Exemplo 5.2 - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, os correspondentes termos c_n definidos por* (5.1) *verificam as condições*

$$c_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} \text{ e } c_{2n+1} = \frac{1}{a_1} \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} \quad \text{se} \quad n \geq 0, \tag{5.2}$$

que se podem abreviar por

$$c_n = \prod_{k=1}^{n} a_k^{(-1)^{n+1-k}} \quad se \quad n \geq 0.$$

Efectivamente as identidades (5.2) resultam directamente de (5.1) por indução em n.

Exemplo 5.3 - *Duas fracções contínuas equivalentes e não singulares têm a mesma série de Stern-Stolz.*

Efectivamente, se as fracções contínuas

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{e} \quad \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a'_n}{b'_n}$$

são equivalentes existe uma sucessão $(r_n)_{n\geq 0}$ de complexos não nulos tais que $r_0 = 1$, $a'_n = r_{n-1} r_n a_n$ e $b'_n = r_n b_n$. Sendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b'_n c'_n|$$

a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} a'_n/b'_n$ e usando indução, das definições de c_n e c'_n deduz-se imediatamente a relação

$$c'_n = \frac{c_n}{r_n} \quad \text{se} \quad n \geq 1.$$

Para cada $n \geq 1$ temos assim

$$b'_n c'_n = \frac{b'_n}{c'_{n-1} a'_n} = \frac{r_n b_n}{c'_{n-1} r_{n-1} r_n a_n} = \frac{b_n}{c'_{n-1} r_{n-1} a_n} = \frac{b_n}{c_{n-1} a_n} = b_n c_n.$$

Exemplo 5.4 - *A série de Stern-Stolz de uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ diverge sse*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{2n} \frac{a_1 \ldots a_{2n-1}}{a_2 \ldots a_{2n}} \right| = +\infty \quad ou \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{2n+1} \frac{a_2 \ldots a_{2n}}{a_1 \ldots a_{2n+1}} \right| = +\infty.$$

Efectivamente as relações (5.2) mostram que esta condição equivale à divergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left| b_{2n} \frac{a_1 \ldots a_{2n-1}}{a_2 \ldots a_{2n}} \right| + \left| b_{2n+1} \frac{a_2 \ldots a_{2n}}{a_1 \ldots a_{2n+1}} \right| \right),$$

o que é equivalente a ser

$$\lim \sum_{n=2}^{2m+1} |b_n c_n| = +\infty,$$

e equivale portanto à divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n c_n|$.

Exemplo 5.5 - *Se a série de Stern-Stolz de uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ for divergente, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ também é divergente a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n/\mu b_n$.*

Efectivamente basta atender ao exemplo anterior notando que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \mu b_{2n} \frac{(\lambda a_1) \dots (\lambda a_{2n-1})}{(\lambda a_2) \dots (\lambda a_{2n})} \right| = |\mu| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{2n} \frac{a_1 \dots a_{2n-1}}{a_2 \dots a_{2n}} \right|$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \mu b_{2n+1} \frac{(\lambda a_2) \dots (\lambda a_{2n})}{(\lambda a_1) \dots (\lambda a_{2n+1})} \right| = \frac{|\mu|}{|\lambda|} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{2n+1} \frac{a_2 \dots a_{2n}}{a_1 \dots a_{2n+1}} \right|.$$

Na prática a verificação da divergência da série de Stern-Stolz de uma fracção contínua é muito facilitada pelo seguinte resultado:

Teorema 5.6 - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, a respectiva série de Stern-Stolz diverge se*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{\left| \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \right|} = +\infty.$$

Demonstração. Sendo $(c_n)_{n \geq 0}$ a sucessão definida por (5.1) e atendendo à desigualdade das médias, para cada $n \geq 2$ temos

$$\sqrt{\left| \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \right|} = \sqrt{|b_{n-1} c_{n-1} b_n c_n|} \leq \frac{1}{2} \left(|b_{n-1} c_{n-1}| + |b_n c_n| \right).$$

Se $m \geq 2$ é então

$$\sum_{n=2}^{m} \sqrt{\left| \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{m-1} |b_n c_n| + \sum_{n=2}^{m} |b_n c_n| \right) \leq \sum_{n=1}^{m} |b_n c_n|$$

o que estabelece o enunciado.

■

Exemplo 5.7 - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, a respectiva série de Stern-Stolz diverge se*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \right| = +\infty.$$

Efectivamente, sendo

$$u_n = \left| \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} \right|$$

e supondo que $\sum_{n=2}^{+\infty}\sqrt{u_n}$ converge, a partir de uma certa ordem é $u_n \leq 1$ pelo que $u_n \leq \sqrt{u_n}$ e também $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge. Assim a divergência de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$$

implica a divergência de

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sqrt{u_n}$$

pelo que a divergência da série de Stern-Stolz resulta do teorema anterior.

Se $(b_n)_{n\geq 1}$ for uma sucessão de números não negativos, a condição do teorema 5.1 é suficiente para a convergência em $\mathbb{C}_\infty$. Mais precisamente é válido o resultado seguinte:

Teorema 5.8 (Broman, 1877) - *Dada uma sucessão $(b_n)_{n\geq 1}$ de números não negativos, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ sse*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty,$$

e é convergente sse para algum inteiro $m \geq 0$ for $b_{2m+1} \neq 0$.

Demonstração. O teorema 5.1 mostra que a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ em $\mathbb{C}_\infty$ exige

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty,$$

e vamos agora provar que esta condição implica que a fracção contínua seja convergente em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. Dado que para os denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ é

$$B_n - B_{n-2} = b_n B_{n-1} \geq 0 \text{ se } n \geq 1, \tag{5.3}$$

segue-se que as sucessões $(B_{2n})_{n\geq 0}$ e $(B_{2n-1})_{n\geq 0}$ são ambas crescentes. É pois $B_{2n} \geq B_0 = 1$ se $n \geq 0$, e se para algum $m \geq 0$ for $b_{2m+1} > 0$ temos

$$B_{2m+1} \geq B_{2m-1} + b_{2m+1} B_{2m} \geq b_{2m+1},$$

o que implica $B_{2n+1} \geq b_{2m+1}$ se $n \geq m$. Pondo $h = \min\{1, b_{2m+1}\}$ temos então $B_n \geq h$ se $n \geq 2m$, e de (5.3) vem

$$B_n B_{n-1} - B_{n-1} B_{n-2} = b_n B_{n-1}^2 \geq h^2 b_n \text{ se } n \geq 2m+1$$

pelo que $(B_n B_{n-1})_{n\geq 2m+1}$ é crescente e

$$B_n B_{n-1} \geq B_{2m} B_{2m-1} + h^2 \sum_{k=2m+1}^{n} b_k \text{ se } n \geq 2m+1.$$

Daqui resulta $\lim B_n B_{n-1} = +\infty$, e o critério de Leibniz mostra então que a série

$$\sum_{n=2m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}}$$

converge. Temos assim

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} = S_{2m}(0) + \sum_{n=2m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}},$$

e como $B_{2m} \neq 0$ segue-se que $S_{2m}(0) \in \mathbb{R}$, o que estabelece a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$. Além disso, como (1.4) mostra que os numeradores canónicos A_n são não negativos para todo o $n \geq 0$, é necessariamente

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} \geq 0.$$

Supondo finalmente que a sucessão $(b_{2n+1})_{n\geq 0}$ é identicamente nula, a condição

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

exige que algum dos b_{2n} seja não nulo. Como $K_{n=2}^{+\infty} 1/b_n = K_{n=1}^{+\infty} 1/b_{n+1}$, aplicando a parte do enunciado já estabelecida resulta que $K_{n=2}^{+\infty} 1/b_n$ converge em $\mathbb{R}_0^+$. Isto mostra que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ e do corolário 2 do teorema 1.7 resulta

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty.$$

■

O teorema anterior conduz directamente aos seguintes resultados:

Corolário 1 (Seidel, 1846) - *Dada uma sucessão $(b_n)_{n\geq 1}$ de números positivos, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge sse*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty.$$

■

Corolário 2 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua em que os a_n são positivos e os b_n não negativos. Então a fracção contínua converge em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ sse a respectiva série de Stern-Stolz for divergente, e é convergente sse para algum inteiro $m \geq 0$ for $b_{2m+1} \neq 0$.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior notando que para cada $m \geq 1$ é

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n} = \operatorname*{K}_{n=1}^{m} \frac{1}{b_n c_n}$$

em que os c_n são números positivos definidos por (5.1).

■

Corolário 3 - *Dada uma sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$ de números positivos, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ converge sse a respectiva série de Stern-Stolz for divergente.*

Demonstração. Basta no corolário anterior tomar $b_n = 1$ para todo o $n \geq 1$.

■

Corolário 4 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua convergente em que os a_n são positivos e os b_n não negativos. Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ então também a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n/\mu b_n$ é convergente.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário 2 e do exemplo 5.5.

■

Corolário 5 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular. Então a fracção contínua*

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|}$$

converge em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ou é convergente consoante $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ convirja em $\mathbb{C}_\infty$ ou seja convergente.

Demonstração. Se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ convergir em $\mathbb{C}_\infty$ a sua série de Stern-Stolz diverge, e como esta é também a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} |a_n| / |b_n|$, do corolário 2 resulta que $K_{n=1}^{+\infty} |a_n| / |b_n|$ converge em $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. Se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ for convergente o corolário 2 permite ainda concluir que $K_{n=1}^{+\infty} |a_n| / |b_n|$ também converge pois do corolário 2 do teorema 1.7 resulta que para algum $m \geq 0$ é então $b_{2m+1} \neq 0$.

■

Exemplo 5.9 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua em que os a_n são positivos e os b_n não negativos. Tem-se então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = 0$ sse a respectiva série de Stern-Stolz for divergente e todos os b_{2n} forem nulos.*

Efectivamente, atendendo a que para todo o $m \geq 2$ é

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1 + K_{n=2}^{+\infty} a_n/b_n} = \frac{a_1}{b_1 + K_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}/b_{n+1}}$$

tem-se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = 0$ sse $K_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}/b_{n+1} = +\infty$. De acordo com o corolário 2 do teorema anterior isto equivale então a que a série de Stern-Stolz seja divergente e a ter-se $b_{2n} = 0$ para cada $n \geq 1$.

O teorema seguinte descreve a relação entre o valor de uma fracção contínua convergente $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e os seus aproximantes quando os a_n são positivos, os b_n não negativos e $b_1 > 0$.

Teorema 5.10 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua convergente em que os a_n são positivos e os b_n não negativos. Se $b_1 > 0$, para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se*

$$S_{2m-2}(0) \leq S_{2m}(0) \leq \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq S_{2m+1}(0) \leq S_{2m-1}(0), \tag{5.4}$$

$$\left| \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)| \tag{5.5}$$

e

$$\left| \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - \frac{S_{m+1}(0) + S_m(0)}{2} \right| \leq \left| \frac{S_{m+1}(0) - S_m(0)}{2} \right|. \tag{5.6}$$

Além disso, se todos os b_n forem positivos valem as desigualdades estritas nas relações anteriores.

Demonstração. Como $B_0 = 1$ e $B_1 = b_1 > 0$, da relação

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}$$

deduz-se que é também $B_n > 0$ para $n \geq 2$. A identidade (1.9) mostra então que a diferença $S_n(0) - S_{n-2}(0)$ é nula ou tem o sinal de $(-1)^n$ para cada $n \geq 2$, pelo que a sucessão dos $S_{2n}(0)$ é crescente e a sucessão dos $S_{2n+1}(0)$ é decrescente. Pondo

$$\lambda = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

para cada $m \geq 1$ temos assim

$$S_{2m}(0) \leq \lim S_{2n}(0) = \lambda = \lim S_{2n-1}(0) \leq S_{2m-1}(0)$$

e as relações (5.4) são válidas.

Dado $m \geq 1$, de (5.4) resulta

$$0 \leq \lambda - S_{2m}(0) \leq S_{2m+1}(0) - S_{2m}(0)$$

e

$$0 \leq S_{2m-1}(0) - \lambda \leq S_{2m-1}(0) - S_{2m}(0),$$

o que estabelece (5.5).

Temos ainda

$$\left| \lambda - \frac{S_{m+1}(0) + S_m(0)}{2} \right| = \frac{1}{2} |\lambda - S_{m+1}(0) + \lambda - S_m(0)|$$

$$\leq \frac{|\lambda - S_{m+1}(0)| + |\lambda - S_m(0)|}{2}$$

$$= (-1)^m \frac{S_{m+1}(0) - \lambda + \lambda - S_m(0)}{2}$$

$$= \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{2}$$

e a relação (5.6) é válida.

Finalmente, se todos os b_n forem positivos a identidade (1.9) mostra que as sucessões dos $S_{2n}(0)$ e dos $S_{2n+1}(0)$ são ambas estritamente monótonas. Daqui resulta que são válidas as desigualdades estritas em (5.4) e isto implica que o mesmo suceda nas relações (5.5) e (5.6).

■

Do corolário do teorema 1.15 resulta que $K_{n=1}^{+\infty} 1/i$ diverge e isto mostra que a divergência da série de Stern-Stolz de uma fracção contínua não é suficiente para garantir a convergência dessa fracção contínua. Para obter uma condição suficiente de convergência vamos começar por estabelecer um resultado auxiliar que será também utilizado na demonstração do teorema 7.4.

Lema 5.11 - *Dada uma sucessão complexa* $(b_n)_{n\geq 1}$ *suponha-se que os denominadores canónicos* B_n *de* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *nunca se anulam. Se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{n+1} \frac{B_n}{B_{n-1}} \right|$$

for convergente o mesmo sucede então com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$.

Demonstração. Para cada $n \geq 1$ sejam

$$\delta_n = b_{n+1} \frac{B_n}{B_{n-1}} \quad \text{e } q_n = \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Temos então

$$q_{n+1} q_n = 1 + \delta_n = \frac{B_{n-1}}{B_{n+1}} = \frac{1}{1 + \delta_n}$$

pelo que

$$q_{n+1} = \frac{1}{q_n (1 + \delta_n)},$$

e por indução resulta uma identidade da forma

$$q_n = q_1^{\varepsilon_n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \delta_k)^{\varepsilon_{kn}} \quad \text{se } n \geq 1, \text{ com } \varepsilon_k, \varepsilon_{kn} \in \{-1, 1\}.$$

Pondo $\mu = \max\left\{|q_1|, |q_1|^{-1}\right\}$ temos assim

$$|q_n| \leq \mu \left|\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{kn} \ln(1+\delta_k)\right)\right| = \mu \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\varepsilon_{kn} \ln(1+\delta_k)\right)\right)$$

pelo que

$$|q_n| \leq \mu \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} |\ln(1+\delta_k)|\right). \tag{5.7}$$

Como por hipótese a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\delta_n|$ converge, é $\lim \delta_n = 0$ e daqui resulta $|\ln(1+\delta_n)| \sim |\delta_n|$. Então a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\ln(1+\delta_k)|$$

também converge e (5.7) mostra que a sucessão $(q_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Da relação $b_{n+1} = \delta_n q_n$ conclui-se agora a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{n+1}|$, o que implica a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$.

■

Podemos agora estabelecer um critério de convergência para fracções contínuas cuja série de Stern-Stolz diverge.

Teorema 5.12 (Lane & Wall, 1949) - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular cuja série de Stern-Stolz diverge. Se todos os aproximantes $S_n(0)$ forem finitos e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)| < +\infty$$

então a fracção contínua é convergente.

Demonstração. Sendo $(c_n)_{n\geq 0}$ a sucessão definida em (5.1), as fracções contínuas

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n c_n} \quad \text{e} \quad \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

têm a mesma sucessão de aproximantes e a mesma série de Stern-Stolz, pelo que sem perda de generalidade podemos supor que a fracção contínua dada é da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$.

Para cada $m \geq 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{m} |S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|$$

e

$$\sum_{n=1}^{m} |S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|,$$

pelo que as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0))$$

são absolutamente convergentes, o que implica que as sucessões $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ sejam ambas convergentes. Pondo $\lim S_{2n}(0) = \alpha$, $\lim S_{2n+1}(0) = \beta$, e sendo

$$u_n = S_{n+1}(0) - S_n(0) \quad \text{se } n \geq 1,$$

temos

$$\lim |u_{2n}| = \lim |u_{2n+1}| = |\alpha - \beta|$$

pelo que $\lim |u_n| = |\alpha - \beta|$. Por outro lado o exemplo 1.2 mostra que u_n nunca se anula, e a hipótese de os $S_n(0)$ serem finitos implica que o mesmo sucede com os denominadores canónicos B_n. Pondo então

$$\delta_n = -\frac{1}{u_n} (S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)) \quad \text{se } n \geq 1,$$

das identidades (1.8) e (1.9) resulta

$$\delta_n = b_{n+1} \frac{B_n}{B_{n-1}},$$

e usando o lema anterior vemos que a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ implica a divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\delta_n|$. Como a sucessão $|u_n|$ converge e o mesmo sucede com a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|,$$

da identidade

$$|\delta_n| = \frac{1}{|u_n|} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|$$

conclui-se que é necessariamente $\lim |u_n| = 0$ e portanto $\alpha = \beta$. Então as sucessões $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ convergem ambas para o mesmo limite pelo que $S_n(0)$ também converge.

■

Uma sucessão complexa $(u_n)_{n \geq p}$ diz-se *absolutamente convergente* ou *de variação limitada* se a série

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n - u_{n-1}|$$

for convergente. Como esta condição implica a convergência de

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})$$

e isto equivale à convergência da sucessão (u_n), segue-se que toda a sucessão absolutamente convergente é convergente. Da definição resulta ainda que uma série é absolutamente convergente sse o mesmo suceder com a respectiva sucessão das somas parciais.

Notando agora que a convergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|$$

equivale à convergência de ambas as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)|,$$

vemos que ela equivale à convergência absoluta das sucessões $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$. Podemos assim enunciar o seguinte resultado:

Corolário - *Uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ não singular e cuja série de Stern-Stolz diverge, é convergente se as sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ forem ambas absolutamente convergentes.*

■

O conceito de convergência absoluta de uma sucessão permite enunciar uma propriedade característica das fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ quando a respectiva série de Stern-Stolz converge. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 5.13 - *Sejam A_n e B_n respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ for convergente então as sucessões (A_{2n}), (A_{2n+1}), (B_{2n}) e (B_{2n+1}) são absolutamente convergentes e tem-se*

$$\lim A_{2n+1}B_{2n} - \lim B_{2n+1}A_{2n} = 1.$$

Demonstração. Sendo

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + |b_k|) \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

na demonstração do teorema 5.1 provou-se que a relação $|B_n| \leq Q_n$ é válida para cada $n \geq 0$. Dado que

$$|A_0| = 0 < 1 = Q_0, \ |A_1| = 1 \leq Q_1 \text{ e } A_n = b_n A_{n-1} + A_{n-2} \ \text{ se } n \geq 1,$$

raciocinando como naquela demonstração prova-se que é também $|A_n| \leq Q_n$ se $n \geq 0$. Sendo $X_n = A_n$ ou $X_n = B_n$, para cada $n \geq 1$ temos então

$$|X_n| \leq Q_n$$

e da relação

$$X_n = b_n X_{n-1} + X_{n-2}$$

resulta

$$|X_n - X_{n-2}| = |b_n|\,|X_{n-1}| \leq |b_n|\,Q_{n-1}.$$

Como

$$Q_n \leq \prod_{k=1}^{n} e^{|b_k|} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right),$$

pondo

$$L = \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|$$

obtemos a majoração

$$|X_n - X_{n-2}| \leq e^L\,|b_n| \quad \text{se } n \geq 1$$

e isto mostra que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n - X_{n-2}|$ converge. Daqui resulta que as sucessões referidas no enunciado são todas absolutamente convergentes, e a relação

$$\lim A_{2n+1}B_{2n} - \lim B_{2n+1}A_{2n} = 1$$

é agora uma consequência imediata do teorema 1.10.

■

Para estudar o comportamento das sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ de uma fracção contínua é útil dispor de fracções contínuas cujas sucessões de aproximantes sejam respectivamente $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$.

Dada uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ com sucessão de aproximantes $S_n(0)$, diz-se que uma fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^*}{b_n^*}$$

com sucessão de aproximantes $S_n^*(0)$ é uma *parte par* de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ se

$$S_n^*(0) = S_{2n}(0) \text{ para todo o } n \geq 1.$$

Analogamente uma fracção contínua

$$\widetilde{b}_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{\widetilde{a}_n}{\widetilde{b}_n}$$

com sucessão de aproximantes $\widetilde{S}_n(0)$ diz-se uma *parte ímpar* de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ se

$$\widetilde{S}_n(0) = S_{2n+1}(0) \text{ para todo o } n \geq 0.$$

Para obter uma parte par de uma fracção contínua não singular da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ vamos começar por provar um lema.

Lema 5.14 - *Dada uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ sejam A_n e B_n respectivamente os seus numeradores e denominadores canónicos. Tem-se então*

$$A_n B_{n-4} - A_{n-4} B_n = (-1)^n (1 + a_{n-1} + a_n) \prod_{k=1}^{n-3} a_k \quad se \quad n \geq 3.$$

Demonstração. Dado $n \geq 3$, da definição dos A_n e B_n resulta

$$A_n B_{n-4} - A_{n-4} B_n = A_{n-1} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-1} + a_n (A_{n-2} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-2})$$

e aplicando o corolário 2 do teorema 1.10 esta identidade transforma-se em

$$A_n B_{n-4} - A_{n-4} B_n = A_{n-1} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-1} + (-1)^n a_n \prod_{k=1}^{n-3} a_k. \tag{5.8}$$

Como é também

$$\begin{aligned} A_{n-1} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-1} &= A_{n-2} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-2} \\ &\quad + a_{n-1} (A_{n-3} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-3}), \end{aligned}$$

aplicando o teorema 1.10 e o respectivo corolário 2 obtém-se

$$A_{n-1} B_{n-4} - A_{n-4} B_{n-1} = (-1)^n (1 + a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-3} a_k$$

pelo que o enunciado resulta agora de (5.8).

■

Consideremos agora uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$, e sejam respectivamente A_n e B_n os seus numeradores e denominadores canónicos. Pondo

$$A_n^* = A_{2n} \text{ e } B_n^* = B_{2n} \text{ se } n \geq 0$$

temos

$$A_n^* B_{n-1}^* - A_{n-1}^* B_n^* = A_{2n} B_{2n-2} - A_{2n-2} B_{2n} = \prod_{k=1}^{2n-1} a_k \neq 0.$$

Pondo ainda $A_{-1}^* = 1$ e $B_{-1}^* = 0$, e definindo as sucessões $(a_n^*)_{n\geq 1}$ e $(b_n^*)_{n\geq 1}$ por

$$a_n^* = -\frac{A_n^* B_{n-1}^* - A_{n-1}^* B_n^*}{A_{n-1}^* B_{n-2}^* - A_{n-2}^* B_{n-1}^*} \text{ e } b_n^* = \frac{A_n^* B_{n-2}^* - A_{n-2}^* B_n^*}{A_{n-1}^* B_{n-2}^* - A_{n-2}^* B_{n-1}^*},$$

o teorema 1.13 mostra então que os A_n^* e os B_n^* são respectivamente os numeradores e os denominadores canónicos da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$ pelo que esta é uma parte par da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$. Temos agora

$$a_1^* = A_1^* = A_2 = a_1, \ b_1^* = B_1^* = B_2 = 1 + a_2,$$

e para cada $n \geq 2$

$$a_n^* = -\frac{A_{2n} B_{2n-2} - A_{2n-2} B_{2n}}{A_{2n-2} B_{2n-4} - A_{2n-4} B_{2n-2}} \text{ e } b_n^* = \frac{A_{2n} B_{2n-4} - A_{2n-4} B_{2n}}{A_{2n-2} B_{2n-4} - A_{2n-4} B_{2n-2}}.$$

Atendendo ao corolário 2 do teorema 1.10 e ao lema anterior é assim

$$a_n^* = -a_{2n-2} a_{2n-1} \text{ e } b_n^* = 1 + a_{2n-1} + a_{2n} \text{ se } n \geq 2.$$

De modo análogo, pondo

$$\widetilde{A}_n = A_{2n+1} \text{ e } \widetilde{B}_n = B_{2n+1} \text{ se } n \geq 0,$$

o teorema 1.13 mostra que as sucessões $(\widetilde{a}_n)_{n\geq 1}$ e $(\widetilde{b}_n)_{n\geq 0}$ definidas por

$$\widetilde{b}_0 = a_1, \widetilde{a}_n = -a_{2n} a_{2n-1} \text{ e } \widetilde{b}_n = 1 + a_{2n} + a_{2n+1} \text{ se } n \geq 1$$

são tais que a fracção contínua $\widetilde{b}_0 + K_{n=1}^{+\infty} \widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ tem por numeradores e denominadores canónicos respectivamente os $\widetilde{A}_n$ e os $\widetilde{B}_n$.

Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

Teorema 5.15 - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ e sendo $(a_n^*)_{n\geq 1}$, $(b_n^*)_{n\geq 1}$, $(\widetilde{a}_n)_{n\geq 1}$ e $(\widetilde{b}_n)_{n\geq 0}$ as sucessões definidas por*

$$a_1^* = a_1, \, a_n^* = -a_{2n-2} a_{2n-1} \text{ se } n \geq 2,$$

$$b_1^* = 1 + a_2, \ b_n^* = 1 + a_{2n-1} + a_{2n} \text{ se } n \geq 2,$$

$$\widetilde{a}_n = -a_{2n-1} a_{2n} \text{ se } n \geq 1,$$

$$\text{e } \widetilde{b}_0 = a_1, \, \widetilde{b}_n = 1 + a_{2n} + a_{2n+1} \text{ se } n \geq 1,$$

as fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$ e $\widetilde{b}_0 + K_{n=1}^{+\infty} \widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ são respectivamente partes par e ímpar de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$.

■

O conceito de parte par de uma fracção contínua permite uma demonstração simples do teorema seguinte.

Teorema 5.16 (Perron, 1957) - *Dada uma sucessão real* $(a_n)_{n\geq 1}$ *tal que*

$$a_n = (-1)^{n-1}\,|a_n| \;\; se\; n \geq 1, \;\; |a_2| < 1 \;\; e \;\; a_{2n-1} > |a_{2n}| - 1 \; se\; n \geq 2,$$

a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ *converge se for convergente a respectiva sucessão de aproximantes* $S_{2n}(0)$.

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ é não singular, das condições do enunciado resulta que as sucessões (a_n^*) e (b_n^*) definidas no teorema anterior são ambas positivas. Então a correspondente sucessão dos denominadores canónicos também é positiva e o mesmo sucede com a sucessão (B_{2n}) em que os B_n são os denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$. Atendendo aos corolários 1 e 2 do teorema 1.10 temos então

$$\left|\frac{S_{2n+1}(0) - S_{2n}(0)}{S_{2n+2}(0) - S_{2n}(0)}\right| = \frac{B_{2n+2}}{B_{2n+1}} = \frac{B_{2n+2}}{B_{2n+2} + |a_{2n+2}|\, B_{2n}} < 1$$

pelo que da relação $\lim\left(S_{2n+2}(0) - S_{2n}(0)\right) = 0$ resulta $\lim S_{2n+1}(0) = \lim S_{2n}(0)$. ■

Usando uma fracção contínua do tipo $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ com $a_n = (-1)^{n-1}\,|a_n|$, é possível mostrar que a convergência das sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ não é suficiente para garantir a convergência de uma fracção contínua mesmo que a respectiva série de Stern-Stolz seja divergente:

Teorema 5.17 (Wall, 1956) - *Existem fracções contínuas cuja série de Stern-Stolz diverge e tais que as respectivas sucessões de aproximantes* $S_{2n}(0)$ *e* $S_{2n+1}(0)$ *convergem para valores distintos.*

Demonstração. Dada a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ com

$$a_n = (-1)^{n-1}\, n^2,$$

o teorema 5.6 mostra que a sua série de Stern-Stolz é divergente. Sendo agora $(a_n^*)_{n\geq 1}$e $(b_n^*)_{n\geq 1}$ as sucessões definidas no teorema anterior e $S_n(0)$ a sucessão de aproximantes de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$, temos

$$S_{2n}(0) = \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{a_k^*}{b_k^*} \;\; \text{se} \;\; n \geq 1.$$

Aplicando o teorema 1.6 com $r_0 = 1$ e $r_n = 1/b_n^*$ se $n \geq 1$, segue-se que $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$ é equivalente à fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} c_n/1$ em que

$$c_1 = \frac{a_1^*}{b_1^*} = \frac{a_1}{1 + a_2} = -\frac{1}{3},$$

$$c_2 = \frac{a_2^*}{b_1^* b_2^*} = -\frac{a_2 a_3}{(1 + a_2)\,(1 + a_3 + a_4)} = 2$$

e

$$c_n = \frac{a_n^*}{b_{n-1}^* b_n^*} = -\frac{a_{2n-2}a_{2n-1}}{(1+a_{2n-3}+a_{2n-2})(1+a_{2n-1}+a_{2n})} = \frac{(n-1)^2(2n-1)}{2n-3}$$

se $n \geq 2$.

Sendo agora $(\widetilde{a}_n)_{n\geq 1}$ e $(\widetilde{b}_n)_{n\geq 0}$ as sucessões definidas no teorema anterior, do mesmo modo temos

$$S_{2n+1}(0) = \widetilde{b}_0 + \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{a}_k}{\widetilde{b}_k} \text{ se } n \geq 0,$$

e $K_{n=1}^{+\infty}\widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ é equivalente a $K_{n=1}^{+\infty}d_n/1$ com

$$d_1 = \frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{b}_1} = -\frac{a_1 a_2}{1+a_2+a_3} = \frac{2}{3}$$

e

$$d_n = \frac{\widetilde{a}_n}{\widetilde{b}_{n-1}\widetilde{b}_n} = -\frac{a_{2n-1}a_{2n}}{(1+a_{2n-2}+a_{2n-1})(1+a_{2n}+a_{2n+1})} = \frac{n^2(2n-1)}{2n+1}$$

se $n \geq 2$.

Como

$$\frac{1}{\sqrt{|c_n|}} \sim \frac{1}{\sqrt{|d_n|}} \sim \frac{1}{n},$$

o teorema 5.6 mostra que as séries de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty}c_n/1$ e $K_{n=1}^{+\infty}d_n/1$ divergem. Notando agora que é $c_n > 0$ se $n \geq 2$ e $d_n > 0$ se $n \geq 1$, do corolário 3 do teorema 5.8 resulta imediatamente que estas fracções contínuas são ambas convergentes. Temos então

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{1} = \frac{-1/3}{1+K_{n=2}^{+\infty}c_n/1} < 0$$

e

$$\widetilde{b}_0 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{1} \geq \widetilde{b}_0 = 1,$$

pelo que $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ convergem para valores distintos.

■

O teorema anterior mostra que no corolário do teorema 5.12 é essencial a hipótese da convergência absoluta dos aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$. É no entanto válido o resultado seguinte.

Teorema 5.18 (Wall, 1956) - *Seja $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular e cujas sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são ambas convergentes. Se a sucessão $b_{n-1}b_n/a_n$ não tiver limite nulo então $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ converge.*

Demonstração. Nas condições do enunciado, a partir de uma dada ordem k é $S_n(0) \neq \infty$ pelo que $B_n \neq 0$ se $n \geq k$. Para cada $n \geq k+2$ sejam agora

$$u_n = (S_{n-1}(0) - S_{n-2}(0))\,(S_{n+1}(0) - S_n(0))$$

e

$$v_n = (S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0))\,(S_n(0) - S_{n-2}(0))\,.$$

Das identidades (1.8) e (1.9) vem respectivamente

$$u_n = \frac{(a_1 ... a_{n-1})^2\, a_n a_{n+1}}{B_{n-2} B_{n-1} B_n B_{n+1}} \quad \text{e} \quad v_n = -\frac{(a_1 ... a_{n-1})^2\, a_n b_n b_{n+1}}{B_{n-2} B_{n-1} B_n B_{n+1}}$$

pelo que

$$v_n = -\frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} u_n \quad \text{se } n \geq k+2.$$

Pondo

$$\alpha = \lim S_{2n}(0) \quad \text{e } \beta = \lim S_{2n+1}\,(0)$$

temos no entanto

$$\lim |S_{n+1}(0) - S_n(0)| = |\alpha - \beta|$$

pelo que

$$\lim |u_n| = |\alpha - \beta|^2\,.$$

Como $\lim v_n = 0$, a condição $\alpha \neq \beta$ exige então

$$\lim \frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} = 0.$$

■

Do teorema anterior resultam imediatamente os seguintes corolários:

Corolário 1 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ uma fracção contínua cujas sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são ambas convergentes. Se $b_n b_{n+1}$ não tiver limite nulo então a fracção contínua é convergente.*

■

Corolário 2 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ uma fracção contínua não singular cujas sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são ambas convergentes. Se a_n tiver alguma subsucessão limitada então a fracção contínua é convergente.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior pois $1/a_n$ não tem então limite nulo.

■

O resultado seguinte completa o teorema 5.18.

Corolário 3 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular cujas sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ têm ambas limite em $\mathbb{C}_\infty$. Se a sucessão $b_{n-1}b_n/a_n$ não tiver limite nulo então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Tomando $a_0 = 1$ e $b_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-\lim S_{2n}(0), -\lim S_{2n+1}(0)\}$, como a sucessão dos aproximantes de $K_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}/b_{n-1}$ é dada por

$$S_n^*(0) = \frac{1}{b_0 + S_{n-1}(0)} \quad se \quad n \geq 1$$

segue-se que $S_{2n}^*(0)$ e $S_{2n+1}^*(0)$ são ambas convergentes. Então do teorema anterior resulta que $K_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}/b_{n-1}$ é convergente, e a relação

$$S_n(0) = \frac{1}{S_{n+1}^*(0)} - b_0$$

mostra que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.

■

Nota 5.19 - Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua cujos aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ convergem respectivamente para os valores α e β. Pondo $d_n = S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)$, na demonstração do teorema 5.18 obteve-se a relação

$$d_n d_{n-1} = -\frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} u_n \quad \text{com} \quad \lim |u_n| = |\alpha - \beta|^2$$

que pode ainda implicar a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ quando $b_{n-1}b_n/a_n$ tiver limite nulo. Assim, se $b_{n-1}b_n/a_n$ convergir mais lentamente que $d_n d_{n-1}$ esta relação mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge pois ela exige que se tenha $\alpha = \beta$. Supondo por exemplo

$$\overline{\lim} \left(n^2 \left| \frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} \right| \right) > 0,$$

uma relação do tipo $d_n = O(1/n)$ implica a convergência da fracção contínua.

6 - Domínios próprios

Para prosseguir o estudo da convergência de fracções contínuas é útil estudar os transformados de alguns subconjuntos de $\mathbb{C}_\infty$ pelas respectivas funções aproximantes S_n.

Diz-se que um conjunto $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$ é um *domínio próprio* ou uma *região simples de valores* de uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ se V for fechado relativamente a $\mathbb{C}_\infty$, $0 \in V$ e

$$s_n[V] = \frac{a_n}{b_n + V} \subseteq V \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Exemplo 6.1 - *O círculo unitário*

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

é um domínio próprio de qualquer fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *que verifique a condição* $|b_n| \geq |a_n| + 1$ *para cada* $n \geq 1$.

Efectivamente, dados $n \geq 1$ e $z \in U$ temos então

$$|s_n(z)| = \left|\frac{a_n}{b_n + z}\right| \leq \frac{|a_n|}{|b_n| - 1} \leq 1.$$

Os exemplos seguintes traduzem propriedades gerais do conceito de domínio próprio de uma fracção contínua.

Exemplo 6.2 - *Seja* V *um domínio próprio da fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$. *Então os conjuntos* $S_n[V]$ *são fechados relativamente a* $\mathbb{C}_\infty$ *e para cada* $n \geq 1$ *tem-se* $S_{n+1}[V] \subseteq S_n[V]$. *Em particular, se* $s_1[V]$ *for limitado todos os* $S_n[V]$ *são limitados.*

Efectivamente, como V é fechado relativamente a $\mathbb{C}_\infty$ e as funções S_n são contínuas, elas transformam V em conjuntos fechados relativamente a $\mathbb{C}_\infty$. Além disso temos

$$S_{n+1}[V] = S_n[s_{n+1}[V]] \subseteq S_n[V] \text{ se } n \geq 1$$

e conclui-se que a inclusão $S_n[V] \subseteq S_1[V] = s_1[V]$ é válida para todo o $n \geq 1$.

Exemplo 6.3 - *Seja* V *um domínio próprio da fracção contínua não singular* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$. *Se* $s_1[V]$ *for limitado então os respectivos denominadores canónicos* B_n *nunca se anulam e*

$$-\frac{B_n}{B_{n-1}} \in \mathbb{C} \setminus V \text{ para cada } n \geq 1.$$

Efectivamente, nestas condições o exemplo anterior mostra que para cada $n \geq 1$ é $S_n(0) \neq \infty$. De (1.7) resulta então que os B_n nunca se anulam, e como (1.6) implica

$$S_n\left(-\frac{B_n}{B_{n-1}}\right) = \infty$$

segue-se que $-B_n/B_{n-1} \notin V$.

Teorema 6.4 - *Seja V um domínio próprio da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$. Então a fracção contínua converge se*

$$\lim \operatorname{diam}\, S_n[V] = 0.$$

Reciprocamente, se a fracção contínua convergir são válidas as relações

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \bigcap_{n\geq 1} S_n[V]$$

e

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(z) \right| \leq \operatorname{diam}\, S_m[V] \quad \textit{se } z \in V \textit{ e } m \geq 1. \tag{6.1}$$

Demonstração. Se $\lim \operatorname{diam}\, S_n[V] = 0$, dado $\delta > 0$ e tomando $k \geq 1$ tal que $\operatorname{diam}\, S_k[V] < \delta$, tem-se

$$S_n(0) \in S_n[V] \subseteq S_k[V] \quad \text{se } n \geq k$$

pelo que

$$|S_m(0) - S_n(0)| < \delta \quad \text{se } m, n \geq k.$$

Então a sucessão dos $S_n(0)$ é uma sucessão de Cauchy e portanto converge.

Suponha-se agora que fracção contínua converge. Dado $m \geq 1$ e tomando $n \geq m$, por $S_m[V]$ ser fechado relativamente a $\mathbb{C}_\infty$ as relações

$$S_n(0) \in S_n[V] \subseteq S_m[V]$$

implicam

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim S_n(0) \in S_m[V].$$

Como $S_m(z) \in S_m[V]$ se $z \in V$, isto justifica a segunda parte do enunciado.

■

Corolário - *Seja V um domínio próprio de uma fracção contínua convergente $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$. Se V for ilimitado, para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se então*

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \operatorname{diam}\, S_{m+1}[V].$$

Demonstração. Atendendo à identidade $S_m(0) = S_{m+1}(\infty)$ basta na relação (6.1) mudar m em $m+1$ e tomar $z = \infty \in V$.

■

O teorema seguinte traduz um critério de convergência uniforme frequentemente aplicável.

Teorema 6.5 - *Seja $\mathcal{F}$ uma família de fracções contínuas e suponha-se que V é um domínio próprio de todas as fracções contínuas da família. Para cada $F \in \mathcal{F}$ seja ainda $V_n(F)$ a imagem de V pela função S_n correspondente. Se existir uma sucessão $(\delta_n)_{n\geq 1}$ tal que*

$$\lim \delta_n = 0 \text{ e } \operatorname{diam} V_n(F) \leq \delta_n \text{ para cada } n \geq 1 \text{ e para cada } F \in \mathcal{F},$$

então a família $\mathcal{F}$ é uniformemente convergente.

Demonstração. Nas condições do enunciado para cada $F \in \mathcal{F}$ é

$$\lim \operatorname{diam} V_n(F) = 0$$

e o teorema anterior mostra que a fracção contínua F é convergente. Representando por $\lambda_n(F)$ a sucessão dos aproximantes de F e pondo $\lambda(F) = \lim \lambda_n(F)$, para cada $n \geq 1$ temos

$$|\lambda_n(F) - \lambda_m(F)| \leq \operatorname{diam} V_n(F) \leq \delta_n \text{ se } m \geq n \text{ e } F \in \mathcal{F}.$$

Tomando o limite quando $m \to +\infty$ é então

$$|\lambda_n(F) - \lambda(F)| \leq \delta_n \text{ se } n \geq 1 \text{ e } F \in \mathcal{F}$$

pelo que

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} |\lambda_n(F) - \lambda(F)| \leq \delta_n \text{ se } n \geq 1$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{F\in\mathcal{F}} |\lambda_n(F) - \lambda(F)| = 0.$$

■

Para estudar os domínios próprios das fracções contínuas são úteis os dois teoremas seguintes.

Teorema 6.6 - *Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, sejam*

$$\alpha = -\arg(z_0) \text{ se } z_0 \neq 0, \quad w_0 = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2} \quad e \quad \rho = \frac{r}{\left||z_0|^2 - r^2\right|} \text{ se } r \neq |z_0|.$$

Tem-se então

$$\frac{1}{\overline{B}(z_0, r)} = \left\{ e^{i\alpha} z : \operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2|z_0|} \right\} \cup \{\infty\} \quad se \quad |z_0| = r \tag{6.2}$$

e

$$\frac{1}{\overline{B}\left(z_0,r\right)}=\begin{cases}\overline{B}\left(w_0,\rho\right) & se \quad |z_0|>r\\ \\ \mathbb{C}_\infty\setminus B\left(w_0,\rho\right) & se \quad |z_0|<r\end{cases}. \tag{6.3}$$

Demonstração. Dado $w\in\mathbb{C}$ a condição $w\in 1/\overline{B}\left(z_0,r\right)$ equivale a

$$\frac{1}{w}\in\overline{B}\left(z_0,r\right),$$

o que se traduz por

$$\left(\frac{1}{w}-z_0\right)\overline{\left(\frac{1}{w}-z_0\right)}\leq r^2,$$

e esta relação pode escrever-se na forma

$$\left(|z_0|^2-r^2\right)|w|^2-z_0w-\overline{z_0w}+1\leq 0. \tag{6.4}$$

Supondo $|z_0|=r$ obtemos a condição $z_0w+\overline{z_0w}\geq 1$ que equivale a

$$\mathrm{Re}\left(z_0w\right)\geq\frac{1}{2}.$$

Como

$$z_0=e^{-i\alpha}\left|z_0\right|$$

isto equivale por sua vez a

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}w\right)\geq\frac{1}{2\left|z_0\right|}$$

que se traduz por

$$w=e^{i\alpha}z \text{ com } \mathrm{Re}\left(z\right)\geq\frac{1}{2\left|z_0\right|}.$$

Notando ainda que $0\in\overline{B}\left(z_0,r\right)$ segue-se que $\infty\in 1/\overline{B}\left(z_0,r\right)$ e a relação (6.2) fica estabelecida.

Supondo $|z_0|\neq r$ sejam

$$w_0=\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2-r^2} \quad \text{e} \quad \rho=\frac{r}{\left||z_0|^2-r^2\right|}.$$

Temos assim

$$|w_0|^2-\rho^2=\frac{1}{|z_0|^2-r^2},$$

e como

$$z_0w+\overline{z_0w}=\left(\overline{w_0}w+w_0\overline{w}\right)\left(|z_0|^2-r^2\right)$$

de (6.4) segue-se que a condição $w \in 1/\overline{B}\,(z_0, r)$ equivale a

$$|w|^2 - \overline{w_0}w - w_0\overline{w} + |w_0|^2 \leq \rho^2 \quad \text{se} \quad |z_0| > r$$

e a

$$|w|^2 - \overline{w_0}w - w_0\overline{w} + |w_0|^2 \geq \rho^2 \quad \text{se} \quad |z_0| < r.$$

As relações (6.3) resultam agora da identidade

$$|w - w_0|^2 = |w|^2 - \overline{w_0}w - w_0\overline{w} + |w_0|^2,$$

notando que $\infty \in 1/\overline{B}\,(z_0, r)$ sse $|z_0| < r$.

■

Corolário - *Sejam $a, b, z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < |z_0 + b|$. Temos então*

$$\frac{a}{b + \overline{B}\,(z_0, r)} = \overline{B}\,(w_0, \rho) \quad \textit{com} \quad w_0 = a\frac{\overline{z_0 + b}}{|z_0 + b|^2 - r^2} \quad \textit{e} \quad \rho = \frac{|a|\, r}{|z_0 + b|^2 - r^2}.$$

Demonstração. Basta atender à primeira das identidades (6.3) notando que

$$b + \overline{B}\,(z_0, r) = \overline{B}\,(z_0 + b, r)$$

e

$$a\overline{B}\,(z_0, \rho) = \overline{B}\,(az_0, |a|\,\rho).$$

■

Teorema 6.7 - *Para cada $\alpha \in\,]-\pi, \pi[$ seja H_α o semi-plano de $\mathbb{C}_\infty$ definido por*

$$H_\alpha = \left\{e^{i\alpha}z : z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0\right\} \cup \{\infty\}. \tag{6.5}$$

Dados $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $a \neq 0$, o conjunto

$$\frac{a}{b + H_\alpha}$$

é limitado sse $\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}b) > 0$ e tem-se então

$$\frac{a}{b + H_\alpha} = \overline{B}\,(z_0, |z_0|) \quad \textit{com} \quad z_0 = \frac{ae^{-i\alpha}}{2\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}b)}.$$

Demonstração. Dado $w \in \mathbb{C}$ a relação $w \in b + H_\alpha$ equivale a $w = b + e^{i\alpha}z$ com $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, e portanto a

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}w\right) \geq \operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}b\right).$$

Então $0 \in b + H_\alpha$ sse $\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}b\right) \leq 0$ e a condição de o conjunto

$$\frac{a}{b + H_\alpha}$$

ser limitado exige $\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}b\right) > 0$. Se esta condição se verificar, pondo

$$w_0 = \frac{e^{-i\alpha}}{2\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}b\right)}$$

temos

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}b\right) = \frac{1}{2\,|w_0|}$$

e conclui-se que

$$w \in b + H_\alpha \quad \text{sse} \quad \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}w\right) \geq \frac{1}{2\,|w_0|} \text{ ou } \ w = \infty.$$

Atendendo a (6.2) é então

$$\frac{1}{\overline{B}\left(w_0, |w_0|\right)} = b + H_\alpha$$

pelo que

$$\frac{1}{b + H_\alpha} = \overline{B}\left(w_0, |w_0|\right).$$

Temos assim

$$\frac{a}{b + H_\alpha} = a\overline{B}\left(w_0, |w_0|\right) = \overline{B}\left(aw_0, |aw_0|\right) = \overline{B}\left(z_0, |z_0|\right)$$

e isto mostra em particular que o conjunto $a/\left(b + H_\alpha\right)$ é limitado.

■

Podemos agora estabelecer um teorema básico no estudo das fracções contínuas que admitem como domínios próprios semi-planos da forma $c + H_\alpha$ em que $c \in \mathbb{C}$ e H_α é definido por (6.5).

Teorema 6.8 - *Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ sejam $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e H_α o semi-plano definido por* (6.5). *Então para cada inteiro $n \geq 1$ o conjunto $S_n[c + H_\alpha]$ é limitado sse*

$$B_{n-1} \neq 0 \ \ e \ \ \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\left(\frac{B_n}{B_{n-1}} + c\right)\right) > 0, \tag{6.6}$$

e nestas condições $S_n[c + H_\alpha]$ é um círculo fechado de diâmetro

$$\frac{|a_1 ... a_n|}{|B_{n-1}|^2\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\left(B_n/B_{n-1} + c\right)\right)}.$$

Demonstração. Atendendo ao teorema 1.7, para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$ e para cada inteiro $n \geq 1$ temos

$$S_n(z) = \frac{A_{n-1}z + A_n}{B_{n-1}z + B_n}.$$

Supondo que se verifica a condição (6.6) é então

$$S_n(z) - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_n B_{n-1} - A_{n-1}B_n}{B_{n-1}^2 \left(B_n/B_{n-1} + z\right)}$$

e atendendo ao teorema 1.10 resulta

$$S_n[c + H_\alpha] - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}a_1 ... a_n}{B_{n-1}^2 \left(B_n/B_{n-1} + c + H_\alpha\right)}. \tag{6.7}$$

Aplicando agora o teorema anterior com

$$a = \frac{(-1)^{n-1}a_1 ... a_n}{B_{n-1}^2} \neq 0 \quad \text{e } b = \frac{B_n}{B_{n-1}} + c$$

vemos que o conjunto

$$S_n[c + H_\alpha] - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$$

é limitado e verifica a conclusão do enunciado pelo que o mesmo sucede com $S_n[c + H_\alpha]$.

Finalmente, como

$$\infty \in c + H_\alpha \quad \text{e } S_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}},$$

se $S_n[c + H_\alpha]$ for limitado é necessariamente $B_{n-1} \neq 0$. O teorema anterior e a identidade (6.7) mostram então que a condição (6.6) é válida.

■

Dada uma fracção contínua convergente $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, é em certos casos possível, como sucede no teorema 5.10, obter estimativas úteis de

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right|$$

expressas em termos de valores da sucessão dos aproximantes $S_n(0)$. Relações deste tipo dizem-se *estimativas a posteriori* enquanto as estimativas em termos dos a_n e b_n, como a do teorema 4.6, são conhecidas por *estimativas a priori.*

Para demonstrar um resultado fundamental no estudo de estimativas a posteriori para $\left|K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n - S_m(0)\right|$ vamos começar por provar um lema de carácter estritamente geométrico. Na demonstração usaremos um resultado elementar de topologia que diz que o diâmetro de um subconjunto compacto do plano é o diâmetro da sua fronteira.

Lema 6.9 - *Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $r_1, r_2 > 0$ suponha-se que as circunferências $C(c_1, r_1)$ e $C(c_2, r_2)$ têm em comum exactamente dois pontos distintos u e v. Sendo então*

$$\gamma = \left| \arg \frac{u - c_2}{u - c_1} \right|$$

é também

$$\gamma = \left| \arg \frac{v - c_2}{v - c_1} \right|$$

e tem-se

$$\operatorname{diam}\left(\overline{B}(c_1, r_1) \cap \overline{B}(c_2, r_2)\right) \begin{cases} = |u - v| & \text{se } \gamma \geq \pi/2 \\ < |u - v| / \sin\gamma & \text{se } \gamma < \pi/2 \end{cases} . \tag{6.8}$$

Demonstração. Mediante uma rotação e uma translação adequadas pode supor-se que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Re}(u) = 0$. De $|u - c_1| = |u - c_2|$ resulta então $|\overline{u} - c_1| = |\overline{u} - c_2|$ pelo que é necessariamente $v = \overline{u}$. Temos assim

$$\arg \frac{v - c_2}{v - c_1} = \arg \overline{\left(\frac{u - c_2}{u - c_1} \right)} = -\gamma,$$

o que estabelece a primeira parte do enunciado.

Sem perda de generalidade suponha-se ainda $c_1 < c_2$ e $\operatorname{Im}(u) > 0$. Dados $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi, \pi[$ tais que

$$u = c_1 + r_1 e^{i\theta_1} = c_2 + r_2 e^{i(\pi - \theta_2)},$$

como $u = i r_1 \sin\theta_1 = i r_2 \sin\theta_2$ segue-se que $\theta_1, \theta_2 \in]0, \pi[$. As expressões de u conduzem também a

$$\operatorname{Im}\left(u e^{i\theta_2}\right) = \operatorname{Im}\left(c_1 e^{i\theta_2} + r_1 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\right) = \operatorname{Im}\left(c_2 e^{i\theta_2} - r_2\right)$$

pelo que

$$c_1 \sin\theta_2 + r_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) = c_2 \sin\theta_2$$

e daqui resulta $r_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) = (c_2 - c_1)\sin\theta_2 > 0$, o que exige $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ (deduz-se também da geometria elementar pois θ_1 e θ_2 são ângulos internos do triângulo de vértices c_1, c_2, u). Como

$$\arg \frac{u - c_2}{u - c_1} = \arg\left(e^{i(\pi - \theta_1 - \theta_2)}\right)$$

da definição de γ deduz-se então

$$\gamma = \pi - (\theta_1 + \theta_2). \tag{6.9}$$

Suponha-se agora que $\theta_1, \theta_2 \in]0, \pi/2[$. Como

$$\mathrm{Re}\,(u) = c_1 + r_1 \cos\theta_1 = c_2 - r_2 \cos\theta_2 = 0$$

temos então $c_1 < 0 < c_2$, e a relação $\mathrm{diam}\,\left(\overline{B}\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)\right) = |u - v|$, que é geometricamente intuitiva, vai ser aqui provada pelo cálculo. Dado um ponto $z \in C\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)$ e sendo

$$z = c_1 + r_1 e^{i\theta} \quad \text{com} \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

das relações

$$|z - c_2| \leq r_2 = |u - c_2| = \left|c_1 - c_2 + r_1 e^{i\theta_1}\right|$$

resulta efectivamente

$$(c_1 - c_2)\cos\theta \leq (c_1 - c_2)\cos\theta_1,$$

o que exige $\cos\theta \geq \cos\theta_1$. Como $c_1 < 0$ temos assim

$$|z|^2 = r_1^2 + c_1^2 + 2r_1 c_1 \cos\theta \leq r_1^2 + c_1^2 + 2r_1 c_1 \cos\theta_1 = |u|^2$$

pelo que $|z| \leq |u|$. Analogamente, se $z \in C\,(c_2, r_2) \cap \overline{B}\,(c_1, r_1)$ e

$$z = c_2 + r_2 e^{i(\pi - \theta)} \quad \text{com} \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

tem-se $|z - c_1| \leq r_1 = |u - c_1|$ e isto exige $\cos(\pi - \theta) \leq \cos(\pi - \theta_2)$. Como $c_2 > 0$ é então

$$|z|^2 = r_2^2 + c_2^2 + 2r_2 c_2 \cos(\pi - \theta) \leq r_2^2 + c_2^2 + 2r_2 c_2 \cos(\pi - \theta_2) = |u|^2$$

e resulta ainda $|z| \leq |u|$. Assim, sendo

$$X = \left(C\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)\right) \cup \left(C\,(c_2, r_2) \cap \overline{B}\,(c_1, r_1)\right),$$

se $z, w \in X$ temos

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq 2\,|u|$$

e como $u, -u \in X$ deduz-se

$$\mathrm{diam}\; X = 2\,|u| = |u - v|\,.$$

Notando ainda que

$$\mathrm{diam}\;\left(\overline{B}\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)\right) = \mathrm{diam}\; X$$

conclui-se a já referida relação

$$\mathrm{diam}\;\left(\overline{B}\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)\right) = |u - v| \quad \text{se } \theta_1 < \frac{\pi}{2} \;\text{ e }\; \theta_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Sendo $\gamma \geq \pi/2$, de (6.9) resulta $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ e a primeira das relações (6.8) fica assim estabelecida. Se $\gamma < \pi/2$ e $\theta_1, \theta_2 \in]0, \pi/2[$ temos ainda

$$\mathrm{diam}\;\left(\overline{B}\,(c_1, r_1) \cap \overline{B}\,(c_2, r_2)\right) = |u - v| < \frac{|u - v|}{\sin\gamma}$$

e a segunda das relações (6.8) é válida neste caso. Finalmente, sendo $\gamma < \pi/2$ e supondo por exemplo $\theta_1 \geq \pi/2$, das identidades $|u| = \mathrm{Im}(u) = r_1 \sin\theta_1$ resulta sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}\ \left(\overline{B}\left(c_1, r_1\right) \cap \overline{B}\left(c_2, r_2\right)\right) &\leq \mathrm{diam}\ \overline{B}\left(c_1, r_1\right) = 2r_1 = \frac{2\left|u\right|}{\sin\theta_1} \\ &< \frac{2\left|u\right|}{\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)} = \frac{\left|u - v\right|}{\sin\gamma}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

■

Podemos agora provar o resultado seguinte.

Teorema 6.10 - *Seja V um domínio próprio de uma fracção contínua não singular convergente $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \beta - \alpha < \pi$ sejam H_α e H_β os semi-planos de $\mathbb{C}_\infty$ definidos como em (6.5). Se $V \subseteq H_\alpha \cap H_\beta$ e se para um dado inteiro $m \geq 1$ os conjuntos $S_m\left[H_\alpha\right]$ e $S_m\left[H_\beta\right]$ forem limitados, para cada $z \in V$ tem-se então*

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} - S_m(z) \right| \leq \left|S_m\left(0\right) - S_{m-1}\left(0\right)\right| \quad se \quad \beta - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$$

e

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{b_n} - S_m(z) \right| < \frac{\left|S_m\left(0\right) - S_{m-1}\left(0\right)\right|}{\sin(\beta - \alpha)} \quad se \quad \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração. Dados $\theta \in \mathbb{R}$ e o correspondente semi-plano H_θ de $\mathbb{C}_\infty$, o teorema 6.8 mostra que $S_m\left[H_\theta\right]$ é limitado sse

$$B_{m-1} \neq 0 \ \text{ e } \ \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\frac{B_m}{B_{m-1}}\right) > 0.$$

Sendo

$$\theta_0 = \arg\frac{B_m}{B_{m-1}},$$

na hipótese de $S_m\left[H_\theta\right]$ ser limitado pode então supor-se que

$$\theta \in \left]\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right[$$

e o teorema 6.8 mostra ainda que $S_m\left[H_\theta\right]$ é então um círculo $\overline{B}\left(c_\theta, r_\theta\right)$. Como a fronteira de H_θ é o conjunto

$$\partial\left(H_\theta\right) = \left\{tie^{i\theta} : t \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\infty\right\}$$

e S_m é um homeomorfismo, sendo

$$\rho_\theta(t) = ite^{i\theta} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

temos

$$S_m\left[\partial\left(H_\theta\right)\right] = \partial\left(S_m\left[H_\theta\right]\right) = C\left(c_\theta, r_\theta\right)$$

e portanto

$$S_m\left(\rho_\theta(t)\right) = c_\theta + r_\theta F_\theta(t) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}, \tag{6.10}$$

em que F_θ verifica a condição

$$|F_\theta(t)| = 1 \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Por outro lado, como $0, \infty \in \partial\left(H_\theta\right)$ segue-se que

$$S_m(0),\ S_m\left(\infty\right) \in S_m\left[\partial\left(H_\theta\right)\right]$$

e isto mostra que as circunferências $C\left(c_\alpha, r_\alpha\right)$ e $C\left(c_\beta, r_\beta\right)$ se intersectam nos pontos distintos

$$u = S_m(0) \text{ e } v = S_m(\infty) = S_{m-1}\left(0\right).$$

Além disso, por ser $\alpha \neq \beta$ temos

$$\partial\left(H_\alpha\right) \cap \partial\left(H_\beta\right) = \{0, \infty\}$$

o que implica

$$S_m\left[\partial\left(H_\alpha\right) \cap \partial\left(H_\beta\right)\right] = \{S_m(0), S_m(\infty)\}$$

e conclui-se que as circunferências $C\left(c_\alpha, r_\alpha\right)$ e $C\left(c_\beta, r_\beta\right)$ têm em comum exactamente os pontos distintos

$$u = S_m(0) \text{ e } v = S_m(\infty) = S_{m-1}\left(0\right).$$

Dado que

$$S_m\left[H_\alpha \cap H_\beta\right] = \overline{B}\left(c_\alpha, r_\alpha\right) \cap \overline{B}\left(c_\beta, r_\beta\right),$$

sendo

$$\gamma = \left|\arg \frac{S_m(0) - c_\beta}{S_m(0) - c_\alpha}\right| \tag{6.12}$$

o lema anterior mostra então que

$$\text{diam } S_m\left[H_\alpha \cap H_\beta\right] = \left|S_m(0) - S_{m-1}(0)\right| \quad \text{se } \ \gamma \geq \frac{\pi}{2}$$

e

$$\text{diam } S_m\left[H_\alpha \cap H_\beta\right] < \frac{\left|S_m(0) - S_{m-1}(0)\right|}{\sin\gamma} \quad \text{se } \ \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Notando agora que das relações (6.1) e $V \subseteq H_\alpha \cap H_\beta$ resulta

$$\left|\ \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\ \frac{a_n}{b_n} - S_m(z)\right| \leq \text{diam } S_m\left[H_\alpha \cap H_\beta\right] \quad \text{se } \ z \in V,$$

vemos que o teorema fica estabelecido se se provar que $\gamma = \beta - \alpha$. Ora dado $\theta \in]\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2[$ temos

$$(S_m \circ \rho_\theta)'(0) = S'_m(\rho_\theta(0))\,\rho'_\theta(0) = S'_m(0)\,ie^{i\theta} = \frac{A_{m-1}B_m - A_m B_{m-1}}{B_m^2} ie^{i\theta} \neq 0,$$

e como de (6.10) se deduz

$$(S_m \circ \rho_\theta)'(0) = r_\theta F'_\theta(0),$$

obtém-se

$$\frac{r_\beta F'_\beta(0)}{r_\alpha F'_\alpha(0)} = e^{i(\beta-\alpha)}$$

pelo que

$$\beta - \alpha = \arg \frac{F'_\beta(0)}{F'_\alpha(0)}. \tag{6.13}$$

Dado que (6.10) e (6.12) implicam

$$\gamma = \left|\arg \frac{r_\beta F_\beta(0)}{r_\alpha F_\alpha(0)}\right| = \left|\arg \frac{F_\beta(0)}{F_\alpha(0)}\right|,$$

pondo

$$\varphi(\theta) = i\frac{F_\theta(0)}{F'_\theta(0)} \quad \text{se} \quad \theta_0 - \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2},$$

temos também

$$\gamma = \left|\arg \frac{\varphi(\beta)\,F'_\beta(0)}{\varphi(\alpha)\,F'_\alpha(0)}\right|. \tag{6.14}$$

Por outro lado, derivando a relação (6.11) na forma

$$F_\theta(t)\overline{F_\theta(t)} = 1$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2[$, obtém-se $\varphi(\theta) = \overline{\varphi(\theta)}$ o que equivale a $\varphi(\theta) \in \mathbb{R}$. Como φ não se anula e é contínua no intervalo $]\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2[$ segue-se que φ não muda de sinal neste intervalo. Então

$$\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(\alpha)} \in \mathbb{R}^+$$

pelo que de (6.13) e (6.14) resulta efectivamente

$$\gamma = \left|\arg \frac{F'_\beta(0)}{F'_\alpha(0)}\right| = \beta - \alpha.$$

■

A seguinte consequência deste teorema é particularmente útil na obtenção de estimativas a posteriori para $\left|K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n - S_m(0)\right|$:

Corolário - *Seja V um domínio próprio ilimitado de uma fracção contínua não singular convergente $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$, e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \beta - \alpha < \pi$ sejam H_α e H_β os semi-planos de $\mathbb{C}_\infty$ definidos como em (6.5). Se $V \subseteq H_\alpha \cap H_\beta$ e se para um dado inteiro $m \geq 0$ os conjuntos $S_{m+1}[H_\alpha]$ e $S_{m+1}[H_\beta]$ forem limitados, tem-se então*

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)| \quad se \quad \beta - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$$

e

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} - S_m(0) \right| < \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin(\beta - \alpha)} \quad se \quad \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração. Resulta directamente da relação $S_m(0) = S_{m+1}(\infty)$ e do teorema anterior, tomando $z = \infty \in V$.

■

7 - Domínios próprios e fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$

Vamos agora aplicar ao estudo das fracções contínuas da forma

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$$

os resultados anteriormente obtidos sobre domínios próprios.

Teorema 7.1 (Jensen, 1909) - *Seja $(b_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão complexa tal que $\mathrm{Re}(b_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(b_n) \geq 0$ se $n > 1$. Então o semi-plano vertical*

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$, para cada inteiro $m \geq 1$ o correspondente conjunto $S_m[H]$ é um círculo fechado tal que

$$\mathrm{diam}\ S_m\left[H\right] = \frac{1}{\mathrm{Re}\left(B_m \overline{B_{m-1}}\right)}, \tag{7.1}$$

e tem-se

$$\mathrm{diam}\ S_m\left[H\right] \leq \frac{1/\mathrm{Re}\left(b_1\right)}{\prod_{n=1}^{m-1}\left(1 + \left|B_n/B_{n-1}\right| \mathrm{Re}\left(b_{n+1}\right)\right)} \leq \frac{1/\mathrm{Re}\left(b_1\right)}{\prod_{n=1}^{m-1}\left(1 + \mathrm{Re}\left(b_n\right) \mathrm{Re}\left(b_{n+1}\right)\right)}. \tag{7.2}$$

Demonstração. Dados $n \geq 1$ e $z \in H \setminus \{\infty\}$ temos

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{b_n + z}\right) = \frac{1}{\left|b_n + z\right|^2} \mathrm{Re}\left(\overline{b_n + z}\right) = \frac{\mathrm{Re}(b_n + z)}{\left|b_n + z\right|^2} \geq 0 \ \text{ se } b_n + z \neq 0.$$

Como $1/(b_n + \infty) = 0 \in H$ segue-se que

$$s_n[H] = \frac{1}{b_n + H} \subseteq H,$$

o que mostra que H é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$. Temos ainda

$$\left|\frac{1}{b_1 + z}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\left(b_1 + z\right)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\left(b_1\right)}$$

se $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, pelo que $s_1[H]$ é limitado e o mesmo sucede portanto com todos os $S_n[H]$. Aplicando então o teorema 6.8 com $\alpha = c = 0$ resulta que para

cada $m \geq 1$ é $B_m \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(B_m/B_{m-1}) > 0$, e $S_m[H]$ é um círculo fechado de diâmetro

$$\frac{1}{|B_{m-1}|^2\,\mathrm{Re}\,(B_m/B_{m-1})} = \frac{1}{\mathrm{Re}\left(B_m\,|B_{m-1}|^2\,/B_{m-1}\right)} = \frac{1}{\mathrm{Re}\left(B_m\overline{B_{m-1}}\right)},$$

o que estabelece (7.1).

Pondo agora

$$Q_n = \mathrm{Re}\left(B_n\overline{B_{n-1}}\right) \quad \text{se } n \geq 1,$$

da relação $B_n = b_nB_{n-1} + B_{n-2}$ vem

$$Q_n = \mathrm{Re}\left(b_n\,|B_{n-1}|^2 + \overline{B_{n-1}}B_{n-2}\right) = \mathrm{Re}\left(b_n\,|B_{n-1}|^2\right) + \mathrm{Re}\left(B_{n-1}\overline{B_{n-2}}\right),$$

ou seja,

$$Q_n = Q_{n-1} + \mathrm{Re}\left(b_n\,|B_{n-1}|^2\right) \quad \text{se} \quad n \geq 2. \tag{7.3}$$

Pondo ainda

$$\rho_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} \quad \text{se} \quad n \geq 1,$$

para cada $n \geq 2$ temos também

$$\begin{aligned} |B_{n-1}|^2 &= \left|\frac{B_{n-1}}{B_{n-2}}\right| |B_{n-1}B_{n-2}| = \left|\rho_{n-1}\right| \left|B_{n-1}\overline{B_{n-2}}\right| \\ &\geq \left|\rho_{n-1}\right| \mathrm{Re}\left(B_{n-1}\overline{B_{n-2}}\right) = \left|\rho_{n-1}\right| Q_{n-1} \end{aligned}$$

e de (7.3) resulta

$$Q_n \geq Q_{n-1}\left(1 + \left|\rho_{n-1}\right| \mathrm{Re}\,(b_n)\right) \quad \text{se} \quad n \geq 2.$$

Para cada $m \geq 1$ é então

$$\prod_{n=2}^{m} Q_n \geq \prod_{n=1}^{m-1} Q_n\,(1 + |\rho_n|\,\mathrm{Re}\,(b_{n+1}))$$

pelo que

$$Q_m \geq Q_1 \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \left|\frac{B_n}{B_{n-1}}\right| \mathrm{Re}\,(b_{n+1})\right),$$

e como $Q_1 = \mathrm{Re}\,(B_1) = \mathrm{Re}(b_1)$, de (7.1) deduz-se a primeira das desigualdades (7.2).

Para cada $n \geq 2$ temos finalmente

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = b_n + \frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} = b_n + \frac{1}{\rho_{n-1}} = b_n + \frac{\overline{\rho_{n-1}}}{\left|\rho_{n-1}\right|^2}$$

pelo que

$$\left|\frac{B_n}{B_{n-1}}\right| = \left|b_n + \frac{\overline{\rho_{n-1}}}{\left|\rho_{n-1}\right|^2}\right| \geq \mathrm{Re}\left(b_n + \frac{\overline{\rho_{n-1}}}{\left|\rho_{n-1}\right|^2}\right).$$

Como $\mathrm{Re}\left(\overline{\rho_{n-1}}\right) = \mathrm{Re}\left(\rho_{n-1}\right) > 0$ se $n \geq 2$, e $|B_1/B_0| = |b_1| \geq \mathrm{Re}\,(b_1)$, é então

$$\left|\frac{B_n}{B_{n-1}}\right| \geq \mathrm{Re}(b_n) \quad \text{se } n \geq 1,$$

o que estabelece a segunda das desigualdades (7.2).

■

Corolário 1 - *Seja* $(b_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão complexa tal que* $\mathrm{Re}(b_1) > 0$ *e* $\mathrm{Re}(b_n) \geq 0$ *para cada* $n > 1$. *Então a fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *converge se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}(b_n)\,\mathrm{Re}(b_{n+1}) = +\infty.$$

Demonstração. Para cada $m \geq 1$ é

$$\prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \mathrm{Re}\,(b_n)\,\mathrm{Re}\,(b_{n+1})\right) \geq \sum_{n=1}^{m-1} \mathrm{Re}(b_n)\,\mathrm{Re}(b_{n+1})$$

pelo que a condição do enunciado e a segunda das desigualdades (7.2) implicam $\lim \mathrm{diam}\, S_m\,[H] = 0$. A convergência de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ resulta agora do teorema 6.4.

■

Corolário 2 - *Seja* $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão não negativa tal que* $\varepsilon_1 > 0$ *e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = +\infty.$$

Então é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *tais que* $\mathrm{Re}(b_n) \geq \varepsilon_n$ *para cada* $n \geq 1$.

Demonstração. Para cada fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ que verifique as condições do enunciado temos efectivamente

$$\mathrm{diam}\; S_m\,[H] \leq \frac{1}{\varepsilon_1 \prod\limits_{n=1}^{m-1} (1 + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1})} \leq \frac{1}{\varepsilon_1 \sum\limits_{n=1}^{m-1} \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} \quad \text{se} \quad m \geq 1$$

e a convergência uniforme resulta directamente do teorema 6.5.

■

Nota 7.2 - Aplicando o teorema 1.6 com a sucessão constante $r_n = -1$ obtém-se a identidade

$$\underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \frac{1}{-b_n} = - \underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \frac{1}{b_n} \quad \text{se} \quad m \geq 1 \tag{7.4}$$

que conduz a resultados análogos aos dos dois corolários anteriores para as fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ com $\mathrm{Re}\,(b_1) < 0$ e $\mathrm{Re}\,(b_n) \leq 0$ se $n > 1$.

O resultado seguinte dá uma estimativa a priori de $\left|K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n - S_m(0)\right|$ no caso em que os b_n são números reais não negativos e $b_1 > 0$:

Corolário 3 - *Seja $(b_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números não negativos e tal que $b_1 > 0$. Se a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ for convergente, para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se*

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \frac{1}{b_1 \prod\limits_{n=1}^{m} (1 + b_n b_{n+1})}.$$

Demonstração. Resulta directamente do corolário do teorema 6.4 e da segunda das desigualdades (7.2).

■

Exemplo 7.3 - *Dado*

$$b \in \mathbb{C} \setminus \{ti : |t| \leq 2\}$$

existe $\rho > 0$ tal que é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$, em que $b_n \in \overline{B}\,(b, \rho)$ para todo o $n \geq 1$.

Efectivamente, atendendo a (7.4) podemos sem perda de generalidade supor $\mathrm{Re}\,(b) \geq 0$. Tome-se então

$$\rho \in]0, \mathrm{Re}(b)[\text{ se } \mathrm{Re}\,(b) > 0 \text{ e } \rho = |\mathrm{Im}\,(b)| - 2 \text{ se } \mathrm{Re}(b) = 0.$$

Na primeira hipótese, para todo o $b_n \in \overline{B}\,(b, \rho)$ é

$$\mathrm{Re}\,(b) - \mathrm{Re}\,(b_n) \leq |b_n - b| \leq \rho$$

pelo que $\mathrm{Re}\,(b_n) \geq \mathrm{Re}\,(b) - \rho$, e aplicando o corolário 2 do teorema anterior com a sucessão constante $\varepsilon_n = \mathrm{Re}\,(b) - \rho$ vemos que ρ verifica as condições exigidas. Se $\mathrm{Re}\,(b) = 0$, para cada $b_n \in \overline{B}\,(b, \rho)$ é

$$|b_n| \geq |b| - \rho = |\mathrm{Im}\,(b)| - \rho = 2$$

e a convergência uniforme resulta do corolário 1 do teorema 4.7.

O teorema seguinte constitui uma generalização fundamental do corolário 1 do teorem 5.8.

Teorema 7.4 (Van Vleck, 1901) - *Dado $\varepsilon \in]0, \pi/2]$ seja $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ uma fracção contínua tal que*

$$b_1 \neq 0 \quad e \quad |\arg\,(b_n)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad se \ b_n \neq 0.$$

Então as sucessões de aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são ambas convergentes e $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge sse $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = +\infty$.

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converge. Como o teorema 5.13 mostra então que as sucessões A_{2n}, A_{2n+1}, B_{2n} e B_{2n+1} são todas convergentes, para provar a convergência de $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ basta mostrar que $\lim B_{2n}B_{2n+1} \neq 0$. Sendo H o semi-plano definido por

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

e dado que do teorema 7.1 resulta

$$\frac{1}{|B_{2n}B_{2n+1}|} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\left(B_{2n+1}\overline{B_{2n}}\right)} = \mathrm{diam}\ S_{2n+1}[H] \leq \mathrm{diam}\ S_1[H] = \frac{1}{\mathrm{Re}(b_1)}$$

para todo o $n \geq 1$, pode efectivamente concluir-se que $\lim B_{2n}B_{2n+1} \neq 0$.

Suponha-se agora que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ é divergente. Dado $n \geq 1$, se $b_n \neq 0$ temos

$$\mathrm{Re}(b_n) = |b_n| \cos(\arg(b_n)) \geq |b_n| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

pelo que

$$\mathrm{Re}(b_n) \geq |b_n| \sin\varepsilon,$$

e esta desigualdade é trivialmente válida se $b_n = 0$. Da primeira das desigualdades (7.2) resulta então

$$\mathrm{diam}\ S_m[H] \leq \frac{1/\mathrm{Re}(b_1)}{\prod_{n=1}^{m-1}\left(1 + \sin\varepsilon\,|b_{n+1}|\,|B_n/B_{n-1}|\right)} \leq \frac{1/\mathrm{Re}(b_1)}{\sin\varepsilon \sum_{n=1}^{m-1} |b_{n+1}|\,|B_n/B_{n-1}|},$$

e como o lema 5.11 mostra que a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ implica a divergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| b_{n+1} \frac{B_n}{B_{n-1}} \right|$$

segue-se que $\lim \mathrm{diam}\ S_m[H] = 0$, o que prova a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$.

■

Podemos agora provar a seguinte generalização do teorema 5.8:

Teorema 7.5 - *Dado $\varepsilon \in\ ]0, \pi/2]$ seja $(b_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão complexa tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = +\infty \quad e \quad |\arg(b_n)| \leq \pi/2 - \varepsilon \ \ se\ b_n \neq 0.$$

Então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$ e é convergente sse para algum inteiro $m \geq 0$ for $b_{2m+1} \neq 0$.

Demonstração. Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = +\infty,$$

para algum $k \geq 1$ é necessariamente $b_k \neq 0$. O teorema anterior mostra então que $K_{n=k}^{+\infty} 1/b_n$ converge, e do teorema 1.5 resulta que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.

Usando indução vejamos agora que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ é convergente se para algum $m \geq 0$ for $b_{2m+1} \neq 0$. Atendendo ao teorema anterior isto é verdadeiro para $m = 0$ e, supondo que é verdadeiro para um certo $m \geq 0$, a fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{b_n} = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_{n+2}}$$

converge se $b_{2m+3} \neq 0$. Admitindo sem perda de generalidade $b_1 = 0$ temos então

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} = \left(\mathop{\mathrm{K}}_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{b_n} \right)^{-1} = b_2 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$$

pelo que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ também converge.

Finalmente, se for $b_{2n+1} = 0$ para todo o $n \geq 0$ o corolário 2 do teorema 1.7 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n = \infty$.

■

Exemplo 7.6 - *Nas condições do teorema anterior tem-se* $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n = 0$ *sse* $b_{2n} = 0$ *para cada* $n \geq 1$.

Efectivamente, como é

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1 + K_{n=1}^{+\infty} 1/b_{n+1}}$$

tem-se $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n = 0$ sse $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_{n+1} = \infty$ e o teorema anterior mostra que isto equivale a ser $b_{2n} = 0$ para cada $n \geq 1$.

Exemplo 7.7 - *Dado* $\varepsilon \in]0, \pi/2]$ *seja* $(b_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão complexa tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = +\infty \quad e \quad |\arg(-b_n)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad se\ b_n \neq 0.$$

Então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *converge em* $\mathbb{C}_\infty$ *e é convergente sse para algum inteiro* $m \geq 0$ for $b_{2m+1} \neq 0$.

Efectivamente basta aplicar o teorema 7.5 e a identidade (7.4).

O teorema seguinte dá uma estimativa a posteriori de $\left| K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n - S_m(0) \right|$ se a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ verificar as condições de convergência do teorema 7.4.

Teorema 7.8 - *Dado $\varepsilon \in]0, \pi/2]$ seja $(b_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão complexa tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = +\infty,\ b_1 \neq 0 \quad e \quad |\arg(b_n)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad se\ b_n \neq 0.$$

Para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se então

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)| \quad se \quad \varepsilon \geq \frac{\pi}{4}$$

e

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin 2\varepsilon} \quad se \quad \varepsilon < \frac{\pi}{4}.$$

Além disso vale a desigualdade estrita nesta última relação se para algum inteiro $k \leq m+1$ for $b_k \neq 0$ e $|\arg(b_k)| < \pi/2 - \varepsilon$.

Demonstração. Dados $n \geq 1$ e $\delta \in]0, \varepsilon[$, a condição

$$|\arg(b_n)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \delta \ \text{ se } \ b_n \neq 0$$

mostra que

$$\mathrm{Re}\left(e^{\pm i\delta} b_n\right) \geq 0.$$

Sendo

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

para os semi-planos

$$H_{\pm\delta} = e^{\pm i\delta} H$$

temos assim

$$s_n[H_{\pm\delta}] = \frac{1}{b_n + e^{\pm i\delta} H} = \frac{e^{\mp i\delta}}{b_n e^{\mp i\delta} + H} \subseteq \frac{e^{\mp i\delta}}{H} = e^{\mp i\delta} H$$

pelo que

$$s_n[H_\delta] \subseteq H_{-\delta} \ \text{ e } \ s_n[H_{-\delta}] \subseteq H_\delta.$$

Sendo agora

$$V_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg(z)| \leq \pi/2 - \delta\} \cup \{\infty\}$$

resulta então

$$s_n[V_\delta] = s_n[H_\delta \cap H_{-\delta}] \subseteq H_\delta \cap H_{-\delta} = V_\delta$$

e conclui-se que V_δ é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$. Além disso, como $b_1 \neq 0$ temos

$$\mathrm{Re}\left(e^{\pm i\delta} b_1\right) > 0$$

e o teorema 6.7 mostra que os conjuntos $s_1[H_\delta]$ e $s_1[H_{-\delta}]$ são limitados. Por outro lado, das inclusões

$$s_n[H_\delta] \subseteq H_{-\delta} \ \text{ e } \ s_n[H_{-\delta}] \subseteq H_\delta$$

resulta que $H_\delta \cup H_{-\delta}$ é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ e isto implica

$$S_n\left[H_\delta \cup H_{-\delta}\right] \subseteq s_1\left[H_\delta \cup H_{-\delta}\right] = s_1\left[H_\delta\right] \cup s_1\left[H_{-\delta}\right].$$

Dado $m \geq 0$ vemos assim que os conjuntos $S_{m+1}\left[H_\delta\right]$ e $S_{m+1}\left[H_{-\delta}\right]$ são ambos limitados pelo que podemos aplicar o corolário do teorema 6.10 a cada domínio próprio $V_\delta = H_\delta \cap H_{-\delta}$. Se for $\varepsilon \leq \pi/4$ temos então

$$\left| \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| < \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin 2\delta}$$

e como esta desigualdade é válida para todo o $\delta \in]0, \varepsilon[$ fazendo $\delta \to \varepsilon$ resulta

$$\left| \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin 2\varepsilon} \quad \text{se} \quad \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}.$$

Em particular obtém-se

$$\left| \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)| \quad \text{se} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

e esta desigualdade permanece válida quando $\varepsilon > \pi/4$ pois basta então escolher $\delta \in]\pi/4, \varepsilon[$ e aplicar a V_δ o corolário do teorema 6.10.

Finalmente, sendo $\rho_n = B_n/B_{n-1}$ para cada $n \geq 1$, temos

$$\rho_n = b_n + \frac{1}{\rho_{n-1}} \quad \text{se } n \geq 2$$

pelo que

$$e^{\pm i\varepsilon}\rho_n = e^{\pm i\varepsilon} b_n + \frac{\overline{\rho_{n-1}}}{\left|\rho_{n-1}\right|^2} e^{\pm i\varepsilon}$$

e portanto

$$\operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon}\rho_n\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon} b_n\right) + \frac{1}{\left|\rho_{n-1}\right|^2} \operatorname{Re}\left(e^{\mp i\varepsilon}\rho_{n-1}\right) \quad \text{se } n \geq 2.$$

Como $\rho_1 = b_1$ e

$$\operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon} b_n\right) \geq 0 \text{ se } n \geq 1,$$

usando indução deduz-se

$$\operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon}\rho_n\right) \geq \operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon} b_n\right) \text{ se } n \geq 1.$$

Assim, se para algum k tal que $1 \leq k \leq m+1$ for $\operatorname{Re}\left(e^{\pm i\varepsilon} b_k\right) > 0$ o teorema 6.8 mostra que os conjuntos $S_k\left[H_{\pm\varepsilon}\right]$ são limitados e o mesmo sucede portanto com os conjuntos $S_{m+1}\left[H_{\pm\varepsilon}\right]$. Aplicando o corolário do teorema 6.10 ao domínio próprio V_ε obtém-se então a desigualdade estrita na segunda relação do enunciado. ■

Sobre a convergência de fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ provaremos também o teorema seguinte que completa e generaliza o corolário 1 do teorema 4.1.

Teorema 7.9 (Thron-Lange) - *Dados*

$$c \in \mathbb{R} \quad e \quad r = \sqrt{1+c^2},$$

seja $(b_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão complexa tal que*

$$|b_n + 2c| \geq 2r \quad \textit{para cada} \quad n \geq 1.$$

Então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *converge e admite o conjunto* $\overline{B}(c,r)$ *por domínio próprio. Além disso, sendo*

$$\sigma = 1 - \frac{|c|}{r},$$

para cada inteiro $m \geq 1$ *tem-se*

$$\operatorname{diam} S_m\left[\overline{B}(c,r)\right] \leq 2r \prod_{n=2}^{m} \left(\frac{2n-\sigma}{2n+\sigma}\right) \leq 2r \left(\frac{4+\sigma}{2m+2+\sigma}\right)^{\sigma}. \tag{7.5}$$

Demonstração. Dados $n \geq 1$ e

$$z \in b_n + \overline{B}(c,r) = \overline{B}(b_n + c, r),$$

da condição $|b_n + 2c| \geq 2r$ deduz-se

$$|z+c| = |z - (b_n + c) + b_n + 2c| \geq |b_n + 2c| - |z - (b_n + c)| \geq 2r - r = r,$$

o que implica

$$b_n + \overline{B}(c,r) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus B(-c,r).$$

Como $r > |c|$ e $r^2 - c^2 = 1$, do teorema 6.6 resulta

$$\mathbb{C}_\infty \setminus B(-c,r) = \frac{1}{\overline{B}(c,r)}$$

pelo que

$$s_n\left[\overline{B}(c,r)\right] = \frac{1}{b_n + \overline{B}(c,r)} \subseteq \overline{B}(c,r)$$

e conclui-se que $\overline{B}(c,r)$ é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$.

Atendendo ao teorema 1.7, para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$ e para cada $n \geq 1$ temos

$$S_n(z) = \frac{A_{n-1}z + A_n}{B_{n-1}z + B_n}.$$

Como $0 \in \overline{B}(c,r)$ segue -se que $S_n(0) \in \mathbb{C}$ pelo que a sucessão dos B_n nunca se anula. Pondo

$$\rho_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} \text{ se } n \geq 1,$$

como na demonstração do teorema 6.8 temos

$$S_n[\overline{B}(c,r)] - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1}^2\left(\overline{B}(c,r) + \rho_n\right)},$$

e dado que $S_n[\overline{B}(c,r)]$ é limitado, necessariamente

$$0 \notin \overline{B}(c,r) + \rho_n = \overline{B}(c+\rho_n, r).$$

Tem-se então $|c+\rho_n| > r$ pelo que o corolário do teorema 6.6 mostra que $S_n[\overline{B}(c,r)]$ é um círculo de raio

$$R_n = \frac{1}{|B_{n-1}|^2}\frac{r}{|c+\rho_n|^2 - r^2},$$

e daqui resulta

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{1}{|\rho_n|^2}\frac{|c+\rho_n|^2 - r^2}{|c+\rho_{n+1}|^2 - r^2}.$$

Por ser $B_{n+1} = b_{n+1}B_n + B_{n-1}$ temos ainda

$$\rho_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{\rho_n}$$

e a relação anterior pode escrever-se na forma

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{|c/\rho_n + 1|^2 - r^2/|\rho_n|^2}{|c + b_{n+1} + 1/\rho_n|^2 - r^2}. \tag{7.6}$$

Vamos agora usar indução para provar que

$$\rho_n \in \mathbb{C} \setminus B\left(-\frac{n+1}{n}c, \frac{n+1}{n}r\right) \text{ se } n \geq 1, \tag{7.7}$$

notando que o teorema 6.6 e a identidade $r^2 - c^2 = 1$ mostram que esta relação equivale a

$$\frac{1}{\rho_n} \in \overline{B}\left(\frac{n}{n+1}c, \frac{nr}{n+1}\right). \tag{7.8}$$

Como

$$\rho_1 = \frac{B_1}{B_0} = b_1 \quad \text{e} \quad |b_1 + 2c| \geq 2r$$

temos $|\rho_1 + 2c| \geq 2r$ pelo que a relação (7.7) é válida para $n = 1$. Supondo agora que para um dado $n \geq 1$ se verifica (7.8) temos

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{n}{n+1}c + \mu_n \quad \text{com} \quad |\mu_n| \leq \frac{nr}{n+1}, \tag{7.9}$$

e por ser $|b_{n+1} + 2c| \geq 2r$ temos também

$$b_{n+1} = -2c + \tau_n \quad \text{com} \quad |\tau_n| \geq 2r.$$

É então

$$\rho_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{\rho_n} = -\frac{n+2}{n+1}c + \tau_n + \mu_n$$

pelo que

$$\left|\rho_{n+1} + \frac{n+2}{n+1}c\right| = |\tau_n + \mu_n| \geq 2r - \frac{nr}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}r$$

e a relação (7.7) mantém-se válida para $n + 1$.

Para cada $n \geq 1$ sejam agora

$$z_n = c - \frac{1}{\rho_n} \tag{7.10}$$

e

$$d_n = \left|c + b_{n+1} + \frac{1}{\rho_n}\right|^2 - r^2. \tag{7.11}$$

De (7.9) vem então

$$z_n = \frac{c}{n+1} - \mu_n$$

pelo que

$$|z_n| \leq \frac{|c| + nr}{n+1}, \tag{7.12}$$

e como $|c| < r$ segue-se que $|z_n| < r$. Atendendo a (7.11) temos também

$$\begin{aligned} d_n &= |2c + b_{n+1} - z_n|^2 - r^2 \geq (|2c + b_{n+1}| - |z_n|)^2 - r^2 \\ &\geq (2r - |z_n|)^2 - r^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$d_n \geq (3r - |z_n|)(r - |z_n|) > 0. \tag{7.13}$$

Por outro lado, de (7.10) resulta

$$\left|\frac{c}{\rho_n} + 1\right|^2 - \frac{r^2}{|\rho_n|^2} = |c(c - z_n) + 1|^2 - r^2 |z_n - c|^2,$$

e como

$$|c(c - z_n) + 1| = \left|1 + c^2 - cz_n\right| = \left|r^2 - cz_n\right|,$$

obtém-se

$$\left|\frac{c}{\rho_n}+1\right|^2-\frac{r^2}{|\rho_n|^2}=\left|r^2-cz_n\right|^2-r^2\left|z_n-c\right|^2.$$

Notando agora que

$$\left|r^2-cz_n\right|^2=r^4+c^2\left|z_n\right|^2-2cr^2\,\mathrm{Re}\,(z_n)$$

e

$$r^2\left|z_n-c\right|^2=c^2r^2-r^2\left|z_n\right|^2-2cr^2\,\mathrm{Re}\,(z_n),$$

temos

$$\begin{aligned}\left|r^2-cz_n\right|^2-r^2\left|z_n-c\right|^2 &= r^4+c^2\left|z_n\right|^2-c^2r^2-r^2\left|z_n\right|^2\\ &= \left(r^2-|z_n|^2\right)\left(r^2-c^2\right)=r^2-\left|z_n\right|^2.\end{aligned}$$

De (7.6), (7.11) e (7.13) resulta assim

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}=\frac{r^2-\left|z_n\right|^2}{d_n}\leq\frac{r+|z_n|}{3r-|z_n|},$$

e (7.12) conduz à majoração

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}\leq\frac{(2n+1)\,r+|c|}{(2n+3)\,r-|c|}.$$

Tomando

$$\sigma=1-\frac{|c|}{r}$$

é então

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}\leq\frac{2n+2-\sigma}{2n+2+\sigma},$$

e dado $m\geq 1$ temos

$$R_m=R_1\prod_{n=1}^{m-1}\frac{R_{n+1}}{R_n}\leq R_1\prod_{n=1}^{m-1}\frac{2n+2-\sigma}{2n+2+\sigma}=R_1\prod_{n=2}^{m}\frac{2n-\sigma}{2n+\sigma}.$$

Como

$$S_1\left[\overline{B}\,(c,r)\right]=s_1\left[\overline{B}\,(c,r)\right]\subseteq\overline{B}\,(c,r)$$

é $R_1\leq r$ e obtém-se a primeira das desigualdades (7.5).

Partindo agora da relação

$$e^x\geq 1+x\ \text{ se }\ x\in\mathbb{R}$$

obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}\frac{2n-\sigma}{2n+\sigma} &= 1-\frac{\sigma}{n+\sigma/2}\leq\exp\left(-\frac{\sigma}{n+\sigma/2}\right)\leq\left(1+\frac{1}{n+\sigma/2}\right)^{-\sigma}\\ &= \left(\frac{n+\sigma/2}{n+1+\sigma/2}\right)^{\sigma},\end{aligned}$$

e a segunda desigualdade (7.5) resulta de ser

$$\prod_{n=2}^{m} \frac{n+\sigma/2}{n+1+\sigma/2} = \frac{4+\sigma}{2m+2+\sigma}.$$

Finalmente, como esta última desigualdade implica

$$\lim \operatorname{diam}\, S_m\left[\overline{B}\,(c,r)\right] = 0,$$

a convergência da fracção contínua é agora uma consequência directa do teorema 6.4.

■

Nota 7.10 - No teorema anterior a parte do enunciado relativa à convergência foi obtida por Thron em 1949 e resulta directamente de um teorema que provaremos na secção seguinte (cf. nota 8.17). No entanto a demonstração anterior, embora extensa, tem a vantagem de conduzir às desigualdades (7.5) que foram estabelecidas por Lange em 1999.

Aplicando o teorema 6.4, do teorema anterior resultam imediatamente estimativas a priori de $\left|K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n - S_m(0)\right|$:

Corolário 1 - *Nas condições do teorema anterior, para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se*

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{b_n} - S_m(0) \right| \leq 2r \prod_{n=2}^{m} \left(\frac{2n-\sigma}{2n+\sigma}\right) \leq 2r \left(\frac{4+\sigma}{2m+2+\sigma}\right)^{\sigma}.$$

■

O corolário seguinte mostra que uma fracção contínua da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ é convergente se todos os b_n estiverem fora de um círculo aberto com centro no eixo real e cuja circunferência exterior passa nos pontos $\pm 2i$.

Corolário 2 - *Dado $a \in \mathbb{R}$ seja $\rho > 0$ tal que $\pm 2i \in C\,(a,\rho)$. Se (b_n) for uma sucessão tal que*

$$b_n \in \mathbb{C} \setminus B(a,\rho) \text{ para todo o } n \geq 1,$$

então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ converge.

Demonstração. O enunciado resulta directamente do teorema anterior tomando $c = -a/2$ e $r = \rho/2$.

■

Corolário 3 - *Dados*

$$c \in \mathbb{R} \quad e \ r = \sqrt{1+c^2}$$

é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *em que* $(b_n)_{n\geq 1}$ *é uma sucessão complexa tal que*

$$|b_n + 2c| \geq 2r \quad \textit{para cada } n \geq 1.$$

Demonstração. O enunciado resulta directamente do teorema 6.5 atendendo a (7.5).

■

O teorema seguinte completa o resultado do exemplo 7.3.

Teorema 7.11 - *Dado* $b \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\mathrm{Im}(b)| > 2$, *seja*

$$\rho = \begin{cases} |b - 2i| & \textit{se } \mathrm{Im}(b) > 2 \\ |b + 2i| & \textit{se } \mathrm{Im}(b) < -2 \end{cases}.$$

Então é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ *em que* $b_n \in \overline{B}(b, \rho)$ *para todo o* $n \geq 1$.

Demonstração. Supondo $\mathrm{Im}(b) > 2$, seja

$$u = \frac{2}{\mathrm{Im}(b) - 2}$$

e escolha-se $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$2i + 2c = u(b - 2i).$$

É então $\mathrm{Im}(c) = 0$ e $b + 2c = (1 + u)(b - 2i)$ pelo que

$$|b + 2c| = |b - 2i|(1 + u) = |b - 2i| + |2i + 2c|.$$

Sendo $\rho = |b - 2i|$, se $b_n \in \overline{B}(b, \rho)$ temos assim

$$|b_n + 2c| \geq |b + 2c| - |b_n - b| \geq |b + 2c| - |b - 2i| = |2i + 2c| = 2\sqrt{1 + c^2}$$

e a convergência uniforme resulta do corolário anterior.

Supondo $\mathrm{Im}(b) < -2$ é $\mathrm{Im}\left(\overline{b}\right) > 2$ e $\rho = \left|\overline{b} - 2i\right|$. Se $b_n \in \overline{B}(b, \rho)$ segue-se que $\overline{b_n} \in \overline{B}\left(\overline{b}, \rho\right)$ e aplicando agora a $\overline{b_n}$ a desigualdade já estabelecida conclui-se ainda

$$|b_n + 2c| = \left|\overline{b_n} + 2c\right| \geq 2\sqrt{1 + c^2}.$$

■

8 - Os teoremas da parábola e o teorema de Hillam & Thron

Alguns dos resultados mais importantes que se conhecem sobre a convergência de fracções contínuas da forma

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1}$$

têm a designação colectiva de *teoremas da parábola* e referem-se ao caso em que os a_n estão situados numa zona da forma

$$E_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \right\} \quad \text{com} \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}. \tag{8.1}$$

Da definição resulta que cada E_α é a região do plano complexo que contém a origem e que é limitada pela curva P_α de equação

$$|z| = \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha. \tag{8.2}$$

O teorema seguinte caracteriza a curva P_α.

Teorema 8.1 - *A curva P_α de equação* (8.2) *é uma parábola com o foco na origem, de eixo*

$$r_\alpha = \left\{ te^{2i\alpha} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

e cuja recta directriz d_α passa no ponto

$$w_\alpha = -\frac{1}{2}e^{2i\alpha}\cos^2\alpha.$$

Esta parábola inclui o ponto $-1/4$, e o seu vértice é o ponto

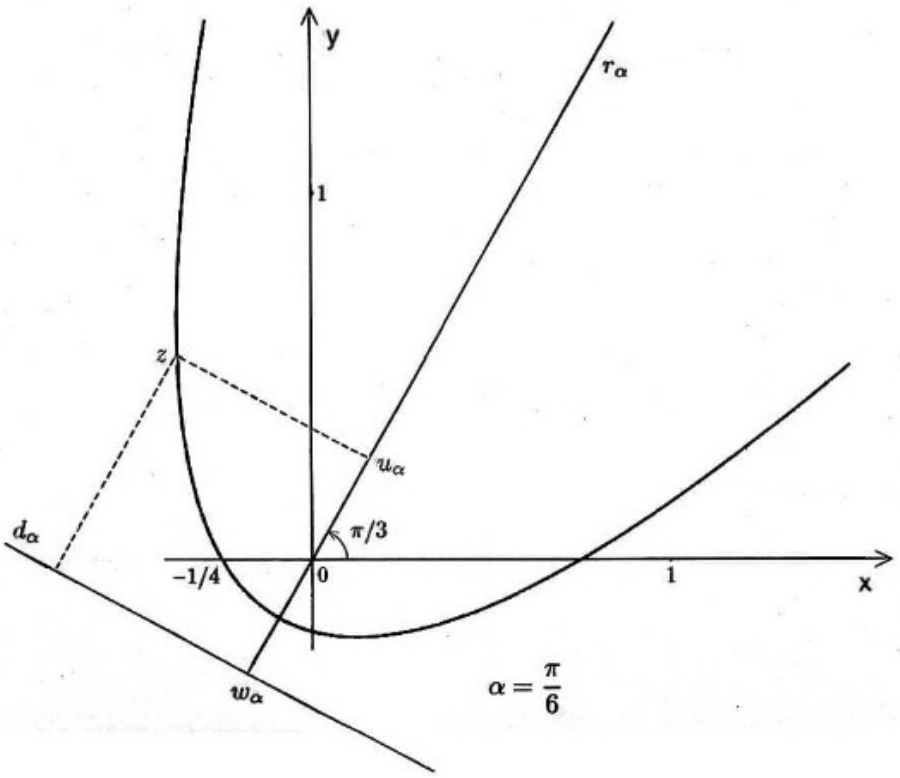
$$v_\alpha = -\frac{1}{4}e^{2i\alpha}\cos^2\alpha.$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, como a projecção ortogonal de $ze^{-2i\alpha}$ em $\mathbb{R}$ é $\operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right)$ segue-se que a projecção ortogonal de z na recta r_α é

$$u_\alpha = e^{2i\alpha}\operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right).$$

Sendo d_α a recta perpendicular a r_α que passa no ponto w_α, a distância de z a d_α é assim

$$|u_\alpha - w_\alpha| = \left| e^{2i\alpha}\operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}e^{2i\alpha}\cos^2\alpha \right| = \left| \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \right|.$$



Resulta então que a parábola de foco na origem e com directriz d_α tem por equação

$$|z| = \left| \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \right|, \tag{8.3}$$

mas como

$$|z| = \left|ze^{-2i\alpha}\right| \geq -\operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) > -\operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) - \frac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

a condição (8.3) exige

$$\left| \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \right| = \operatorname{Re}\left(ze^{-2i\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$

e a equação da parábola toma a forma (8.2).

De (8.2) resulta ainda que $-1/4 \in P_\alpha$ e que o vértice de P_α, definido pela intersecção de P_α e r_α, é o ponto

$$v_\alpha = -\frac{1}{4}e^{2i\alpha}\cos^2\alpha.$$

■

Exemplo 8.2 - *A parábola P_0 tem eixo horizontal, vértice no ponto $-1/4$, e a sua equação é*

$$|z| = \mathrm{Re}\,(z) + \frac{1}{2}.$$

Exemplo 8.3 - *É válida a inclusão*

$$\overline{B}\,(0, 1/4) \subseteq E_0.$$

Efectivamente, dado $z \in \overline{B}\,(0, 1/4)$ e pondo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, é $|z| + |x| < 1$ pelo que da identidade

$$y^2 = (|z| - |x|)\,(|z| + |x|)$$

resulta

$$y^2 \leq |z| - |x| \leq \frac{1}{4} - |x|\,.$$

Temos então

$$|z|^2 \leq \frac{1}{4} - |x| + x^2 = \left(\frac{1}{2} - |x|\right)^2,$$

e como $|x| \leq 1/2$ isto implica

$$|z| \leq \frac{1}{2} - |x| \leq \frac{1}{2} + \mathrm{Re}(z)$$

pelo que $z \in E_0$.

Se os a_n pertencerem a um conjunto da forma E_α pode ver-se que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ admite como domínio próprio o semi-plano

$$V_\alpha = \left\{ -\frac{1}{2} + e^{i\alpha} z : \mathrm{Re}(z) \geq 0 \right\} \cup \{\infty\}\,, \tag{8.4}$$

ou seja,

$$V_\alpha = -\frac{1}{2} + H_\alpha \tag{8.5}$$

em que H_α é o semi-plano definido por (6.5). Mais precisamente provaremos o resultado seguinte.

Teorema 8.4 - *Sejam $\alpha \in\,]-\pi/2, \pi/2[$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números complexos. Então o semi-plano V_α definido por (8.4) é um domínio próprio da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ sse todos os a_n estiverem situados na região parabólica E_α definida por (8.1), e nestas condições os respectivos conjuntos $S_n[V_\alpha]$ são limitados.*

Demonstração. Se $a_n = 0$ trivialmente $s_n[V_\alpha] = \{0\}$ e $a_n \in E_\alpha$. Supondo agora $a_n \neq 0$, do teorema 6.7 resulta

$$s_n[V_\alpha] = \frac{a_n}{1/2 + H_\alpha} = \overline{B}\,(z_n, |z_n|) \quad \text{com} \quad z_n = \frac{a_n e^{-i\alpha}}{\cos\alpha}$$

pelo que V_α é um domínio próprio sse $\overline{B}\,(z_n, |z_n|) \subseteq V_\alpha$. Como $w \in V_\alpha$ sse

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}w\right) \geq -\frac{1}{2}\cos\alpha$$

e $\overline{B}\,(z_n, |z_n|)$ é o conjunto dos complexos da forma

$$\frac{a_n e^{-i\alpha}}{\cos\alpha} + \theta\frac{|a_n|}{\cos\alpha}e^{i\varphi} \quad \text{com} \quad \theta \in [0,1] \quad \text{e} \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

dado $w \in \overline{B}\,(z_n, |z_n|)$ temos

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}w\right) = \frac{\mathrm{Re}\left(a_n e^{-2i\alpha}\right)}{\cos\alpha} + \frac{\theta\,|a_n|}{\cos\alpha}\cos\left(\varphi - \alpha\right) \geq \frac{\mathrm{Re}\left(a_n e^{-2i\alpha}\right)}{\cos\alpha} - \frac{|a_n|}{\cos\alpha}$$

e a igualdade é válida quando $\theta = 1$ e $\varphi = \alpha + \pi$. Assim a condição

$$\overline{B}\,(z_n, |z_n|) \subseteq V_\alpha$$

equivale a

$$\frac{\mathrm{Re}\left(a_n e^{-2i\alpha}\right)}{\cos\alpha} - \frac{|a_n|}{\cos\alpha} \geq -\frac{1}{2}\cos\alpha$$

e esta condição traduz que $a_n \in E_\alpha$.

Notando finalmente que $s_1[V_\alpha]$ é um conjunto limitado, o exemplo 6.2 mostra que o mesmo sucede com os conjuntos $S_n[V_\alpha]$ para todo o $n \geq 1$.

■

Podemos agora estabelecer o resultado seguinte.

Teorema 8.5 (Thron, 1958) - *Dado $\alpha \in\,]-\pi/2, \pi/2[$ sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de pontos de E_α e V_α o semi-plano definido por* (8.4) *Para a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ tem-se então*

$$\mathrm{diam}\; S_m[V_\alpha] \leq \frac{2\,|a_1|}{\cos\alpha}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{4n\,|a_{n+1}|}\right)^{-1} \quad \textit{se} \quad m \geq 1. \tag{8.6}$$

Demonstração. Se para algum $n \geq 1$ for $a_n = 0$ temos $s_n[V_\alpha] = \{0\}$ pelo que para cada $m \geq n$ é também $S_m[V_\alpha] = \{0\}$ e a relação (8.6) é trivialmente verificada. Sem perda de generalidade vamos então supor $a_n \neq 0$ se $1 \leq n \leq m$.

Como cada $S_n[V_\alpha]$ é limitado, o teorema 6.8 mostra que $B_{n-1} \neq 0$ se $1 \leq n \leq m$, e

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\left(\frac{B_n}{B_{n-1}} - \frac{1}{2}\right)\right) > 0.$$

Pondo

$$\rho_n = \frac{B_n}{B_{n-1}}$$

e

$$r_n = \frac{2e^{-i\alpha}}{\cos\alpha}\rho_n - 1 \ = p_n + iq_n \ \text{ com } \ p_n, q_n \in \mathbb{R}, \tag{8.7}$$

a condição anterior equivale a

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\rho_n - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) > 0,$$

e temos

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\rho_n - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha\operatorname{Re}(r_n) = \frac{\cos\alpha}{2}p_n.$$

É então $p_n > 0$ e do teorema 6.8 resulta

$$\operatorname{diam} S_n[V_\alpha] = \frac{2\,|a_1 ... a_n|}{|B_{n-1}|^2\, p_n \cos\alpha} \ \text{ se } \ 1 \le n \le m \tag{8.8}$$

pelo que pondo $D_n = \operatorname{diam} S_n[V_\alpha]$ temos

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} = \frac{\left|\rho_n^2\right| p_{n+1}}{|a_{n+1}|\, p_n} \ \text{ se } \ 1 \le n < m. \tag{8.9}$$

Seja agora

$$z_n = 4e^{-2i\alpha}\frac{a_{n+1}}{\cos^2\alpha} = x_n + iy_n \ \text{ com } \ x_n, y_n \in \mathbb{R}. \tag{8.10}$$

Como

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{4}\,|z_n|\cos^2\alpha \tag{8.11}$$

e de (8.7) vem

$$\rho_n = \frac{e^{i\alpha}}{2}(1 + r_n)\cos\alpha, \tag{8.12}$$

a relação (8.9) transforma-se em

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} = \frac{|1 + r_n|^2}{|z_n|}\frac{p_{n+1}}{p_n} \ \text{ se } \ 1 \le n < m. \tag{813}$$

Partindo da identidade $B_{n+1} = B_n + a_{n+1}B_{n-1}$ temos por outro lado

$$\rho_{n+1} = 1 + \frac{a_{n+1}}{\rho_n} \ \text{ se } \ 1 \le n < m$$

donde vem

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\rho_{n+1}\right) = \cos\alpha + \operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\frac{a_{n+1}}{\rho_n}\right)$$

e portanto, atendendo (8.10) e (8.12),

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\rho_{n+1}\right) = \cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{z_n}{1 + r_n}\right)\cos\alpha \ \text{ se } \ 1 \le n < m. \tag{8.14}$$

Mudando n em $n+1$ em (8.12) temos também

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\rho_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(1+r_{n+1})\cos\alpha = \frac{1}{2}\,(1+p_{n+1})\cos\alpha$$

e comparando com (8.14) deduz-se

$$p_{n+1} = 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{1+r_n}\right),$$

ou seja,

$$p_{n+1} = 1 + \frac{x_n\,(1+p_n) + y_n q_n}{|1+r_n|^2}. \tag{8.15}$$

A relação (8.13) pode assim transformar-se em

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} = \frac{c_n}{|z_n|\,p_n} \text{ se } 1 \le n < m, \tag{8.16}$$

com

$$c_n = |1+r_n|^2 + x_n\,(1+p_n) + y_n q_n,$$

o que equivale a

$$c_n = (1+p_n)^2 + q_n^2 + x_n\,(1+p_n) + y_n q_n. \tag{8.17}$$

Como os a_n são pontos de E_α temos por outro lado

$$|a_{n+1}| \le \mathrm{Re}\left(e^{-2i\alpha}a_{n+1}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

e atendendo a (8.10) esta relação transforma-se em $|z_n| \le \mathrm{Re}\,(z_n) + 2$, ou seja,

$$|z_n| \le x_n + 2 \tag{8.18}$$

o que implica ainda

$$y_n^2 \le 4\,(x_n+1)\,. \tag{8.19}$$

Notando agora que

$$q_n^2 + y_n q_n = \left(q_n + \frac{y_n}{2}\right)^2 - \frac{y_n^2}{4} \ge -\frac{y_n^2}{4}$$

e aplicando em (8.17) as desigualdades (8.18) e (8.19), deduz-se

$$c_n \ge p_n\,(p_n + |z_n|)$$

pelo que de (8.16) resulta a minoração

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} \ge 1 + \frac{p_n}{|z_n|} \text{ se } 1 \le n < m. \tag{8.20}$$

Para obter uma minoração de p_n mais precisa que a já estabelecida $p_n > 0$, começamos por notar que (8.15) implica

$$p_{n+1} \geq 1 + \frac{x_n\,(1+p_n) - |y_n q_n|}{|1+r_n|^2}$$

e atendendo a (8.19) temos

$$p_{n+1} \geq 1 + \frac{x_n\,(1+p_n) - 2\sqrt{x_n+1}\,|q_n|}{|1+r_n|^2}. \tag{8.21}$$

Da desigualdade das médias vem por outro lado

$$2\sqrt{x_n+1}\,(1+p_n)\,|q_n| \leq (x_n+1)\,(1+p_n)^2 + q_n^2,$$

e substituindo em (8.21) obtém-se

$$p_{n+1} \geq 1 - \frac{(1+p_n)^2 + q_n^2}{(1+p_n)\,|1+r_n|^2} = 1 - \frac{1}{1+p_n} = \frac{p_n}{1+p_n}.$$

Temos assim

$$\frac{1}{p_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{p_n} \quad \text{se} \quad 1 \leq n < m$$

e, notando que de (8.7) se deduz $p_1 = 1$, por indução resulta

$$p_n \geq \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad 1 \leq n \leq m.$$

Atendendo a (8.20) e (8.10) chegamos finalmente a

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \leq \left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{4n\,|a_{n+1}|}\right)^{-1} \quad \text{se} \quad 1 \leq n < m$$

e como de (8.8) vem

$$D_1 = \frac{2\,|a_1|}{\cos\alpha} \tag{8.22}$$

o enunciado resulta agora da relação

$$D_m = D_1 \prod_{n=1}^{m-1} \frac{D_{n+1}}{D_n}.$$

■

Os três resultados que se seguem são consequência directa deste teorema.

Corolário 1 - *Dados $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ e $M > 0$, é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ tais que*

$$a_n \in E_\alpha \quad e \quad |a_n| \leq M \ln(n+1) \quad \textit{para todo o } n \geq 1.$$

Demonstração. Para cada fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ nas condições do enunciado, temos

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{4n\,|a_{n+1}|}\geq 1+\frac{\cos^2\alpha}{4Mn\ln(n+1)}\ \text{ se } n\geq 1.$$

Como

$$\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{4Mn\ln(n+1)}\right)\geq\frac{\cos^2\alpha}{4M}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\ \text{ se } m\geq 1,$$

o teorema anterior mostra que para cada $m\geq 1$ se tem

$$\operatorname{diam} S_m[V_\alpha]\leq\frac{8M^2\ln 2}{\cos^3\alpha}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\right)^{-1}.$$

O enunciado resulta agora do teorema 6.5 pois o segundo membro da desigualdade anterior não depende dos a_n e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}=+\infty.$$

■

O corolário anterior é uma versão do chamado *teorema uniforme da parábola.* Em particular obtém-se imediatamente o resultado seguinte.

Exemplo 8.6 - *Dados $\alpha\in\,]-\pi/2,\pi/2[$ e $r>0$, é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty}a_n/1$ em que os a_n pertencem ao conjunto $E_\alpha\cap\overline{B}\,(0,r)$.*

Atendendo ao exemplo 8.3 isto mostra que a versão uniforme do teorema de Worpitzky (corolário 3 do teorema 4.7) corresponde ao caso $\alpha=0$ e $r=1/4$ do exemplo anterior.

Corolário 2 (Perron, 1929) - *Dado $a\in\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1/4]$, existe $r>0$ tal que é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty}a_n/1$ em que $a_n\in\overline{B}\,(a,r)$ para todo o $n\geq 1$.*

Demonstração. Se $a\in\,]-1/4,0]$ temos

$$|a|=-\operatorname{Re}(a)<\operatorname{Re}(a)+1/2$$

pelo que a é ponto interior de E_0. Se $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, sendo $\alpha=\arg(a)/2$ é $|\alpha|<\pi/2$ e o ponto a pertence ao interior de E_α pois tem-se

$$|a|=\operatorname{Re}\left(ae^{-2i\alpha}\right)<\operatorname{Re}\left(ae^{-2i\alpha}\right)+\frac{1}{2}\cos^2\alpha.$$

Então cada ponto $a \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$ é interior a alguma região parabólica E_α e daqui resulta que existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq E_\alpha$. Atendendo ao corolário 1 do teorema anterior segue-se que r verifica as condições do enunciado.

■

Corolário 3 - *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sucessão convergente de números complexos com limite em $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$ então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Sendo $a = \lim a_n$ tome-se $r > 0$ que verifique as condições do corolário anterior. Como existe uma ordem m tal que $a_n \in \overline{B}(a, r)$ para todo o $n > m$, segue-se que a fracção contínua $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/1$ é convergente e o teorema 1.5 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.

■

Corolário 4 - *Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sucessões convergentes de números complexos com limites a e b tais que $b \neq 0$ e $a/b^2 \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$. Então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Nas condições do enunciado existe uma ordem m a partir da qual é $b_n \neq 0$, e o teorema 1.6 mostra que a fracção contínua $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n$ tem a mesma natureza de

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n/b_n^2}{1}.$$

O enunciado resulta agora do corolário anterior.

■

Provaremos agora uma versão mais precisa do corolário 2.

Teorema 8.7 (Jones & Thron, 1980) - *Dado $a \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$ seja*

$$r = \sqrt{\frac{|a| + \mathrm{Re}(a)}{2}} \quad se \quad |a| > \frac{1}{4} \quad e \quad r = \left| a + \frac{1}{4} \right| \quad se \quad |a| \leq \frac{1}{4}.$$

Então é uniformemente convergente a família das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ em que $a_n \in \overline{B}(a, r)$ para todo o $n \geq 1$.

Demonstração. Atendendo ao corolário 1 do teorema anterior basta provar que para cada círculo $\overline{B}(a, r)$ nas condições do enunciado existe $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq E_\alpha$.

Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ seja

$$\alpha = \frac{\arg(a)}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

e tome-se $\rho > 0$. Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z - a| = \rho$ temos então

$$z = a + \rho e^{i(2\alpha+\varphi)} = e^{2i\alpha}\left(\ |a| + \rho e^{i\varphi}\right) \quad \text{com } \varphi \in \mathbb{R},$$

e como a condição $z \in E_\alpha$ se traduz por

$$|z| \leq \mathrm{Re}\left(e^{-2i\alpha} z\right) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$

ela equivale a

$$|z| \leq |a| + \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$

e portanto a

$$\left||a| + \rho e^{i\varphi}\right| \leq |a| + \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\alpha. \tag{8.23}$$

Tomando quadrados vemos que esta condição exige

$$\rho^2 \leq \rho^2\cos^2\varphi + \rho\cos\varphi\cos^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\cos^2\alpha\right)^2 + |a|\cos^2\alpha,$$

ou seja

$$\rho^2 \leq \left(\rho\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\alpha\right)^2 + |a|\cos^2\alpha,$$

o que é satisfeito se

$$\rho^2 \leq |a|\cos^2\alpha. \tag{8.24}$$

Reciprocamente, se ρ verifica esta última desigualdade, um raciocínio em sentido inverso mostra que

$$\left||a| + \rho e^{i\varphi}\right| \leq \left||a| + \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\alpha\right|,$$

e como

$$|a| + \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \geq \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha} - \rho + \frac{1}{2}\cos^2\alpha \geq \left(\rho - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\alpha > 0$$

segue-se que a condição (8.23) é válida. Atendendo ainda a que

$$|a| + \mathrm{Re}(a) = |a|\,(1 + \cos 2\alpha) = 2\,|a|\cos^2\alpha,$$

a relação (8.24) pode escrever-se na forma

$$\rho^2 \leq \frac{|a| + \mathrm{Re}(a)}{2}$$

e conclui-se que

$$\overline{B}\,(a, r) \subseteq E_\alpha \;\text{ se }\; r = \sqrt{\frac{|a| + \mathrm{Re}(a)}{2}} \text{ e } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Por outro lado, dado $a \in \mathbb{C}$ temos

$$\left|a + \frac{1}{4}\right|^2 = \left(|a| - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{|a| + \mathrm{Re}(a)}{2}$$

pelo que

$$\left|a+\frac{1}{4}\right| \geq \sqrt{\frac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}} \quad \text{e} \quad \left|a+\frac{1}{4}\right| = \sqrt{\frac{|a|+\mathrm{Re}(a)}{2}} \quad \text{sse} \quad |a| = 1/4.$$

O enunciado fica assim estabelecido quando $|a| \geq 1/4$.

Supondo agora $|a| < 1/4$ e sendo φ a função definida para $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = |a + t(a + 1/4)|,$$

tem-se $\varphi(0) < 1/4$. Como

$$\varphi(t) > t\,|a + 1/4| - 1/4$$

é

$$\varphi(t) > 1/4 \ \text{ se } \ 2t\,|a + 1/4| \geq 1$$

pelo que existe $h > 0$ tal que

$$\left|a + h\left(a + \frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4}.$$

Pondo então

$$a_0 = a + h\left(a + \frac{1}{4}\right),$$

como $|a_0| = 1/4$ e é necessariamente $a_0 \neq -1/4$, a parte do enunciado já estabelecida mostra que existe $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ tal que

$$\overline{B}(a_0, r) \subseteq E_\alpha \ \text{ se } \ r = \left|a_0 + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{\frac{|a_0|+\mathrm{Re}(a_0)}{2}}.$$

Por outro lado, se $z \in \overline{B}(a, |a + 1/4|)$ temos

$$z = a + \theta\left|a + \frac{1}{4}\right| e^{i\varphi} \ \text{ com } \ \theta \in [0,1] \ \text{ e } \varphi \in \mathbb{R}$$

donde vem

$$|z - a_0| \leq |a - a_0| + \left|a + \frac{1}{4}\right| = (1+h)\left|a + \frac{1}{4}\right| = \left|a_0 + \frac{1}{4}\right|$$

e conclui-se

$$\overline{B}(a, |a + 1/4|) \subseteq \overline{B}\left(a_0, \left|a_0 + \frac{1}{4}\right|\right) \subseteq E_\alpha.$$

■

O teorema anterior conduz à seguinte generalização do teorema de Worpitzky (corolário 2 do teorema 4.1):

Corolário - *Dado $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| \leq 1/4$, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ converge se os a_n verificarem a condição*

$$|a_n - a| \leq \left| a + \frac{1}{4} \right|.$$

Demonstração. Se $|a| \leq 1/4$ e $a \neq -1/4$ o enunciado resulta da segunda parte do teorema anterior. Se $a = -1/4$ a condição do enunciado exige $a_n = -1/4$ para todo o n pelo que a convergência de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ resulta então do teorema de Worpitzky.

■

Para uma fracção contínua da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ em que os a_n nunca se anulam provou-se que a divergência da sua série de Stern-Stolz implica a convergência da fracção contínua desde que todos os a_n estejam situados nalguma região parabólica E_α. Este é o resultado habitualmente designado por *teorema da parábola* e constitui um marco notável na teoria da convergência das fracções contínuas. O caso correspondente a $\alpha = 0$ foi estabelecido por Scott e Wall em 1940 e a generalização a todo o $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ foi obtida por Thron em 1943.

Para demonstrar o teorema da parábola usaremos propriedades das chamadas *transformações fraccionais lineares* que são as funções da forma

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ em que } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } z \in \mathbb{C}_\infty,$$

com a já referida convenção de continuidade

$$\varphi(\infty) = \lim_{z \longrightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Para estas funções define-se o respectivo *discriminante* Δ por

$$\Delta = ad - bc$$

e é válido o resultado seguinte.

Teorema 8.8 - *Uma transformação fraccional linear é injectiva e tem domínio $\mathbb{C}_\infty$ se $\Delta \neq 0$, e é constante se $\Delta = 0$.*

Demonstração. Se $\Delta \neq 0$ os parâmetros a e b não podem ser simultaneamente nulos e o mesmo sucede com c e d. Então as condições $az + b = 0$ e $cz + d = 0$ exigem respectivamente $z = -b/a$ e $z = -d/c \neq -b/a$. Como a e c também não são simultaneamente nulos conclui-se que φ está definida para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$. Quanto à injectividade, dados $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $(cz + d)(cw + d) \neq 0$ temos

$$\varphi(z) - \varphi(w) = \frac{\Delta (z - w)}{(cz + d)(cw + d)}$$

pelo que de $z \neq w$ se deduz $\varphi(z) \neq \varphi(w)$. Supondo por exemplo $cz + d = 0$ é $\varphi(z) = \infty$, e de $z \neq w$ deduz-se ainda $\varphi(z) \neq \varphi(w)$ pois $\varphi(w) \in \mathbb{C}$ se $w \neq -d/c$. Na hipótese $\Delta \neq 0$ temos também

$$\varphi(z) - \varphi(\infty) = -\frac{\Delta}{c(cz+d)}$$

o que implica $\varphi(z) \neq \varphi(\infty)$ se $z \in \mathbb{C}$.

Se $\Delta = 0$ e $c = d = 0$, a função φ toma o valor ∞ em todo o seu domínio. Se $\Delta = 0$ e não for $c = d = 0$, a expressão de $\varphi(z) - \varphi(w)$ e o facto de φ ser contínua nos pontos onde está definida mostram que φ é constante.

■

As transformações fraccionais lineares com discriminante $\Delta \neq 0$ recebem o nome de *transformações de Möbius* e as restantes dizem-se *transformações singulares.*

Corolário - *A composição de duas transformações de Möbius é ainda uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Como a composição de duas transformações de Möbius é uma transformação fraccional linear e é injectiva, o teorema anterior mostra que ela é necessariamente uma transformação de Möbius.

■

Exemplo 8.9 - *Se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ é uma fracção contínua não singular, as correspondente funções s_n e S_n são transformações de Möbius.*

Efectivamente isto é uma consequência directa das definições e dos teoremas 1.7 e 1.10.

Teorema 8.10 - *Se φ é uma transformação de Möbius então $\varphi[\mathbb{C}_\infty] = \mathbb{C}_\infty$ e φ^{-1} é ainda uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Sendo

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

e dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, a condição $w = \varphi(z)$ equivale a $z = \psi(w)$ com

$$\psi(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}.$$

Como ψ é uma transformação de Möbius e por continuidade esta relação é válida para todo o $w \in \mathbb{C}_\infty$, conclui-se que $\varphi^{-1} = \psi$.

■

Apoiaremos a demonstração do teorema da parábola nos dois lemas seguintes.

Lema 8.11 - *Seja φ uma transformação de Möbius que transforma o círculo unitário fechado $U = \overline{B}(0,1)$ num conjunto limitado. Então $\varphi[U]$ é um conjunto da forma $\overline{B}(\gamma, r)$ com $\gamma \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, e tem-se $\varphi[U] = U$ sse existirem $\theta \in \mathbb{R}$ e $q \in B(0,1)$ tais que*

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z+\overline{q}}{qz+1}.$$

Demonstração. Seja

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

Supondo $c = 0$ é necessariamente $ad \neq 0$ e tem-se então

$$\varphi[U] = \frac{a}{d}U + \frac{b}{d} = \overline{B}\left(0, \left|\frac{a}{d}\right|\right) + \frac{b}{d} = \overline{B}\left(\frac{b}{d}, \left|\frac{a}{d}\right|\right).$$

Em particular a condição $\varphi[U] = U$ é verificada sse $b = 0$ e $|a/d| = 1$, o que equivale a φ ter a forma

$$\varphi(z) = e^{i\theta}z \text{ com } \theta = \arg\frac{a}{d}.$$

Supondo agora $c \neq 0$ e sendo $\Delta = ad - bc$, temos

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} = -\frac{\Delta/c^2}{z+d/c}$$

pelo que φ se pode escrever na forma

$$\varphi(z) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta/c^2}{z+d/c}.$$

Se $\varphi[U]$ é um conjunto limitado temos necessariamente $z + d/c \neq 0$ para todo o $z \in U$, o que implica $|d/c| > 1$. Em particular isto exige $d \neq 0$ e podemos sem perda de generalidade supor $d = 1$. Aplicando o corolário do teorema 6.6 resulta então

$$\varphi[U] = \overline{B}(\gamma, \rho) \text{ com } \gamma = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c\left(1-|c|^2\right)} \text{ e } \rho = \frac{|\Delta|}{1-|c|^2}$$

pelo que a condição $\varphi[U] = U$ equivale a

$$|\Delta| = 1 - |c|^2 \text{ e } a = \frac{\Delta}{1-|c|^2}.$$

Sendo $\theta = \arg(\Delta)$ isto equivale ainda a

$$\Delta = \left(1-|c|^2\right)e^{i\theta} \text{ e } a = e^{i\theta},$$

e da relação $\Delta = ad - bc$ deduz-se

$$b = \overline{c}e^{i\theta}.$$

Como $|c| < 1$, pondo $q = c$ conclui-se que a condição $\varphi[U] = U$ equivale efectivamente a ser

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\,\frac{z+\overline{q}}{qz+1} \quad \text{com} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |q| < 1.$$

■

Lema 8.12 (Hillam & Thron, 1965) - *Dado $\lambda \in B(0,1)$ seja $(\tau_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de transformações de Möbius tais que $\tau_n[U] \subseteq U$ e $\tau_n(\infty) = \lambda$ para todo o $n \geq 1$. Sendo $T_n = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ se $n \geq 1$, então as sucessões $T_n(\infty)$ e $T_n(z)$ com $|z| < 1$ convergem todas para o mesmo limite. Além disso, se* diam $T_n[U]$ *não tiver limite nulo estas sucessões são absolutamente convergentes.*

Demonstração. Como os T_n são transformações de Möbius e $T_n[U] \subseteq U$ se $n \geq 1$, o lema anterior mostra que cada conjunto $T_n[U]$ é da forma $\overline{B}(c_n, r_n)$ com $c_n \in \mathbb{C}$ e $r_n > 0$. Temos então

$$\overline{B}(c_{n+1}, r_{n+1}) = (T_n \circ \tau_{n+1})[U] \subseteq T_n[U] = \overline{B}(c_n, r_n) \subseteq U$$

pelo que

$$\text{diam}\ \overline{B}(c_{n+1}, r_{n+1}) \leq \text{diam}\ \overline{B}(c_n, r_n)$$

e portanto $r_{n+1} \leq r_n \leq 1$.

Fixado $n \geq 1$ seja $\rho = |c_{n+1} - c_n|$ e tome-se $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_{n+1} - c_n = \rho e^{i\theta}.$$

Como

$$c_{n+1} + r_{n+1}e^{i\theta} \in \overline{B}(c_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(c_n, r_n)$$

temos

$$\left|c_{n+1} + r_{n+1}e^{i\theta} - c_n\right| \leq r_n$$

e conclui-se a relação

$$|c_{n+1} - c_n| \leq r_n - r_{n+1} \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{8.25}$$

Atendendo a que a série de termo geral $r_n - r_{n+1}$ é convergente, a relação anterior mostra que o mesmo sucede com a série de termo geral $|c_n - c_{n+1}|$, pelo que a sucessão (c_n) também converge. Se

$$\lim\ \text{diam}\ T_n[U] = 0$$

resulta então imediatamente $\lim T_n(z) = \lim c_n$ para cada $z \in U$, e como

$$T_n(\infty) = T_{n-1}(\tau_n(\infty)) = T_{n-1}(\lambda)$$

é também $\lim T_n(\infty) = \lim c_n$ pois $\lambda \in B(0,1)$.

Admitindo agora que diam $T_n[U]$ não tem limite nulo, como a sucessão (r_n) é decrescente existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$r_n \geq \varepsilon \text{ se } n \geq 1. \tag{8.26}$$

Para cada $n \geq 1$ seja então φ_n a função definida em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$\varphi_n(z) = \frac{T_n(z) - c_n}{r_n}.$$

Como

$$\varphi_n[U] = \frac{1}{r_n}\left(\overline{B}(c_n, r_n) - c_n\right) = U,$$

o lema anterior mostra que existem $\omega_n \in \mathbb{R}$ e $q_n \in B(0,1)$ tais que

$$\varphi_n(z) = e^{i\omega_n}\frac{z + \overline{q_n}}{q_n z + 1}. \tag{8.27}$$

Pondo

$$p_n = r_n e^{i\omega_n}$$

é então

$$T_n(z) = c_n + p_n\frac{z + \overline{q_n}}{q_n z + 1} \text{ se } z \in \mathbb{C}_\infty, \tag{8.28}$$

donde vem

$$T_n(\infty) = c_n + \frac{p_n}{q_n} \tag{8.29}$$

e portanto

$$T_n(z) - T_n(\infty) = p_n\frac{z + \overline{q_n}}{q_n z + 1} - \frac{p_n}{q_n}.$$

Notando agora que $|p_n| = r_n \leq 1$ e $|q_n| < 1$, obtemos

$$|T_n(z) - T_n(\infty)| \leq \left|\frac{z + \overline{q_n}}{q_n z + 1} - \frac{1}{q_n}\right| = \frac{1 - |q_n|^2}{|q_n|\,|q_n z + 1|},$$

e como é também $|q_n z + 1| \geq 1 - |q_n z| \geq 1 - |z|$, pondo

$$\delta_n = 1 - |q_n| > 0$$

conclui-se a desigualdade

$$|T_n(z) - T_n(\infty)| \leq \delta_n\frac{2 - \delta_n}{(1 - \delta_n)(1 - |z|)} \text{ se } |z| < 1. \tag{8.30}$$

Para majorar δ_n começamos por notar que a relação $T_{n+1}(\infty) = T_n(\lambda)$ associada às identidades (8.28) e (8.29) permite escrever

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = p_n \frac{\lambda + \overline{q_n}}{q_n \lambda + 1} + c_n - c_{n+1}.$$

Dado $n \geq 1$ é então

$$\frac{r_{n+1}}{|q_{n+1}|} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leq |p_n| \left|\frac{\lambda + \overline{q_n}}{q_n \lambda + 1}\right| + |c_n - c_{n+1}|,$$

e como de (8.27) resulta

$$\left|\frac{\lambda + \overline{q_n}}{q_n \lambda + 1}\right| = |\varphi_n(\lambda)| \leq 1,$$

atendendo a (8.25) deduz-se sucessivamente

$$\frac{r_{n+1}}{|q_{n+1}|} \leq |p_n| + |c_n - c_{n+1}| = r_n + |c_n - c_{n+1}| \leq 2r_n - r_{n+1}.$$

Temos assim

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} \geq \frac{1 + |q_{n+1}|}{2|q_{n+1}|} = \frac{2 - \delta_{n+1}}{2 - 2\delta_{n+1}} = 1 + \frac{\delta_{n+1}}{2(1 - \delta_{n+1})}$$

pelo que

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} \geq 1 + \frac{\delta_{n+1}}{2} \quad \text{se } n \geq 1.$$

Para cada $m \geq 1$ é pois

$$\frac{r_1}{r_m} = \prod_{n=2}^{m} \frac{r_{n-1}}{r_n} \geq \prod_{n=2}^{m} \left(1 + \frac{\delta_n}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{m} \delta_n$$

e de (8.26) resulta a majoração

$$\sum_{n=2}^{m} \delta_n \leq \frac{2r_1}{\varepsilon}$$

que mostra que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n$ converge. É então $\lim \delta_n = 0$ pelo que o coeficiente de δ_n no segundo membro de (8.30) tem limite finito e daqui resulta que a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n$ implica a convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |T_n(z) - T_n(\infty)| \quad \text{com} \quad |z| < 1. \tag{8.31}$$

Da relação $T_{n+1}(\infty) = T_n(\lambda)$ com $|\lambda| < 1$ conclui-se agora a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)|$$

e portanto a convergência absoluta da sucessão $T_n(\infty)$. Finalmente, da convergência das séries (8.31) deduz-se a relação

$$\lim T_n(z) = \lim T_n(\infty) \quad \text{se } |z| < 1,$$

e a desigualdade

$$\begin{aligned} |T_{n+1}(z) - T_n(z)| &\leq |T_{n+1}(z) - T_{n+1}(\infty)| + |T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)| \\ &\quad + |T_n(\infty) - T_n(z)| \end{aligned}$$

permite concluir a convergência absoluta das sucessões $T_n(z)$.

■

Podemos agora estabelecer o resultado conhecido por *teorema da parábola*.

Teorema 8.13 (Thron, 1943) - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ uma fracção contínua não singular e suponha-se que existe $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $a_n \in E_\alpha$ para todo o $n \geq 1$. Então a fracção contínua converge sse a respectiva série de Stern-Stolz for convergente, e se isto não suceder as sucessões dos aproximantes $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são absolutamente convergentes.*

Demonstração. Sendo φ a função definida em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$\varphi(z) = \frac{e^{i\alpha}\cos\alpha}{1+z} - 1$$

e

$$V_\alpha = \left\{ -\frac{1}{2} + e^{i\alpha} z : \mathrm{Re}(z) \geq 0 \right\} \cup \{\infty\} = -\frac{1}{2} + H_\alpha,$$

do teorema 6.7 resulta

$$\varphi[V_\alpha] = \frac{e^{i\alpha}\cos\alpha}{1/2 + H_\alpha} - 1 = \overline{B}(1,1) - 1 = U,$$

e como $\varphi^{-1} = \varphi$ é também

$$\varphi[U] = V_\alpha.$$

Dado que V_α é domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$, pondo agora

$$\tau_n = \varphi^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n} \circ \varphi \quad \text{para cada } n \geq 1,$$

temos

$$\tau_n[U] = \left(\varphi^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n}\right)[V_\alpha] \subseteq \varphi^{-1}[V_\alpha] = U$$

e

$$\begin{aligned} \tau_n(\infty) &= \left(\varphi^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n}\right)(-1) = \left(\varphi^{-1} \circ s_{2n-1}\right)(\infty) = \varphi^{-1}(0) = \varphi(0) \\ &= e^{i\alpha}\cos\alpha - 1. \end{aligned}$$

Sendo $\lambda = e^{i\alpha}\cos\alpha - 1$, para todo o $n \geq 1$ é então $\tau_n(\infty) = \lambda$ e

$$|\lambda| = \left|\cos\alpha - e^{-i\alpha}\right| = |\sin\alpha| < 1$$

pelo que os τ_n verificam as condições do lema anterior.

Pondo ainda $T_n = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ para cada $n \geq 1$, é

$$T_n = \varphi^{-1} \circ S_{2n} \circ \varphi \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

pelo que

$$S_{2n} = \varphi \circ T_n \circ \varphi^{-1}, \tag{8.32}$$

o que conduz a

$$S_{2n}[V_\alpha] = \varphi[T_n[U]]. \tag{8.33}$$

Como o conjunto $S_1[V_\alpha]$ é limitado, pondo

$$M = \sup\{|z| : z \in S_1[V_\alpha]\}$$

e dado $z \in T_n[U]$, por ser $\varphi(z) \in S_{2n}[V_\alpha] \subseteq S_1[V_\alpha]$ temos

$$\left|\frac{1}{1+z}\right| = \left|\frac{\varphi(z)+1}{\cos\alpha}\right| \leq \frac{M+1}{\cos\alpha}.$$

Dado que

$$|\varphi(w) - \varphi(z)| = \cos\alpha \frac{|w-z|}{|1+w|\,|1+z|} \quad \text{se } z, w \in \mathbb{C},$$

pondo

$$L = \frac{(M+1)^2}{\cos\alpha}$$

para cada $n \geq 1$ resulta então

$$|\varphi(w) - \varphi(z)| \leq L|w-z| \quad \text{se} \quad z, w \in T_n[U] \tag{8.34}$$

e de (8.33) conclui-se

$$\operatorname{diam} S_{2n}[V_\alpha] \leq L \operatorname{diam} T_n[U]. \tag{8.35}$$

Se $\lim \operatorname{diam} S_{2n}[V_\alpha] = 0$ é também $\lim \operatorname{diam} S_{2n+1}[V_\alpha] = 0$ pelo que $\lim \operatorname{diam} S_n[V_\alpha] = 0$ e o teorema 6.4 mostra que a fracção contínua converge. Se $\operatorname{diam} S_{2n}[V_\alpha]$ não tem limite nulo, de (8.35) resulta que o mesmo sucede com $\operatorname{diam} T_n[U]$ e o lema anterior mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)|$$

é convergente. Por outro lado, como $\varphi^{-1}(0) = \varphi(0) = e^{i\alpha}\cos\alpha - 1 = \lambda$, de (8.32) vem $S_{2n}(0) = \varphi(T_n(\lambda))$ pelo que

$$|S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)| = |\varphi(T_n(\lambda)) - \varphi(T_{n-1}(\lambda))|.$$

Notando agora que $T_{n-1}(\lambda) \in T_{n-1}[U]$ e $T_n(\lambda) \in T_n[U] \subseteq T_{n-1}[U]$, de (8.33) e da relação $T_{n+1}(\infty) = T_n(\lambda)$ resulta

$$|S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)| \leq L\,|T_n(\lambda) - T_{n-1}(\lambda)| = L\,|T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)|,$$

o que permite concluir a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)|.$$

Representando por S_n^* as funções aproximantes relativas à fracção contínua $K_{n=2}^{+\infty} a_n/1$, o resultado já estabelecido mostra que ou esta fracção contínua converge ou converge a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|S_{2n}^*(0) - S_{2n-2}^*(0)\right|.$$

Na primeira hipótese, como $\lim S_n^*(0) \in V_\alpha$, é necessariamente $K_{n=2}^{+\infty} a_n/1 \neq -1$ e a relação

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n}{1} = \frac{a_1}{1 + K_{n=2}^{+\infty} a_n/1}$$

permite concluir que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ também converge. Na segunda hipótese, da relação

$$S_{n+1}(0) = \frac{a_1}{1 + S_n^*(0)}$$

resulta

$$|S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)| = \frac{|a_1|\left|S_{2n}^*(0) - S_{2n-2}^*(0)\right|}{|1 + S_{2n}^*(0)|\left|1 + S_{2n-2}^*(0)\right|}. \tag{8.36}$$

Notando que $S_n^*(0) \in V_\alpha$ para cada $n \geq 1$, temos no entanto

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} S_n^*(0)\right) \geq -\frac{1}{2}\cos\alpha$$

e isto implica

$$|1 + S_n^*(0)| = \left|e^{-i\alpha} + e^{-i\alpha} S_n^*(0)\right| \geq \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} + e^{-i\alpha} S_n^*(0)\right) \geq \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

De (8.36) deduz-se então

$$|S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)| \leq \frac{4\,|a_1|}{\cos^2\alpha}\left|S_{2n}^*(0) - S_{2n-2}^*(0)\right|$$

e isto mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)|$$

também converge.

Conclui-se assim que ou a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ converge ou são convergentes ambas as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n}(0) - S_{2n-2}(0)| \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)|,$$

o que implica a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{n+1}(0) - S_{n-1}(0)|.$$

Se a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ for divergente vemos então que a convergência da fracção contínua é agora consequência do teorema 5.12. Como a convergência daquela série implica a divergência da fracção contínua resulta também que nesse caso as sucessões $S_{2n}(0)$ e $S_{2n+1}(0)$ são absolutamente convergentes.

■

Nota 8.14 - Na demonstração anterior, para provar que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |S_{2n+1}(0) - S_{2n-1}(0)|$$

converge quando $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ diverge não pode utilizar-se directamente o lema 8.12 com $\tau_n = \varphi^{-1} \circ s_{2n-2} \circ s_{2n-1} \circ \varphi$ para $n \geq 1$, pois

$$\tau_1(\infty) = \left(\varphi^{-1} \circ s_1\right)(-1) = \varphi^{-1}(\infty) = -1 \notin B(0,1).$$

Aplicando o lema 8.12 com $\tau_n = \varphi^{-1} \circ s_{2n} \circ s_{2n+1} \circ \varphi$ se $n \geq 1$, pode concluir-se que a divergência de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ implica a convergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|S_{2n}^*(0) - S_{2n-2}^*(0)\right|$$

em que os S_n^* são as funções aproximantes da fracção contínua $K_{n=2}^{+\infty} a_n/1$. Contudo esta conclusão é também consequência directa de um resultado previamente estabelecido, como se indica na demonstração anterior.

Nota 8.15 - O teorema anterior é em certo sentido o mais geral possível para as fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$. Efectivamente, dados $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus E_\alpha$ prova-se que existem fracções contínuas divergentes deste tipo cuja série de Stern-Stolz diverge e tais que $a_n \in E_\alpha \cup \{z_0\}$ para todo o $n \geq 1$ (cf. Lorentzen, 1992).

O corolário seguinte amplia o corolário 3 do teorema 5.8.

Corolário - *Uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ em que os a_n pertencem ao intervalo $[-1/4, +\infty[$ é convergente sse a respectiva série de Stern-Stolz for divergente.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior tomando $\alpha = 0$.
■

Analisando a demonstração do teorema 8.13 verifica-se que não foi usada a parte do lema 8.12 que garante a convergência das sucessões $T_n(z)$ com $|z| < 1$. Esta informação permite contudo estabelecer o seguinte resultado geral:

Teorema 8.16 (Hillam & Thron, 1965) - *Uma fracção contínua é convergente se tiver por domínio próprio um círculo $\overline{B}(c, r)$ tal que $|c| < r$.*

Demonstração. Dada uma fracção contínua nas condições do enunciado seja φ a função definida em $\mathbb{C}_\infty$ por $\varphi(z) = c + rz$, e para cada $n \geq 1$ sejam ainda $\tau_n = \varphi^{-1} \circ s_n \circ \varphi$ e $T_n = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$. Como $\varphi[U] = \overline{B}(c, r)$ temos

$$\tau_n[U] = (\varphi^{-1} \circ s_n)[\overline{B}(c, r)] \subseteq \varphi^{-1}[\overline{B}(c, r)] = U$$

e

$$|\tau_n(\infty)| = \left|\varphi^{-1}(s_n(\infty))\right| = \left|\varphi^{-1}(0)\right| = |-c/r| < 1,$$

o que mostra que os τ_n verificam as condições do lema 8.12. Então a sucessão $T_n(-c/r)$ converge, e a convergência de $S_n(0)$ resulta de que a relação

$$T_n = \varphi^{-1} \circ S_n \circ \varphi$$

conduz a

$$S_n(0) = \left(\varphi \circ T_n \circ \varphi^{-1}\right)(0) = \varphi\left(T_n\left(-\frac{c}{r}\right)\right) = c + rT_n\left(-\frac{c}{r}\right).$$

■

Nota 8.17 - O teorema anterior implica directamente a convergência das fracções contínuas $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ que verificam a condição $|b_n| \geq |a_n| + 1$ do teorema de Pringsheim, pois elas têm por domínio próprio o círculo unitário U (cf. exemplo 6.1). Também é consequência do teorema anterior a convergência das fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ que verificam as condições do teorema 7.9, pois elas têm por domínio próprio círculos da forma $\overline{B}(c, r)$ com $c \in \mathbb{R}$ e $r = \sqrt{1 + c^2} > |c|$.

O corolário seguinte generaliza o teorema de Pringsheim 4.1, que corresponde a tomar $c = 0$ e $r = 1$.

Corolário - *Dados $c \in \mathbb{C}$ e $r > |c|$, sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sucessões complexas e $(d_n)_{n\geq 1}$ a sucessão definida por*

$$d_n = |b_n + c|^2 - r^2.$$

Se para cada $n \geq 1$ *tal que* $a_n \neq 0$ *for*

$$\left|a_n\left(\overline{b_n+c}\right)-cd_n\right|+|a_n|\,r \leq rd_n$$

então a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ *converge para um ponto de* $\overline{B}\,(c,r)$.

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior basta provar que para todo o $n \geq 1$ se tem

$$s_n\left[\overline{B}(c,r)\right] \subseteq \overline{B}(c,r) \tag{8.37}$$

pois isso implica que $\overline{B}(c,r)$ seja um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$. Se $a_n = 0$ esta inclusão resulta trivialmente de ser

$$s_n\left[\overline{B}(c,r)\right] = \{0\} \subseteq \overline{B}(c,r).$$

Supondo $a_n \neq 0$ a condição do enunciado exige $d_n > 0$ e o corolário do teorema 6.6 mostra que

$$s_n\left[\overline{B}\,(c,r)\right] = \frac{a_n}{b_n+\overline{B}\,(c,r)} = \overline{B}\,(w_n,\rho_n)$$

com

$$w_n = \frac{a_n\left(\overline{b_n+c}\right)}{d_n} \quad \text{e} \quad \rho_n = \frac{|a_n|\,r}{d_n}.$$

Dado $w \in \overline{B}\,(w_n,\rho_n)$ temos então

$$|w-c| \leq |w-w_n|+|w_n-c| \leq \frac{|a_n|\,r}{d_n}+\frac{\left|a_n\left(\overline{b_n+c}\right)-cd_n\right|}{d_n},$$

e a relação (8.37) resulta de a condição do enunciado implicar $|w-c| \leq r$.

■

9 - C-fracções

Entre as fracções contínuas que definem funções analíticas têm particular importância as chamadas *C-fracções*. Estas são as fracções contínuas da forma

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{1}$$

em que $z \in \mathbb{C}$ e os c_n são constantes complexas. Se nenhum dos c_n for nulo diz-se que a C-fracção é *regular*.

Exemplo 9.1 - *Para todo o* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *a C-fracção* $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ *é equivalente a*

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{b_n(z)} \quad \textit{com } b_{2n-1}(z) = \frac{1}{z} \text{ e } b_{2n}(z) = 1 \text{ se } n \geq 1.$$

Efectivamente basta aplicar o teorema 1.6 com $r_{2n} = 1$ e $r_{2n+1} = 1/z$ para cada $n \geq 0$.

Sendo $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de uma C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} a_n z/1$, as relações de recorrência

$$P_{-1}(z) = 1;\ P_0(z) = 0;\ P_n(z) = P_{n-1}(z) + z c_n P_{n-2}(z) \text{ se } n \geq 1$$

e

$$Q_{-1}(z) = 0;\ Q_0(z) = 1;\ Q_n(z) = Q_{n-1}(z) + z c_n Q_{n-2}(z) \text{ se } n \geq 1$$

mostram que $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ são polinómios em z, tendo-se em particular

$$P_n(0) = 0 \text{ e } Q_n(0) = 1 \text{ se } n \geq 0. \tag{9.1}$$

Como os polinómios Q_n não são identicamente nulos quando $n \geq 0$, segue-se que os aproximantes

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

são funções racionais de z. Se a C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ for regular, (9.1) e a fórmula do determinante (cf. teorema 1.10):

$$P_n(z)Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z)Q_n(z) = (-1)^{n-1} c_1 \cdots c_n z^n$$

mostram que P_n e Q_n não têm zeros comuns pelo que a fracção $P_n(z)/Q_n(z)$ está definida em $\mathbb{C}_\infty$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. No caso trivial de a C-fracção não ser

regular a aplicação directa do teorema 1.7 pode conduzir a expressões do tipo $0/0$, mas se c_{m+1} for o primeiro dos c_n que se anulam é $K_{k=1}^{n} c_k z/1 = K_{k=1}^{m} c_k z/1$ para todo o $n > m$ e essas situações evitam-se tomando simplesmente $R_n = R_m$ quando $n > m$.

Exemplo 9.2 - *Dada uma C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ suponha-se que existe um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de D. Então a função f definida em D por $f(z) = K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ é analítica.*

Efectivamente os aproximantes R_n de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ são funções analíticas em D pois a definição de convergência uniforme exige que os R_n não tenham polos em D. O teorema de Weirstrass sobre convergência uniforme de funções analíticas mostra então que eles convergem em D para uma função analítica.

Exemplo 9.3 - *Dada uma C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ suponha-se que a sucessão $(c_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Sendo então*

$$\lambda = \sup \{|c_n| : n \geq 1\},$$

a C-fracção é uniformemente convergente no círculo

$$\overline{B}\left(0, \frac{1}{4\lambda}\right).$$

Efectivamente, se $z \in \overline{B}(0, 1/4\lambda)$ então $|c_n z| \leq 1/4$ e basta aplicar a versão uniforme do teorema de Worpitzky (corolário 3 do teorema 4.7).

Para estudar a convergência das C-fracções vamos começar por estabelecer dois resultados auxiliares.

Lema 9.4 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo que contém a origem. Dada uma C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ suponha-se que para cada conjunto compacto $K \subseteq D$ existe uma ordem m tal que $K_{n=m+1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente em K. Então $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em D e analítica na origem. Além disso $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de D que não contenha polos de f.*

Demonstração. Podemos sem perda de generalidade supor que a C-fracção é regular pois se isto não suceder a sucessão $K_{k=1}^{n} c_k z/1$ é constante a partir de uma certa ordem e o enunciado é trivial. Dado $a \in D$ e tomando $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq D$, existe uma ordem l para a qual $K_{n=l+1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente em $B(a, r)$. Sendo

$$\varphi_a(z) = \operatorname*{K}_{k=l+1}^{+\infty} \frac{c_k z}{1} \quad \text{se} \quad z \in B(a, r),$$

o exemplo 9.2 mostra então que φ_a é uma função analítica. Para cada $m \geq 1$ seja agora

$$\Phi_m(z,w) = \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \cdots + \frac{c_m z}{1+w} \text{ se } z \in D \text{ e } w \in \mathbb{C}_\infty,$$

e representemos respectivamente por $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ os numeradores e denominadores canónicos da C-fracção. Atendendo ao teorema 1.7 é então

$$\Phi_m(z,w) = \frac{P_{m-1}(z)w + P_m(z)}{Q_{m-1}(z)w + Q_m(z)} \text{ se } z \in D \text{ e } w \in \mathbb{C}_\infty,$$

e para cada $z \in B(a,r)$ temos

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{1} = \Phi_l(z, \varphi_a(z)) = \frac{P_{l-1}(z)\varphi_a(z) + P_l(z)}{Q_{l-1}(z)\varphi_a(z) + Q_l(z)}.$$

Sendo F_a a função definida por

$$F_a(z) = Q_{l-1}(z)\varphi_a(z) + Q_l(z) \text{ se } B(a,r),$$

de (9.1) deduz-se $F_a(0) = \varphi_a(0) + 1 = 1$ pelo que F_a não é identicamente nula. Como F_a é analítica e $B(a,r)$ é conexo, do princípio do prolongamento analítico resulta então que todos os zeros de F_a são isolados. Isto mostra que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em $B(a,r)$, e como a é um ponto arbitrário de D conclui-se que a função f definida por $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ é meromorfa em D. Notando ainda que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge para 0 quando $z = 0$, resulta também que f é analítica na origem.

Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$ que não contenha polos de f seja $m \geq 0$ uma ordem tal que $K_{n=m+1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente em K e sejam φ e F as funções definidas em K respectivamente por

$$\varphi(z) = \mathop{\mathrm{K}}_{k=m+1}^{+\infty} \frac{c_k z}{1} \quad \text{e} \quad F(z) = Q_{m-1}(z)\varphi(z) + Q_m(z).$$

Como anteriormente temos então

$$f(z) = \Phi_m(z, \varphi(z)) = \frac{P_{m-1}(z)\varphi(z) + P_m(z)}{F(z)} \text{ se } z \in K,$$

e vamos começar por supor que F não se anula em K. Para cada $n \geq m+1$ consideremos ainda as funções $\varphi_n, F_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(z) = \mathop{\mathrm{K}}_{k=m+1}^{n} \frac{c_k z}{1} \quad \text{e} \quad F_n(z) = Q_{m-1}(z)\varphi_n(z) + Q_m(z).$$

Dado que (φ_n) converge uniformemente para φ em K é imediato verificar que também (F_n) converge uniformemente para F neste conjunto. Sendo então

$$\mu = \min\{|F(z)| : z \in K\} > 0$$

existe uma ordem $k > m$ tal que

$$\sup_{z\in K} |F_n(z) - F(z)| < \frac{\mu}{2} \text{ se } n \geq k$$

e daqui resulta

$$|F_n(z)| \geq |F(z)| - |F_n(z) - F(z)| > \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} \text{ se } z \in K \text{ e } n \geq k.$$

Pondo agora

$$M = \sup_{z\in K} |P_{m-1}(z)Q_m(z) - P_m(z)Q_{m-1}(z)|,$$

das identidades

$$\begin{aligned} \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k z}{1} - \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{c_k z}{1} &= \Phi_m(z, \varphi(z)) - \Phi_m(z, \varphi_n(z)) \\ &= \frac{P_{m-1}(z)Q_m(z) - P_m(z)Q_{m-1}(z)}{F(z)\, F_n(z)} (\varphi(z) - \varphi_n(z)) \end{aligned}$$

deduz-se então

$$|\Phi_m(z, \varphi(z)) - \Phi_m(z, \varphi_n(z))| \leq \frac{2M}{\mu^2} |\varphi(z) - \varphi_n(z)| \text{ se } z \in K \text{ e } n \geq k.$$

Como (φ_n) converge uniformemente para φ em K, esta relação mostra que também $\Phi_m(z, \varphi_n(z))$ converge uniformemente para $\Phi_m(z, \varphi(z))$ em K e conclui-se que $K_{k=1}^n c_k z/1$ converge uniformemente para $K_{k=1}^{+\infty} c_k z/1$ neste conjunto.

Supondo finalmente que F tem zeros em K, estes zeros formam um conjunto finito Z e são singularidades removíveis da função f. Dado $a \in Z$ tome-se $r > 0$ tal que f não tem polos no círculo $\overline{B}(a, r) \subseteq D$ e F não se anula na respectiva fronteira $C(a, r)$. A parte do enunciado já estabelecida mostra que $K_{k=1}^n c_k z/1$ converge uniformemente para f em $C(a, r)$, e do princípio do módulo máximo resulta que a convergência é também uniforme em $B(a, r)$ (cf. Costa Pereira: 263). Cada ponto $a \in Z$ pertence então a um conjunto aberto G_a onde a convergência é uniforme e isto implica que a convergência seja uniforme em $G = \cup_{a\in Z} G_a$. Como $K \subseteq G \cup (K \setminus G)$ e F não tem zeros no conjunto compacto $K \setminus G$ conclui-se que a convergência é uniforme em K.

■

O lema seguinte é geometricamente intuitivo.

Lema 9.5 - *Sejam $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $L = \{tc : t \geq 1\}$ e $\varepsilon \in]0, |c|[$. Então o conjunto*

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, L) > \varepsilon\}$$

é conexo e contém a origem.

Demonstração. Temos

$$\operatorname{dist}(0, L) = \min_{t \geq 1} |tc| = |c| > \varepsilon$$

pelo que $0 \in S_\varepsilon$. Pondo agora

$$T_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}\left(z, \mathbb{R}_0^+\right) > \varepsilon \right\} \text{ e } \varphi(z) = c\left(\frac{z}{|c|} + 1\right) \text{ se } z \in \mathbb{C},$$

dados $z \in \mathbb{C}$ e $t \geq 1$ é

$$|\varphi(z) - tc| = |z - (t-1)|c||$$

o que implica $\operatorname{dist}(\varphi(z), L) = \operatorname{dist}\left(z, \mathbb{R}_0^+\right)$. São assim equivalentes as condições $z \in T_\varepsilon$ e $\varphi(z) \in S_\varepsilon$ pelo que $S_\varepsilon = \varphi[T_\varepsilon]$, e como φ é contínua basta agora mostrar que o conjunto T_ε é conexo

Dado $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{dist}\left(z, \mathbb{R}_0^+\right) = \sqrt{\min_{t \geq 0} (t-x)^2 + y^2}$$

pelo que $\operatorname{dist}\left(z, \mathbb{R}_0^+\right) = |\operatorname{Im}(z)|$ se $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $\operatorname{dist}\left(z, \mathbb{R}_0^+\right) = |z|$ se $\operatorname{Re}(z) < 0$. Considerando os semi-planos

$$X = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > \varepsilon \} \text{ e } H = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0 \},$$

e pondo $Y = \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \varepsilon)\right) \cap H$, é então

$$T_\varepsilon = X \cup Y \cup (-X).$$

Como Y é conexo por ser a imagem do conjunto convexo $B(0, 1/\varepsilon) \cap H$ pela função contínua definida neste conjunto por $1/z$, a conexidade de T_ε resulta agora das relações $X \cap Y \neq \varnothing$ e $Y \cap (-X) \neq \varnothing$.

■

Podemos agora estabelecer dois resultados fundamentais sobre a convergência das C-fracções.

Teorema 9.6 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ uma C-fracção tal que $\lim c_n = 0$. Então $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ que é analítica na origem e a convergência é uniforme em qualquer conjunto compacto que não inclua polos dessa função.*

Demonstração. Como $\lim c_n = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma ordem m tal que $|c_n| \leq \varepsilon$ se $n > m$, e o exemplo 9.3 mostra que a fracção contínua $K_{n=m+1}^{+\infty} c_n z/1$ é uniformemente convergente na região

$$\overline{B}\left(0, \frac{1}{4\varepsilon}\right).$$

De acordo com o lema 9.4 resulta então que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa nesta região e analítica na origem. Como ε é arbitrário conclui-se que a função definida por $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ é meromorfa em $\mathbb{C}$, e a parte do enunciado relativa á convergência uniforme resulta também do lema 9.4 pois todo o conjunto compacto está necessariamente contido nalgum círculo da forma $B(0, 1/4\varepsilon)$.

■

Teorema 9.7 (Van Vleck, 1904) - *Sejam* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *e*

$$D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{t}{4a} : t \geq 1 \right\}.$$

Se $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ *é uma C-fracção tal que* $\lim c_n = a$, *então* $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ *define uma função meromorfa em* D *que é analítica na origem e a convergência é uniforme em qualquer conjunto compacto que não inclua polos dessa função.*

Demonstração. Pondo

$$L = \{-t/4a : t \geq 1\}$$

tome-se $\varepsilon \in]0, 1/|4a|[$ e seja

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, L) > \varepsilon\}.$$

Dados um conjunto compacto $K \subseteq S_\varepsilon$ e $w \in K$, então $aw \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$ e o corolário 2 do teorema 8.5 mostra que existe $\varepsilon(w) \in]0, 1]$ tal que a família de fracções contínuas da forma $K_{n=1}^{+\infty} u_n/1$ com $u_n \in B(aw, \varepsilon(w))$ é uniformemente convergente. Para cada $w \in K$ seja agora

$$\delta(w) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon(w)}{1 + |w| + |a|}\right\}$$

e considere-se a colecção dos círculos $B(w, \delta(w))$ com $w \in K$. Como K é compacto existe uma subcolecção finita $\mathcal{B}$ destes círculos que cobre K. Seja então

$$\delta_0 = \min\{\delta(w) : B(w, \delta(w)) \in \mathcal{B}\}$$

e tome-se uma ordem m tal que

$$|c_n - a| < \delta_0 \text{ se } n > m.$$

Dado w tal que $B(w, \delta(w)) \in \mathcal{B}$, para cada $n > m$ e $z \in B(w, \delta(w))$ temos assim

$$\begin{aligned} |c_n z - aw| &\leq |z(c_n - a)| + |a(z - w)| < |z|\,\delta_0 + |a|\,\delta(w) \\ &\leq |w|\,\delta_0 + \delta_0\delta(w) + |a|\,\delta(w) \leq \delta(w)(|w| + 1 + |a|) \leq \varepsilon(w). \end{aligned}$$

Então $K_{n=m+1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente quando $z \in B(w, \delta(w))$, e como $B(w, \delta(w))$ é um membro arbitrário do conjunto finito $\mathcal{B}$ isto implica que a convergência também seja uniforme em K.

Notando agora que o lema 9.5 aplicado com $c = -1/4a$ mostra que S_ε é um conjunto conexo que contém a origem, do lema 9.4 resulta então que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em S_ε e analítica na origem. Como

$$D = \bigcup_{0<\varepsilon<1/|4a|} S_\varepsilon$$

conclui-se que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em D, e a parte do enunciado relativa á convergência uniforme resulta também do lema 9.4 pois todo o subconjunto compacto de D está necessariamente contido nalgum dos conjuntos S_ε.

■

Uma C-fracção $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ em que todos os c_n são números reais positivos diz-se uma *fracção contínua de Stieltjes* ou, abreviadamente, uma *S-fracção*. Dada uma fracção contínua de Stieltjes $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ e fixado um ponto $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$, sendo $\alpha = \arg(z)/2$ tem-se

$$\mathrm{Re}\left(c_n z e^{-2i\alpha}\right) = |c_n z|$$

pelo que os $c_n z$ pertencem à região parabólica E_α definida por (8.1). O teorema 8.4 mostra então que o semi-plano V_α definido por (8.4) é um domínio próprio de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ e que os conjuntos $S_m[V_\alpha]$ são limitados. Neste caso a estimativa de diam $S_m[V_\alpha]$ dada pelo teorema 8.5 pode tornar-se mais precisa como mostra o teorema seguinte.

Teorema 9.8 (Thron, 1981) - *Dada uma sucessão $(c_n)_{n\geq 1}$ de números reais positivos e fixado um ponto $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, sejam $\alpha = \arg(z)/2$ e V_α o semi--plano definido por* (8.4). *Representando então por S_m a função aproximante de ordem m da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$, tem-se*

$$\text{diam } S_m[V_\alpha] \leq \frac{2c_1|z|}{\cos\alpha} \prod_{n=1}^{m-1} \frac{\sqrt{1+4c_{n+1}|z|/\cos^2\alpha}-1}{\sqrt{1+4c_{n+1}|z|/\cos^2\alpha}+1} \quad se \quad m \geq 1.$$

Demonstração. Com as notações usadas na demonstração do teorema 8.5, dado $n \geq 1$ as relações (8.10) transformam-se em

$$z_n = x_n = \frac{4c_{n+1}|z|}{\cos^2\alpha} \in \mathbb{R}^+, \tag{9.2}$$

e como é agora $y_n = 0$, de (8.16) e (8.17) resulta

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} = \frac{(1+p_n)^2 + q_n^2 + x_n(1+p_n)}{x_n p_n}.$$

Temos então

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} \geq \frac{(1+p_n)(1+p_n+x_n)}{x_n p_n} = \frac{1+x_n+p_n+(1+x_n)/p_n+1}{x_n},$$

e notando que da desigualdade das médias vem

$$p_n + \frac{1+x_n}{p_n} \geq 2\sqrt{1+x_n}$$

obtém-se

$$\frac{D_n}{D_{n+1}} \geq \frac{\left(\sqrt{1+x_n}+1\right)^2}{x_n} = \frac{\sqrt{1+x_n}+1}{\sqrt{1+x_n}-1}.$$

É pois

$$D_m \leq D_1 \prod_{n=1}^{m-1} \frac{\sqrt{1+x_n}-1}{\sqrt{1+x_n}+1} \quad \text{se } m \geq 1$$

e o enunciado resulta agora das relações (9.2) e (8.22).

■

Em particular obtém-se uma estimativa a priori de $\left|K_{n=1}^{+\infty} a_n/1 - S_m(0)\right|$ quando os a_n são números reais positivos:

Corolário 1 - *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais positivos. Se a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/1$ for convergente, para cada $m \geq 0$ tem-se*

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| \leq 2a_1 \prod_{n=1}^{m} \frac{\sqrt{1+4a_{n+1}}-1}{\sqrt{1+4a_{n+1}}+1}.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do corolário do teorema 6.4 tomando $z = 1$ e $c_n = a_n$ no teorema anterior.

■

Exemplo 9.9 - *Dada uma sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que $0 < a_n \leq 1/4$ se $n \geq 1$, tem-se*

$$\left| \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1} - S_m(0) \right| \leq \frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)^{2m}} \quad \textit{se} \quad m \geq 0.$$

Efectivamente basta aplicar o teorema de Worpitzky (corolário 2 do teorema 4.1) e o corolário anterior, notando que é então

$$\prod_{n=1}^{m} \frac{\sqrt{1+4a_{n+1}}-1}{\sqrt{1+4a_{n+1}}+1} \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^m = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2m}}.$$

O teorema anterior permite facilmente deduzir o seguinte resultado sobre a convergência uniforme das fracções contínuas de Stieltjes:

Corolário 2 - *Dada uma sucessão $(c_n)_{n\geq 1}$ de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{c_n}$ diverge, a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.*

Demonstração. Dado um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ sejam $z \in K$, $\alpha = \arg(z)/2$, e $(x_n)_{n\geq 1}$ a sucessão definida por (9.2). De acordo com o teorema anterior, para cada $m \geq 2$ temos

$$\text{diam } S_m[V_\alpha] \leq \frac{2c_1\,|z|}{\cos\alpha} \prod_{n=1}^{m-1} \frac{\sqrt{1+x_n}-1}{\sqrt{1+x_n}+1},$$

e como

$$\frac{\sqrt{1+x_n}+1}{\sqrt{1+x_n}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{1+x_n}-1} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{x_n}} = 1 + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{c_{n+1}\,|z|}}$$

obtém-se

$$\text{diam } S_m[V_\alpha] \leq \frac{2c_1\,|z|}{\cos\alpha} \prod_{n=2}^{m} \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{c_n\,|z|}}\right)^{-1}.$$

Notando ainda que

$$\prod_{n=2}^{m} \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{c_n\,|z|}}\right) \geq \frac{\cos\alpha}{\sqrt{|z|}} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{c_n}}$$

deduz-se a majoração

$$\text{diam } S_m[V_\alpha] \leq 2c_1 \frac{|z|^{3/2}}{\cos^2\alpha} \left(\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{c_n}}\right)^{-1}.$$

Pondo então

$$L = \max_{z\in K} |z| \quad \text{e} \quad \alpha_0 = \max \left|\frac{1}{2}\arg(z)\right|,$$

temos

$$\text{diam } S_m[V_\alpha] \leq 2c_1 \frac{L^{3/2}}{\cos^2\alpha_0} \left(\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{c_n}}\right)^{-1} \quad \text{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad m \geq 2,$$

e como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{c_n}$ diverge o teorema 6.5 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente em K.

■

A conclusão do corolário anterior permanece válida se se verificar a condição mais geral de ser divergente a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} c_n/1$, mas a demonstração deste resultado exige o recurso a teoremas mais profundos de Análise Complexa.

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão (f_n) de funções analíticas em D, diz-se que (f_n) é *uniformemente limitad*a num conjunto $E \subseteq D$ se existir uma constante M tal que $|f_n(z)| \leq M$ para todo o índice n e para todo o $z \in E$. Diz-se ainda que (f_n) é *localmente limitada* se for uniformemente limitada em

cada subconjunto compacto de D. Usaremos o seguinte teorema (cf. Costa Pereira: 290):

Teorema (Vitali) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ que converge nos pontos de um conjunto com algum ponto de acumulação em D. Então (f_n) é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D.*

Apoiaremos ainda a demonstração em dois lemas.

Lema 9.10 - *Sejam $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \arg(z) < \pi$ e*

$$V = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \leq \arg(w) \leq \arg(z)\} \cup \{0\}.$$

Dada uma sucessão (u_n) de números positivos, para a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} u_n z/1$ é válida a inclusão

$$S_n[V] \subseteq V \setminus \mathbb{R} \quad \textit{se } n \geq 1.$$

Demonstração. Dado $w \in V$, como $\mathrm{Re}(1+w) > \mathrm{Re}(w)$ temos efectivamente

$$0 \leq \arg(1+w) < \arg(w) \leq \arg(z) = \arg(u_k z) \quad \text{se} \quad k \geq 1$$

pelo que

$$0 < \arg \frac{u_k z}{1+w} \leq \arg(z) \quad \text{se} \quad k \geq 1$$

e isto mostra que $s_k(w) \in V \setminus \mathbb{R}$. O enunciado resulta agora imediatamente por indução em n.

■

Lema 9.11 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e f uma função meromorfa em D. Se $f^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$ todos os zeros de f são simples.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ um zero de f e m a sua ordem. Sabe-se (cf. Costa Pereira: 261) que existem um conjunto aberto U ao qual pertence a e uma função analítica e injectiva φ que aplica U sobre um círculo $B(0,\delta)$, e para a qual

$$f(z) = \varphi^m(z) \quad \text{se} \quad z \in U.$$

Se $z_0 \in U$ for tal que $\varphi(z_0) \in e^{i\pi/m}\mathbb{R}$, então $f(z_0) = \varphi^m(z_0) \in \mathbb{R}$ e a condição $f^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$ mostra que $z_0 \in \mathbb{R}$. Resulta assim a inclusão

$$\varphi^{-1}\left[\left(e^{i\pi/m}\mathbb{R}\right) \cap B(0,\delta)\right] \subseteq \mathbb{R}$$

e em particular segue-se que

$$\varphi^{-1}\left(e^{i\pi/m}t\right) \in \mathbb{R} \text{ se } t \in]-\delta, \delta[\,.$$

Então $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(e^{i\pi/m}t\right) \in \mathbb{R}$ se $t \in]-\delta,\delta[$, e também

$$\left(\varphi^{-1}\left(e^{i\pi/m}t\right)\right)' = e^{i\pi/m}\left(\varphi^{-1}\right)'\left(e^{i\pi/m}t\right) \in \mathbb{R} \text{ se } t \in]-\delta,\delta[\,.$$

Como a injectividade de φ^{-1} implica que $\left(\varphi^{-1}\right)'$ não se anule em G conclui-se que $e^{i\pi/m} \in \mathbb{R}$, o que exige $m = 1$.

■

Podemos agora provar a propriedade fundamental das fracções contínuas de Stieltjes que se traduz pelo teorema seguinte.

Teorema 9.12 (Stieltjes-Vitali) - *Uma fracção contínua de Stieltjes $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ e define uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ sse a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty} c_n/1$ for divergente.*

Demonstração. O corolário 3 do teorema 5.8 mostra que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge para todo o $z \in \mathbb{R}^+$ sse a respectiva série de Stern-Stolz for divergente. Atendendo ao teorema de Vitali basta então provar que as funções R_n definidas em $\mathbb{C}$ por

$$R_n(z) = \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{c_k z}{1}$$

são analíticas em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ e que a sucessão (R_n) é uniformemente limitada em cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$.

Pondo $\varphi_n(z) = 1 + K_{k=2}^{n} c_k z/1$ para cada $n \geq 1$, temos

$$\frac{R_n(z)}{z} = \frac{c_1}{\varphi_n(z)} \tag{9.3}$$

e aplicando o lema 9.10 a $K_{k=2}^{n} c_k z/1$ segue-se que

$$\operatorname{Im}\left(\varphi_n(z)\right) > 0 \text{ se } \operatorname{Im}(z) > 0. \tag{9.4}$$

Como $\varphi_n(z)$ é o quociente de dois polinómios reais temos ainda

$$\varphi_n\left(\overline{z}\right) = \overline{\varphi_n(z)}$$

e isto implica que a parte imaginária de $\varphi_n(z)$ seja negativa se $\operatorname{Im}(z) < 0$. Então $\varphi_n^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$ e o lema 9.11 mostra que todos os zeros de φ_n são simples pelo que o mesmo sucede com os polos de $R_n(z)/z$. Como para cada $x \geq 0$ é $\varphi_n(x) \geq 1$ resulta ainda que estes polos estão situados em $\mathbb{R}^-$ e isto implica que R_n seja uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ (o que resulta também de os teoremas 9.8 e 6.8 exigirem que os denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ não se anulem quando $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$).

Pondo

$$\operatorname*{K}_{k=2}^{n} \frac{c_k z}{1} = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

em que P_n e Q_n são polinómios, temos

$$\frac{R_n(z)}{z} = \frac{c_1 Q_n(z)}{P_n(z) + Q_n(z)}$$

e como as relações de recorrência (1.4) e (1.5) mostram que os coeficientes de P_n e Q_n são não negativos segue-se que o grau do numerador de $R_n(z)/z$ não excede o grau do respectivo denominador. Sendo $-x_k$ com $1 \leq k \leq m$ as raízes de $P_n(z) + Q_n(z)$, a decomposição de $R_n(z)/z$ em fracções parciais tem então a forma

$$\frac{R_n(z)}{z} = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{z + x_k}, \tag{9.5}$$

em que os a_k são constantes dadas por

$$a_0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{R_n(x)}{x} \geq 0$$

e

$$a_k = \lim_{z \to -x_k} \frac{R_n(z)}{z} (z + x_k) \in \mathbb{R} \text{ se } 1 \leq k \leq m.$$

Para cada $k \geq 1$ é então

$$a_k = \lim_{t \to 0^+} \operatorname{Re}\left(\frac{R_n(-x_k + it)}{-x_k + it} it\right) = c_1 \lim_{t \to 0^+} \operatorname{Re}\left(\frac{it}{\varphi_n(-x_k + it)}\right),$$

e pondo

$$\varphi_n(-x_k + it) = u_k(t) + i v_k(t) \text{ com } u_k(t), v_k(t) \in \mathbb{R},$$

como (9.4) mostra que $v_k(t) \in \mathbb{R}^+$ se $t > 0$, resulta

$$a_k = c_1 \lim_{t \to 0^+} \frac{t v_k(t)}{u_k^2(t) + v_k^2(t)} \geq 0.$$

Seja agora K um subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. Dado $z \in K$ e pondo $w = 1/z$, de (9.5) deduz-se

$$R_n(z) = \frac{a_0}{w} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x_k (w + 1/x_k)}.$$

Como $K_0 = 1/K$ também é um subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, sendo

$$M = \operatorname{dist}\left(K_0, \mathbb{R}_0^-\right) > 0$$

temos $|w + x| \geq M$ para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, pelo que

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{M}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x_k}\right) = \frac{1}{M} \lim_{z \to 0} \frac{R_n(z)}{z} \text{ se } z \in K.$$

Notando que de (9.3) resulta

$$\lim_{z\to 0}\frac{R_n(z)}{z}=c_1$$

conclui-se a majoração

$$|R_n(z)|\leq\frac{c_1}{M}\ \text{ se } z\in K \text{ e } n\geq 1,$$

e isto mostra que a sucessão $(R_n)_{n\geq 1}$ é uniformemente limitada em K.

■

O corolário seguinte apresenta o teorema de Stieltjes-Vitali numa formulação particularmente elegante:

Corolário - *Uma fracção contínua de Stieltjes $K_{n=1}^{+\infty}c_nz/1$ que seja convergente nalgum ponto $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ e define uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$.*

Demonstração. Se $K_{n=1}^{+\infty}c_nz/1$ convergir quando z toma um valor $z_0\neq 0$, a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty}c_nz_0/1$ diverge e o exemplo 5.5 mostra que o mesmo sucede com a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty}c_n/1$.

■

Nota 9.13 - A demonstração do teorema de Stieltjes-Vitali fica muito simplificada se se recorrer ao teorema seguinte, que traduz um dos resultados mais profundos da Análie Complexa (cf. Costa Pereira: 328):

Teorema (Carathéodory-Landau) - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e a,b complexos distintos. Dada uma sucessão de funções analíticas $f_n:D\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, se (f_n) convergir nos pontos de um conjunto com algum ponto de acumulação em D então (f_n) é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D.*

Como o corolário 3 do teorema 5.8 implica a convergência da S-fracção $K_{n=1}^{+\infty}c_nz/1$ quando $z\in\mathbb{R}^+$, uma vez estabelecido que as funções R_n são analíticas em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ o teorema de Carathéodory-Landau conduz directamente ao teorema 9.12 por os R_n nunca tomarem valores em $\mathbb{R}^-$. Efectivamente o argumento usado na demonstração do teorema anterior para provar que $\varphi_n^{-1}[\mathbb{R}]\subseteq\mathbb{R}$ mostra também que as condições $R_n(z)\in\mathbb{R}$ e $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ exigem $z\in\mathbb{R}^+$ e isto implica $R_n(z)>0$.

Dada uma fracção contínua de Stieltjes $K_{n=1}^{+\infty}c_nz/1$ e sendo f a função que ela define em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, o teorema seguinte fornece uma estimativa a posteriori do erro cometido ao aproximar $f(z)$ por cada fracção finita $K_{n=1}^{m}c_nz/1$.

Teorema 9.14 (Henrici & Pfluger, 1966) - *Seja $K_{n=1}^{+\infty}c_nz/1$ uma fracção contínua de Stieltjes em que a série de Stern-Stolz de $K_{n=1}^{+\infty}c_n/1$ diverge. Fixado*

um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *e sendo* S_m *a função aproximante de ordem* m *da fracção contínua* $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$*, para cada* $m \geq 0$ *tem-se*

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z}{1} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)| \quad se \quad |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} \tag{9.6}$$

e

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z}{1} - S_m(0) \right| \leq \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin(|\arg(z)|)} \quad se \quad |\arg(z)| > \frac{\pi}{2}. \tag{9.7}$$

Demonstração. Suponha-se que $0 < \arg(z) < \pi$ e seja

$$V = \{\mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \leq \arg(w) \leq \arg(z)\} \cup \{0, \infty\}.$$

Atendendo ao lema 9.10 e à relação $S_m(\infty) = S_{m-1}(0)$ vemos que $S_m[V] \subseteq V$ para todo o $m \geq 1$ pelo que V é um domínio proprio de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$. Por outro lado, como para cada $\alpha \in]-\pi, \pi[$ o semi-plano H_α definido por (6.5) é dado por

$$H_\alpha = \left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha - \frac{\pi}{2} \leq \arg(w) \leq \alpha + \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{0, \infty\},$$

sendo $\theta = \arg(z)$ e tomando $\varepsilon \in]0, \pi - \theta]$ temos

$$V \subseteq H_{\theta - \pi/2} \cap H_{\pi/2 - \varepsilon}.$$

Sejam agora $A_m = P_m(z)$ e $B_m = Q_m(z) \neq 0$ para cada $m \geq 0$, e ponha-se

$$\rho_m = \frac{B_m}{B_{m-1}} \quad se \quad m \geq 1.$$

Temos então $\rho_1 = 1$, e da relação $B_m = B_{m-1} + c_m z B_{m-2}$ se $m \geq 2$ resulta

$$\rho_m = 1 + \frac{c_m z}{\rho_{m-1}}.$$

Chegamos assim à identidade

$$\rho_m = 1 + \frac{c_m z}{1} + \frac{c_{m-1} z}{1} + \cdots + \frac{c_2 z}{1} = 1 + \underset{n=0}{\overset{m-2}{\mathrm{K}}} \frac{c_{m-n} z}{1} \text{ se } m \geq 2,$$

e o lema 9.10 aplicado com $u_n = c_{m-n}$ mostra que $0 < \arg(\rho_m - 1) \leq \theta$ se $m \geq 2$. Pondo $\theta_m = \arg(\rho_m - 1)$ para cada $m \geq 2$, temos então

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i(\pi/2 - \varepsilon)} \rho_m\right) = \sin\varepsilon + |\rho_m - 1| \sin(\theta_m + \varepsilon) \geq \sin\varepsilon > 0$$

e também

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i(\theta - \pi/2)} \rho_m\right) = \sin\theta + |\rho_m - 1| \sin(\theta - \theta_m) \geq \sin\theta > 0.$$

Como $\varepsilon, \theta \in]0, \pi[$ temos ainda

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i(\pi/2-\varepsilon)}\rho_1\right) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}\left(e^{-i(\theta-\pi/2)}\rho_1\right) > 0,$$

e o teorema 6.8 mostra que os conjuntos $S_m\left[H_{\pi/2-\varepsilon}\right]$ e $S_m\left[H_{\theta-\pi/2}\right]$ são ambos limitados para cada $m \geq 1$.

Seja agora $m \geq 0$. Se $\theta \geq \pi/2$ é

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

e o corolário do teorema 6.10 conduz a

$$\begin{aligned} \left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z}{1} - S_m(0) \right| &< \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin(\pi - \theta - \varepsilon)} \\ &= \frac{|S_{m+1}(0) - S_m(0)|}{\sin(\theta + \varepsilon)} \quad \text{se} \quad 0 < \varepsilon < \pi - \theta. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtém-se então a desigualdade (9.7) e em particular resulta que a relação (9.6) é válida quando $\arg(z) = \pi/2$. Se $\theta < \pi/2$, tomando $\varepsilon < \pi/2 - \theta$ temos

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\pi}{2}$$

e do corolário do teorema 6.10 deduz-se

$$\left| \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z}{1} - S_m(0) \right| \leq |S_{m+1}(0) - S_m(0)|$$

pelo que a desigualdade (9.6) também é válida quando $\arg(z) < \pi/2$. O enunciado fica assim estabelecido na hipótese $0 < \arg(z) < \pi$.

Se $\arg(z) = 0$ então $z \in \mathbb{R}^+$ e o enunciado reduz-se à relação (5.5). Finalmente, sendo

$$f(z) = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z}{1} \quad \text{e} \quad S_m^*(0) = \underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \frac{c_n \overline{z}}{1},$$

das relações $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ e $S_m^*(0) = \overline{S_m(0)}$ resulta

$$|f(\overline{z}) - S_m^*(0)| = |f(z) - S_m(0)| \quad \text{e} \quad \left|S_{m+1}^*(0) - S_m^*(0)\right| = |S_{m+1}(0) - S_m(0)|$$

pelo que a parte do enunciado relativa ao caso $-\pi < \arg(z) < 0$ se deduz imediatamente do resultado já estabelecido.

■

Nota 9.15 - Pode ainda provar-se que em (9.7) vale a desigualdade estrita se $m \geq 1$. Neste caso temos efectivamente

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\pi/2}\rho_{m+1}\right) = \left|\rho_{m+1} - 1\right| \sin\theta_{m+1} > 0$$

pelo que $S_{m+1}\left[H_{\pi/2}\right]$ também é limitado, e aplicando o corolário do teorema 6.10 à inclusão

$$V \subseteq H_{\theta-\pi/2} \cap H_{\pi/2}$$

obtém-se a desigualdade estrita em (9.7).

10 - Desenvolvimentos de funções meromorfas

Para estudar a representação de funções meromorfas em termos de fracções contínuas começaremos por estabelecer um resultado auxiliar sobre C-fracções.

Lema 10.1 - *Dada uma C-fracção uniformemente convergente numa vizinhança da origem sejam $R_n(z)$ os respectivos aproximantes e f a função que ela define. Para cada $n \geq 0$ tem-se então*

$$f(z) = R_n(z) + (-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1} + O\left(z^{n+2}\right) \quad (z \to 0)\,.$$

Demonstração. Representando por $Q_n(z)$ os denominadores canónicos da C-fracção e atendendo ao corolário 1 do teorema 1.10, temos

$$R_{n+1}(z) - R_n(z) = \frac{(-1)^n c_1 \cdots c_{n+1}}{Q_n(z) Q_{n+1}(z)} z^{n+1} \quad \text{se} \quad n \geq 0.$$

Como (9.1) mostra que $Q_n(0)Q_{n+1}(0) = 1$, a função $1/Q_n(z)Q_{n+1}(z)$ é analítica na origem e do seu desenvolvimento de Maclaurin resulta

$$\frac{1}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)} = 1 + O(z) \quad (z \to 0)\,,$$

o que implica

$$R_{n+1}(z) - R_n(z) = (-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1} + O\left(z^{n+2}\right) \quad (z \to 0)\,. \tag{10.1}$$

Temos assim

$$R_{n+1}(z) - R_n(z) = O\left(z^{n+1}\right) \quad (z \to 0)$$

e para todo $m \geq 1$ é também

$$R_{n+m}(z) - R_{n+m-1}(z) = O\left(z^{n+m}\right) = O\left(z^{n+1}\right) \quad (z \to 0)$$

pelo que

$$R_{n+m}(z) - R_n(z) = O\left(z^{n+1}\right) \quad (z \to 0) \quad \text{se } m \geq 1.$$

Então os termos de ordem não superior a n das séries de Maclaurin de $R_n(z)$ e de $R_{n+m}(z)$ são necessariamente iguais, o que implica

$$R_{n+m}^{(k)}(0) = R_n^{(k)}(0) \text{ se } m \geq 0 \text{ e } 0 \leq k \leq n.$$

Como por hipótese as funções R_n convergem uniformemente para f numa certa vizinhança de 0, o teorema de Weierstrass mostra que a sucessão dos $R_n^{(k)}$ converge para $f^{(k)}$ nessa vizinhança e conclui-se

$$f^{(k)}(0) = \lim_{m\to+\infty} R_{n+m}^{(k)}(0) = R_n^{(k)}(0) \text{ se } 0 \leq k \leq n.$$

Vemos assim que os termos de ordem não superior a n das séries de Maclaurin de f e de R_n são iguais, e daqui resulta

$$f(z) = R_n(z) + O\left(z^{n+1}\right).$$

Mudando n em $n+1$ nesta relação e atendendo a (10.1) temos então

$$\begin{aligned} f(z) - R_n(z) &= f(z) - R_{n+1}(z) + (-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1} + O\left(z^{n+2}\right) \\ &= (-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1} + O\left(z^{n+2}\right) \quad (z \to 0) \end{aligned}$$

como se pretende.

■

Podemos agora provar a seguinte propriedade das C-fracções regulares:

Teorema 10.2 - *Seja $(c_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de complexos não nulos tal que $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ converge uniformemente numa certa vizinhança $B(0,r)$ da origem. Pondo*

$$f(z) = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{1} \text{ se } z \in B(0,r)$$

seja $(f_n)_{n\geq 0}$ a sucessão de funções definidas em $B(0,r)$ por

$$f_0 = f, \ f_{n+1}(0) = 0 \ \text{ e } \ f_{n+1}(z) = \frac{c_n z}{f_n(z)} - 1 \ \text{ se } z \neq 0.$$

Para cada $n \geq 0$ tem-se então

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_n(z)}{z} = c_{n+1}.$$

Demonstração. Sendo R_n os aproximantes de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ e atendendo ao lema anterior temos

$$f(z) - R_n(z) = (-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1} + O\left(z^{n+2}\right) \quad (z \to 0). \tag{10.2}$$

Em particular, dado que a função R_0 é identicamente nula resulta

$$f_0(z) = c_1 z + O\left(z^2\right) \quad (z \to 0)$$

e a relação do enunciado é válida para $n = 0$. Supondo agora $n \geq 1$, a definição dos f_n conduz a

$$f_k(z) = \frac{c_{k+1} z}{1 + f_{k+1}(z)} \text{ se } 0 \leq k \leq n,$$

e usando indução obtém-se

$$f(z) = f_0(z) = \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \cdots + \frac{c_n z}{1 + f_n(z)} \quad \text{se} \quad z \in B(0,r).$$

Como os c_n não se anulam, esta relação permite exprimir $f_n(z)$ em termos de $f(z)$ quando $z \neq 0$. Com efeito, atendendo ao teorema 1.7 e representando por $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ temos

$$f(z) = \frac{P_{n-1}(z) f_n(z) + P_n(z)}{Q_{n-1}(z) f_n(z) + Q_n(z)} \quad \text{se} \quad z \in B(0,r).$$

Se $z \in B(0,r) \setminus \{0\}$ é então

$$f_n(z) = -\frac{Q_n(z) f(z) - P_n(z)}{Q_{n-1}(z) f(z) - P_{n-1}(z)} = -\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} \frac{f(z) - R_n(z)}{f(z) - R_{n-1}(z)}$$

e como $\lim_{z\to 0} Q_n(z) = \lim_{z\to 0} Q_{n-1}(z) = 1$ a relação do enunciado deduz-se agora de (10.2).

■

O teorema anterior conduz à unicidade de representação de uma função analítica por uma C-fracção regular uniformemente convergente nalguma vizinhança da origem:

Corolário - *Se duas C-fracções regulares convergem uniformemente para uma mesma função nalguma vizinhança da origem elas são idênticas.*

Demonstração. Sejam $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ e $K_{n=1}^{+\infty} c'_n z/1$ duas C-fracções regulares que numa certa vizinhança da origem convergem uniformente para duas funções f e g. Se $f = g$, do teorema anterior resulta

$$c_1 = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} = c'_1$$

Definindo agora as sucessões (f_n) e (g_n) como no teorema anterior e supondo que para um dado $n \geq 1$ é $c_k = c'_k$ quando $k \in \{1, ..., n\}$, temos também $f_n = g_n$ pelo que

$$c_{n+1} = \lim_{z\to 0} \frac{f_n(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{g_n(z)}{z} = c'_{n+1},$$

e o enunciado fica provado por indução.

■

Exemplo 10.3 - *A função* seno *não é representável por qualquer C-fracção regular uniformemente convergente nalguma vizinhança da origem.*

Efectivamente, supondo que existe $r > 0$ tal que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{1} \text{ se } z \in B(0,r),$$

a convergência uniforme exigia $c_1 = \lim_{z\to 0} \operatorname{sen} z/z = 1$. Com a notação do teorema anterior teríamos então

$$f_1(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z} - 1 \text{ se } z \in B(0,r) \setminus \{0\}$$

e daqui resultava $c_2 = \lim_{z\to 0} f_1(z)/z = 0$.

O teorema seguinte traduz um resultado central na teoria da representação de funções meromorfas em termos de fracções contínuas.

Teorema 10.4 - *Dado um conjunto aberto e conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ que contém o ponto 0, seja (c_n) uma sucessão complexa tal que a fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ define uma função meromorfa em D e converge uniformemente nalguma vizinhança da origem. Sendo $(f_n)_{n\geq 0}$ uma sucessão de funções meromorfas em D e nulas na origem tais que*

$$f_n(z) = \frac{c_{n+1} z}{1 + f_{n+1}(z)} \text{ se } n \geq 0 \text{ e } z \in D,$$

tem-se então

$$f_0(z) = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{1} \text{ para cada } z \in D.$$

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar que nenhum dos c_n é nulo. Atendendo à definição dos f_n, para cada $n \geq 0$ existe $r_n > 0$ tal que as funções f_k com $0 \leq k \leq n+1$ são todas analíticas em $B(0, r_n)$, e como na demonstração do teorema anterior obtém-se

$$f_0(z) = \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \cdots + \frac{c_{n+1} z}{1 + f_{n+1}(z)} \text{ se } z \in B(0, r_n).$$

Sendo ainda $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$, do teorema 1.7 resulta

$$f_0(z) = \frac{P_n(z) f_{n+1}(z) + P_{n+1}(z)}{Q_n(z) f_{n+1}(z) + Q_{n+1}(z)} \text{ se } z \in B(0, r_n)$$

e aplicando o teorema 1.10 temos

$$f_0(z) - R_n(z) = \frac{(-1)^n c_1 \cdots c_{n+1} z^{n+1}}{Q_n(z)\left(Q_{n+1}(z) + Q_n(z) f_{n+1}(z)\right)} \text{ se } z \in B(0, r_n).$$

Como $\lim_{z\to 0} Q_n(z) = \lim_{z\to 0} Q_{n+1}(z) = 1$ e $\lim_{z\to 0}\ f_{n+1}(z) = 0$, isto implica então

$$f_0(z) = R_n(z) + O\left(z^{n+1}\right) \quad (z \to 0)\,.$$

Por outro lado, sendo φ a função definida por $K_{n=1}^{+\infty} c_n z/1$ em D, o lema 10.1 mostra que é também

$$\varphi(z) = R_n(z) + O\left(z^{n+1}\right) \quad (z \to 0)\,,$$

e como f_0 e φ são funções analíticas na origem daqui resulta que elas têm a mesma série de Maclaurin. Então f_0 e φ coincidem numa certa vizinhança da origem, e como D é conexo o princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas (cf. Costa Pereira: 175) permite concluir que elas coincidem em D.

Suponha-se finalmente que alguns c_n são nulos. Se c_{m+1} é o primeiro dos c_n que se anula, a função f_m é identicamente nula pelo que para todo o $z \in D$ se tem

$$\frac{c_1 z}{1} \ + \ \frac{c_2 z}{1} \ + \cdots + \ \frac{c_m z}{1 + f_m(z)} = \ \underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \ \frac{c_n z}{1}.$$

O enunciado é então trivialmente verdadeiro pois daqui resulta

$$f_0(z) = \ \underset{n=1}{\overset{m}{\mathrm{K}}} \ \frac{c_n z}{1} = \ \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \ \frac{c_n z}{1} \ \text{ se } \ z \in D.$$

■

O resultado anterior permite justificar várias fórmulas clássicas que exprimem funções meromorfas em termos de fracções contínuas e foram inicialmente obtidas com o método puramente formal (cf. nota 1.19) de iterar indefinidamente relações da forma

$$f_n(z) = \frac{c_{n+1} z}{1 + f_{n+1}(z)}.$$

Os primeiros desenvolvimentos deste tipo devem-se Euler (1737) e Lambert (1768), e podem ser deduzidos partindo da função φ definida por

$$\varphi\,(a, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a\,(a+1)\cdots(a+k-1)} \frac{z^k}{k!} \ \text{ com } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^- \text{ e } z \in \mathbb{C}.$$

Como o produto que figura no termo geral da série é vazio quando $k = 0$, de forma mais explícita pode escrever-se

$$\varphi\,(a, z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a\,(a+1)\cdots(a+k-1)} \frac{z^k}{k!}.$$

Usando o *símbolo de Pochhammer* $(a)_n$ que se define para cada $a \in \mathbb{C}$ por

$$(a)_n = \prod_{k=1}^{n} (a + k - 1) \ \text{ se } n \geq 0,$$

pode ainda escrever-se

$$\varphi(a,z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(a)_k}\frac{z^k}{k!}.$$

Verifica-se imediatamente que esta série tem raio de convergência $+\infty$ pelo que $\varphi(a,z)$ é uma função inteira de z. Provaremos o resultado seguinte.

Teorema 10.5 - *Dado* $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$, *seja*

$$\varphi(a,z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(a)_k}\frac{z^k}{k!}\quad \textit{se } z\in\mathbb{C}.$$

Para todo o $z\in\mathbb{C}$ *é então*

$$\frac{\varphi(a,z)}{\varphi(a+1,z)}=1+\frac{1}{a}\operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\frac{z}{n+a}.$$

Demonstração. Da definição de $\varphi(a,z)$ resulta

$$\begin{aligned}\varphi(a,z)-\varphi(a+1,z) &= \frac{z}{a(a+1)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+2)_{k-1}}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \frac{z}{a(a+1)}\varphi(a+2,z)\end{aligned}$$

e mudando a em $a+n$ com $n\in\mathbb{Z}_0^+$ obtém-se

$$\varphi(a+n,z)-\varphi(a+n+1,z)=\frac{z}{(a+n)(a+n+1)}\varphi(a+n+2,z).$$

Definindo agora uma sucessão de funções (f_n) por

$$f_n(a,z)=\frac{\varphi(a+n,z)}{\varphi(a+n+1,z)}-1$$

é então

$$\begin{aligned}f_n(a,z) &= \frac{z}{(a+n)(a+n+1)}\frac{1}{\varphi(a+n+1,z)/\varphi(a+n+2,z)}\\ &= \frac{z}{(a+n)(a+n+1)}\frac{1}{1+f_{n+1}(a,z)},\end{aligned}$$

e pondo

$$c_n(a)=\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}\text{ se } n\geq 1$$

obtém-se a relação

$$f_n(a,z)=\frac{c_{n+1}(a)\,z}{1+f_{n+1}(a,z)}\text{ se } n\geq 0.$$

Notando agora que $\lim c_n(a) = 0$, o teorema 9.6 mostra que

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(a)\, z}{1}$$

define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e que a convergência é uniforme em todo o conjunto compacto que não inclua polos dessa função. Como f_0 é meromorfa em $\mathbb{C}$ e

$$\lim_{z\to 0} f_n(a,z) = \frac{\varphi(a+n,0)}{\varphi(a+n+1,0)} - 1 = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

as funções f_n são nulas na origem e do teorema 10.4 resulta então a identidade

$$f_0(a,z) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(a)\, z}{1}$$

para todo o $z \in \mathbb{C}$. É pois

$$\frac{\varphi(a,z)}{\varphi(a+1,z)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(a)\, z}{1} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}$$

com

$$c_n(a) = \frac{1}{(a+n-1)(a+n)},$$

e a identidade do enunciado resulta de aplicar o teorema 1.6 com $r_n = a+n$ para cada $n \geq 0$.

■

Com base no teorema anterior podemos agora obter desenvolvimentos das funções cotangente e cotangente hiperbólica na forma de fracção contínua:

Teorema 10.6 (Lambert, 1768) - *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$z\coth z = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{2n+1} \tag{10.3}$$

e

$$z\cot z = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{-z^2}{2n+1}. \tag{10.4}$$

Demonstração. Para todo o $z \in \mathbb{C}$ é

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k,$$

e como

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!} = \frac{2^k}{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)k!} = \frac{1}{(1/2)_k \, k!}$$

obtém-se

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1/2)_k \, k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k = \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{z^2}{4}\right).$$

Analogamente, partindo de

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k$$

deduz-se

$$\sinh z = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3/2)_k \, k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k = z\varphi\left(\frac{3}{2}, \frac{z^2}{4}\right)$$

pelo que

$$z \coth z = \frac{\varphi\left(1/2, z^2/4\right)}{\varphi\left(3/2, z^2/4\right)}.$$

Atendendo ao teorema anterior é então

$$z \coth z = 1 + 2 \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{z^2/4}{n + 1/2}$$

e a identidade (10.3) obtém-se aplicando o teorema 1.6 com $r_n = 2$ para $n \geq 0$. Finalmente a identidade (10.4) resulta de (10.3) e da relação $\cot z = i \coth(iz)$.

■

Nota 10.7 - A data do artigo de Lambert é frequentemente referida como 1761. No entanto o artigo foi lido em 1767 e impresso em 1768 na "Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin - Année 1761".

Corolário 1 - *Para cada* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$z \tanh z = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{z^2}{2n-1} \tag{10.5}$$

e

$$z \tan z = - \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{-z^2}{2n-1}. \tag{10.6}$$

Demonstração. De (10.3) deduz-se efectivamente

$$z \tanh z = \cfrac{z^2}{1 + \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} z^2/(2n+1)} = \cfrac{z^2}{1 + \underset{n=2}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} z^2/(2n-1)} = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{z^2}{2n-1},$$

e (10.6) resulta agora de ser $\tan z = -i \tanh(iz)$.

■

Corolário 2 (Euler, 1737) - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tem-se*

$$\frac{e^{2/z}-1}{e^{2/z}+1} = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)\,z}. \tag{10.7}$$

Demonstração. Como

$$\tanh z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1},$$

atendendo ao corolário anterior temos

$$z\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{2n-1}.$$

Tomando $z \neq 0$ e mudando z em $1/z$ resulta

$$\frac{e^{2/z}-1}{e^{2/z}+1} = z \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{1/z^2}{2n-1},$$

e a relação (10.7) obtém-se agora aplicando o teorema 1.6 com $r_n = z$.

■

Corolário 3 - S*e* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$e^z = 1 + \frac{2z}{2 - z + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} z^2/(4n+2)}. \tag{10.8}$$

Demonstração. Como

$$1 + \frac{2}{e^z-1} = \coth\frac{z}{2},$$

de (10.3) resulta

$$\frac{2z}{e^z-1} = 2 - z + 2 \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2/4}{2n+1}.$$

Aplicando o teorema 1.6 com $r_n = 2$ é ainda

$$\operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2/4}{2n+1} = \frac{1}{2} \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{4n+2}$$

pelo que

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{2z}\left(2 - z + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{4n+2}\right),$$

o que equivale à fórmula do enunciado.

■

Nota 10.8 - Quando $z \in \mathbb{R}$ o desenvolvimento (10.3) pode deduzir-se sem recorrer ao teorema 10.4 cuja demonstração envolve resultados característicos da Análise Complexa. Efectivamente, sendo

$$\varphi(a,z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a)_k} \frac{z^k}{k!} \text{ com } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^- \text{ e } z \in \mathbb{C},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ temos

$$x \coth x = \frac{\varphi\left(1/2, x^2/4\right)}{\varphi\left(3/2, x^2/4\right)}.$$

Pondo então

$$f_n(x) = \frac{\varphi\left(1/2+n, x^2/4\right)}{\varphi\left(3/2+n, x^2/4\right)} - 1 \text{ se } n \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

e

$$c_n = \frac{1}{(n-1/2)(n+1/2)},$$

como na demonstração do teorema 10.5 obtemos

$$f_n(x) = \frac{c_n x^2/4}{1 + f_{n+1}(x)}.$$

É assim

$$x \coth x - 1 = f_0(x) = \frac{c_1 x^2/4}{1} + \frac{c_2 x^2/4}{1} + \cdots + \frac{c_{n+1} x^2/4}{1 + f_{n+1}(x)},$$

e com $x \in \mathbb{R}$ fixo esta relação pode escrever-se na forma

$$x \coth x - 1 = S_{n+1}\left(f_{n+1}(x)\right)$$

em que os S_n são as funções aproximantes de $K_{n=1}^{+\infty}\left(c_n x^2/4\right)/1$.

Do teorema 1.20 resulta então que para cada $x \in \mathbb{R}$ se tem

$$x \coth x - 1 = \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n x^2/4}{1}$$

pois a definição de $\varphi(a,z)$ mostra que as funções f_n são não negativas e a fracção contínua converge (cf. teorema 5.6 e corolário 3 do teorema 5.8). Aplicando agora o teorema 1.6 com $r_n = 2$ obtém-se a identidade

$$x \coth x = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{2n+1} \text{ se } x \in \mathbb{R},$$

da qual se podem deduzir directamente as versões reais das relações (10.4) a (10.8).

Podemos agora estabelecer um teorema que tem como caso particular uma representação famosa do número e em termos de fracção contínua simples.

Teorema 10.9 (Euler, 1737) - *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tem-se*

$$e^{1/z} = 1 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n(z)} \tag{10.9}$$

com $b_{3n-2}(z) = (2n-1)z - 1$ e $b_{3n-1}(z) = b_{3n}(z) = 1$ se $n \geq 1$. Em particular é

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots . \tag{10.10}$$

Demonstração. Mudando z em $1/z$ na identidade (10.8) obtém-se

$$e^{1/z} = 1 + \frac{2}{2z - 1 + z \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} z^{-2}/(4n+2)} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

e aplicando o teorema 1.6 com $r_n = z^2$ se $n \geq 0$ esta relação transforma-se em

$$e^{1/z} = 1 + \frac{2}{2z - 1 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} 1/(4n+2)\, z}.$$

Fixado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para cada $n \geq 0$ sejam agora

$$c_n = (4n+2)\, z, \quad R_n = \operatorname*{\mathrm{K}}_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{c_k} \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2}{c_n - 1 + R_n}.$$

Temos então

$$e^{1/z} = 1 + \lambda_0 \tag{10.11}$$

e

$$\lambda_n = \frac{2}{c_n - 1 + 1/(c_{n+1} + R_{n+1})} \text{ se } n \geq 0. \tag{10.12}$$

Usando a identidade

$$\frac{2}{\alpha + 1/(\beta + \gamma)} = \frac{1}{(\alpha - 1)/2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{\beta - 1 + \gamma} \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

que facilmente se estabelece por cálculo directo, de (10.12) resulta

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{(2n+1)\, z - 1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{c_{n+1} - 1 + R_{n+1}} \\ &= \frac{1}{(2n+1)\, z - 1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + 2/(c_{n+1} - 1 + R_{n+1})}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_n = \frac{1}{(2n+1)\,z-1} \;+\; \frac{1}{1} \;+\; \frac{1}{1+\lambda_{n+1}} \quad \text{se } n \geq 0. \tag{10.13}$$

Consideremos agora a fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n} \text{ com } \; b_{3n-2} = (2n-1)z - 1 \text{ e } b_{3n-1} = b_{3n} = 1 \text{ se } n \geq 1.$$

Dado $n \geq 0$, como para cada $w \in \mathbb{C}$ é

$$s_{3n+1}(w) = \frac{1}{(2n+1)\,z-1+w} \;\text{ e } s_{3n+2}(w) = s_{3n+3}(w) = \frac{1}{1+w},$$

temos

$$\left(s_{3n+1} \circ s_{3n+2} \circ s_{3n+3}\right)(\lambda_{n+1}) = \frac{1}{(2n+1)\,z-1} \;+\; \frac{1}{1} \;+\; \frac{1}{1+\lambda_{n+1}},$$

e de (10.13) resulta

$$\left(s_{3n+1} \circ s_{3n+2} \circ s_{3n+3}\right)(\lambda_{n+1}) = \lambda_n$$

pelo que

$$S_{3n+3}\left(\lambda_{n+1}\right) = S_{3n}\left(\lambda_n\right) \quad \text{se} \quad n \geq 0.$$

É assim

$$S_{3n}\left(\lambda_n\right) = S_0\left(\lambda_0\right) = \lambda_0 \quad \text{se} \quad n \geq 1,$$

e atendendo a (10.11) conclui-se a relação

$$e^{1/z} = 1 + S_{3n}\left(\lambda_n\right) \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{10.14}$$

Suponha -se agora que $z \in \mathbb{R}^+$ e, com z fixo, seja m uma ordem tal que $(2m-1)z \geq 1$. Como para todo o $n > m$ os λ_n e os b_n são então números reais não negativos e o teorema 5.8 mostra que $K_{n=m+1}^{+\infty} 1/b_n$ converge, aplicando o teorema 1.20 à relação (10.14) obtém-se

$$e^{1/z} = 1 + \lim S_n(0)$$

o que estabelece (10.9). Em particular, para $z = 1$ é $b_1 = 0$ pelo que

$$e = 1 + \frac{1}{0 + \left(1 + K_{n=3}^{+\infty} 1/b_n\right)^{-1}} = 2 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{b_n},$$

e obtém-se a identidade (10.10).

Passando ao caso geral e dado $\delta > 0$, seja m um inteiro tal que $(2m+1)\,\delta > 4$. Tomando $c = 3/4$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \delta$, para cada $n \geq m+1$ temos

$$|(2n-1)z + 2c| \geq (2m+1)\,|z| - \frac{3}{2} > \frac{5}{2} = 2\sqrt{1+c^2},$$

e como é também $1+2c=2\sqrt{1+c^2}$ conclui-se

$$|b_n(z)+2c| \geq 2\sqrt{1+c^2} \text{ se } n \geq m+1 \text{ e } |z|>\delta.$$

Do corolário 3 do teorema 7.9 resulta então que a fracção contínua $K_{n=m+1}^{+\infty} 1/b_n(z)$ é uniformemente convergente na região

$$E_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \delta\},$$

e o argumento usado no exemplo 9.2 mostra que a função φ definida em E_δ por $K_{n=m+1}^{+\infty} 1/b_n(z)$ é analítica. Sendo agora $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ respectivamente os numeradores e denominadores canónicos de $K_{n=1}^{+\infty} 1/b_n(z)$, temos

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{b_n(z)} = \frac{P_{m-1}(z)\varphi(z)+P_m(z)}{Q_{m-1}(z)\varphi(z)+Q_m(z)} \text{ se } z \in E_\delta$$

e o segundo membro desta identidade é uma função meromorfa que coincide com $e^{1/z}$ em $\mathbb{R}^+$. Do princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas resulta então que é também

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{b_n(z)} = e^{1/z} \text{ se } z \in E_\delta$$

pelo que a identidade (10.9) é válida quando $|z|>\delta$. Como $\delta>0$ é arbitrário conclui-se que (10.9) é verificada para todo o $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>0$.

■

Nota 10.10 - Como se viu na demonstração do teorema anterior, quando $z \in \mathbb{R}^+$ o desenvolvimento (10.9) pode ser estabelecido sem usar métodos de Análise Complexa. Este caso particular inclui os desenvolvimentos em fracções contínuas simples referidos na secção 2:

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,...,1,1,2n,...]$$

e, com $m \geq 2$ inteiro,

$$\sqrt[m]{e} = [1;m-1,1,1,3m-1,1,1,5m-1,...,(2n-1)m-1,1,1,...].$$

A versão real do teorema 10.6 permitiu a Lambert estabelecer a irracionalidade de algumas classes de números que incluem e e π. Começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 10.11 - *Seja $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ uma fracção contínua não singular em que os a_n e b_n são inteiros. Se existir uma ordem m tal que $|b_n| \geq |a_n|+1$ para cada $n>m$, e se para uma infinidade de valores de n valer a desigualdade estrita $|b_n|>|a_n|+1$, então $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge para um número irracional.*

Demonstração. Nas condições do enunciado o teorema 4.1 mostra que a fracção contínua $K_{n=m+1}^{+\infty} a_n/b_n$ é convergente, pelo que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ converge em $\mathbb{C}_\infty$. Sendo agora

$$\lambda_n = \operatorname*{K}_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{b_k} \text{ se } n \geq 0$$

temos

$$\lambda_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\lambda_n} - b_{n+1}$$

e daqui resulta que a relação $\lambda_n \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ implica $\lambda_{n+1} \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$. Então a hipótese $\lambda_0 \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ implica $\lambda_m \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ e o teorema fica estabelecido se se provar que $\lambda_m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Como existem inteiros $k > m$ tais que $|b_k| > |a_k| + 1$, o teorema 4.1 mostra que para todo o $n \geq m$ é $|\lambda_n| < 1$, e da relação

$$\lambda_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \lambda_{n+1}}$$

deduz-se que é também $\lambda_n \neq 0$. Supondo que $\lambda_m \in \mathbb{Q}$ sejam agora d_m, d_{m+1} inteiros tais que $\lambda_m = d_{m+1}/d_m$. Temos então $0 < |d_{m+1}| < |d_m|$ e como

$$\lambda_m = \frac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \lambda_{m+1}}$$

resulta

$$\lambda_{m+1} = \frac{d_{m+2}}{d_{m+1}} \text{ com } d_{m+2} = a_{m+1}d_m - b_{m+1}d_{m+1} \in \mathbb{Z}.$$

É assim $0 < |d_{m+2}| < |d_{m+1}|$ e conclui-se que se λ_m fosse racional existia uma sucessão estritamente decrescente de inteiros positivos $(|d_n|)_{n \geq m}$, o que é impossível.

■

Podemos agora provar o teorema de Lambert.

Teorema 10.12 (Lambert, 1768) - *Para cada número racional $r \neq 0$ os números e^r e $\tan r$ são irracionais.*

Demonstração. Seja $r = p/q$ com $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{Z}^+$. Dos corolários 1 e 3 do teorema 10.6 obtém-se respectivamente

$$\tan r = -\frac{q}{p} \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{-p^2/q^2}{2n-1}$$

e

$$e^r = 1 + \frac{2p}{2q - p + q \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} (p^2/q^2) / (4n+2)},$$

pelo que o teorema fica estabelecido se se provar que as fracções contínuas

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{-p^2/q^2}{2n-1}$$

e

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{p^2/q^2}{4n+2}$$

definem números irracionais. Como

$$2n-1 > \left|-\frac{p^2}{q^2}\right| + 1 \text{ se } n > \frac{p^2}{2q^2} + 1$$

e

$$4n+2 > \frac{p^2}{q^2} + 1 \text{ se } n \geq \frac{p^2}{4q^2}$$

isto é agora uma consequência imediata do lema anterior.

■

O teorema anterior mostra que se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e e^x ou $\tan x$ são números racionais então x é necessariamente irracional. Em particular resultam os dois corolários seguintes.

Corolário 1 - *Se* $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ *então* $\ln r$ *é irracional.*

■

Corolário 2 - *Se* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $\tan\theta \in \mathbb{Q}$ *então* θ *é irracional. Em particular* π *é irracional pois* $\tan \pi = 0$.

■

Dados $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, a série de potências

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a\,(a+1)\,...\,(a+k-1)}{b\,(b+1)\,...\,(b+k-1)} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$$

define a chamada *função de Kummer* $M(a,b,z)$. Como esta série tem raio de convergência $+\infty$, a função de Kummer é uma função inteira de z que se reduz a um polinómio quando $a \in \mathbb{Z}_0^-$.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 10.13 - *Dados* $a \in \mathbb{C}$ *e* $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, *seja* (c_n) *a sucessão definida por*

$$c_{2n}(a,b) = \frac{a+n}{(b+2n-1)\,(b+2n)} \text{ se } n \geq 1$$

e

$$c_{2n+1}(a,b) = -\frac{b-a+n}{(b+2n)(b+2n+1)} \quad \text{se } n \geq 0.$$

Para todo o $z \in \mathbb{C}$ *tem-se então*

$$\frac{M(a,b,z)}{M(a+1,b+1,z)} = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(a,b)\,z}{1}.$$

Demonstração. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned} M(a,b,z) - M(a+1,b+1,z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(a)_k}{(b)_k} - \frac{(a+1)_k}{(b+1)_k} \right) \frac{z^k}{k!} \\ &= \left(\frac{a}{b} - \frac{a+k}{b+k} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a+1)_{k-1}}{(b+1)_{k-1}} \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{(a-b)\,z}{b\,(b+k)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a+1)_{k-1}}{(b+1)_{k-1}} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{(a-b)\,z}{b\,(b+1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+1)_k}{(b+2)_k} \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

pelo que

$$M(a,b,z) - M(a+1,b+1,z) = -\frac{(b-a)\,z}{b\,(b+1)} M(a+1,b+2,z),$$

e de modo análogo se obtém a relação

$$M(a,b,z) - M(a,b+1,z) = \frac{az}{b\,(b+1)} M(a+1,b+2,z).$$

Definindo agora uma sucessão de funções (φ_n) para cada $n \geq 0$ por

$$\varphi_{2n}(a,b,z) = M(a+n,b+2n,z)$$

e

$$\varphi_{2n+1}(a,b,z) = M(a+n+1,b+2n+1,z),$$

é então

$$\varphi_{2n-1}(a,b,z) - \varphi_{2n}(a,b,z) = \frac{(a+n)\,z}{(b+2n-1)(b+2n)} \varphi_{2n+1}(a,b,z) \quad \text{se } n \geq 1$$

e

$$\varphi_{2n}(a,b,z) - \varphi_{2n+1}(a,b,z) = -\frac{(b-a+n)\,z}{(b+2n)(b+2n+1)} \varphi_{2n+2}(a,b,z) \quad \text{se } n \geq 0,$$

o que se traduz por

$$\varphi_n(a,b,z) - \varphi_{n+1}(a,b,z) = c_{n+1}(a,b)\, z\varphi_{n+2}(a,b,z) \quad \text{se } n \geq 0. \tag{10.15}$$

Sendo (f_n) a sucessão de funções definidas por

$$f_n(a,b,z) = \frac{\varphi_n(a,b,z)}{\varphi_{n+1}(a,b,z)} - 1 \quad \text{se } n \geq 0$$

obtém-se assim

$$f_n(a,b,z) = \frac{c_{n+1}(a,b)\, z}{1 + f_{n+1}(a,b,z)} \quad \text{se } n \geq 0. \tag{10.16}$$

Como os φ_n são funções inteiras e $\varphi_n(a,b,0) = 1$, segue-se que cada f_n é uma função meromorfa de z em $\mathbb{C}$ e nula na origem. Além disso, dado que $\lim_{n\to+\infty} c_n(a,b) = 0$ o teorema 9.6 mostra que a fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(a,b)\, z}{1}$$

define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto que não contenha polos dessa função. O enunciado resulta então do teorema 10.4 e de ser

$$f_0(a,b,z) = \frac{\varphi_0(a,b,z)}{\varphi_1(a,b,z)} - 1 = \frac{M(a,b,z)}{M(a+1,b+1,z)} - 1.$$

■

Para as funções de Kummer da forma $M(1,\lambda,z)$ é válido o desenvolvimento expresso pelo teorema seguinte.

Teorema 10.14 - *Dado $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, para todo o $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\frac{1}{M(1,\lambda,z)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n z}{\lambda + n - 1}$$

com $a_1 = -1$, $a_{2n} = n$ e $a_{2n+1} = -(\lambda + n - 1)$ se $n \geq 1$.

Demonstração. Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ e $\lambda \neq 1$, do teorema anterior resulta

$$\frac{1}{M(1,\lambda,z)} = \frac{M(0,\lambda-1,z)}{M(1,\lambda,z)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(0,\lambda-1)\, z}{1} \quad \text{se } z \in \mathbb{C}. \tag{10.17}$$

Pondo agora, por definição,

$$M(0,0,z) = \lim_{b\to 0} M(0,b,z) = 1$$

e

$$c_1(0,0) = \lim_{b\to 0} c_1(0,b) = \lim_{b\to 0} \left(-\frac{b}{b(b+1)} \right) = -1,$$

a relação (10.15) permanece válida quando $n = a = b = 0$ pois ela equivale a

$$M(0,0,z) - M(1,1,z) = -zM(1,2,z)$$

que é uma identidade de verificação imediata. Como as relações (10.16) são por definição válidas para $n \geq 1$ quando $a = b = 0$, conclui-se que o desenvolvimento (10.17) permanece válido quando $\lambda = 1$.

Dado que se tem $c_1(0, \lambda - 1) = -1/\lambda$ e que para cada $n \geq 1$ é

$$c_{2n}(0, \lambda - 1) = \frac{n}{(\lambda + 2n - 2)(\lambda + 2n - 1)}$$

e

$$c_{2n+1}(0, \lambda - 1) = -\frac{\lambda + n - 1}{(\lambda + 2n - 1)(\lambda + 2n)},$$

a fórmula do enunciado obtém-se aplicando em (10.17) o teorema 1.6 com $r_0 = 1$ e $r_n = \lambda + n - 1$ se $n \geq 1$.

■

Corolário - *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$e^z = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} c_n z}{n} \quad \textit{com } c_1 = 1 \quad \textit{e } c_{2n} = \ c_{2n+1} = n$$

e

$$e^z = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z}{d_n} \quad \textit{com } d_{2n-1} = 2n - 1 \textit{ e } d_{2n} = 2.$$

Demonstração. Como $e^z = M(1,1,z)$, do teorema anterior resulta

$$e^{-z} = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n z}{n} \quad \text{com } a_1 = -1 \text{ e } a_{2n} = n = -a_{2n+1} \text{ se } n \geq 1,$$

e a primeira fórmula do enunciado obtém-se desta mudando z em $-z$. A segunda fórmula deduz-se da primeira aplicando o teorema 1.6 com $r_{2n-1} = r_0 = 1$ e $r_{2n} = 1/n$.

■

Partindo da função de Kummer podem obter-se outros desenvolvimentos com base numa propriedade desta função que vamos estabelecer. Começaremos por provar um resultado auxiliar.

Lema 10.15 (Fórmula de Vandermonde) - *Dados $a, b \in \mathbb{C}$, para cada inteiro $n \geq 0$ tem-se*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k} = (a+b)_n .$$

Demonstração. Tomando $x \in]0,1[$ e multiplicando as séries de potências que figuram nos desenvolvimentos

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{k} x^k \text{ e } (1+x)^b = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{b}{k} x^k,$$

para cada inteiro $n \geq 0$ obtém-se a relação

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

que é também conhecida por fórmula de Vandermonde. Notando agora que para cada $c \in \mathbb{C}$ se tem

$$(c)_k = (-1)^k (-c)(-c-1)...(-c-k+1)$$

obtemos a identidade

$$(c)_k = (-1)^k k! \binom{-c}{k},$$

e resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k} &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k}{k!} \frac{(b)_{n-k}}{(n-k)!} \\ &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{-a}{k} \binom{-b}{n-k} \\ &= (-1)^n n! \binom{-a-b}{n} = (a+b)_n . \end{aligned}$$

■

Podemos agora estabelecer a propriedade das funções M que tínhamos mencionado.

Teorema 10.16 (Kummer) - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, para todo o $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$e^{-z} M(a,b,z) = M(b-a,b,-z).$$

Demonstração. Como

$$M(a,b,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!} \text{ e } e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!},$$

efectuando o produto destas séries temos

$$e^{-z} M(a,b,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

com

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} (a)_k}{(b)_k \, k! \, (n-k)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(b)_k},$$

e portanto

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(b)_n \, n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a)_k \frac{(b)_n}{(b)_k}.$$

Notando agora que

$$\frac{(b)_n}{(b)_k} = (b+k)(b+k+1)...(b+n-1) = (-1)^{n-k} (-b-n+1)_{n-k}$$

temos

$$c_n = \frac{1}{(b)_n \, n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (-b-n+1)_{n-k},$$

e do lema anterior resulta

$$c_n = \frac{(a-b-n+1)_n}{(b)_n \, n!}.$$

Como

$$(a-b-n+1)_n = (-1)^n (b-a)_n$$

é então

$$c_n = (-1)^n \frac{(b-a)_n}{(b)_n \, n!}$$

pelo que

$$e^{-z} M(a,b,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b-a)_n}{(b)_n} \frac{(-z)^n}{n!} = M(b-a,b,-z).$$

■

O teorema de Kummer permite obter desenvolvimentos de algumas funções especiais que são particularmente úteis para o respectivo cálculo numérico.

Exemplo 10.17 - *Dado $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > 0$, e sendo a função gama incompleta definida por*

$$\gamma(s,z) = \int_0^z e^{-t} t^{s-1} dt \quad se \; z \in \mathbb{C},$$

tem-se

$$\gamma(s,z) = \frac{s^{-1} z^s e^{-z}}{1 + \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} a_n z/(s+n)}$$

com $a_1 = -1$, $a_{2n} = n$ *e* $a_{2n+1} = -(s+n)$ *se* $n \geq 1$.

Efectivamente, desenvolvendo $\gamma(s,z)$ em série de potências de z obtém-se

$$\gamma(s,z) = z^s \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{(s+n)\,n!},$$

e como

$$\frac{s}{s+n} = \frac{(s)_n}{(s+1)_n}$$

deduz-se

$$\gamma(s,z) = s^{-1} z^s M(s, s+1, -z).$$

Atendendo ao teorema anterior é então

$$\gamma(s,z) = s^{-1} z^s e^{-z} M(1, s+1, z)$$

e basta agora aplicar o teorema 10.14.

Exemplo 10.18 - *Para a função erro, definida por*

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad se\ z \in \mathbb{C},$$

tem-se

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z e^{-z^2}}{1 + \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} a_n z^2/(n+1/2)}$$

com $a_1 = -1$, $a_{2n} = n$ *e* $a_{2n+1} = -(n+1/2)$ *se* $n \geq 1$.

Efectivamente, desenvolvendo $\operatorname{erf}(z)$ em série de potências de z obtém-se

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-z^2\right)^n}{(2n+1)\,n!},$$

e como

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{(1/2)_n}{(3/2)_n}$$

deduz-se

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right).$$

Atendendo ao teorema 10.16 é então

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} M\left(1, \frac{3}{2}, z^2\right) \tag{10.18}$$

e aplicando o teorema 10.14 obtém-se o desenvolvimento pretendido.

Exemplo 10.19 - *Para os integrais de Fresnel, definidos por*

$$S(z)=\int_0^z \sin t^2 dt \quad e \quad C(z)=\int_0^z \sin t^2 dt \quad se\ z\in\mathbb{C},$$

tem-se

$$S(z)+iC(z)=\frac{ize^{-iz^2}}{1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} ia_n z^2/(n+1/2)}$$

em que (a_n) *é a sucessão definida no exemplo anterior.*

Efectivamente, partindo da relação

$$S(z)+iC(z)=i\int_0^z e^{-it^2}dt$$

e procedendo como no exemplo anterior obtém-se

$$S(z)+iC(z)=izM\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-iz^2\right)=ize^{-iz^2}M\left(1,\frac{3}{2},iz^2\right).$$

Comparando agora com (10.18) o resultado pretendido deduz-se imediatamente a partir do exemplo anterior.

Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ e $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$, a série de potências

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}$$

é conhecida por *série hipergeométrica* e define a chamada *função hipergeométrica*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z).$$

Se $\alpha\in\mathbb{Z}_0^-$ ou $\beta\in\mathbb{Z}_0^-$ esta série reduz-se a um polinómio e se isto não suceder é imediato verificar que o seu raio de convergência é igual a 1.

O método usado na demonstração do teorema 10.13 permite relacionar as funções hipergeométricas com as C-fracções, resultado este que foi inicialmente obtido por Gauss de um modo puramente formal:

Teorema 10.20 (Gauss, 1813) - *Dados* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ e $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ *seja* (c_n) *a sucessão definida por*

$$c_{2n}(\alpha,\beta,\gamma)=-\frac{(\beta+n)(\gamma-\alpha+n)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}\ se\ n\geq 1$$

e

$$c_{2n+1}(\alpha,\beta,\gamma)=-\frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}\ se\ n\geq 0.$$

Tem-se então

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,z)} = 1 + \operatorname*{K}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n\,(\alpha,\beta,\gamma)\,z}{1} \quad \textit{se} \quad |z|<1,$$

e o segundo membro define uma função meromorfa em $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$.

Demonstração. Como na demonstração do teorema 10.13 obtém-se a identidade

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) - F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,z) = \frac{\beta(\alpha-\gamma)z}{\gamma\,(\gamma+1)} F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,z), \quad (10.19)$$

e a relação $F(\alpha,\beta,\gamma,z) = F(\beta,\alpha,\gamma,z)$ mostra que é também

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) - F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,z) = \frac{\alpha(\beta-\gamma)z}{\gamma\,(\gamma+1)} F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,z). \quad (10.20)$$

Fixados α,β e γ, para cada inteiro $n\geq 0$ sejam agora

$$\varphi_{2n}(\alpha,\beta,\gamma,z) = F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n,z)$$

e

$$\varphi_{2n+1}(\alpha,\beta,\gamma,z) = F(\alpha+n,\beta+n+1,\gamma+2n+1,z).$$

Atendendo respectivamente a (10.19) e (10.20) temos

$$\varphi_{2n-1}(\alpha,\beta,\gamma,z) - \varphi_{2n}(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{(\beta+n)\,(\alpha-\gamma-n)\,z}{(\gamma+2n-1)\,(\gamma+2n)} \varphi_{2n+1}(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

se $n\geq 1$, e

$$\varphi_{2n}(\alpha,\beta,\gamma,z) - \varphi_{2n+1}(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{(\alpha+n)\,(\beta-\gamma-n)\,z}{(\gamma+2n)\,(\gamma+2n+1)} \varphi_{2n+2}(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

se $n\geq 0$.

Sendo (c_n) a sucessão definida no enunciado é então

$$\varphi_n(\alpha,\beta,\gamma,z) - \varphi_{n+1}\,(\alpha,\beta,\gamma,z) = c_{n+1}\,(\alpha,\beta,\gamma)\,z\varphi_{n+2}\,(\alpha,\beta,\gamma,z) \quad \text{se } n\geq 0, \quad (10.21)$$

e pondo ainda

$$f_n(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\varphi_n(\alpha,\beta,\gamma,z)}{\varphi_{n+1}\,(\alpha,\beta,\gamma,z)} - 1 \quad \text{se } n\geq 0 \quad (10.22)$$

obtém-se assim

$$f_n(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{c_{n+1}\,(\alpha,\beta,\gamma)\,z}{1+f_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma,z)} \quad \text{se } n\geq 0. \quad (10.23)$$

Como os φ_n são funções analíticas de z em $B(0,1)$ e $\varphi_n(\alpha,\beta,\gamma,0)=1$, da definição (10.22) resulta que cada f_n é uma função meromorfa de z em $B(0,1)$ e nula na origem. Além disso, dado que

$$\lim c_n(\alpha,\beta,\gamma) = -1/4$$

o teorema 9.7 mostra que a fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(\alpha,\beta,\gamma)\,z}{1}$$

define uma função meromorfa em $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[\ \supseteq B(0,1)$ e é uniformemente convergente em cada conjunto subconjunto compacto que não contenha polos dessa função. Notando ainda que

$$f_0(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma,z)}{\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,z)} - 1 = \frac{F(\alpha,\beta,\gamma,z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,z)} - 1,$$

o enunciado resulta agora de aplicar o teorema 10.4 à relação (10.23).

■

Como aplicação do teorema de Gauss estabeleceremos o desenvolvimento seguinte.

Teorema 10.21 - *Para todo o* $z\in\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$ *tem-se*

$$\frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n z^2}{2n-1}$$

com $a_1=1$ *e* $a_{2n}=a_{2n+1}=-2n(2n-1)$ *se* $n\geq 1$.

Demonstração. Partindo do desenvolvimento de $(1+z)^\alpha$ em série de potências de z temos

$$\begin{aligned}\sqrt{1-z^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/2\,(1/2-1)\ldots(1/2-k+1)\,(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1/2)_k\,\frac{z^{2k}}{k!} \quad \text{se} \quad |z|<1\end{aligned}$$

pelo que

$$\sqrt{1-z^2} = F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},z^2\right) \quad \text{se} \quad |z|<1.$$

Se $|z|<1$ temos ainda

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(1/2)_k\,\frac{z^{2k}}{k!}$$

e por primitivação obtém-se

$$\arcsin z = z\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1/2)_k}{2k+1}\frac{z^{2k}}{k!} \text{ se } |z|<1.$$

Como

$$\frac{1}{2k+1}=\frac{(1/2)_k}{(3/2)_k} \tag{10.24}$$

é então

$$\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right) \text{ se } |z|<1.$$

Temos assim

$$z\frac{\sqrt{1-z^2}}{\arcsin z}=\frac{F\left(1/2,-1/2,1/2,z^2\right)}{F\left(1/2,1/2,3/2,z^2\right)}$$

e aplicando o teorema anterior com $\alpha=1/2$, $\beta=-1/2$ e $\gamma=1/2$ obtém-se o desenvolvimento

$$z\frac{\sqrt{1-z^2}}{\arcsin z}=1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{c_n z^2}{1} \text{ se } |z|<1$$

em que

$$c_{2n}=-\frac{(2n-1)(2n)}{(4n-1)(4n+1)} \text{ se } n\geq 1 \text{ e } c_{2n+1}=-\frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+1)(4n+3)} \text{ se } n\geq 0.$$

Pondo agora $r_n=2n+1$ se $n\geq 0$ e aplicando o teorema 1.6, temos

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{c_n z^2}{1}=\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{u_n z^2}{2n+1}=\underset{n=2}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{u_{n-1}z^2}{2n-1}$$

em que

$$u_{2n}=-2n(2n-1) \text{ e } u_{2n-1}=u_{2n} \text{ se } n\geq 1.$$

É assim

$$\frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}=z^2\left(1+\underset{n=2}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{u_{n-1}z^2}{2n-1}\right)^{-1} \text{ se } |z|<1,$$

o que equivale à fórmula do enunciado.

Finalmente, como $z\arcsin z$ e $1/\sqrt{1-z^2}$ definem funções analíticas em

$$\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)=\mathbb{C}\setminus\left\{z:z^2\in[1,+\infty[\right\},$$

aplicando o teorema anterior e o princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas resulta que o desenvolvimento obtido é efectivamente válido neste conjunto.

■

Para as funções hipergeométricas da forma $F(\alpha,1,\gamma,z)$ é válido um resultado análogo ao do teorema 10.14:

Teorema 10.22 - *Dados* $\alpha\in\mathbb{C}$ *e* $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$\frac{1}{F(\alpha,1,\gamma,z)}=1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{a_nz}{\gamma+n-1}\quad se\quad |z|<1$$

com

$$a_1=-\alpha,a_{2n}=-n\left(\gamma-\alpha+n-1\right)\ e\ a_{2n+1}=-\left(\alpha+n\right)\left(\gamma+n-1\right)\ se\ n\geq 1,$$

e o segundo membro define uma função meromorfa em $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$.

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar $\gamma\neq 1$. Como

$$\frac{1}{F(\alpha,1,\gamma,z)}=\frac{F(\alpha,0,\gamma-1,z)}{F(\alpha,1,\gamma,z)},$$

o teorema anterior mostra directamente que

$$\frac{1}{F(\alpha,1,\gamma,z)}=1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{c_n\left(\alpha,0,\gamma-1\right)z}{1}\ \text{ se }\ |z|<1, \tag{10.25}$$

e que a fracção contínua representa uma função meromorfa em $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$.

Para provar que este resultado se mantém na hipótese $\gamma=1$ vamos mostrar que as relações (10.21) permanecem válidas, com definições adequadas, quando $\beta=\gamma=0$. Efectivamente, definindo $F\left(\alpha,0,0,z\right)$ e $c_1\left(\alpha,0,0\right)$ por

$$F\left(\alpha,0,0,z\right)=\lim_{\gamma\to 0}F\left(\alpha,0,\gamma,z\right)=1\text{ e }c_1\left(\alpha,0,0\right)=\lim_{\gamma\to 0}c_1\left(\alpha,0,\gamma\right)=-\alpha$$

verifica-se sem dificuldade que é

$$F\left(\alpha,0,0,z\right)-F\left(\alpha,1,1,z\right)=c_1\left(\alpha,0,0\right)zF\left(\alpha+1,1,2,z\right),$$

o que corresponde à relação (10.21) com $n=0$. Dado que as relações (10.21) permanecem válidas quando $n\geq 1$ e $\beta=\gamma=0$, definindo $f_n\left(\alpha,0,0,z\right)$ como em (10.22) segue-se que a conclusão do teorema 10.20 é ainda verdadeira se $\beta=\gamma=0$, e isto justifica o desenvolvimento (10.25) para $\gamma=1$.

Temos finalmente

$$c_{2n}\left(\alpha,0,\gamma-1\right)=-\frac{n\left(\gamma-\alpha+n-1\right)}{\left(\gamma+2n-2\right)\left(\gamma+2n-1\right)}\ \text{ se }\ n\geq 1$$

e

$$c_{2n+1}\left(\alpha,0,\gamma-1\right)=-\frac{\left(\alpha+n\right)\left(\gamma+n-1\right)}{\left(\gamma+2n-1\right)\left(\gamma+2n\right)}\ \text{ se }\ n\geq 0$$

pelo que a fórmula do enunciado se obtém aplicando o teorema 1.6 com $r_0=1$ e $r_n=\gamma+n-1$ se $n\geq 1$. ■

Nota 10.23 - Na demonstração anterior uma maneira mais elegante de mostrar que a identidade (10.21) se conserva quando $n = \beta = \gamma = 0$ consistiria em fazer $\gamma \to 0^+$ na identidade

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) - F(\alpha, 1, \gamma + 1, z) = c_1(\alpha, 0, \gamma)\, zF(\alpha + 1, 1, \gamma + 2, z) \text{ se } \gamma > 0.$$

Isto exige no entanto provar que a série que define $F(\alpha, 1, \gamma, z)$ converge uniformemente como função de γ quando $\gamma \geq 1$, o que resulta do critério de convergência uniforme de Weierstrass. Efectivamente o termo geral $u_k z^k$ desta série verifica a relação

$$\left|u_k z^k\right| \leq \frac{|\alpha|\,(|\alpha| + 1) \cdots (|\alpha| + k - 1)}{k!} |z|^k \text{ se } \gamma \geq 1$$

e o critério da razão mostra que o segundo membro desta desigualdade é o termo geral de uma série convergente quando $|z| < 1$.

Corolário 1 - *Dado* $\alpha \in \mathbb{C}$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ *tem-se*

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{n}$$

com $c_1 = \alpha$, $c_{2n} = n(n - \alpha)$ *e* $c_{2n+1} = n(\alpha + n)$ *se* $n \geq 1$.

Demonstração. Escrevendo o desenvolvimento de $(1 + z)^{-\alpha}$ em série de potências de z na forma

$$(1 + z)^{-\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (-z)^k \text{ se } |z| < 1,$$

deduz-se

$$(1 + z)^{-\alpha} = F(\alpha, 1, 1, -z) \text{ se } |z| < 1.$$

Como $(1 + z)^\alpha$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ e a fracção contínua define uma função meromorfa quando $-z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, o enunciado resulta directamente do teorema anterior aplicando o princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas.

■

Corolário 2 - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ *tem-se*

$$\ln(1 + z) = \operatorname*{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n z}{n} \text{ com } c_1 = 1 \text{ e } c_{2n+1} = c_{2n} = n^2 \text{ se } n \geq 1.$$

Demonstração. Escrevendo o desenvolvimento de $\ln(1+z)$ em série de potências de z na forma

$$\ln(1 + z) = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z)^k}{k + 1} = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(k + 1)!} (-z)^k,$$

deduz-se

$$\ln(1+z) = zF(1,1,2,-z) \text{ se } |z|<1.$$

Como $\ln(1+z)$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1]$, usando o teorema anterior e o princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas resulta então

$$\ln(1+z) = z\left(1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{-a_n z}{n+1}\right)^{-1} \text{ se } z\in\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1]\,,$$

com

$$a_{2n} = a_{2n-1} = -n^2 \text{ se } n\geq 1.$$

O enunciado obtém-se agora notando que

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}-\frac{a_n z}{n+1} = \underset{n=2}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}-\frac{a_{n-1}z}{n}.$$

■

Corolário 3 - *Sendo* $c_1 = 2$ *e* $c_n = -(n-1)^2$ *se* $n\geq 2$, *tem-se*

$$z\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{c_n z^2}{2n-1} \text{ se } z\in\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)\,.$$

Demonstração. Partindo dos desenvolvimentos de $\ln(1\pm z)$ em série de potências de z deduz-se

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(z^2\right)^k}{2k+1} \text{ se } |z|<1, \tag{10.26}$$

e usando a relação (10.24) obtém-se

$$z\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z^2F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},z^2\right) \text{ se } |z|<1.$$

Do teorema anterior resulta então

$$z\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z^2\left(1+\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\frac{a_n z^2}{n+1/2}\right)^{-1} \text{ se } |z|<1$$

com $a_1 = -1/2$ e

$$a_{2n} = -n^2 \text{ e } a_{2n+1} = -\frac{(2n+1)^2}{4} \text{ se } n\geq 1,$$

e como o primeiro membro representa uma função analítica em

$$\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[) = \mathbb{C}\setminus\left\{z : z^2\in[1,+\infty[\right\},$$

a identidade é válida neste conjunto. Aplicando agora o teorema 1.6 com $r_0 = 1$ e $r_n = 2$ se $n \geq 1$ temos

$$\underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_n z^2}{n + 1/2} = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{-n^2 z^2}{2n+1} = \underset{n=2}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{-(n-1)^2 z^2}{2n-1}$$

e obtém-se a fórmula do enunciado.

■

Corolário 4 - *Sendo* $c_1 = 1$ *e* $c_n = (n-1)^2$ *se* $n \geq 2$, *tem-se*

$$z \arctan z = \underset{n=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}} \frac{c_n z^2}{2n-1} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{it : |t| \geq 1\}.$$

Demonstração. Escrevendo o desenvolvimento de $\arctan z$ na forma

$$\arctan z = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-z^2\right)^k}{2k+1}$$

e comparando com (10.26) obtém-se a relação

$$z \arctan z = z^2 F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right) \text{ se } |z| < 1.$$

A fórmula do enunciado resulta agora directamente do corolário anterior notando que a função definida por $z \arctan z$ é analítica no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{it : |t| \geq 1\} = \mathbb{C} \setminus \left\{z : -z^2 \in [1, +\infty[\right\}.$$

■

Nota 10.24 - É importante salientar que nos corolários anteriores se obtiveram desenvolvimentos válidos em toda a região onde a função é analítica, enquanto as séries que traduzem os respectivos desenvolvimentos em série de potências de z têm raio de convergência 1. Isto não sucede com os desenvolvimentos obtidos a partir do teorema 1.12 pois esse teorema limita-se a indicar como se transformam as somas parciais de uma série de potências em aproximantes de uma fracção contínua, o que implica que a fracção contínua e a série tenham a mesma região de convergência.

11 - O conceito de convergência geral

Dada uma fracção contínua com funções aproximantes S_n, para relacionar a sua convergência com o comportamento das sucessões da forma $S_n(z_n)$ em que $z_n \in \mathbb{C}_\infty$ vamos começar por estudar algumas propriedades gerais das transformações de Möbius.

Teorema 11.1 - *Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, para a função definida por*

$$\varphi(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

com a habitual convenção de continuidade quando algum dos z_i é ∞, tem-se $\varphi(z_1) = \infty$, $\varphi(z_2) = 0$ e $\varphi(z_3) = 1$, e φ é a única transformação de Möbius que verifica estas condições.

Demonstração. É imediato verificar que φ tem as propriedades do enunciado. Supondo agora que f é outra transformação de Möbius com as mesmas propriedades então $\varphi \circ f^{-1}$ deixa fixos os pontos $\infty, 0$ e 1. Pondo

$$\left(\varphi \circ f^{-1}\right)(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

estas condições exigem respectivamente $c = 0$, $b = 0$ e $a + b = c + d$ pelo que $a = d$. Então $\varphi \circ f^{-1} = Id$ e portanto $\varphi = f$.

■

Corolário - *Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, se w_1, w_2, w_3 são pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ existe uma e uma só transformação de Möbius f tal que $f(z_j) = w_j$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.*

Demonstração - Se ψ é a transformação de Möbius que transforma os w_j respectivamente em $\infty, 0$ e 1, e φ é a função definida no teorema anterior, então a função $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ verifica as condições exigidas. Sendo g outra transformação de Möbius que verifique as mesmas condições então $\psi \circ g$ transforma os z_j em $\infty, 0$ e 1, pelo que $\psi \circ g = \varphi$ e portanto $g = \psi^{-1} \circ \varphi = f$.

■

Dados quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ chama-se *razão cruzada* destes pontos a

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} . \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Sendo φ a função definida no teorema 11.1 é então $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \varphi(z_4)$.

Teorema 11.2 - *Dados quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ e uma transformação de Möbius f, tem-se*

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Demonstração. Se ψ é a função de Möbius que transforma $f(z_1)$, $f(z_2)$ e $f(z_3)$ respectivamente em $\infty, 0$ e 1, temos

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \psi(f(z_4)).$$

Sendo agora φ a função definida no teorema 11.1, como a transformação $\varphi \circ f^{-1}$ também verifica estas condições segue-se que $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ e daqui resulta

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \left(\varphi \circ f^{-1}\right)(f(z_4)) = \varphi(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

■

Para podermos explorar convenientemente estes resultados vamos agora utilizar a chamada *distância cordal* d (cf. apêndice) que se define em $\mathbb{C}_\infty$ por

$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \text{ se } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

e

$$d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \text{ se } z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Com este conceito de distância o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ torna-se um espaço métrico, e dados uma sucessão (z_n) de pontos de $\mathbb{C}_\infty$ e um ponto $a \in \mathbb{C}_\infty$ são equivalentes as condições $\lim z_n = a$ e $\lim d(z_n, a) = 0$.

Em termos da métrica cordal o teorema 11.2 traduz-se pelo resultado seguinte.

Teorema 11.3 - *Dados quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ e uma transformação de Möbius T, tem-se*

$$\frac{d(z_1, z_3)}{d(z_2, z_3)} \frac{d(z_2, z_4)}{d(z_1, z_4)} = \frac{d(T(z_1), T(z_3))}{d(T(z_2), T(z_3))} \frac{d(T(z_2), T(z_4))}{d(T(z_1), T(z_4))}.$$

Demonstração. Se todos os z_j forem pontos de $\mathbb{C}$, da definição de distância cordal resulta

$$|(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{d(z_1, z_3)}{d(z_2, z_3)} \frac{d(z_2, z_4)}{d(z_1, z_4)}$$

e por continuidade esta relação conserva-se se um dos z_j for ∞. O enunciado é agora consequênia directa do corolário anterior. ■

Para introduzir o conceito de convergência geral usaremos um resultado auxiliar.

Lema 11.4 - *Dada uma sucessão* (e_n) *de* $\mathbb{C}_\infty$ *existem sucessões* (z_n) *e* (w_n) *tais que* $\underline{\lim}\, d(z_n, e_n) > 0$, $\underline{\lim}\, d(w_n, e_n) > 0$ *e* $\underline{\lim}\, d(z_n, w_n) > 0$.

Demonstração. Sejam a, b, c, d quatro pontos distintos tais que $a, b \in [0, 1[$ e $c, d \in]1, +\infty[$. Para as sucessões (z_n) e (w_n) definidas respectivamente por

$$z_n = \begin{cases} a & \text{se} \quad |e_n| \geq 1 \\ c & \text{se} \quad |e_n| < 1 \end{cases} \qquad \text{e} \quad w_n = \begin{cases} b & \text{se} \quad |e_n| \geq 1 \\ d & \text{se} \quad |e_n| < 1 \end{cases}$$

temos

$$d(z_n, w_n) = \min\{d(a, b), d(c, d)\} > 0$$

pelo que $\underline{\lim}\, d(z_n, w_n) > 0$.

Se $|e_n| \geq 1$, supondo sem perda de generalidade $e_n \neq \infty$ temos

$$d(z_n, e_n) = d(a, e_n) = \frac{|e_n|}{\sqrt{1 + |e_n|^2}} \frac{|1 - a/e_n|}{\sqrt{1 + a^2}} \geq \frac{1 - a}{\sqrt{2}\sqrt{1 + a^2}} > 0,$$

e como para $|e_n| < 1$ é

$$d(z_n, e_n) = d(c, e_n) = \frac{|c - e_n|}{\sqrt{1 + |e_n|^2}\sqrt{1 + c^2}} > \frac{c - 1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + c^2}} > 0$$

segue-se que $\underline{\lim}\, d(z_n, e_n) > 0$. Dado que $d(w_n, e_n)$ verifica condições análogas conclui-se que é também $\underline{\lim}\, d(w_n, e_n) > 0$.

■

Podemos agora provar o resultado seguinte.

Teorema 11.5 (Lorentzen, 1986) - *Dada uma sucessão* (T_n) *de transformações de Möbius as duas condições seguintes são equivalentes:*

1 - *Existem* $\gamma \in \mathbb{C}_\infty$ *e uma sucessão* (e_n) *de pontos de* $\mathbb{C}_\infty$ *tais que se tem* $\lim T_n(u_n) = \gamma$ *para qualquer sucessão* (u_n) *de pontos de* $\mathbb{C}_\infty$ *que verifique a condição* $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$.

2 - *Existem* $\gamma \in \mathbb{C}_\infty$ *e duas sucessões* $(z_n), (w_n)$ *em* $\mathbb{C}_\infty$ *tais que*

$$\underline{\lim}\, d(z_n, w_n) > 0 \text{ e } \lim T_n(z_n) = \lim T_n(w_n) = \gamma.$$

Além disso a constante γ *é bem determinada e a condição 1 é satisfeita com qualquer sucessão da forma* $e_n = T_n^{-1}(\sigma)$ *em que* $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$.

Demonstração. Supondo que a condição 1 se verifica, o lema anterior mostra que existem sucessões (z_n) e (w_n) tais que $\underline{\lim}\, d(z_n, e_n) > 0$, $\underline{\lim}\, d(w_n, e_n) > 0$

e $\underline{\lim}\, d(z_n, w_n) > 0$. É então $\lim T_n(z_n) = \lim T_n(w_n) = \gamma$ e a condição 2 também é verificada.

Supondo agora que a condição 2 é válida, seja (γ_n) a sucessão definida por $\gamma_n = T_n^{-1}(\gamma)$ e ponha-se $v_n = z_n$ se $d(z_n, \gamma_n) \geq d(w_n, \gamma_n)$ e $v_n = w_n$ se isto não suceder. Temos então

$$\begin{aligned} d(v_n, \gamma_n) &= \max\{d(z_n, \gamma_n), d(w_n, \gamma_n)\} \geq \frac{1}{2}(d(z_n, \gamma_n) + d(w_n, \gamma_n)) \\ &\geq \frac{1}{2} d(z_n, w_n) \end{aligned}$$

pelo que $\underline{\lim}\, d(v_n, \gamma_n) > 0$. Por outro lado, como $\lim T_n(z_n) = \lim T_n(w_n) = \gamma$ é também $\lim T_n(v_n) = \gamma$.

Tome-se agora $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$ e seja $e_n = T_n^{-1}(\sigma)$. Dada uma sucessão (u_n) tal que $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$, para provar que $\lim T_n(u_n) = \gamma$ basta tratar os índices n para os quais é $T_n(u_n) \neq \gamma$ e $T_n(u_n) \neq T_n(v_n)$. Além disso, como $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$ e $\underline{\lim}\, d(v_n, \gamma_n) > 0$, existe uma ordem a partir da qual é $u_n \neq e_n$ e $v_n \neq \gamma_n$, o que equivale respectivamente a $T_n(u_n) \neq \sigma$ e $T_n(v_n) \neq \gamma$. Dado que é ainda $\lim T_n(v_n) = \gamma \neq \sigma$ podemos considerar apenas índices n para os quais os quatro pontos $\gamma, \sigma, T_n(u_n)$ e $T_n(v_n)$ são distintos. Atendendo ao teorema 11.3 temos então

$$\frac{d(\gamma, T_n(u_n))}{d(\gamma, T_n(v_n))} \frac{d(\sigma, T_n(v_n))}{d(\sigma, T_n(u_n))} = \frac{d(\gamma_n, u_n)}{d(\gamma_n, v_n)} \frac{d(e_n, v_n)}{d(e_n, u_n)},$$

e pondo

$$c_n = \frac{d(\sigma, T_n(u_n))}{d(\sigma, T_n(v_n))} \frac{d(\gamma_n, u_n)}{d(\gamma_n, v_n)} \frac{d(e_n, v_n)}{d(e_n, u_n)}$$

é

$$d(\gamma, T_n(u_n)) = d(\gamma, T_n(v_n))\, c_n.$$

Como as condições $\lim T_n(v_n) = \gamma \neq \sigma$, $\underline{\lim}\, d(v_n, \gamma_n) > 0$ e $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$ mostram que a sucessão (c_n) é limitada, de $\lim d(\gamma, T_n(v_n)) = 0$ deduz-se $\lim d(\gamma, T_n(u_n)) = 0$.

Finalmente, se alguma das condições do enunciado for também satisfeita com uma nova constante γ', tomando $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma, \gamma'\}$ e sendo $e'_n = T_n^{-1}(\sigma)$, o resultado acabado de estabelecer mostra que para toda a sucessão (u_n) tal que $\underline{\lim}\, d(e'_n, u_n) > 0$ seria $\lim T_n(u_n) = \gamma$ e também $\lim T_n(u_n) = \gamma'$.

■

Uma sucessão de transformações de Möbius que verifique as condições do teorema anterior diz-se *geralmente convergente com limite* γ e diz-se que γ é o *limite geral* da sucessão. Diremos ainda que uma transformação de Möbius é *geralmente divergente* se não for geralmente convergente. As sucessões (e_n) tais que para cada sucessão (u_n) a condição $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$ implica $\lim T_n(u_n) = \gamma$ dizem-se *sucessões excepcionais de* (T_n). Conceitos análogos definem-se para as fracções contínuas não singulares relativamente ao comportamento da respectiva sucessão de funções aproximantes (S_n).

Exemplo 11.6 - *Dada uma sucessão* (T_n) *de transformações de Möbius, se existirem pontos distintos* $a, b \in \mathbb{C}_\infty$ *tais que* $\lim T_n(a) = \lim T_n(b)$ *então* (T_n) *é geralmente convergente.*

Efectivamente a segunda condição do teorema anterior é verificada neste caso com as sucessões constantes $z_n = a$ e $w_n = b$.

Exemplo 11.7 - *Se* (T_n) *converge geralmente para* γ *e* $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$, *então a sucessão* (σ_n) *definida por* $\sigma_n = T_n^{-1}(\sigma)$ *é excepcional para* (T_n).

Efectivamente isto é uma consequência directa do teorema anterior.

Exemplo 11.8 - *Se uma fracção contínua não singular* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *é geralmente convergente para* γ *com sucessão excepcional* (e_n), *tem-se* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \gamma$ *se* $\underline{\lim}\, d(0, e_n) > 0$.

Efectivamente, sendo (S_n) a sucessão das funções aproximantes da fracção contínua e aplicando a primeira condição do teorema anterior à sucessão (u_n) identicamente nula resulta $\lim S_n(0) = \gamma$.

Teorema 11.9 - *Toda a fracção contínua não singular convergente em* $\mathbb{C}_\infty$ *converge geralmente para o seu valor. Reciprocamente, suponha-se que* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ *é uma fracção contínua não singular que converge geralmente para* γ *e sejam* A_n *e* B_n *os respectivos numeradores e denominadores canónicos. Tem-se então* $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \gamma$ *se se verificar alguma das condições*

1 - $\gamma \in \mathbb{C}$ *e* $\underline{\lim}\, |B_n/B_{n-1}| > 0$ *ou* $\overline{\lim}\, |B_n/B_{n-1}| < +\infty$.

2 - $\gamma = \infty$ *e* $\underline{\lim}\, |A_n/A_{n-1}| > 0$ *ou* $\overline{\lim}\, |A_n/A_{n-1}| < +\infty$.

Demonstração. Se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \gamma$, para a respectiva sucessão de funções convergentes (S_n) é $\lim S_n(0) = \lim S_n(\infty) = \gamma$ e (S_n) verifica a segunda condição do teorema anterior. Reciprocamente, suponha-se que a fracção contínua é geralmente convergente com limite γ. Se $\gamma \in \mathbb{C}$ o teorema anterior mostra que $e_n = S_n^{-1}(\infty)$ é uma sucessão excepcional de (S_n), e do teorema 1.7 resulta $S_n^{-1}(\infty) = -B_n/B_{n-1}$. Se $\underline{\lim}\, |e_n| = L > 0$ é então

$$\underline{\lim}\, d(0, e_n) = \underline{\lim} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/|e_n|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/L^2}} > 0$$

pelo que $\lim S_n(0) = \gamma$. Analogamente, se $\overline{\lim}\, |e_n| = M < \infty$ temos

$$\underline{\lim}\, d(\infty, e_n) = \underline{\lim} \frac{1}{\sqrt{1 + |e_n|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}} > 0$$

pelo que $\lim S_n(\infty) = \gamma$, e portanto também $\lim S_n(0) = \gamma$.

Se $\gamma = \infty$ então $e_n = S_n^{-1}(0) = -A_n/A_{n-1}$ é uma sucessão excepcional de (S_n) e do mesmo modo se conclui que a condição 2 implica $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n = \infty$.

■

Nota 11.10 - Dada uma fracção contínua convergente com sucessão de aproximantes (S_n), o facto de ser $\lim S_n(z_n) = \lim S_n(0)$ para qualquer sucessão (z_n) que verifique a primeira condição do teorema 11.5 pode ser aproveitado para acelerar a convergência no cálculo do valor da fracção contínua. Uma discussão detalhada deste tópico é apresentada em Lorentzen & Waadeland, 2008.

Teorema 11.11 - *Sejam (T_n) uma sucessão de transformações de Möbius geralmente convergente com limite γ e (e_n) uma sucessão excepcional para (T_n). Então cada subsucessão (T_{α_n}) de (T_n) também converge geralmente para γ e tem (e_{α_n}) como sucessão excepcional.*

Demonstração. Pondo $e'_n = e_{a_n}$ seja (z_n) uma sucessão tal que

$$\underline{\lim}\, d(z_n, e'_n) > 0.$$

Como o lema 11.4 garante a existência de uma sucessão (u_n) tal que

$$\underline{\lim} d(u_n, e_n) > 0,$$

definindo uma sucessão (z'_n) por $z'_{\alpha_n} = z_n$ e $z'_m = u_m$ para os restantes índices, tem-se $\underline{\lim}\, d(z'_n, e_n) > 0$. É então $\lim T_n(z'_n) = \gamma$ pelo que também $\lim T_{\alpha_n}(z_n) = \lim T_{\alpha_n}\left(z'_{\alpha_n}\right) = \gamma$. Conclui-se assim que (T_{α_n}) converge geralmente para γ e que a sucessão (e'_n) é excepcional para (T_{α_n}).
■

Corolário - S*ejam (T_n) uma sucessão de transformações de Möbius geralmente convergente com limite γ e (e_n) uma sucessão excepcional para (T_n). Dada uma sucessão (u_n) de pontos de $\mathbb{C}_\infty$, se a sucessão $d(u_n, e_n)$ não tiver limite nulo existe uma subsucessão de $(T_n(u_n))$ com limite γ.*

Demonstração. Se $d(u_n, e_n) \nrightarrow 0$ existe uma subsucessão (u_{α_n}) de (u_n) tal que $\lim d(u_{\alpha_n}, e_{\alpha_n}) > 0$ e o teorema anterior mostra que $\lim T_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) = \gamma$.
■

Se (T_n) é uma sucessão de transformações de Möbius geralmente convergente com limite γ e (e_n) é uma sucessão excepcional para (T_n), dado $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$ o corolário anterior mostra que $\lim d\left(e_n, T_n^{-1}(\sigma)\right) = 0$ pois se isto não sucedesse existiria uma subsucessão de $T_n\left(T_n^{-1}(\sigma)\right)$ com limite γ o que é absurdo. Com base nesta observação provaremos o seguinte resultado:

Teorema 11.12 - *Sejam (T_n) uma sucessão de transformações de Möbius geralmente convergente e (e_n) uma sucessão excepcional para (T_n). Então uma sucessão (λ_n) de pontos de $\mathbb{C}_\infty$ é excepcional para (T_n) sse $\lim d(\lambda_n, e_n) = 0$.*

Demonstração. Sendo γ o limite geral de (T_n), se (λ_n) verificar a condição do enunciado e (u_n) for uma sucessão tal que $\underline{\lim}\, d(u_n, \lambda_n) > 0$, temos

$$d(u_n, e_n) \geq d(u_n, \lambda_n) - d(\lambda_n, e_n)$$

pelo que $\underline{\lim}\, d(u_n, e_n) > 0$. Como (e_n) é uma sucessão excepcional para (T_n) segue-se que $\lim T_n(u_n) = \gamma$ e isto mostra que (λ_n) é também uma sucessão excepcional para (T_n).

Reciprocamente, se (λ_n) for uma sucessão excepcional para (T_n), tomando $\sigma \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$ temos

$$\lim d\left(\lambda_n, T_n^{-1}(\sigma)\right) = \lim d\left(e_n, T_n^{-1}(\sigma)\right) = 0,$$

e da relação

$$d(\lambda_n, e_n) \leq d\left(\lambda_n, T_n^{-1}(\sigma)\right) + d\left(T_n^{-1}(\sigma), e_n\right)$$

conclui-se que $\lim d(\lambda_n, e_n) = 0$.

■

Se uma sucessão (T_n) converge geralmente para x e tem uma sucessão constante y por sucessão excepcional, a primeira condição do teorema 11.5 mostra que

$$\lim T_n(z) = x \quad \text{para todo o} \quad z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{y\}.$$

O teorema seguinte dá uma condição necessária e suficiente para que isto suceda.

Teorema 11.13 - *Seja (T_n) uma sucessão de transformações de Möbius geralmente convergente. Então (T_n) tem como excepcional uma sucessão constante y sse $\left(T_n^{-1}\right)$ convergir geralmente para y.*

Demonstração. Se (T_n) converge geralmente para x e tem a sucessão constante y por excepcional, tomando pontos distintos $u, v \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{x\}$ o exemplo 11.7 e o teorema 11.12 aplicados a $\left(T_n^{-1}\right)$ mostram que

$$\lim T_n^{-1}(u) = \lim T_n^{-1}(v) = y$$

pelo que $\left(T_n^{-1}\right)$ converge geralmente para y. Reciprocamente, suponha-se que $\left(T_n^{-1}\right)$ converge geralmente para y e seja (e_n) uma sucessão excepcional para (T_n). Se a sucessão constante y não for excepcional para (T_n) então o teorema 11.12 mostra que $d(e_n, y) \nrightarrow 0$ pelo que existe uma subsucessão de (e_n) com limite diferente de y. Para provar que isto não sucede seja (e_{α_n}) uma subsucessão de (e_n) com limite z e tomem-se pontos distintos $u, v \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{x\}$. Atendendo ainda ao teorema 11.12 temos

$$\lim d\left(T_n^{-1}(u), e_n\right) = \lim d\left(T_n^{-1}(v), e_n\right) = 0$$

e isto implica $\lim T_{\alpha_n}^{-1}(u) = \lim T_{\alpha_n}^{-1}(v) = \lim e_{\alpha_n} = z$. Então $\left(T_{\alpha_n}^{-1}\right)$ converge geralmente para z e do teorema 11.11 resulta $z = y$.

■

Corolário - *Uma sucessão (T_n) de transformações de Möbius converge geralmente para x e tem como excepcional uma sucessão constante y sse $\left(T_n^{-1}\right)$ convergir geralmente para y e tiver como excepcional a sucessão constante x.*

Demonstração. O enunciado resulta directamente de aplicar o teorema anterior à sucessão $\left(T_n^{-1}\right)$.

■

Dadas duas transformações de Möbius T e S diz-se que S *é semelhante a* T se existir uma transformação de Möbius λ tal que

$$S = \lambda^{-1} \circ T \circ \lambda$$

e diremos então que λ estabelece uma relação de semelhança de S com T. Da definição resulta imediatamente que a relação de semelhança é uma relação de equivalência e que se λ estabelece uma relação de semelhança de S com T então λ^{-1} estabelece uma relação de semelhança de T com S. Analogamente, duas sucessões de transformações de Möbius (T_n) e (S_n) dizem-se semelhantes se existir uma transformação de Möbius λ tal que para todo o n se tenha

$$S_n = \lambda^{-1} \circ T_n \circ \lambda.$$

Exemplo 11.14 - *Dadas duas transformações de Möbius S e T sejam S_n e T_n os respectivos iterados de ordem n. Se existir uma transformação de Möbius λ tal que $S = \lambda^{-1} \circ T \circ \lambda$, então para todo o $n \geq 1$ é também $S_n = \lambda^{-1} \circ T_n \circ \lambda$.*

Efectivamente este resultado é imediato por indução em n.

Para relacionar a convergência geral de duas sucessões semelhantes de transformações de Möbius usaremos um resultado auxiliar:

Lema 11.15 - *Sejam λ uma transformação de Möbius e (u_n) e (v_n) duas sucessões de pontos de $\mathbb{C}_\infty$. Então são equivalentes as condições*

$$\underline{\lim}\, d(u_n, v_n) = 0 \quad e \quad \underline{\lim}\, d(\lambda(u_n), \lambda(v_n)) = 0.$$

Demonstração. Se $\underline{\lim}\, d(u_n, v_n) = 0$ existem subsucessões $u'_n = u_{\alpha_n}$ e $v'_n = v_{\alpha_n}$ tais que $\lim d(u'_n, v'_n) = 0$. Sendo $\left(u'_{\beta_n}\right)$ uma subsucessão de (u'_n) com limite $a \in \mathbb{C}_\infty$, como

$$d\left(a, v'_{\beta_n}\right) \leq d\left(a, u'_{\beta_n}\right) + d\left(u'_{\beta_n}, v'_{\beta_n}\right)$$

segue-se que $\lim v'_{\beta_n} = a$. Da continuidade de λ resulta então

$$\lim \lambda\left(u'_{\beta_n}\right) = \lim \lambda\left(v'_{\beta_n}\right) = \lambda(a)$$

pelo que

$$\lim d\left(\lambda\left(u'_{\beta_n}\right), \lambda\left(v'_{\beta_n}\right)\right) = 0$$

e isto implica $\underline{\lim}\, d(\lambda(u_n), \lambda(v_n)) = 0$. Recíprocamente, aplicando este resultado à transformação λ^{-1} conclui-se que da condição $\underline{\lim}\, d(\lambda(u_n), \lambda(v_n)) = 0$ se deduz $\underline{\lim}\, d(u_n, v_n) = 0$.

■

Podemos agora estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 11.16 - *Sejam (T_n) e (S_n) duas sucessões de transformações de Möbius e λ uma transformação de Möbius tal que para todo o n se tenha*

$$S_n = \lambda^{-1} \circ T_n \circ \lambda.$$

Se (T_n) convergir geralmente para γ com sucessão excepcional (e_n) então (S_n) converge geralmente para $\lambda^{-1}(\gamma)$ com sucessão excepcional $\left(\lambda^{-1}(e_n)\right)$.

Demonstração. Seja (z_n) uma sucessão de pontos de $\mathbb{C}_\infty$ tal que

$$\underline{\lim}\, d\left(z_n, \lambda^{-1}(e_n)\right) > 0.$$

Atendendo ao lema anterior é então também

$$\underline{\lim}\, d(\lambda(z_n), e_n) > 0$$

pelo que

$$\lim T_n(\lambda(z_n)) = \gamma$$

e portanto

$$\lim S_n(z_n) = \lambda^{-1}(\gamma),$$

o que prova o enunciado.

■

Para fracções contínuas não singulares com período de comprimento m os conceitos de fracção contínua loxodrómica, parabólica ou elíptica definidos na secção 3 referem-se ao comportamento dos pontos fixos das correspondentes transformações S_m pelo que esta classificação se generaliza imediatamente a qualquer transformação de Möbius.

Dada uma transformação de Möbius T definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{11.1}$$

com discriminante $\Delta = ad - bc$, se os seus pontos fixos x e y forem finitos é necessariamente $c \neq 0$ e a relação (3.4) mostra que se tem

$$(cx + d)(cy + d) = \Delta. \tag{11.2}$$

Escolhendo então x e y de modo a que $|cy + d| \leq |cx + d|$, define-se a *razão* R de T por

$$R = \frac{cy + d}{cx + d}.$$

Se $c = 0$ a transformação T tem a forma

$$T(z) = \frac{a}{d}z + h \ \text{ com } h = \frac{b}{d} \in \mathbb{C}$$

e a razão R define-se por

$$R = \frac{a}{d} \ \text{ se } |a| \leq |d| \ \text{ e } \ R = \frac{d}{a} \ \text{ se } |a| > |d|\,.$$

Como nas definições dadas para fracções contínuas periódicas, se T for loxodrómica e os seus pontos fixos forem finitos, o ponto atractor x é escolhido pela condição $|cy + d| < |cx + d|$. Se ∞ for ponto fixo de T toma-se para ponto atractor $x \in \mathbb{C}$ quando $|a| < |d|$ e $x = \infty$ quando $|a| > |d|$.

De acordo com estas definições a transformação T é loxodrómica se $|R| < 1$, parabólica ou a transformação identidade se $R = 1$, e elíptica se $|R| = 1$ com $R \neq 1$.

Nota 11.17 - Se T é elíptica a razão fica definida a menos de uma passagem ao conjugado pois R e $1/R = \overline{R}$ são ambos valores admissíveis para a razão. Neste caso a ambiguidade pode ser removida escolhendo entre os dois candidatos aquele que tiver parte imaginária não negativa.

Teorema 11.18 - *A inversa de uma transformação de Möbius tem os mesmos pontos fixos e a mesma razão. Além disso, se a transformação for loxodrómica e os seus pontos fixos atractor e repulsor forem respectivamente x e y, a transformação inversa tem ponto fixo atractor y e ponto fixo repulsor x.*

Demonstração. Se u é ponto fixo de T temos $T^{-1}(u) = T^{-1}(T(u)) = u$ pelo que u é ainda ponto fixo de T^{-1} e a afirmação recíproca também é verdadeira. Por outro lado, se T é definida por (11.1) com $c \neq 0$, como os seus pontos fixos x e y (não necessariamente distintos) são soluções da equação

$$cz^2 - (a - d)\, z - b = 0,$$

tem-se

$$c\,(x + y) = a - d.$$

É então

$$cx + d = -\,(cy - a) \ \text{ e } cy + d = -\,(cx - a)$$

pelo que a razão R de T é dada por

$$\frac{cy + d}{cx + d} = \frac{cx - a}{cy - a}.$$

Basta agora notar que os pontos fixos de T^{-1} são ainda x e y, e que o teorema 8.10 mostra que a expressão de T^{-1} se obtém substituindo em (11.1) os parâmetros a e d respectivamente por $-d$ e $-a$. Finalmente, se um dos pontos

fixos de T for ∞ o enunciado resulta directamente por a passagem de T a T^{-1} transformar o quociente a/d em d/a.

■

Teorema 11.19 - *Sejam T uma transformação loxodrómica de razão R e $u \in \mathbb{C}$ um ponto fixo de T. Então u é atractor sse $T'(u) = R$ e repulsor sse $T'(u) = 1/R$.*

Demonstração. Se T é definida por (11.1) e $c \neq 0$, como os pontos atractor x e repulsor y são ambos finitos e verificam a relação (11.2) o enunciado resulta directamente de ser

$$T'(z) = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \quad \text{se } z \in \mathbb{C}.$$

Se $c = 0$, para todo o $z \in \mathbb{C}$ é $T'(z) = a/d$. O enunciado resulta agora de que u é atractor sse $R = a/d = T'(u)$ e u é repulsor sse $R = d/a = 1/T'(u)$.

■

O teorema seguinte descreve a convergência geral da sucessão dos iterados de uma transformação de Möbius.

Teorema 11.20 - *Seja T uma transformação de Möbius e representemos por T_n o seu interado de ordem n. Então*

1 - *Se T é parabólica a sucessão (T_n) converge geralmente para o seu ponto fixo x, e dado $z \in \mathbb{C}_\infty$ tem-se*

$$\lim T_n(z) = x.$$

2 - *Se T é elíptica ou a transformação identidade a sucessão (T_n) é geralmente divergente.*

3 - *Se T é loxodrómica e x e y são os seus pontos fixos respectivamente atractor e repulsor, a sucessão (T_n) converge geralmente para x com a sucessão constante y como excepcional.*

Demonstração. Se T é parabólica e $x = \infty$, a relação (3.5) mostra que existe uma constante $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $T(z) = z + h$, e para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ é então $\lim T_n(z) = \lim (z + nh) = \infty = x$. Se $x \in \mathbb{C}$, no lema 3.4 provou-se que é válida a relação de semelhança

$$T_n = \lambda^{-1} \circ \varphi_n \circ \lambda \tag{11.3}$$

com

$$\lambda(z) = \frac{1}{z-x}, \ \ \varphi_n(z) = z + nh \ \ \text{e} \ \ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

pelo que

$$\lim T_n(z) = \lambda^{-1}(\infty) = x.$$

Se T for elíptica, a sua razão R tem a forma $e^{i\theta}$ em que $0 < |\theta| \leq \pi$. Se os seus pontos fixos x e y forem ambos finitos o lema 3.5 mostra que a relação de semelhança (11.3) é válida com

$$\varphi_n(z) = e^{in\theta} z \quad \text{e} \quad \lambda(z) = \frac{z-x}{z-y}. \tag{11.4}$$

Se $x = \infty$ as relações (3.6) e (3.7) mostram que T_n verifica ainda a relação de semelhança (11.3) com $\lambda(z) = z - y$. Atendendo agora ao teorema 11.16 vemos que para estabelecer a conclusão pretendida basta mostrar que a sucessão (φ_n) não converge geralmente. Ora dadas duas sucessões $(z_n), (w_n)$ em $\mathbb{C}_\infty$ tais que $\underline{\lim}\ d(z_n, w_n) > 0$, não pode ter-se $\lim \varphi_n(z_n) = \lim \varphi_n(w_n)$ pois daqui resultaria

$$\lim d(\varphi_n(z_n), \varphi_n(w_n)) = 0$$

o que implica $\lim d(z_n, w_n) = 0$. Do mesmo modo, se T for a transformação identidade as condições $\lim T_n(z_n) = \lim T_n(w_n)$ e $\lim d(z_n, w_n) = 0$ são equivalentes.

Suponha-se finalmente que a transformação T é loxodrómica e que x e y são respectivamente os seus pontos fixos atractor e repulsor. Sendo R a razão de T e $\varphi_n(z) = R^n z$, se $x, y \in \mathbb{C}$ o lema 3.5 mostra que a relação de semelhança (11.3) é ainda válida com a transformação λ definida em (11.4). Como $\lim \varphi_n(z) = 0$ se $z \in \mathbb{C}$ e $\lim \varphi_n(\infty) = \infty$, a sucessão (φ_n) converge geralmente para 0 com a sucessão constante ∞ por excepcional. De acordo com o teorema 11.16 conclui-se agora que (T_n) converge geralmente para $x = \lambda^{-1}(0)$ com a sucessão constante $y = \lambda^{-1}(\infty)$ por excepcional. Finalmente, se um dos pontos fixos é infinito e T é dada por (11.1), sendo u o ponto fixo finito e φ_n definida por $\varphi_n(z) = (a/d)^n z$, de (3.6) e (3.7) resulta que a relação de semelhança (11.3) é válida com $\lambda(z) = z - u$. Se $|a| < |d|$ a sucessão φ_n converge geralmente para 0 com a sucessão constante ∞ por excepcional e isto mostra que (T_n) converge geralmente para $u = \lambda^{-1}(0)$ com a sucessão constante $\infty = \lambda^{-1}(\infty)$ por excepcional. Se $|a| > |d|$ verifica-se do mesmo modo que (T_n) converge geralmente para ∞ com a sucessão constante u por excepcional. Como no caso finito conclui-se então que (T_n) converge geralmente para u se $|a| < |d|$ e para ∞ se $|a| > |d|$, e o enunciado resulta de o ponto fixo atractor x ser u quando $|a| < |d|$ e ∞ quando $|a| > |d|$.

■

Nota 11.21 - Se T é parabólica com ponto fixo γ e T_n é a sua iterada de ordem n, como T^{-1} é ainda uma transformação parabólica com ponto fixo γ o teorema anterior mostra que $\left(T_n^{-1}\right)$ também converge geralmente para γ. Do teorema 11.13 resulta então que (T_n) tem a sucessão constante γ por excepcional e verifica-se assim que existem sucessões (T_n) de transformações de Möbius com limite geral γ e com uma sucessão excepcional (e_n) tal que $\lim T_n(e_n) = \gamma$.

Corolário 1 - *Duas transformações de Möbius semelhantes são simultaneamente loxodrómicas, parabólicas ou elípticas.*

Demonstração. Supondo que as transformações de Möbius S, T e λ verificam a relação $S = \lambda^{-1} \circ T \circ \lambda$, se u é ponto fixo de T então

$$\lambda(S(u)) = T(\lambda(u)) = \lambda(u)$$

pelo que $\lambda(u)$ é ponto fixo de S. Verifica-se assim que T e S têm o mesmo número de pontos fixos e daqui resulta que se T é parabólica o mesmo sucede com S. Se T for loxodrómica o teorema anterior mostra que a sucessão dos seus iterados é geralmente convergente. Então este teorema permite ainda concluir que S é também loxodrómica pois do exemplo 11.14 e do teorema 11.16 resulta que a sucessão dos iterados de S é geralmente convergente.

■

Corolário 2 - *Seja T uma transformação loxodrómica com pontos fixos atractor e repulsor respectivamente x e y, λ uma transformação de Mobius e $S = \lambda^{-1} \circ T \circ \lambda$. Então $\lambda^{-1}(x)$ e $\lambda^{-1}(y)$ são respectivamente os pontos fixos atractor e repulsor de S.*

Demonstração. Sejam u e v respectivamente os pontos fixos atractor e repulsor de S. Com as notações do teorema anterior segue-se que (S_n) converge geralmente para u com a sucessão constante v como excepcional. Como $S_n = \lambda^{-1} \circ T_n \circ \lambda$ e (T_n) converge geralmente para x com a sucessão constante y como excepcional o enunciado resulta agora directamente do teorema 11.16.

■

O teorema anterior permite interpretar em termos do conceito de convergência geral os resultados obtidos na secção 3 sobre a convergência das fracções contínuas periódicas:

Corolário 3 - *Dada uma fracção contínua não singular e periódica com período de comprimento m, sejam S_n as respectivas funções aproximantes. Então*

1 - Se a fracção contínua for parabólica com ponto fixo atractor x ela converge geralmente com limite x, e para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ tem-se

$$\lim S_n(z) = x.$$

2 - Se S_m for a transformação identidade ou a fracção contínua for elíptica ela é geralmente divergente.

3- Se a fracção contínua for loxodrómica com ponto fixo atractor x e ponto fixo repulsor y ela converge geralmente com limite x e tem-se

$$\lim S_n(z) = x \text{ se } S_k(z) \neq y \text{ para todo o } k \in \{1, ..., m\}.$$

Demonstração. Como a fracção contínua tem período de comprimento m ela é parabólica, elíptica ou loxodrómica consoante a classificação da correspondente

transformação de Möbius S_m. Se S_m for parabólica com ponto fixo x o teorema anterior mostra que para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ é $\lim_{n\to+\infty} S_{mn}(z) = x$. Dados $k \in \{1, \cdots, m\}$ e $z \in \mathbb{C}_\infty$ é então também

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(z) = \lim_{n\to+\infty} S_{mn}\left(S_k\left(z\right)\right) = x$$

pelo que $\lim S_n(z) = x$.

Se S_m for elíptica ou a transformação identidade, o teorema anterior mostra que (S_{mn}) não converge geralmente e do teorema 11.11 conclui-se que o mesmo sucede com (S_n).

Se S_m for loxodrómica com ponto fixo atractor x e ponto fixo repulsor y, o teorema anterior mostra que (S_{mn}) converge geralmente para x com a sucessão constante y como excepcional. Dados $z \in \mathbb{C}_\infty$ e $k \in \{1, ..., m\}$ é então

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(z) = \lim_{n\to+\infty} S_{mn}\left(S_k\left(z\right)\right) = x \text{ se } S_k\left(z\right) \neq y$$

pelo que

$$\lim S_n(z) = x \text{ se } S_k\left(z\right) \neq y \text{ para todo o } k \in \{1, ..., m\},$$

e conclui-se que (S_n) converge geralmente para x.

■

Nota 11.22 - Se a fracção contínua for loxodrómica, tomando $z = 0$ no corolário anterior obtém-se a condição para a convergência em $\mathbb{C}_\infty$ referida no teorema 3.13, mas agora apenas como condição suficiente. Como para cada $k \in \{1, ..., m\}$ as condições $S_k\left(z\right) \neq y$ e $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \left\{S_k^{-1}\left(y\right)\right\}$ são equivalentes, do teorema anterior deduz-se ainda que uma fracção contínua deste tipo tem por sucessão excepcional a sucessão (e_n) definida por

$$e_n = S_k^{-1}\left(y\right) \text{ se } n \equiv k \pmod m.$$

Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ com período de comprimento m, define-se a sua *fracção contínua dual* por

$$b_m + \frac{a_m}{b_{m-1}} + \frac{a_{m-1}}{b_{m-2}} + \cdots + \frac{a_2}{b_1} + \frac{a_1}{b_m} + \frac{a_m}{b_{m-1}} + \cdots$$

Mais precisamente esta é a fracção contínua da forma

$$b_m + K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^* \tag{11.5}$$

em que $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$ tem período de comprimento m e é definida por

$$a_k^* = a_{m-k+1} \text{ se } 1 \leq k \leq m, \tag{11.6}$$

e

$$b_k^* = b_{m-k} \text{ se } 1 \leq k \leq m-1 \text{ com } b_m^* = b_m. \tag{11.7}$$

O conceito de convergência geral permite exprimir de um modo simples a relação entre a natureza e os valores destas duas fracções contínuas. O teorema seguinte é por vezes referido como "teorema de Galois" por Galois ter estabelecido a relação entre o valor de uma fracção contínua periódica simples e o da sua dual.

Teorema 11.23 - *Uma fracção contínua não singular periódica $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e a sua fracção contínua dual são ambas geralmente convergentes ou geralmente divergentes. Em caso de convergência, se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ for parabólica com limite geral x então a sua dual tem limite geral $-x$. Se $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ for loxodrómica com pontos fixos x e y e limite geral x então a sua dual tem limite geral $-y$.*

Demonstração. Dada uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ com período de comprimento m ponha-se por definição $b_0 = b_m$ e sejam λ_k e s_k as funções definidas por

$$\lambda_k(z) = z - b_{m-k} \text{ se } 0 \leq k \leq m \quad \text{e} \quad s_k(z) = \frac{a_k}{b_k + z} \text{ se } 1 \leq k \leq m.$$

Como para cada $k \in \{1, ..., m\}$ é

$$s_k^{-1}(z) = \frac{a_k}{z} - b_k,$$

temos

$$s_{m-k+1}^{-1}(\lambda_k(z)) = \frac{a_{m-k+1}}{-b_{m-k} + z} - b_{m-k+1},$$

e pondo

$$t_k = \lambda_{k-1}^{-1} \circ s_{m-k+1}^{-1} \circ \lambda_k \text{ se } 1 \leq k \leq m$$

é então

$$t_k(z) = \frac{a_{m-k+1}}{-b_{m-k} + z} \text{ se } 1 \leq k \leq m.$$

Vemos assim que a transformação $T_m = t_1 \circ \cdots \circ t_m$ é a função aproximante de ordem m da fracção contínua

$$\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^*}{-b_n^*},$$

em que os a_n^* e b_n^* são definidos por (11.6) e (11.7). Aplicando o teorema 1.6 com $r_n = -1$ para todo o $n \geq 0$, conclui-se que $-T_m$ é também a função aproximante de ordem m de $K_{n=1}^{+\infty} a_n^*/b_n^*$, e como esta fracção contínua tem período de comprimento m o corolário 3 do teorema 11.20 mostra que a fracção contínua dual (11.5) converge geralmente sse T_m for parabólica ou loxodrómica.

Sendo agora S_m a função aproximante de ordem m da fracção contínua inicial, as transformações T_m e S_m^{-1} são semelhantes, pois das relações

$$s_{m-k+1}^{-1} = \lambda_{k-1} \circ t_k \circ \lambda_k^{-1} \text{ se } 1 \leq k \leq m$$

resulta

$$S_m^{-1} = s_m^{-1} \circ \cdots \circ s_1^{-1} = \lambda_0 \circ T_m \circ \lambda_m^{-1} = \lambda_0 \circ T_m \circ \lambda_0^{-1}.$$

Atendendo ao corolário 1 do teorema 11.20 e ao teorema 11.18 vemos então que T_m é parabólica ou loxodrómica sse o mesmo suceder com S_m, e isto equivale por sua vez à convergência geral de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$.

Quanto à segunda parte do enunciado começamos por observar que relação $S_m^{-1} = \lambda_0 \circ T_m \circ \lambda_0^{-1}$ se pode traduzir por

$$S_m^{-1}(z) = T_m\left(z + b_m\right) - b_m = T_m\left(z + b_0\right) - b_0.$$

Sendo S_n^* os aproximantes da fracção contínua dual, como $S_m^*(z) = b_0 - T_m(z)$ é então

$$S_m^*(z + b_0) = -S_m^{-1}(z)$$

e dos teoremas 11.18 e 11.20 deduz-se que (S_{mn}^*) converge geralmente para $-x$ ou para $-y$ consoante $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ seja parabólica ou loxodrómica. Supondo que a fracção contínua dual é geralmente convergente o enunciado resulta agora de que o seu limite geral é também o limite geral de (S_{mn}^*).

■

Uma fracção contínua não singular $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ diz-se *periódica no limite com período de comprimento* m se existirem em $\mathbb{C}_\infty$ os limites

$$\lim_{n\to+\infty} a_{mn+k} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_{mn+k} \quad \text{quando } k \in \{1, ..., m\},$$

e m for o menor inteiro que verifica esta condição. Se estes limites forem finitos, pondo

$$\widetilde{a}_j = \lim_{n\to+\infty} a_{mn+j} \quad \text{e } \widetilde{b}_j = \lim_{n\to+\infty} b_{mn+j} \quad \text{se} \quad j \geq 1,$$

a fracção contínua $K_{j=1}^{+\infty} \widetilde{a}_j/\widetilde{b}_j$ é então periódica com período de comprimento m e diz-se que $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ é parabólica, elíptica ou loxodrómica no limite consoante a classificação de $K_{j=1}^{+\infty} \widetilde{a}_j/\widetilde{b}_j$.

Apesar do que ficou estabelecido no corolário 3 do teorema 11.20, existem fracções contínuas parabólicas no limite que não convergem geralmente e fracções contínuas elípticas no limite que são geralmente convergentes (cf. Lorentzen & Waadeland, 2008). Prova-se no entanto que toda a fracção contínua loxodrómica no limite é geralmente convergente, e para demonstrar este resultado vamos estabelecer algumas propriedades adicionais das transformações loxodrómicas.

Teorema 11.24 - *Uma transformação loxodrómica de razão* R *é semelhante à transformação* φ *definida por*

$$\varphi\left(z\right) = Rz.$$

Demonstração. Supondo T definida por (11.1), quando $c \neq 0$ o enunciado ficou provado na demonstração do teorema 11.20. Quando $c = 0$ e $u \in \mathbb{C}$ é

ponto fixo de T, na mesma demonstração provou-se que a função definida por $\lambda(z) = z - u$ estabelece a semelhança de T com $(a/d)\, z$, e atendendo à definição de R isto corresponde ao enunciado quando $|a| < |d|$. Supondo finalmente $|a| > |d|$ e sendo λ a função definida por

$$\lambda(z) = \frac{1}{z - y},$$

como T é dada por

$$T(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$

temos então

$$(\lambda \circ T)(z) = \frac{1}{T(z) - y} = \frac{1}{T(z) - T(y)} = \frac{d}{a(z - y)} = R\lambda(z) = (\varphi \circ \lambda)(z)$$

pelo que $T = \lambda^{-1} \circ \varphi \circ \lambda$.

■

Corolário - *Duas transformações loxodrómicas são semelhantes sse tiverem a mesma razão.*

Demonstração. Se duas transformações loxodrómicas tiverem razão R elas são semelhantes pois são ambas semelhantes à transformação definida por Rz. Recíprocamente, se duas transformações loxodrómicas com razões R e R^* são semelhantes o mesmo sucede com as transformações definidas por Rz e R^*z. Existe então uma transformação do Möbius λ tal que

$$\lambda(Rz) = R^*\lambda(z)$$

e como 0 e ∞ são respectivamente os pontos fixos atractor e repulsor de Rz e de R^*z, o corolário 2 do teorema 11.20 mostra que $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(\infty) = \infty$. É então $\lambda(z) = \alpha z$ com $\alpha \neq 0$ o que implica $R = R^*$.

■

Nota 11.25 - Na demonstração do teorema 11.20 provou-se que o teorema anterior permanece válido quando as transformações são elípticas. Também o corolário anterior se mantém válido para estas transformações, pois se Rz e R^*z são transformações elípticas semelhantes existe ainda uma transformação de Möbius λ tal que $\lambda(Rz) = R^*\lambda(z)$. Tem-se então

$$\lambda(0) = R^*\lambda(0) \text{ e } \lambda(\infty) = R^*\lambda(\infty)$$

pelo que só pode ser $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(\infty) = \infty$ ou $\lambda(0) = \infty$ e $\lambda(\infty) = 0$. Neste último caso λ tem a forma $\lambda(z) = \alpha/z$ e obtém-se $R^* = 1/R$ ou seja $R^* = \overline{R}$. Como $\mathrm{Im}(R) \geq 0$, $\mathrm{Im}(R^*) \geq 0$ e $R \neq 1$ conclui-se $R^* = R = -1$.

Teorema 11.26 - *Uma transformação de Möbius da forma* (11.1) *é loxodrómica sse*

$$a+d\neq 0 \quad e \quad \frac{(a-d)^2+4bc}{(a+d)^2}\in \mathbb{C}\setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Demonstração. Supondo $c\neq 0$ sejam

$$\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$$

os pontos fixos de T. Se $a+d=0$ estes pontos são dados por

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2-bc}}{c} \quad \text{e} \quad z_2=\frac{a-\sqrt{a^2-bc}}{c},$$

donde resulta

$$|cz_1+d|=|cz_2+d|=\left|\sqrt{a^2-bc}\right|$$

pelo que T não é loxodrómica. Seja agora $a+d\neq 0$ e ponha-se

$$D=\frac{(a-d)^2+4bc}{(a+d)^2}. \tag{11.8}$$

Os pontos fixos de T são então dados por

$$z_1=\frac{a-d+(a+d)\sqrt{D}}{2c} \quad \text{e} \quad z_2=\frac{a-d-(a+d)\sqrt{D}}{2c} \tag{11.9}$$

pelo que

$$|cz_1+d|=\frac{1}{2}|a+d|\left|1+\sqrt{D}\right| \quad \text{e} \quad |cz_2+d|=\frac{1}{2}|a+d|\left|1-\sqrt{D}\right|, \tag{11.10}$$

e a condição $|cz_1+d|\neq|cz_2+d|$ equivale $\operatorname{Re}\left(\sqrt{D}\right)\neq 0$, o que por sua vez equivale a $D\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$.

Supondo agora $c=0$, a transformação T é loxodrómica sse $|a|\neq|d|$ e isto implica $a+d\neq 0$. Temos então

$$D=\left(\frac{a-d}{a+d}\right)^2 \tag{11.11}$$

e como

$$\frac{a-d}{a+d}=\frac{|a|^2-|d|^2+a\overline{d}-\overline{a}d}{|a+d|^2},$$

é

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a-d}{a+d}\right)=\frac{|a|^2-|d|^2}{|a+d|^2}. \tag{11.12}$$

Então a condição $|a| \neq |d|$ é agora equivalente a

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a-d}{a+d}\right) \neq 0,$$

o que por sua vez equivale a

$$\left(\frac{a-d}{a+d}\right)^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- .$$

■

Corolário - *Dada uma sucessão (T_n) de transformações de Möbius, se $\lim T_n$ for uma transformação loxodrómica existe uma ordem a partir da qual todas as transformações T_n são loxodrómicas.*

Demonstração. Sendo

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

e

$$\lim T_n(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

como as sucessões $(a_n), (b_n), (c_n)$ e (d_n) convergem respectivamente para a, b, c e d, o enunciado é uma consequência directa do teorema anterior.

■

O teorema seguinte clarifica as definições adoptadas para a razão e para os os pontos fixos atractor e repulsor quando ∞ é ponto fixo de uma transformação loxodrómica.

Teorema 11.27 - *Para o conjunto das transformações loxodrómicas da forma* (11.1) *com $c \neq 0$, sejam $R(c)$ as suas razões, e $x(c)$ e $y(c)$ os correspondentes pontos fixos respectivamente atractor e repulsor. É então*

$$\lim_{c\to 0} R(c) = \begin{cases} a/d & \text{se } |a/d| < 1 \\ d/a & \text{se } |a/d| > 1 \end{cases},$$

$$\lim_{c\to 0} x(c) = \begin{cases} b/(d-a) & \text{se } |a/d| < 1 \\ \infty & \text{se } |a/d| > 1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{c\to 0} y(c) = \begin{cases} \infty & \text{se } |a/d| < 1 \\ b/(d-a) & \text{se } |a/d| > 1 \end{cases}.$$

Demonstração. Com as notações da demonstração anterior a condição $D \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ exige $\mathrm{Re}\left(\sqrt{D}\right) \neq 0$, e por definição de valor principal da raiz quadrada é então $\mathrm{Re}\left(\sqrt{D}\right) > 0$. Temos assim

$$\left|1 - \sqrt{D}\right| < \left|1 + \sqrt{D}\right|$$

e as relações (11.9) e (11.10) mostram que z_1 e z_2 são respectivamente o ponto fixo atractor e o ponto fixo repulsor de T. É então

$$x(c) = \frac{a-d+(a+d)\sqrt{D(c)}}{2c},\ y(c) = \frac{a-d-(a+d)\sqrt{D(c)}}{2c} \tag{11.13}$$

e também

$$R(c) = \frac{1-\sqrt{D(c)}}{1+\sqrt{D(c)}}. \tag{11.14}$$

Suponha-se agora $c = 0$. Como $D(c)$ é então dado por (11.11) tem-se

$$\sqrt{D(0)} = \frac{a-d}{a+d} \text{ se } \operatorname{Re}\left(\frac{a-d}{a+d}\right) > 0 \text{ e } \sqrt{D(0)} = -\frac{a-d}{a+d} \text{ se } \operatorname{Re}\left(\frac{a-d}{a+d}\right) < 0,$$

e atendendo a (11.12) resulta

$$\sqrt{D(0)} = \frac{a-d}{a+d} \text{ se } |a| > |d| \text{ e } \sqrt{D(0)} = -\frac{a-d}{a+d} \text{ se } |a| < |d|.$$

Dado que a função definida por $\sqrt{D}$ é contínua quando $D \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, de (11.14) deduz-se

$$\lim_{c\to 0} R(c) = \frac{a}{d} \text{ se } |a| < |d| \text{ e } \lim_{c\to 0} R(c) = \frac{d}{a} \text{ se } |a| > |d|.$$

Temos ainda

$$\lim_{c\to 0}\left(a-d-(a+d)\sqrt{D(c)}\right) = 2(a-d) \text{ se } |a| < |d|$$

e

$$\lim_{c\to 0}\left(a-d+(a+d)\sqrt{D(c)}\right) = 2(a-d) \text{ se } |a| > |d|.$$

Supondo $|a| < |d|$, de (11.13) resulta então

$$\lim_{c\to 0} y(c) = \frac{2(a-d)}{0} = \infty$$

e

$$\lim_{c\to 0} x(c) = \lim_{c\to 0} \frac{-2bc}{c\left(a-d-(a+d)\sqrt{D}\right)} = \frac{b}{d-a}.$$

Se $|a| > |d|$ obtém-se analogamente

$$\lim_{c\to 0} x(c) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{c\to 0} y(c) = \lim_{c\to 0} \frac{-2bc}{c\left(a-d+(a+d)\sqrt{D}\right)} = \frac{b}{d-a}.$$

■

Corolário - *Para o conjunto de transformações loxodrómicas da forma*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

as correspondentes razões e pontos fixos atractores e repulsores são funções contínuas dos parâmetros a, b, c, d.

Demonstração - Sendo D definida por (11.8), a condição $D \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ implica que $\sqrt{D}$ seja uma função contínua de D e portanto uma função contínua dos parâmetros a, b, c, d quando as transformações são loxodrómicas. A relação (11.14) e o teorema anterior mostram então directamente que a razão R das transformações é uma função contínua dos parâmetros a, b, c, d. Por outro lado as funções que definem x e y em (11.13) quando $c \neq 0$ são também funções contínuas destes parâmetros e o teorema anterior mostra que elas são prolongáveis por continuidade a $(a, b, 0, d)$.

■

Vamos agora provar um lema que conduz directamente à demonstração da convergência geral das fracções contínuas loxodrómicas no limite.

Lema 11.28 - *Seja (T_n) uma sucessão de transformações loxodrómicas com razões R_n e pontos fixos atractores x_n e repulsores y_n. Suponha-se que (R_n), (x_n) e (y_n) têm limites respectivamente R, x e y tais que $|R| < 1$ e $x \neq y$. Sendo*

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \text{ para cada } n \geq 1,$$

suponha-se ainda que as sucessões $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ são convergentes. Então a sucessão (S_n) definida para $n \geq 1$ por $S_n = T_1 \circ \cdots T_n$ é geralmente convergente e tem a sucessão constante y como excepcional.

Demonstração. Consideremos em primeiro lugar o caso de x e y serem ambos finitos. Sejam a, b, c, d os limites respectivamente de $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$, e T a função definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Para cada $n \geq 1$ tem-se $T_n(x_n) = x_n$ e do teorema 11.18 resulta

$$T_n'(x_n) = R_n$$

pelo que tomando limites se obtém $T(x) = x$ e $T'(x) = R$. Como $T(x) \in \mathbb{C}$ segue-se que $|cx + d| > 0$ e existe então $r > 0$ tal que

$$\min\left\{|cz + d| : z \in \overline{B}(x, r)\right\} > 0.$$

Dado que $c_n z + d_n$ converge uniformemente para $cz + d$ em $\overline{B}(x, r)$ existe também uma ordem m tal que

$$\min\left\{|c_n z + d_n| : n \geq m \text{ e } z \in \overline{B}(x, r)\right\} > 0.$$

Como

$$T_n''(z) = 2c_n \frac{b_n c_n - a_n d_n}{(c_n z + d_n)^3}$$

existe então uma constante M tal que

$$|T_n''(z)| \leq M \quad \text{se } n \geq m \text{ e } z \in \overline{B}(x,r)$$

pelo que

$$|T_n'(z) - T_n'(x)| \leq M|z-x| \quad \text{se } n \geq m \text{ e } z \in \overline{B}(x,r).$$

Sejam agora $\rho \in]|R|, 1[$ e $\delta = \rho - |R|$. Escolhendo $\theta \in]0, r[$ tal que $M\theta < \delta/2$ segue-se que para todo o $n \geq m$ é

$$|T_n'(z) - T_n'(x)| < \delta/2 \text{ se } z \in \overline{B}(x,\theta)$$

e pode ainda escolher-se um índice $k \geq m$ de modo a que se verifiquem as condições

$$|T_n'(x) - T'(x)| < \frac{\delta}{2} \text{ e } |T_n(x) - T(x)| < \theta(1-\rho) \quad \text{se } n > k. \tag{11.15}$$

Se $z \in \overline{B}(x,\theta)$ e $n > k$ temos então

$$|T_n'(z) - R| = |T_n'(z) - T'(x)| \leq |T_n'(z) - T_n'(x)| + |T_n'(x) - T'(x)| < \delta$$

pelo que

$$|T_n'(z)| < \rho \quad \text{se } n > k \text{ e } z \in B(x,\theta). \tag{11.16}$$

Usando a segunda das condições (11.15) e dado $z \in \overline{B}(x,\theta)$, para cada $n > k$ é assim

$$|T_n(z) - x| \leq |T_n(z) - T_n(x)| + |T_n(x) - T(x)| < \rho|z-x| + \theta(1-\rho) = \theta$$

pelo que

$$T_n\left[\overline{B}(x,\theta)\right] \subseteq \overline{B}(x,\theta) \quad \text{se } n > k. \tag{11.17}$$

Sendo agora

$$U_n = T_{k+1} \circ \cdots \circ T_{k+n} \text{ se } n \geq 1$$

pode ver-se que

$$|U_n'(z)| < \rho^n \text{ se } z \in \overline{B}(x,\theta). \tag{11.18}$$

Dado $z \in \overline{B}(x,\theta)$, de (11.16) resulta efectivamente

$$|U_1'(z)| = \left|T_{k+1}'(z)\right| < \rho$$

e se para algum $n \geq 1$ a relação (11.18) for verdadeira, atendendo a (11.17) temos

$$\left|U_{n+1}'(z)\right| = \left|(U_n(T_{k+n+1}(z)))'\right| = \left|U_n'(T_{k+n+1}(z))\right| \left|T_{k+n+1}'(z)\right| < \rho^{n+1}.$$

Dados $z, w \in \overline{B}(x,\theta)$ é então

$$|U_n(w) - U_n(z)| \leq \rho^n|z-w| < 2\rho^n\theta$$

pelo que

$$\lim \operatorname{diam} U_n\left[\overline{B}(x,\theta)\right] = 0.$$

Como

$$U_{n+1}\left[\overline{B}(x,\theta)\right] = U_n\left[T_{k+n+1}\left[\overline{B}(x,\theta)\right]\right] \subseteq U_n\left[\overline{B}(x,\theta)\right],$$

isto implica que existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\lim U_n(z) = \gamma$ sempre que $z \in \overline{B}(x,\theta)$. Da relação $S_{n+k}(z) = S_k(U_n(z))$ resulta agora

$$\lim S_n(z) = S_k(\gamma) \quad \text{se } z \in \overline{B}(x,\theta)$$

e conclui-se que (S_n) converge geralmente para $S_k(\gamma)$.

Atendendo ao teorema 11.13, para provar que a sucessão constante y é excepcional para (S_n) basta mostrar que $\left(S_n^{-1}\right)$ converge geralmente para y. Notando que cada transformação T_n^{-1} tem ainda razão R_n e ponto fixo atractor y_n, como anteriormente prova-se que existem $\varepsilon > 0$ e uma ordem l tais que

$$\left|\left(T_n^{-1}\right)'(z)\right| < \rho \quad \text{se } n > l \text{ e } z \in \overline{B}(y,\varepsilon),$$

e

$$T_n^{-1}\left[\overline{B}(y,\varepsilon)\right] \subseteq \overline{B}(y,\varepsilon) \quad \text{se} \quad n > l.$$

Dado que

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(y) = T(y) = y$$

pode ainda supor-se que l foi escolhido de modo a que

$$T_n(y) \in \overline{B}(y,\varepsilon) \quad \text{se} \quad n > l,$$

e isto implica $y \in T_n^{-1}\left[\overline{B}(y,\varepsilon)\right]$ para todo o $n > l$. Pondo

$$V_n = T_{l+n}^{-1} \circ \cdots \circ T_{l+1}^{-1}$$

tem-se agora

$$|V_n'(z)| < \rho^n \quad \text{se } z \in B(y,\varepsilon)$$

pelo que

$$\lim \operatorname{diam} V_n\left[\overline{B}(y,\varepsilon)\right] = 0,$$

e como o ponto y pertence a qualquer dos conjuntos $V_n[B(y,\varepsilon)]$ segue-se que

$$\lim_{n\to+\infty} V_n(z) = y \quad \text{se } z \in B(y,\varepsilon).$$

Por ser $S_{n+l}^{-1} = V_n \circ S_l^{-1}$ temos então

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n+l}^{-1}(z) = y \quad \text{se } z \in S_l\left[\overline{B}(y,\varepsilon)\right]$$

e isto mostra que S_n^{-1} converge geralmente para y.

Finalmente, para tratar os casos em que $x = \infty$ ou $y = \infty$ tomamos uma transformação de Möbius λ tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda(1) = y$, e consideramos as

transformações semelhantes às S_n definidas por $S_n^* = \lambda^{-1} \circ S_n \circ \lambda$. Então o corolário do teorema 11.24 mostra que R_n é também a razão de S_n^*, e do corolário 2 do teorema 11.20 resulta que os correspondentes pontos fixos atractor e repulsor são respectivamente $\lambda^{-1}(x) = 0$ e $\lambda^{-1}(y) = 1$. Dos resultados já estabelecidos deduz-se então que (S_n^*) converge geralmente com a sucessão constante 1 como excepcional, e como $S_n = \lambda \circ S_n^* \circ \lambda^{-1}$ o teorema 11.15 permite concluir que (S_n) também converge geralmente com a sucessão constante $\lambda(1) = y$ por excepcional.

■

Podemos agora provar o teorema fundamental sobre a convergência das fracções contínuas loxodrómicas no limite.

Teorema 11.29 (Lorentzen, 1987) - *Uma fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ loxodrómica no limite é geralmente convergente. Sendo m o comprimento do período da fracção contínua limite $K_{n=1}^{+\infty} \widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$, $\widetilde{S}_n$ as respectivas funções aproximantes, y o ponto fixo repulsor de $\widetilde{S}_m$, γ o limite geral de $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ e S_n as respectivas funções aproximantes, dado $z \in \mathbb{C}_\infty$ tem-se*

$$\lim S_n(z) = \gamma \quad \textit{se } \widetilde{S}_k(z) \neq y \quad \textit{para todo o } k \in \{1, \cdots, m\}.$$

Demonstração. Sejam R, x e y respectivamente a razão de $K_{n=1}^{+\infty} \widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ e os seus pontos fixos atractor e repulsor. Representando ainda por $\widetilde{s}_n$ as funções relativas a esta fracção contínua definidas por (1.1), dados $k \in \{1, \cdots, m\}$ e $n \geq 0$ temos então

$$\widetilde{s}_{mn+k+1} \circ \cdots \circ \widetilde{s}_{mn+m+k} = \widetilde{s}_{k+1} \circ \cdots \circ \widetilde{s}_{m+k} = \widetilde{S}_{m+k}^{(k)}.$$

Como

$$\widetilde{S}_{m+k}^{(k)} = \widetilde{S}_k^{-1} \circ \widetilde{S}_{m+k} = \widetilde{S}_k^{-1} \circ \widetilde{S}_m \circ \widetilde{S}_k,$$

as transformação $\widetilde{S}_{m+k}^{(k)}$ e $\widetilde{S}_m$ são semelhantes pelo que $\widetilde{S}_{m+k}^{(k)}$ é também uma transformação loxodrómica com razão R e pontos fixos atractor e repulsor respectivamente $\widetilde{S}_k^{-1}(x)$ e $\widetilde{S}_k^{-1}(y)$.

Representando por s_n as funções relativas a $K_{n=1}^{+\infty} a_n/b_n$ definidas por (1.1), para cada $k \in \{1, \cdots, m\}$ e $n \geq 0$ sejam agora $x_n^{(k)}$ e $y_n^{(k)}$ respectivamente os pontos fixos atractor e repulsor da transformação

$$T_n^{(k)} = s_{mn+k+1} \circ \cdots \circ s_{mn+k+m}.$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} T_n^{(k)} = \widetilde{S}_{m+k}^{(k)},$$

o corolário do teorema 11.26 mostra que a partir de uma certa ordem as transformações $T_n^{(k)}$ são também loxodrómicas e podemos sem perda de generalidade supor que isso sucede com todas as transformações $T_n^{(k)}$. Pondo agora

$$x^{(k)} = \lim_{n \to +\infty} x_n^{(k)} \text{ e } y^{(k)} = \lim_{n \to +\infty} y_n^{(k)}$$

e atendendo ao corolário do teorema 11.27 segue-se que $x^{(k)}$ e $y^{(k)}$ são respectivamente os pontos fixos atractor e repulsor de $\widetilde{S}_{m+k}^{(k)}$ pelo que

$$x^{(k)} = \widetilde{S}_k^{-1}(x) \text{ e } y^{(k)} = \widetilde{S}_k^{-1}(y) \text{ se } k \in \{1, \cdots, m\}.$$

Fixado $k \in \{1, ..., m\}$ e notando que

$$S_{mn+k}^{(k)} = T_0^{(k)} \circ \cdots \circ T_{n-1}^{(k)},$$

o lema anterior aplicado às transformações $T_{n-1}^{(k)}$ no lugar de T_n mostra que $S_{mn+k}^{(k)}$ converge geralmente para um certo valor r_k e que a sucessão constante $y^{(k)}$ é excepcional. Tomando agora $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \left\{y^{(k)}\right\}$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(z) = \lim_{n\to+\infty} S_{mn}^{(0)}(z_n) \tag{11.19}$$

com

$$z_n = \left(s_{mn+1} \circ \cdots \circ s_{mn+k}\right)(z).$$

Como

$$\lim z_n = \left(\widetilde{s}_{mn+1} \circ \cdots \circ \widetilde{s}_{mn+k}\right)(z) = \widetilde{S}_k(z)$$

e $z \neq y^{(k)} = \widetilde{S}_k^{-1}(y)$, é então

$$\widetilde{S}_k(z) \neq y = \widetilde{S}_m^{-1}(y) = y^{(m)}$$

pelo que $\lim z_n \neq y^{(m)}$. Temos assim

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn}^{(m)}(z_n) = r_m$$

e dado que $S_{mn}^{(0)} = S_m \circ S_{mn}^{(m)}$, de (11.19) resulta

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(z) = S_m(r_m).$$

Pondo $\gamma = S_m(r_m)$, para todo o $k \in \{1, \cdots, m\}$ é pois

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn+k}(z) = \gamma$$

se

$$z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \left\{\widetilde{S}_k^{-1}(y) : k \in \{1, \cdots, m\}\right\},$$

e conclui-se que (S_n) converge geralmente para γ.

■

Tomando $z = 0$ no teorema anterior obtemos a seguinte condição suficiente para a convergência em $\mathbb{C}_\infty$ das fracções contínuas loxodrómicas no limite:

Corolário - *Uma fracção contínua loxodrómica no limite converge em $\mathbb{C}_\infty$ se a fracção contínua limite convergir em $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Se a fracção contínua limite $K_{n=1}^{+\infty}\widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ convergir em $\mathbb{C}_\infty$ e y for o seu ponto fixo repulsor, o teorema 3.13 mostra que as suas funções aproximantes $\widetilde{S}_n$ verificam necessariamente a condição $\widetilde{S}_k(0) \neq y$ para todo o $k \in \{1, \cdots, m\}$. De acordo com o teorema anterior isto implica a convergência em $\mathbb{C}_\infty$ da fracção contínua $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ pois implica que a correspondente sucessão $S_n(0)$ seja convergente em $\mathbb{C}_\infty$.

■

Exemplo 11.30 - *Toda a fracção contínua loxodrómica no limite cuja fracção contínua limite tem período de comprimento* 1 *é convergente em* $\mathbb{C}_\infty$.

Efectivamente uma fracção contínua não singular da forma $K_{n=1}^{+\infty}a/b$ é loxodrómica sse $b \neq 0$ e $a/b^2 \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 1/4]$, e o corolário do teorema 1.15 mostra que estas condições implicam a sua convergência.

Nota 11.31 - O resultado anterior tinha já sido obtido no corolário 4 do teorema 8.5 como consequência do teorema uniforme da parábola.

Exemplo 11.32 - *Seja* $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ *loxodrómica no limite e suponha-se que a fracção contínua limite* $K_{n=1}^{+\infty}\widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$ *tem período de comprimento* 2. *Então* $K_{n=1}^{+\infty}a_n/b_n$ *converge em* $\mathbb{C}_\infty$ *se* $\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 \neq 0$.

Efectivamente no exemplo 3.9 mostrou-se que a condição $\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2 \neq 0$ implica a convergência de $K_{n=1}^{+\infty}\widetilde{a}_n/\widetilde{b}_n$.

APÊNDICE - A métrica cordal

Para tornar $\mathbb{C}_\infty$ num espaço métrico vamos definir em $\mathbb{C}_\infty$ um conceito de distância segundo a qual o ponto ∞ está a uma distância finita de todos os ponto de $\mathbb{C}$. Este novo conceito de distância obtém-se de um modo natural estabelecendo uma correspondência bijectiva entre os pontos de $\mathbb{C}_\infty$ e os pontos da superfície de um esfera conhecida por *esfera de Riemann*. Mais precisamente, dado o ponto $O = (0, 0, 1/2)$ de $\mathbb{R}^3$ e sendo S a superfície da esfera de centro O e raio $1/2$, a condição para um ponto $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ pertencer a S traduz-se por

$$u^2 + v^2 + w^2 = w. \tag{1}$$

Identificando cada número complexo $z = x + iy$ com o ponto $C = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, os pontos da recta que contém C e o "polo norte" da esfera $N = (0, 0, 1)$ são dados por

$$(x, y, 0) + t\,(N - C) = ((1 - t)\,x, (1 - t)\,y, t) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a (1) esta recta intersecta a superfície S nos pontos correspondentes aos valores de t que verificam a condição

$$(1 - t)^2\,|z|^2 + t^2 = t$$

e que são

$$t_1 = 1 \text{ e } t_2 = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

O polo norte da esfera corresponde a t_1 e o ponto correspondente a t_2, que é

$$\varphi(z) = \left(\frac{x}{1 + |z|^2}, \frac{y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right), \tag{2}$$

diz-se a *projecção estereográfica* de z na superfície da esfera considerada. Esta projecção aplica $\mathbb{C}$ sobre a superfície S privada do ponto N pois dado um ponto $P = (u, v, w) \in S \setminus \{N\}$ a recta definida por P e N intersecta o plano complexo no ponto

$$z = \frac{u}{1 - w} + i\frac{v}{1 - w}$$

o que implica $\varphi(z) = (u, v, w)$, e isto pode ser confirmado analíticamente usando a condição (1).

A função φ é prolongável por continuidade ao ponto $z = \infty$ pondo

$$\varphi(\infty) = (0, 0, 1) = N$$

e obtém-se assim uma função contínua e injectiva que aplica $\mathbb{C}_\infty$ sobre a superfície S. Esta aplicação permite definir em $\mathbb{C}_\infty$ um novo conceito de distância, chamada *distância cordal,* pondo

$$d(z_1, z_2) = |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|.$$

Como $d(z_1, z_2)$ é a distância em $\mathbb{R}^3$ das projecções estereográficas de z_1 e z_2, a desigualdade triangular

$$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$$

é uma consequência directa da definição e o conjunto $\mathbb{C}_\infty$ munido desta distância é efectivamente um espaço métrico.

O teorema seguinte dá uma expressão simples para $d(z_1, z_2)$.

Teorema - *Tem-se*

$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \text{ se } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

e

$$d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \text{ se } z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Suponha-se que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e seja $\varphi(z_j) = (u_j, v_j, w_j)$ para $j \in \{1, 2\}$. Temos então

$$d^2(z_1, z_2) = (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2$$

e como estes pontos estão sobre a superfície S, da relação (1) resulta

$$d^2(z_1, z_2) = w_1 + w_2 - 2(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2). \tag{3}$$

Pondo $q_j = 1 + |z_i|^2$ para $j \in \{1, 2\}$ e atendendo a (2) temos agora

$$2u_1 u_2 = 2\frac{\mathrm{Re}(z_1)}{q_1}\frac{\mathrm{Re}(z_2)}{q_2} = \frac{(z_1 + \overline{z_1})(z_2 + \overline{z_2})}{2q_1 q_2} = \frac{z_1 z_2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1 z_2}}{2q_1 q_2},$$

$$2v_1 v_2 = 2\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{q_1}\frac{\mathrm{Im}(z_2)}{q_2} = -\frac{(z_1 - \overline{z_1})(z_2 - \overline{z_2})}{2q_1 q_2} = -\frac{z_1 z_2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1 z_2}}{2q_1 q_2},$$

e

$$2w_1 w_2 = 2\frac{|z_1|^2 |z_2|^2}{q_1 q_2}.$$

Dado que

$$w_1 + w_2 = \frac{|z_1|^2}{q_1} + \frac{|z_2|^2}{q_2} = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|^2 |z_2|^2}{q_1 q_2},$$

de (3) resulta então

$$d^2\left(z_1,z_2\right)=\frac{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}{q_1q_2}=\frac{\left|z_1-z_2\right|^2}{q_1q_2}$$

como se pretende.

Atendendo à continuidade no ponto ∞ da função φ que define a projecção esterográfica, dado $z\in\mathbb{C}$ temos finalmente

$$d\left(z,\infty\right)=\lim_{w\to\infty}d\left(z,w\right)=\lim_{w\to\infty}\frac{\left|z/w-1\right|}{\sqrt{1+\left|z\right|^2}}\frac{\left|w\right|}{\sqrt{1+\left|w\right|^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left|z\right|^2}}.$$

■

Corolário - *Dada uma sucessão* (z_n) *de pontos de* $\mathbb{C}_\infty$ *e um ponto* $a\in\mathbb{C}_\infty$ *as condições* $\lim z_n=a$ *e* $\lim d(z_n,a)=0$ *são equivalentes.*

Demonstração. Se $a=\infty$ podemos sem perda de generalidade supor $z_n\in\mathbb{C}$ e a equivalência resulta então de ser

$$d\left(z_n,\infty\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left|z_n\right|^2}}.$$

Se $a\in\mathbb{C}$ podemos ainda sem perda de generalidade supor $z_n\in\mathbb{C}$. Temos então

$$d(z_n,a)\leq\left|z_n-a\right|$$

pelo que $\lim z_n=a$ implica $\lim d(z_n,a)=0$. Recíprocamente, se $\lim d(z_n,a)=0$ temos

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left|z_n\right|^2}}=d\left(z_n,\infty\right)\geq d\left(a,\infty\right)-d(z_n,a)$$

e isto mostra que sucessão (z_n) é limitada. Sendo L um majorante de $|z_n|$ é então

$$\left|z_n-a\right|\leq d(z_n,a)\sqrt{1+\left|a\right|^2}\sqrt{1+L^2}$$

e de $\lim d(z_n,a)=0$ resulta $\lim z_n=a$.

■

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

ADLER, A. & COURY, J. E. 1995 - The Theory of Numbers: A Text and a Source Book of Problems. Jones & Bartlett Publ.

COSTA PEREIRA, N. 2023 - Análise Complexa. Textos de Matemática 18, Faculdade de Ciências de Lisboa.

HARDY, G. H. & WRIGHT, E. M. 2008 - An Introduction to the Theory of Numbers, sixth edition. Oxford University Press.

HENRICI, P. 1991. Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 2. Wiley.

HICKERSON, D. R. 1973 - Lenght of period of the simple continued fraction expansion of $\sqrt{d}$. - Pacific J. Math. 46(2): 429-432.

JONES, W. B. & THRON, W. J. 1980 - Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 11. Addison-Wesley.

LORENTZEN, L. 1992 - Bestness of the parabola theorem for continued fractions. - J. Comp. Appl. Math, 40: 297-304.

LORENTZEN, L. & WAADELAND, H. 1992 - Continued Fractions with Applications. Elsevier.

LORENTZEN, L. & WAADELAND, H. 2008 - Continued Fractions. Vol. 1. Atlantis Press.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$ Conjunto dos números complexos

$\mathbb{C}_\infty$ - 1

s_n - 1

S_n Função aproximante - 1

$S_n^{(m)}$ - 4

A_n Numerador canónico - 7

B_n Denominador canónico - 7

$\sqrt{z}$ Valor principal da raiz quadrada do número complexo z

φ Número de ouro - 16

F_n Número de Fibonacci - 16

$\lfloor x \rfloor$ Parte inteira do número real x

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$ Conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{R}^-$ Conjunto dos números reais negativos

$\mathbb{R}_0^+$ Conjunto dos números reais não negativos

$\mathbb{R}_0^-$ Conjunto dos números reais não positivos

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais

$\mathbb{Q}^+$ Conjunto dos números racionais positivos

$\mathbb{Q}^-$ Conjunto dos números racionais negativos

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}^+$ Conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Z}^-$ Conjunto dos números inteiros negativos

$\mathbb{Z}_0^+$ Conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_0^-$ Conjunto dos números inteiros não positivos

$S_n\,[V]$ Transformado do conjunto V pela função S_n

diam X Diâmetro do conjunto X

$\overline{z}$ Conjugado de z

$\mathrm{Im}(z)$ Parte imaginária de z

$\mathrm{Re}(z)$ Parte real de z

$\arg(z)$ Argumento principal de z

$B(z,r)$ Círculo aberto de centro z e raio r

$\overline{B}(z,r)$ Círculo fechado de centro z e raio r

U Círculo unitário fechado $\overline{B}(0,1)$

$C(z,r)$ Circunferência de centro z e raio r

H_α - 93

E_α - 116

V_α - 118

dist(z,X) Distância do ponto z ao conjunto X

dist(X,Y) Distância entre os conjuntos X e Y

$(a)_n$ Símbolo de Pochhammer - 158

Id Transformação identidade de $\mathbb{C}_\infty$

$d\,(z_1,z_2)$ Distância cordal entre dois pontos de $\mathbb{C}_\infty$ - 184, 210

$\underline{\lim} u_n$ Limite mínimo de uma sucessão real

$\overline{\lim} u_n$ Limite máximo de uma sucessão real

ÍNDICE REMISSIVO

Aproximantes de uma fracção contínua, 2
C-fracção, 139
C-fracção regular, 139
Comprimento do período de uma fracção contínua, 26, 49
Convergência de uma fracção contínua, 3
Convergência geral, 186
Convergência uniforme de fracções contínuas, 67
Convergentes de uma fracção contínua, 2
Denominador canónico, 7
Discriminante de uma transformação fraccional linear, 127
Distância cordal, 184, 209
Divergência de uma fracção contínua, 3
Divergência geral, 186
Domínio próprio, 89
Equação de Pell, 45
Esfera de Riemann, 209
Estimativa a posteriori, 95
Estimativa a priori, 95
Fórmula de Brouncker, 12
Fórmula de Van der Monde, 171
Fórmula do determinante, 8
Fracção contínua, 2
Fracção contínua de Stieltjes, 145
Fracção contínua dual, 196
Fracção contínua elíptica, 57
Fracção contínua equivalente, 5
Fracção contínua loxodrómica, 57
Fracção contínua parabólica, 57
Fracção contínua periódica, 26, 49
Fracção contínua periódica no limite, 198
Fracção contínua puramente periódica, 26
Fracção contínua regular, 20
Fracção contínua simples, 20
Fracção contínua singular, 4
Função aproximante, 2
Função de Kummer, 168
Função erro, 174
Função gama incompleta, 173
Função hipergeométrica, 175
Identidade de Cassini, 16
Integrais de Fresnel, 175
Irracional quadrático, 26
Lema de Hillam & Thron, 130

Limite geral, 186
Métrica cordal, 209
Numerador canónico, 7
Número de ouro, 16
Números de Fibonacci, 16
Oscilação de Thiele, 58
Parte ímpar de uma fracção contínua, 83
Parte par de uma fracção contínua, 82
Ponto fixo atractor, 57, 192
Ponto fixo repulsor, 57, 192
Projecção estereográfica, 209
Razão cruzada, 183
Razão de uma transformação de Möbius, 191
Recorrência progressiva, 8
Recorrência regressiva, 8
Região simples de valores, 89
S-fracção, 145
Semelhança de transformações, 190
Série de Stern-Stolz, 71
Série hipergeométrica, 175
Símbolo de Pochhammer, 158
Solução fundamental da equação de Pell, 45
Sucessão absolutamente convergente, 80
Sucessão de variação limitada, 80
Sucessão excepcional, 186
Sucessão localmente limitada, 147
Sucessão uniformemente limitada, 147
Teorema da parábola, 133
Teorema de Beardon & Lorentzen, 63
Teorema de Broman, 74
Teorema de Carathéodory-Landau, 151
Teorema de Euler, 9, 14, 34, 162, 164
Teorema de Fermat-Euler, 48
Teorema de Galois, 29, 197
Teorema de Gauss, 175
Teorema de Henrici & Pfluger, 151
Teorema de Hillam & Thron, 137
Teorema de Hurwitz, 42
Teorema de Jensen, 102
Teorema de Jones & Thron, 124
Teorema de Kummer, 172
Teorema de Lagrange, 26, 45
Teorema de Lambert, 160, 167
Teorema de Lane & Wall, 79
Teorema de Legendre, 32, 41, 47
Teorema de Lorentzen, 185, 206

Teorema de Perron, 85, 123
Teorema de Pringsheim, 59, 62
Teorema de Seidel, 75
Teorema de Sleszynski-Pringsheim, 60
Teorema de Stern-Stolz, 70
Teorema de Stieltjes-Vitali, 149
Teorema de Thron, 119, 133, 145
Teorema de Thron-Lange, 110
Teorema de Van Vleck, 105, 144
Teorema de Vitali, 148
Teorema de Wall, 85, 86
Teorema de Worpitzky, 61
Teorema uniforme da parábola, 123
Transformação de Möbius, 128
Transformação de Möbius elíptica, 191
Transformação de Möbius loxodrómica, 191
Transformação de Möbius parabólica, 191
Transformação fraccional linear, 127
Transformação singular, 128
Valor de uma fracção contínua, 3