ÜBER DIE NICHTASSOZIATIVEN RINGE, DIE HALBEINFACHE MODULN SIND (*)

VON

A. ALMEIDA COSTA (LISBOA)

1) **Bezeichnungen, Zusammenfassung und Literaturverzeichnis.** — Die Bezeichnungen die wir hier einführen sind dieselben wie bei unserer früheren Arbeit [1]. Wir können sie leicht zusammenfassen: $\mathfrak{X} = \{a, b, \cdots, r, s, \cdots, x, y, \cdots\}$ ist ein nichtassoziativer Ring; Ω ist ein Operatorbereich von $\mathfrak{X}$, der im Absolut $\mathfrak{A}$ des Moduls $\mathfrak{X}$ ein Bild Ω_0 hat; $\Omega_r = \mathfrak{E}(\Omega_0)$ ist der von Ω_0 erzeugte Unterring von $\mathfrak{A}$; und, im allgemeinen, $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ ist der von $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ erzeugte Unterring von $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{X}_0^{(r)}$ bzw. $\mathfrak{X}_0^{(l)}$ stellen die Endomorphismen von $\mathfrak{X}$, durch Rechts- bzw. Linksmultiplikationen von $\mathfrak{X}$ mit seinen eigenen Elementen definiert, dar. Wir setzen noch $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_0^{(r)}) = \mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_0^{(l)}) = \mathfrak{X}_l$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_0^{(r)}, \mathfrak{X}_0^{(l)}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l)$. $\mathfrak{Q}$ wird *Multiplikationsring* von $\mathfrak{X}$ genannt, und $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}(1, \Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l)$, wobei 1 der Einsendomorphismus ist, werden wir *Transformationenring* von $\mathfrak{X}$ nennen. Schliesslich, $\mathfrak{W} = \mathfrak{E}(\Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l)$ stellt einen Unterring von $\mathfrak{T}$, der, im allgemeinen, 1 nicht enthät, dar.

Das Kommutator einer Menge $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, in $\mathfrak{A}$, wird mit $\overline{\mathfrak{C}}$ bezeichnet. So hat man $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{X}}_r \cap \overline{\mathfrak{X}}_l$. Wir werden auch sehen, dass $\Omega_r \subseteq \overline{\mathfrak{Q}}$. $\overline{\mathfrak{Q}}$ selbst funktioniert als Operator-

---

(*) Recebido em 20-10-1955.

bereich, was uns erlaubt *Maximaloperatorbereich* von $\mathfrak{X}$ es zu nennen.

In ([2], Abteilung II, n.º 6), wird $\overline{\mathfrak{Q}}$ *Multiplikationszentralisator* von $\mathfrak{X}$ gennant.

Wenn man $\Omega = \{\lambda, \mu, \nu, \omega, \rho, \sigma, \tau, \cdots\}$ setzt, dann werden wir, fast immer, E_λ, E_μ, usw., schreiben, um die Elemente von Ω_0 zu bedeuten; doch, falls keine Verwechselung zu fürchten ist, auch $\lambda, \mu, \cdots$ können gleichsinnig angewandt werden. Wenn $a \in \mathfrak{X}$ ein festes Element ist, stellt $E_a^{(r)}$ den Endomorphismus von $\mathfrak{X}$, durch Rechtsmultiplikation von $\mathfrak{X}$ mit a selbst definiert, dar; und $E_a^{(l)}$ hat eine ähnliche Bedeutung, betrifft aber die Linksmultiplikation.

Einige Betrachtungen über nichtassoziative Algebren, die von Albert [3] stammen, werden wir allgemeiner behandeln, und zwar werden wir dieselben den nichtassoziativen Ringen $\mathfrak{X}$, dessen additive Gruppe ein halbeinfacher Modul ist (d. h. ein Modul von seinen Ω_r–einfachen Untermoduln erzeugt), ausdehnen. §§ 4 und Folgende dieser Arbeit sind solchem Ziel gewidmet.

Im § 2 beginnen wir mit einer Definition eines nicht-assoziativen Ringes $\mathfrak{X}$ (Verg. [3], S. 687), dann beweisen Satz 1 und Korollar 1, die das Maximaloperatorbereich charakterisieren. Es folgen Sätze 2 und 3, von denen der erste eine bestimmte Charakterisation eines Operatorbereiches gibt, der letzte betrifft aber interessante Eigenschaften des Multiplikationsringes und des Transformationenringes von $\mathfrak{X}$ ([3], S. 693). Zum Ende des §, machen wir allgemeine Betrachtungen über die Algebra der Untermoduln eines Ringes, ([3], S. 688).

§ 3 widmet sich einer knappen Erinnerung des Isotopiebegriffes. Satz 4 und Korollar 2 finden sich bei Albert, (Verg. [3], S. 698), wodurch wir dieselben nicht beweisen. Satz 5 hat ein gewisses Interesse.

§ 4 deutet auf die folgenden Grundgedanken: die nicht assoziativen Algebren stellen die einfachsten Beispiele der nicht assoziativen Ringe, deren Modul halbeinfach ist. Indem wir $\mathfrak{X}$ als einen solchen Ring in bezug auf einem Ringe Ω_d von Endomorphismen annehmen, setzt man einen Untermodul von $\mathfrak{X}$ fest, dann kann man immer $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}E$ schreiben, wobei $E \in \overline{\Omega}_d$ ein Idempotent ist. Es ist leicht, in diesem Fall, eine Charakterisation der Unterringe und der Ideale von $\mathfrak{X}$, und zwar in der Sprache der assoziativen Algebra, einzuführen.

Es folgt § 5. Dort beschränken wir uns auf einigen Bemerkungen über die halbeinfachen Moduln, Bemerkungen die nutzlich ist im Gedächtnis fest zu halten und die wir im Satze 9 zusammenfassen.

Danach kommt § 6. Die dortige behandelte Annahme entspricht dem Hilfssatze 8 von ([3], S. 691). Auch die Hilfssätze des § 7 sind im engen Zusammenhang mit den Hilfssätzen 7 und 9 von ([3], S. 691).

Was dem § 8 betrifft, Satz 13 dehnt einen Teil des Hilfssatzes 10 von ([3], S. 692) aus. Andere Überlegungen, die noch im Zusammenhang mit demselben Hilfssatze sind, werden wir erst im Betracht nehmen, nachdem im § 9 eine interessante Aussage über die Ringe für welche $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ist (Satz 15) bewiesen wird. Solche Aussage ist besonders nutzlich im fall der Einfachheit von $\mathfrak{X}$. Dann gibt man einen anderen Beweis des fraglichen Hilfssatzes.

Die Sätze 16 und 17 des § 10 vervollständigen Satz 13. Es ist im besonderen zu bemerken, dass Satz 17 folgende Behauptung rechtfertigt: wenn $\mathfrak{X}$, unter den Bedingungen von Satze 13, nichtassoziativer angenommen wird, dann sind $\mathfrak{C}$ und sein Zentrum reziproke Kommutatoren.

Schliesslich, in den §§ 10, 11 und 12, in bezug auf der Umkehrung vom Satze 13, macht man Überlegungen, deren Ergebnisse sich schon bei [3] finden. Doch sind jene Überlegungen durchaus verschieden von denen ALBERT's.

Das Literaturverzeichnis führt verschieden Arbeiten an, die wir eine nach der anderen unterstehend angeben: [1]—A. ALMEIDA COSTA, *On modules and rings with operators,* in dieser Zeitschrift, Band IV, 1954, S. 5-62; [2]—N. JACOBSON, *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions,* «Transactions of the American Mathematical Society», Band 57, 1945, S. 228-244; [3]—A. A. ALBERT, *Non-associative algebras,* I, «Annals of Mathematics», Band 43, 1942, S. 685-707; [4]—A. ALMEIDA COSTA, *Sobre ideais de contracção e aniquiladores na Teoria geral dos módulos,* «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band XXXV, 1950-1951, S. 79-158; [5]—A. ALMEIDA COSTA, *Über die unterdirekten Modulnsummen,* in dieser Zeitschrift, Band II, 1952, S. 115-160; [6]—A. ALMEIDA COSTA, *Três lições sobre a teoria geral dos anéis,* 2.ª lição, *Anéis primitivos,* «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band XXXVI, 1952, S. 169-200; [7]—N. JACOBSON, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings,* «American Journal of Mathematics», Band 67, 1945, S. 8-21.

2) **Allgemeinheiten** — Die allgemeine Definition eines nichtassoziativen Ringes kann man durch folgende Postulate liefern: I') $\mathfrak{X}$ ist ein Modul in bezug auf eine Menge Ω_0 (oder Ω_r) von Endomorphismen; II') es gibt eine moduläre homomorphe Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0^{(r)}$, die von $x \in \mathfrak{X}$ ausgehend zu $E_x^{(r)} \in \mathfrak{X}_0^{(r)} \subseteq \overline{\Omega}_r = \overline{\Omega}_0$ führt, und zwar unter zweien Bedingungen: 1) die Abbildung erlaubt die Definition der Rechtsmultiplikation mit x; 2) es gelten auch die Gleichheiten $(a\lambda)x = (aE_\lambda)E_x^{(r)} = (aE_x^{(r)})E_\lambda = (ax)\lambda$; III') der moduläre Homomorphismus $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_0^{(r)}$ ist operatorisch in bezug auf Ω_0 (oder Ω_r).

Durch I') hat man

$$a\lambda \in \mathfrak{X}, \qquad (a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda;$$

durch II') ist

$$aE_x^{(r)} = ax \in \mathfrak{X}, \qquad (a+b)x = ax + bx,$$

$$a(x+y) = ax + ay, \qquad (a\lambda)x = (ax)\lambda;$$

und durch III') schliesst man

$$a(x\lambda) = (ax)\lambda.$$

Aus der Gleichheit $ax = aE_x^{(r)}$ folgt $ax = xE_a^{(l)}$. Die Beziehungen

$$a(x+y) = (x+y)E_a^{(l)} = ax + ay = xE_a^{(l)} + yE_a^{(l)}$$

zeigen, dass $E_a^{(l)}$ auch ein Endomorphismus ist. Es gilt noch

$$(a\lambda)x = (ax)\lambda = xE_a^{(l)}\lambda,$$

$$(a\lambda)x = a(x\lambda) = xE_\lambda E_a^{(l)},$$

$$(a+b)x = ax + bx = xE_{a+b}^{(l)} = x(E_a^{(l)} + E_b^{(l)}),$$

wodurch die Abbildung $a \to E_a^{(l)}$ ein Operatorhomomorphismus $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_0^{(l)} \subseteq \overline{\Omega}_r$ ist. Natürlich, würden wir von diesem letzten Homomorphismus ausgehen können, und dann, umgekehrt, den Homomorphismus $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_0^{(r)} \subseteq \overline{\Omega}_r$ schliessen.

Nun nehmen wir an, dass man eines Moduls $\mathfrak{X}$ ausgeht, ohne Operatorbereich Ω. Dann wird man einem modulären Homomorphismus $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}_0^{(r)} \subseteq \mathfrak{A}$ beschränkt, wobei $\mathfrak{A}$ das Absolut von $\mathfrak{X}$ ist. Nachdem der Ring errichtet wird, betrachten wir $\overline{\mathfrak{X}}_0^{(r)} = \overline{\mathfrak{X}}_r$. $\mathfrak{X}$ bleibt Modul in bezug auf $\overline{\mathfrak{X}}_r$, in Übereinstimmung mit I), und es gilt noch, für jedes $T \in \overline{\mathfrak{X}}_r$,

$$(aT)\,x = aTE_x^{(r)} = aE_x^{(r)}\,T = (ax)\,T,$$

wodurch II') bleibt gleich befriedigt. Was der von III') erfordeten Gleichheit betrifft, möchten wir

$$a(xT) = (ax)\,T$$

haben. Das erste Glied darf man $xTE_a^{(l)}$ schreiben. Das zweite, unter der Form $xE_a^{(l)}\,T$ geschrieben, würde

$$TE_a^{(l)} = E_a^{(l)}\,T$$

erfordern. Es gilt den

Satz 1: *Dann und nur dann lässt ein nichtassoziativer Ring ein Element $T \in \overline{\mathfrak{X}}_r$ als Operator zu, wenn $T \in \overline{\mathfrak{X}}_l$.*

Deswegen in einem Ringe ohne Operatoren, spielt der Unterring $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{X}}_r \cap \overline{\mathfrak{X}}_l$ die Rolle eines Operatorsbereich. Wenn man noch bemerkt, dass als man Ω_r betrachtet, immer $\mathfrak{X}_r \subseteq \overline{\Omega}_r$, $\overline{\mathfrak{X}}_r \supseteq \Omega_r$ ist, dann schliesst man:

Korollar 1: *Der Multiplikationszentralisator $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{X}}_r \cap \overline{\mathfrak{X}}_l$ eines nicht assoziativen Ringes $\mathfrak{X}$ ist sein Maximaloperatorbereich,* (Verg. [1], § 7).

Kehren wir zum Modul $\mathfrak{X}$, mit seinem Ringe von Endomorphismen Ω_r, zuruck. Wir wollen noch einen Untermodul $\mathfrak{N}$ von $\overline{\Omega}_r$ betrachten und annehmen, dass es $0 \neq e \in \mathfrak{X}$ existiert für welches $e\mathfrak{N} = \mathfrak{X}$ ist und noch, dass es für jedes Element $x \in \mathfrak{X}$ einen einzigen Ausdruck $x = eN$, $(N \in \mathfrak{N})$, gibt. Dann, wenn wir $E_x^{(r)} = N$ setzen, wird ein nichtassoziativer Ring $\mathfrak{X}$ definiert, mit $\mathfrak{X}_0^{(r)} = \mathfrak{N}$ und e als Linkseinheit.

Die Gleichheiten $x = eN = eE_x^{(r)}$, $y = eS = eE_y^{(r)}$, $(S \in \mathfrak{N})$, ergeben $xy = xS = eNS = eN \cdot eS = eE_x^{(r)}E_y^{(r)}$. Falls es sich nur handelt die Gleichheit $eN \cdot eS = eNS$ zu rechtfertigen, darf man $N \in \overline{\Omega}_r$ nehmen. Wir nehmen jetzt an $T \in \Omega_r$. Dann haben wir

$$(x \cdot y)\,T = xE_y^{(r)}\,T = xTE_y^{(r)} = (xT)\,y;$$

schliessen wir aber nicht

$$(x \cdot y)\,T = x \cdot yT,$$

was uns Ω_r als Operatorbereich zu behandeln erlauben würde. Doch unter der Bedingung

$$\mathfrak{N}\,\Omega_r = \Omega_r\,\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N},$$

hat man

$$(x \cdot y)\,T = xE_y^{(r)}\,T = xE_z^{(r)} = xz,$$

$$eE_y^{(r)}\,T = (ey)\,T = yT = eE_z^{(r)} = z,$$

also

$$(x \cdot y)\,T = xz = x \cdot yT.$$

Daraus folgt den

Satz 2: *Wenn $\mathfrak{X}$ eine additive Abelsche Gruppe und Ω_r ein Ring von Endomorphismen von $\mathfrak{X}$ sind, dann, unter den Bedingungen: 1) $\mathfrak{N}$ ist ein Untermodul von $\overline{\mathfrak{X}}_r$; 2) es existiert $0 \neq e \in \mathfrak{X}$ für welches $e\mathfrak{N} = \mathfrak{X}$ und in solcher Weise, dass jedes Element $x \in \mathfrak{X}$ einen einzigen Ausdruck $x = eN$, $(N \in \mathfrak{N})$, hat; kann man folgende Behauptungen machen: a) durch die Gleichheit $E_x^{(r)} = N$ wird ein nichtassoziativer Ring $\mathfrak{X}$ definiert, für welchen $\mathfrak{X}_0^{(r)} = \mathfrak{N}$ ist; b) e ist Linkseinheit von $\mathfrak{X}$; c) es ist notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{X}$ das Operatorbereich Ω_r zulässt, dass man $\mathfrak{N}\,\Omega_r = \Omega_r\,\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}$ hat.*

Es it immer

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l) \subseteq \mathfrak{T} = \mathfrak{E}(1, \Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l).$$

Man kann aber $\mathfrak{Q} = \mathfrak{T} =$ haben. Denken wir uns, dass $\mathfrak{Q}$ den Einsendomorphismus enthält. Wenn wir, z.B.,

$$1 = \Sigma X_l X_r, \qquad (X_r \in \mathfrak{X}_r,\ X_l \in \mathfrak{X}_l),$$

setzen, erhalten wir

$$1 \cdot E_\lambda = \Sigma X_l (X_r E_\lambda) = E_\lambda \in \mathfrak{Q},$$

da $X_r E_\lambda \in \mathfrak{X}_r$. Es gilt dann $\Omega_r \subseteq \mathfrak{Q}$, wodurch $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{Q}$, d. h., $\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}$ ist.

Es ist noch Folgendes zu bemerken: da $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{T}$ ist, dann hat man $\overline{\mathfrak{Q}} \supseteq \overline{\mathfrak{T}}$; wenn wir $\overline{\mathfrak{Q}}$ als kommutativ annehmen, das Element $Q \in \overline{\mathfrak{Q}}$, da $\Omega_r \subseteq \overline{\mathfrak{Q}}$ ist (Korollar 1), ist mit Ω_r vertauschbar, auch mit $1, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l$. Das bedeutet $Q \in \overline{\mathfrak{T}}$, wodurch $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{T}}$ ist. Man kommt zu

Satz 3: *Falls $\mathfrak{X}$ ein nichtassoziativer Ring ist, dann ist der entsprechende Multiplikationsring gleich dem Transformationenring, wenn er den Einheitsendomorphismus enthält; und die Kommutatoren, im Absolut $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{X}$, derselben beiden Ringendomorphismen sind gleich, wenn $\overline{\mathfrak{Q}}$ kommutativ angenommen wird.*

Die Algebra der Untermoduln eines beliebigen nichtassoziativen Ringes wird in ähnlicher Weise wie bei ([3], S. 688) gemacht. $\mathfrak{M}$ ist ein Ω_r-Untermodul von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ ist ein beliebiger Untermodul. Wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ zwei Untermenge von $\mathfrak{X}$ sind, bezeichnet man mit $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die Menge der Elemente $\Sigma c c_1$, wobei die Summe endlich und $c \in \mathfrak{C}$, $c_1 \in \mathfrak{C}_1$ angenommen wird. Die Betrachtung eines Produkts $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ hat kein Interesse, aber ein Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{C}$ (oder $\mathfrak{C}\mathfrak{U}$) ist bereits ein Untermodul von $\mathfrak{X}$. Ein Produkt $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ ist ein Ω_r-Untermodul. Insbesondere sind $\mathfrak{M}a$ und $a\mathfrak{M}$ Ω_r-Untermodul. Der Ω_r-Untermodul durch $a\Omega_r$ dargestellt erfüllt die Bedingung $(a\Omega_r)\mathfrak{M} \subseteq a\mathfrak{M}$. $\mathfrak{C}\Omega_r$, als die Menge der Elemente $\Sigma \pm c E_\lambda \cdots E_\xi$ mit endlicher Summe definiert, ist immer Ω_r-Untermodul. Man hat immer $(\mathfrak{C}\Omega_r)\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{C}\mathfrak{M}$. Der Ω_r-Untermodul durch eine Menge $\mathfrak{C}$ erzeugt ist die Menge $\mathfrak{C}_s$ der Elemente $\Sigma \pm c_i + \Sigma c'_j X_j$, mit $c_i, c'_j \in \mathfrak{C}$, $X_j \in \Omega_r$. Es ist immer $\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{M}\mathfrak{C}_s$. Wenn man $\mathfrak{C}$ mit einem einzigen Element a annimmt und setzt $(a)_s = \{\Sigma \pm a + aX\}$, mit $X \in \Omega_r$, so gilt es die Gleichheit $(a)_s \mathfrak{M} = a\mathfrak{M}$.

Nun bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}'$ eine Untermenge von $\overline{\Omega}_r$. Man definiert $\mathfrak{C}\mathfrak{O}'$ als die Menge der Elemente $\Sigma c_i T_i$, wobei $T_i \in \mathfrak{O}'$ und die Summe endlich ist; dann ist es leicht Folgendes zu rechtfertigen: 1) $\mathfrak{U}\mathfrak{O}'$ ist Untermodul; 2) wenn $\mathfrak{O}'$ Untermodul ist, dann ist auch $\mathfrak{C}\mathfrak{O}'$; 3) $\mathfrak{M}\mathfrak{O}'$ ist Ω_r-Untermodul; 4) wenn $\mathfrak{O}'$ die Eigenschaft $\mathfrak{O}'\Omega_r = \Omega_r\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}'$ hat, dann ist $\mathfrak{U}\mathfrak{O}'$ ein Ω_r-Untermodul; 5) unter der Annahme $\mathfrak{U}\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{U}$, hat man auch $\mathfrak{U}\mathfrak{G}(\mathfrak{O}') \subseteq \mathfrak{U}$.

$\mathfrak{M}$, als Ω_r-Untermodul angenommen, ist auch Unterring, wenn man $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0^{(r)} \subseteq \mathfrak{M}$ hat, wobei $\mathfrak{M}_0^{(r)} \subseteq \mathfrak{X}_0^{(r)}$ das Bild von $\mathfrak{M}$, als Teil des Bildes von $\mathfrak{X}$, ist. Die Bedingung damit $\mathfrak{M}$ Unterring ist darf man auch so ausdrucken: $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_r \subseteq \mathfrak{M}$, oder $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_0^{(l)} \subseteq \mathfrak{M}$, oder $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_l \subseteq \mathfrak{M}$, oder noch $\mathfrak{M}\mathfrak{G}(\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_l) \subseteq \mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}_0^{(r)})$, $\mathfrak{M}_l = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}_0^{(l)})$ ist.

$\mathfrak{M}$ ist ein Rechtsideal, wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{X}_0^{(r)} \subseteq \mathfrak{M}$. Diese Bedingung ist dieselbe wie $\mathfrak{M}\mathfrak{X}_r \subseteq \mathfrak{M}$. Und $\mathfrak{M}$ ist ein zweiseitiges Ideal, wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{M}$ gilt, was dasselbe ist wie $\mathfrak{M}\mathfrak{X}_0^{(r)} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{X}_0^{(l)} \subseteq \mathfrak{M}$. Man kann noch die vorigen Forderungen anders ausdrucken: 1) $\mathfrak{a}$ ist zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{X}$, wenn es eine Ω-Untergruppe ist, die, mit a, auch $a\mathfrak{Q}$ enthält; 2) oder, wenn es eine Untergruppe ist, die, mit a, $a\mathfrak{G}(\Omega_r, \mathfrak{Q})$ enthält; 3) oder noch, wenn es eine Untermenge von $\mathfrak{X}$ ist, die, mit a und b, auch $a + b$ und $a\mathfrak{G}(1, \Omega_r, \mathfrak{Q})$ enthält.

3) **Über den Begriff der Isotopie** – Gehen wir von $\mathfrak{X}$ und seinem Operatorbereich Ω_r aus. Der Modul $\mathfrak{X}$ erlaubt die Definition eines neuen nichtassoziativen Ringes $\mathfrak{X}'$, durch eine neue Rechtsmultiplikation (a, x), so verstanden:

$$(a, x) = aE_x^{(r')}, \qquad E_x^{(r')} = PE_{xQ}^{(r)}\, C,$$

wobei $P, Q, C \in \overline{\Omega}_r$ Automorphismen des Moduls $\mathfrak{X}$ sind. $\mathfrak{X}'$ heisst dann ein *Isotop* von $\mathfrak{X}$, ([3], S. 696). Es ist klar, dass $(a, x) = (aP \cdot xQ)\, C$ folgende Gleichheiten mitbringt:

$$xE_a^{(l')} = xQE_{aP}^{(l)}\, C, \qquad E_a^{(l')} = QE_{aP}^{(l)}\, C.$$

Falls wir $C = I =$ Einsendomorphismus setzen, dann heisst $\mathfrak{X}$ ein *Hauptisotop* von $\mathfrak{X}$. Und mit $P = Q = H$, $C = H^{-1}$, die Isotopie wird *Äquivalenz* gennant. In diesem letzten Fall, hat man

$$(a, x) = (aH \cdot xH)\, H^{-1}, \quad \text{oder} \quad (a, x)\, H = aH \cdot xH.$$

Denken wir uns eine *Basis* $\mathfrak{L}$, die eine additive Abelsche Gruppe ist, und betrachten einen festen Ring Ω_r von Endomorphismen von $\mathfrak{L}$. Sobald auf $\mathfrak{L}$ ein nichtassoziativer Ring definiert wird, der Isotopiebegriff erlaubt andere nichtassoziative Ringe mit derselben Basis zu verwirklichen. Der Isotopiebegriff ist ein Äquivalenzbegriff, durch welche die Gesamtheit der nichtassoziativen Ringe auf $\mathfrak{L}$ in Äquivalenzklassen geteilt wird. In jeder Klasse, die Äquivalenz (im Sinn der Isotopie) liefert eine Äquivalenzrelation die erlaubt die Isotope in Unterklassen zu teilen. In diesen Unterklassen gibt es immer ein Hauptisotope als Repräsentant.

Ein Element $g \in \mathfrak{X}$ heisst rechts- bzw. linksnichtsingulär, falls es $(E_g^{(r)})^{-1}$ bzw. $(E_g^{(l)})^{-1}$ existiert. Es gilt folgender

Satz 4: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass es Hauptisotope von $\mathfrak{X}$ mit Linkseinheit e' (bzw. Rechtseinheit d') existieren, dass es in $\mathfrak{X}$ Elemente g (bzw. Elemente h) gibt, die linksnichtsingulär (bzw. rechtsnichtsingulär) sind. Jedem solchen Element entspricht einen Hauptisotop, der die gewünschte Bedingung erfüllt, indem man $Q = (E_g^{(l)})^{-1}$, (bzw. $P = (E_h^{(r)})^{-1}$), setzt und P (bzw. Q) beliebig annimmt. Es ist $e' = gP^{-1}$, (bzw. $d' = hQ^{-1}$).*

Korollar 2: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass es Hauptisotope von $\mathfrak{X}$ mit Einselement existieren, dass es in $\mathfrak{X}$ Elemente g und h gibt, für welche $P = (E_h^{(r)})^{-1}$, $Q = (E_g^{(r)})^{-1}$. Dann ist das Einselement $u' = gh$.*

Ins Folgende hat $\mathfrak{X}$ Einselement u. Für jeden Hauptisotop hat man

$$E_x^{(r)} = P^{-1} E_{xQ^{-1}}^{(r')}, \qquad E_x^{(l)} = Q^{-1} E_{xP^{-1}}^{(l')},$$

und so, nach dem vorigen Korollar, ist auch

$$u = (g', h'), \qquad P^{-1} = (E_{h'}^{(r')})^{-1}, \qquad Q^{-1} = (E_{g'}^{(l')})^{-1}.$$

Wenn $\mathfrak{X}'$ gleichfalls Einselement $= u'$ besitzt, es gelten, wie gesehen, die Beziehungen

$$u' = g \cdot h, \qquad P = (E_h^{(r)})^{-1} \qquad Q = (E_g^{(l)})^{-1},$$

und auch diese anderen

$$u' = gP^{-1} = hQ^{-1}, \qquad u = g'P = h'Q.$$

Deswegen, hat man

$$u = (g', h') = (uE_h^{(r)}, uE_g^{(l)}) = (h, g),$$

$$u' = g \cdot h = u' E_{h'}^{(r')} \cdot u' E_{g'}^{(l')} = h' \cdot g'.$$

Es besteht folgender

Satz 5: *Wenn $\mathfrak{X}$ und sein Hauptisotop $\mathfrak{X}'$ Einselement haben, dann die Elemente g und h, sowie g' und h', nach dem vorigen Korollar bestimmt, erfüllen folgende Bedingungen: $u' = g \cdot h = h' \cdot g'$, $u = (g', h') = (h, g)$. Man hat noch $g' = h$, $h = g$.*

Unseren Betrachtungen über Isotope machen wir Schluss mit einigen einfachen Bemerkungen. Erstens: falls die Multiplikations-und, deswegen, die Transformationenringe zweier Isotope gleich sind, entnimmt man ganz gleich, des Begriffs eines zweiseitigen Ideals, dass die zweiseitigen Ideale beider Isotope dieselben sind. Zweitens: falls $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}$ ein endlicher linearer Raum über ein Körper $\mathfrak{K} = \Omega_r$ ist, unter der Annahme das Einselement von $\mathfrak{X}$ unitärer Operator ist, dann nennt man $\mathfrak{X}$ eine nichtassoziative endliche Algebra. Genau jetzt, indem man $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zwei endliche Algebren mit Einselement und Hauptisotope annimmt, sind gleich die entsprechenden Transformationenringe, die assoziative endliche Algebren darstellen, ([3], S. 699). Dann wird man zum Folgenden geführt: *wenn $\mathfrak{H}$ eine nichtassoziative, endliche, einfache, mit Einselement, Algebra ist, jeder Isotop $\mathfrak{H}'$, mit Einselement, ist gleichfalls einfach.* In der Tat, hat eine einfache Algebra keine anderen zweiseitigen Ideale, ausser (0) und die Algebra selbst. Wenn wir von $\mathfrak{H}$ zum Hauptisotop $\mathfrak{H}^{(0)}$ (der die Unterklasse der Isotope von $\mathfrak{H}'$ darstellt) übergehen, dann ist $\mathfrak{H}^{(0)}$ einfach und $\mathfrak{H}'$ wird von $\mathfrak{H}$ durch Äquivalenz abgeleitet:

$$E_x^{(r')} = H E_{xH}^{0(r)} H^{-1}, \qquad (E_y^{0(r)} \in \mathfrak{H}_r^{(0)}).$$

Nehmen wir das zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}' \neq (0)$, von $\mathfrak{H}'$. Man hat

$$\mathfrak{a}' \mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{a}', \qquad \mathfrak{a}' H \mathfrak{Q} H^{-1} \subseteq \mathfrak{a}'.$$

Hieraus folgt $(\mathfrak{a}' H) \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{a}' H$, und folglich

$$\mathfrak{a}' H = \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{a}' = \mathfrak{H} H^{-1} = \mathfrak{H}'.$$

Die Behauptung wird somit bewiesen.

4) **Unterringe und Ideale der Ringe $\mathfrak{X}$, die halbeinfache Moduln sind** — Künftig werden wir nur die nichtassoziativen Ringe, deren additive Ω_r-Abelschegruppen halbeinfach sind, behandeln. Die entsprechenden Ω_r-Moduln werden durch ihre Ω_r-einfachen Untermoduln erzeugt, ([1, § 9] und [5, § 8]).

Falls $\mathfrak{M}$ ein zulässiger Untermodul von $\mathfrak{X}$ ist, darf man immer $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'$ schreiben, wobei $\mathfrak{M}'$ gleichfalls zulässiger Untermodul ist. Es existiert dann ein Idempotent $E \in \overline{\Omega}_r \subseteq \mathfrak{A}$ für welches $\mathfrak{M} = \mathfrak{X} E$. Diese Tatsache ist wesentlich, damit man, nach ([3], S. 689-690), Folgendes behaupten kann:

Satz 6: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass der zulässige Untermodul $\mathfrak{M} = \mathfrak{X} E$ Unterring ist, dass entweder $E \mathfrak{M}_0^{(r)} = E \mathfrak{M}_0^{(r)} E$ oder $E \mathfrak{M}_r = E \mathfrak{M}_r E$ ist.*

Korollar 3: *Wenn $\mathfrak{X}$ ein nichtassoziativer Ring ist, der, als Modul betrachtet, durch ihre Ω_r-einfachen Untermoduln erzeugt wird, dann, angenommen $E \in \overline{\Omega}_r$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{X} E$, sind beide Gleichheiten $E \mathfrak{M}_0^{(r)} = E \mathfrak{M}_0^{(r)} E$ und $E \mathfrak{M}_0^{(l)} = E \mathfrak{M}_0^{(l)} E$ einander gegenseitige Folgen.*

Korollar 4: *Unter den Bedingungen des vorigen Korollars, sind beide Beziehungen $E \mathfrak{M}_0^{(r)} = E \mathfrak{M}_0^{(r)} E$, $E \mathfrak{E}(1, \Omega_r, \mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_l) = E \mathfrak{E}(1, \Omega_r, \mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_l) E$* gleichgültig. Mann muss die Tatsache $E \in \overline{\Omega}_r$ nicht vergessen.

Was die Ideale betrifft, sind folgende Behauptungen gültig:

SATZ 7: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass* $\mathfrak{r}=\mathfrak{X}E$ *ein zulässiges Rechtsideal von* $\mathfrak{X}$ *ist, dass entweder* $\mathfrak{r}_0^{(l)}=\mathfrak{r}_0^{(l)}E$ *oder* $E\mathfrak{X}_0^{(r)}=E\mathfrak{X}_0^{(r)}E$ *ist.*

SATZ 8: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass* $\mathfrak{a}=\mathfrak{X}E$ *ein zulässiges zweiseitiges Ideal von* $\mathfrak{X}$ *ist, dass entweder* $E\mathfrak{Q}=E\mathfrak{Q}E$ *oder* $E\mathfrak{T}=E\mathfrak{T}E$ *ist.*

5) **Einige Bemerkungen über die halbeinfache Moduln** — Die halbeinfache Moduln, wie wir schon im vorigen § bemerkt haben, waren bei ([1], § 9) und ([5], § 8) ausführlich behandelt. Falls $\mathfrak{M}$ ein solcher Modul ist, kann man immer

$$\mathfrak{M}=\Sigma\,\mathfrak{m}_\nu, \qquad (\nu\in M), \tag{1}$$

schreiben, wobei das Zeichen Σ als direkte diskrete Summe zu verstehen ist, ([1[, § 8, oder [4], § 12).

Nun sind wir daran interessiert, im Fall wo die $\mathfrak{m}_\nu$ alle Ω-isomorphe sind. Das Bild Ω_0, von Ω, im Absolut $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{M}$, erzeugt einen Ring Ω_r. Man kann in (1) immer annehmen, dass die Untermoduln $\mathfrak{m}_\nu$ alle Ω_r-Isomorphe sind. Dann entnimmt man drei Folgen, die wir hier berichten. Erstens: wenn wir $0\neq\Theta\in\Omega_r$ annehmen, hat man immer, für beliebig $\alpha\in M$, $\mathfrak{m}_\alpha\Theta\neq(0)$, da, der Ω_r-Isomorphismus der $\mathfrak{m}_\nu$, für alle ν, $\mathfrak{m}_\nu\Theta=(0)$ ziehen würde, falls $\mathfrak{m}_\alpha\Theta=(0)$ wäre. Danach würde man $\mathfrak{X}\Theta=(0)$, $\Theta=0$ schliessen. Zweitens: nehmen wir $0\neq x_\alpha\in\mathfrak{m}_\alpha$, ($\alpha\in M$ fest). Es kann $x_\alpha\Omega_r=(0)$ nicht gelten. Sonst, die Menge der Elemente von $\mathfrak{M}$, die Ω_r vernichten würde, würde ein nicht Null Ω_r-Untermodul von $\mathfrak{m}_\alpha$ sein. Die Einfachheit der $\mathfrak{m}_\alpha$ würde $\mathfrak{m}_\alpha\Omega_r=(0)$ ziehen, und danach würde man $\mathfrak{X}\Omega_r=(0)$, $\Omega_r=(0)$ haben. Drittens: wenn wir noch $0\neq\Theta\in\Omega_r$ annehmen, kann es nicht Null Elemente $x\in\mathfrak{m}_\alpha$ geben, fur welche $x_\alpha\Theta=0$. Falls aber Θ dem Zentrum von Ω_r gehört, wird solche Tatsache nicht erfüllt, da, sonst, aus $x_\alpha\Theta=0$, $y_\alpha\Theta=0$, konnte man $(x_\alpha-y_\alpha)\Theta=0$ ableiten, so wie $(x_\alpha\Omega_r)\Theta=(x_\alpha\Theta)\Omega_r=(0)$. Folglich, würde es $\mathfrak{m}_\alpha\Theta=(0)$ gelten, und, danach, $\mathfrak{X}\Theta=(0)$, $\Theta=0$.

Also

SATZ 9: *Wenn* $\mathfrak{M}$ *ein halbeinfacher* Ω_r*-Modul, der als direkte diskrete Summe* $\mathfrak{M}=\Sigma\,\mathfrak{m}_\nu$, $(\nu\in M)$, *wobei alle die Summanden* Ω_r*-isomorphe sind, angenommen wird, und falls noch* $\Omega_r\neq(0)$ *ist, kann man Folgendes behaupten: 1) die Annahme* $0\neq\Theta\in\Omega_r$ *bringt mit sich* $\mathfrak{m}_\alpha\Theta\neq(0)$, *für beliebiges* $\alpha\in M$; *2) wenn man* α *festsetzt und* $0\neq x_\alpha\in\mathfrak{m}_\alpha$ *ist, hat man nie* $x_\alpha\Omega_r=(0)$; *3) wenn* $0\neq\Theta\in\Omega_r$ *ist, dann, unter der Annahme* Θ *dem Zentrum von* Ω_r *gehört, falls* $x_\alpha\neq0$ *ist, hat man* $x_\alpha\Theta\neq0$.

6) **Über die Hypothese** $\mathfrak{W}=\mathfrak{S}(\Omega_r,\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_l)=\Omega_r$ — In diesem §, neben der Summe (1), die hier

$$\mathfrak{X}=\Sigma\,\mathfrak{x}_{\nu'}, \qquad (\nu'\in M'), \tag{2}$$

unter der einzigen Annahme der Halbeinfachheit des Moduls $\mathfrak{X}$, geschrieben wird, machen wir noch folgende beide Hypothesis: 1)-man hat $\mathfrak{W}=\Omega_r$, oder, was dasselbe ist, man hat $\mathfrak{X}_0^{(r)}\subseteq\Omega_r$, $\mathfrak{X}_0^{(l)}\subseteq\Omega_r$, $\mathfrak{X}_r\subseteq\Omega_r$, $\mathfrak{X}_l\subseteq\Omega_r$; 2) alle die Moduln $\mathfrak{x}_{\nu'}$ sind Ω_r-isomorphe und einfache Ω_r-Untermoduln von $\mathfrak{X}$.

Nimmt man $0\neq\Theta\in\Omega_r$. Da $\mathfrak{x}_{\alpha'}\Theta\neq(0)$ ist, es existiert $v_{\alpha'}\in\mathfrak{x}_{\alpha'}$ für welches $v_{\alpha'}\Theta\neq0$. Dann ergibt sich $v_{\alpha'}\Omega_r=\mathfrak{x}_{\alpha'}$. Wenn man, im Isomorphismus $\mathfrak{x}_{\alpha'}\simeq\mathfrak{x}_{\nu'}$, $v_{\alpha'}\to v_{\nu'}$ hat, gilt es gleichfalls $\mathfrak{x}_{\nu'}=v_{\nu'}\Omega_r$, und (2) kann

$$\mathfrak{X}=\Sigma\,v_{\nu'}\Omega_r, \qquad (\nu'\in M'), \tag{3}$$

aussehen. Nun nimmt man, dass $\mathfrak{X}$ keiner Nullring ist

$(\mathfrak{X}^2 \neq (0))$. Danach betrachten wir $a \in \mathfrak{X}$ für welches $E_a^{(r)} \neq 0$ und in solcher Weise, dass es auch

$$xa = xE_a^{(r)} = x\Lambda \neq (0), \qquad (E_a^{(r)} = \Lambda \in \Omega_r),$$

gilt. Der Endomorphismus $\Lambda = E_a^{(r)}$ ist mit allen Elementen von Ω_r vertauschbar, wodurch dem Zentrum von Ω_r gehört. Dann kann Λ kein $v_{\nu'}$ aus (3) vernichten, wie wir im Satz 9 gesehen haben. Man entnimmt

$$\mathfrak{r}_{\nu'} = v_{\nu'}\Omega_r = (v_{\nu'}\Lambda)\Omega_r = (v_{\nu'}\Omega_r)\Lambda = \mathfrak{r}_{\nu'}\Lambda,$$

und ist es nutzlich zu bemerken, dass wir in der Tat

$$(\mathfrak{r}_{\nu'}\Lambda)\Omega_r = (\mathfrak{r}_{\nu'}\Omega_r)\Lambda \subseteqq \mathfrak{r}_{\nu'}\Lambda$$

haben. Es gilt folgender

Satz 10: *Ist $\mathfrak{X}$ ein nichtassoziativer Ring und Ω_r ein Endomorphismenring von $\mathfrak{X}$. Wenn $\mathfrak{X}$, als Ω_r-Modul betrachtet, eine direkte diskrete Summe von einfachen Ω_r-Untermoduln, alle Ω_r-isomorphe, ist, dann, unter den Annahmen: 1) $\mathfrak{X}$ ist keiner Nullring; 2) man hat $\mathfrak{C}(\Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l) = \Omega_r$; kann man (3) statt (2) schreiben und jedes $\mathfrak{r}_{\nu'} = v_{\nu'}\Omega_r$ darf die Form $\mathfrak{r}_{\nu'} = \mathfrak{r}_{\nu'}\Lambda$ nehmen, wobei $\Lambda = E_a^{(r)}$ ein dem Zentrum von Ω_r gehörendes festes Element ist.*

Es sei nun $0 \neq y \in \mathfrak{X}$ und $y = y_{\mu'} + \cdots + y_{\tau'}$, $(y_{\mu'} \in \mathfrak{r}_{\mu'}$, usw.), wobei $y_{\mu'} \neq 0$. Es ist wie schon bemerkt $y_{\mu'}\Lambda \neq 0$. Dann, für jedes $y \neq 0$, ist es $y\Lambda = ya = yE_a^{(r)} \neq 0$, und, folglich, $E_y^{(l)} \neq 0$. Der moduläre Ω_r-Endomorphismus $y \to E_y^{(l)}$ ist ein Ω_r-Isomorphismus. Wir wissen jedoch, dass man $E_y^{(l)} \in \overline{\Omega}_r$ hat, woher man schliesst, dass $E_y^{(l)}$ dem Zentrum von Ω_r, d. h. $\Omega_r \cap \overline{\Omega}_r$, gehört. Somit:

Satz 11: *Unter den Bedingungen des vorigen Satzes, $\mathfrak{X}$ ist Ω_r-isomorph einem zweiseitigen Ideal von Ω_r (Rechtsideal von Ω_r im Zentrum von Ω_r enthalten).*

Korollar 5: *Unter den Bedingungen der beiden vorigen Sätze, wenn Ω_r ein einfacher Ring ist, dann: 1) $\mathfrak{X}$ und Ω_r sind Ω_r-isomorph; 2) Ω_r ist kommutativ; 3) Ω_r ist keiner Nullring.*

Die Behauptungen 1) und 2) des Korollars folgen ganz gleich. Was 3) betrifft, betrachten wir den Operatorisomorphismus $\mathfrak{X} \simeq \Omega_r$, durch welchen man

$$x \to \Lambda_x = E_x^{(l)} \in \Omega_r, \qquad y \to \Lambda_y = E_y^{(l)} \in \Omega_r,$$

$$x\Lambda_y = xE_y^{(l)} = yx \to \Lambda_x\Lambda_y = \Lambda_y\Lambda_x$$

hat. Da es Nichtnullprodukte yx gibt, gibt es gleichfalls Produkte $\Lambda_y\Lambda_x$, die nicht Null sind. Das Korollar hat folgenden

Zusatz: *Unter den Bedingungen des Satzes 10, wenn Ω_r einfach ist, dann sind Ω_r und $\mathfrak{X}$ isomorphe Körper.* Wenn wir $x = u =$ Einselement von $\mathfrak{X}$ setzen, hat man

$$u\Lambda_y = yu = y, \quad \text{wodurch} \quad \mathfrak{X} = u\Omega_r.$$

Hiermit gilt es folgender Wortlaut:

Satz 12: *Ist $\mathfrak{X}$ ein Ring (entweder assoziativ oder nicht) und Ω_r ein einfacher Ring aus Endomorphismen von $\mathfrak{X}$. Falls $\mathfrak{X}$, als Ω_r-Modul betrachtet, eine direkte diskrete Summe von einfachen Ω_r-isomorphen Untermoduln ist, dann ist es notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{C}(\Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l()=\Omega_r$ ist, dass eine der folgenden Annahmen verwirklicht* *wird:* 1) $\mathfrak{X}$ *ist Nullring;* 2) $\mathfrak{X}$ *und* Ω_r *sind isomorphe Körper, mit* $\mathfrak{X}=u\,\Omega_r$. In der Tat, haben wir schon gesehen, dass, unter der Bedingung $\mathfrak{W}=\mathfrak{E}(\Omega_r,\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_l)=\Omega_r$, falls $\mathfrak{X}$ kein Nullring ist, $\mathfrak{X}$ und Ω_r sind isomorphe Körper und man hat $\mathfrak{X}=u\,\Omega_r$. Umgekehrt, falls $\mathfrak{X}$ ein Nullring ist, es gelten die Gleichheiten $\mathfrak{W}=\mathfrak{E}(\Omega_r)=\Omega_r$, wodurch der Satz, in diesem Fall, vollständig bewiesen wird. Falls $\mathfrak{X}$ aber ein zu Ω_r isomorpher Körper ist und die Gleichheit $\mathfrak{X}=u\,\Omega_r$, mit $u=$Einselement von $\mathfrak{X}$, gültig bleibt, jedes $x\in\mathfrak{X}$ hat die Form $x=u\,\Theta$, $(\Theta\in\Omega_r)$, was $E_x^{(r)}=E_{u\,\Theta}^{(r)}$ und, folglich,

$$y\cdot x=yE_x^{(r)}=yE_{u\,\Theta}^{(r)}=y\cdot u\,\Theta=y\,\Theta\cdot u=y\,\Theta,$$

$E_x^{(r)}=\Theta$ herbringt. Danach entnimmt man

$$\mathfrak{X}_r=\mathfrak{X}_l=\mathfrak{X}_0^{(r)}=\mathfrak{X}_0^{(l)}\subseteq\Omega_r,$$

so wie $\Omega_r\subseteq\mathfrak{X}_r$, und, deshalb, $\Omega_r=\mathfrak{X}_r=\mathfrak{W}$, wie man es wünscht.

7) **Beweis von zwei Hilfssätzen** — Für die Untersuchung der Annahme des nächsten § interessieren zwei Hilfssätze, die uns hier beschäftigen werden.

Hilfssatz 1: *Ist* $\mathfrak{X}$ *ein nichtassoziativer Ring und* Ω_r *ein Ring aus Endomorphismen von* $\mathfrak{X}$. *Wenn* $\mathfrak{X}$, *als* Ω_r*-Modul betrachtet, eine direkte diskrete Summe von einfachen* Ω_r*-Untermoduln ist, das Daseins eines absoluten Nullteilers in* $\mathfrak{X}$ *ist mit dem Daseins eines dem* Ω_r *gehörenden Idempotents* $E\neq 0$, *für welches* $E\mathfrak{X}_r=E\mathfrak{X}_l=(0)$ *ist, gleichgültig.* Falls b ein absoluter Nullteiler ist, der durch b

definierte Ω_r-Untermodul genügt der Gleichheit $(b,b\Omega_r)=$ $=\mathfrak{X}E$, für gewisses Idempotent $E\neq 0$, $(E\in\overline{\Omega}_r)$. Für beliebige $y,x\in\mathfrak{X}$, hat man

$$yE\cdot x=0=yEE_x^{(r)},\qquad x\cdot yE=0=yEE_x^{(l)},$$

und ist $E\mathfrak{X}_r=E\mathfrak{X}_l=(0)$. Umgekehrt, das Daseins von E unter den angegebenen Bedingungen zwingt die nicht Nullelemente von $\mathfrak{X}E$ absolute Nullteiler zu sein.

Hilfssatz 2: *Unter derselben Annahme des vorigen Hilfssatzes über* $\mathfrak{X}$, *nehmen wir auch das Daseins von absoluten Nullteilern an. Dann, falls* Ω_r *ein einfacher Ring ist und alle die Summanden der direkten diskreten Summe gleich* $\mathfrak{X}$ Ω_r*-isomorphe sind, darf man* $\mathfrak{W}=\mathfrak{E}(\Omega_r,\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_l)=$ $=\Omega_r+\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_l)=\Omega_r+\mathfrak{Q}$, *als direkte Summe schreiben, wobei* $\mathfrak{Q}$ *ein zweiseitiges Ideal des ersten Gliedes ist, das sich genau der Elemente* $Q\in\mathfrak{W}$, *für welche* $EQ=0$ *ist, zusammensetzt.* Jedes Element aus $\mathfrak{X}$ ist Summe eines Elements $\Lambda\in\Omega_r$ und anderes $Q\in\mathfrak{Q}$. Die Summe ist direkt wie wir gleich beweisen. Nehmen wir $\Lambda+Q=0$ an und sei E das Idempotent des vorigen Hilfssatzes. Wir haben $E\Lambda+EQ=0$. Da $E\mathfrak{X}_r=E\mathfrak{X}_l=(0)$ auch angenommen wird, wird auch $EQ=0$ sein, und deshalb hat man $E\Lambda=0$. Hieraus schliesst man, wie folgt, $\Lambda=0$. Die Elemente aus Ω_r die E vernichten bilden ein zweiseitiges Ideal von Ω_r, wodurch, wenn man $\Lambda\neq 0$ annimmt, $E\Omega_r=(0)$ sein wird, da Ω_r einfach ist. So würde man $\mathfrak{X}E\Omega_r=0$ erhalten. Da $\mathfrak{X}E$ durch die einfachen Ω_r-Untermoduln von $\mathfrak{X}$ erzeugt wird, nehmen wir, für einen solchen Untermodul $\mathfrak{r}_{x'}$, $\mathfrak{r}_{x'}\Omega_r=(0)$. Der Ω_r-Isomorphismus aller einfachen Ω_r-Untermoduln von $\mathfrak{X}$ würde dann $\mathfrak{X}\Omega_r=(0)$ herbringen, was falsch ist. Deswegen hat man $\Lambda=0$, $Q=0$, wie erwünscht. Bei gegebenem $A\in\mathfrak{W}$, falls man $EA=0$ annimmt, indem man

$$A = \Lambda + Q, \qquad EA = 0 = E\Lambda + EQ = E\Lambda$$

schreibt, dann folgt $\Lambda = 0$, wie wir vorher sahen. Es ist $A \in \mathfrak{Q}$. Endlich ist $\mathfrak{Q}$ zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{W}$, da

$$EQ(\Lambda' + Q') = 0, \qquad (\Lambda' \in \Omega_r, \quad Q' \in \mathfrak{Q}),$$
$$E(\Lambda' + Q')Q = E\Lambda' Q + EQ'Q = \Lambda' EQ = 0$$

ist. Der Hilfssatz wird somit bewiesen.

8) **Die Annahme $\mathfrak{E}(\Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l) = \mathfrak{W}$ ist einfacher Ring** — Der besondere wichtige Fall, dessen Untersuchung in diesem § beginnt, wird man später vervollständigen, nachdem wir im § 9 einen Satz über nichtassoziative Ringe, für welche $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$, behandelt haben. Hier beweist man folgenden

Satz 13: *Ist $\mathfrak{X}$ ein Ring (entweder assoziativ oder nicht), der, als Ω_r-Modul betrachtet, von seinen einfachen Ω_r-isomorphen Untermoduln erzeugt wird, dann, falls Ω_r einfacher Ring ist, die Annahme $\mathfrak{W}$ ist einfach, führt zur Verwirklichung einer der beiden Bedingungen:* 1) *$\mathfrak{X}$ ist Nullring und, deswegen, $\mathfrak{W} = \Omega_r$;* 2) *$\mathfrak{X}$ ist einfach.* Vollverstanden, $\mathfrak{X}$ nennt man einfach, wenn seine zweiseitigen Ideale nur (0) und $\mathfrak{X}$ sind. Denken wir uns $\mathfrak{W}$ sei einfach. Falls $\mathfrak{X}$ einen absoluten Nullteiler hat, der Hilfssatz 2 des vorigen § zeigt, dass man $\mathfrak{W} = \Omega_r$ auch hat, da, andernfalls, $\mathfrak{W} = \mathfrak{Q}$, $\Omega_r = (0)$ sein würde, gegen die stillschweizende Annahme $\Omega_r \neq (0)$. Dann, entweder $\mathfrak{X}$ ist Nullring und, in der Tat $\mathfrak{W} = \Omega_r$, oder, wie wir im § 6 (Satz 12) sahen, $\mathfrak{X}$ ist eine assoziative Algebra über den Körper $\mathfrak{K} = \Omega_r$, die sich in der Form $\mathfrak{X} = u\Omega_r$ schreiben lässt (u = Einselement von $\mathfrak{X}$). Bei dieser letzten Annahme, wird $\mathfrak{K}$ als Endomorphismenring von $u\mathfrak{K} = \mathfrak{X}$ verwirklicht, und es gilt $\overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$. Der Satz wird somit im behandelten Fall bewiesen. Falls es aber in $\mathfrak{X}$ keinen absoluten Nullteiler existiert, betrachten wir in $\mathfrak{X}$ ein nicht Null zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{X}E$. Es kann nicht $\mathfrak{Q} = (0)$ sein, es gilt aber die Gleichheit $E\mathfrak{Q} = E\mathfrak{Q}E$, (§ 4). Wenn wir mit $\mathfrak{S}$ die Menge der Elemente $S \in \mathfrak{W}$, für welche $S = SE$ ist, bezeichnet, erkennt man leicht, dass $\mathfrak{a}_{0}^{(r)}$ und $\mathfrak{a}_{0}^{(l)}$ in $\mathfrak{S}$ enthalten sind, da, z.B., falls $a \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{X}$ ist, dann ist $ya \in \mathfrak{a}$, $ya = yaE$, d. h. $yE_a^{(r)} = yE_a^{(r)}E$, $E_a^{(r)} = E_a^{(r)}E$. Wie es keine absoluten Nullteiler gibt, man kann nicht, für alle y, $ay = ya = 0$ haben, wodurch entweder $E_a^{(r)} \neq 0$ oder $E_a^{(l)} \neq 0$ ist. Dies zeigt, dass immer $\mathfrak{S} \neq (0)$ ist.

Nun nehmen wir $V \in \mathfrak{W}$ beliebig; falls $S \in \mathfrak{S}$ kann man

$$SV = SEV = SEVE = SVE$$

schreiben, weil E mit Ω_r vertauschbar ist, und, für die Elemente $Q \in \mathfrak{Q}$, hat man $EQ = EQE$. Es gilt auch $VS = VSE$.

Deshalb schliesst man, dass $\mathfrak{S}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{W}$ ist, was $\mathfrak{S} = \mathfrak{W}$, $\Omega_r \subseteq \mathfrak{S}$ ergibt. Es gilt, für jedes $\Lambda \in \Omega_r$, die Beziehung $\Lambda = \Lambda E = E\Lambda$, und somit

$$\mathfrak{X}\Omega_r = XE\Omega_r = \mathfrak{a}\Omega_r \subseteq \mathfrak{a}.$$

Für gewisses $\mathfrak{x}_{\nu l}$, kann man $\mathfrak{x}_{\nu l}\Omega_r = (0)$ nicht haben, wie mehrmals erkannt wurde. Dann, aus den Gleichheiten $\mathfrak{x}_{\nu l}\Omega_r = \mathfrak{x}_{\nu l}$, schliesst man $\mathfrak{X}\Omega_r = \mathfrak{X}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{X}$. $\mathfrak{X}$ ist einfach wie behauptet.

Nun gehen wir zum im Beginn des § angegebenen Satze über.

9) **Ein Satz über die Ringe für welche $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ist** — Der Satz 15, den wir hier beweisen wollen, braucht einen anderen Satz. Es gilt

Satz 14: *Jedes Operatorbereich von $\mathfrak{X}$, auf $\mathfrak{X}^2$ angewandt wirkt sich kommutativ aus. Wenn $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ist, ist jedes Ope-*

ratorbereich kommutativ (im Sinne der Kommutativität der Anwendungen). Es ist klar, dass $\mathfrak{X}^2$ immer zulässiges zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{X}$ ist. Falls T und T' Elemente des Maximaloperatorbereiches $\overline{\mathfrak{Q}}$ sind, dann hat man

$$(xx')(TT') = (xT)x'T') = (x \cdot x'T)T' = \\ = (xT')(x'T) = (xx')(T'T).$$

Der erste Teil wird somit bewiesen. Wenn aber $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ist, dann darf man jedes Element aus $\mathfrak{X}$ unter der Form $\Sigma xx'$ schreiben, und das Rest des Satzes wird augenscheinlich.

Satz 15: *Falls $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ist, dann sind gleich die Kommutatoren $\overline{\mathfrak{Q}}$ und $\overline{\mathfrak{W}}$.* Tatsächlich, haben wir soeben gesehen, dass $\overline{\mathfrak{Q}}$ kommutativ ist. Dann, ist Ω_r kommutativ. Der Satz 3 des § 2 gewährt die Gleichheit $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{T}}$. So hat man $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{W}}$, da $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{T}$. Üblich, gilt es immer $\overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{T}}$. Hieraus das

Korollar 6: *Wenn $\mathfrak{X}$ ein, in bezug auf einem Endomorphismenring, einfacher nichtassoziativer Ring ist, dann sind gleich beide Kommutatoren $\overline{\mathfrak{Q}}$ und $\overline{\mathfrak{W}}$.* Es ist nutzlich zu bemerken, dass es gleichgültig ist, ob man $\mathfrak{X}$, in bezug auf Ω_r, einfach nimmt, oder $\mathfrak{X}$ ohne Operatoren zulässst, (Verg. [1], § 7).

Wir geben einen anderen Beweis dieses Korollars. Wir stützen uns auf einem von Chevalley-Jacobson herstammenden Satze (Verg. [2], S. 232-233, so wie [4], § 16).

Für jedes $0 \neq a \in \mathfrak{X}$ ist $a\,\mathfrak{Q} = a\mathfrak{W} = \mathfrak{X}$, wie man folgenderweise sieht. Es ist $a\mathfrak{Q} \neq (0)$, da die Anahme $a\mathfrak{Q} = (0)$, falls $b\mathfrak{Q} = (0)$, die Beziehung $(a-b)\mathfrak{Q} = (0)$ herbringen würde; zugleich wäre auch $(a\mathfrak{Q})\mathfrak{Q} = (0)$, $(a\Omega_r)\mathfrak{Q} = (a\mathfrak{Q})\Omega_r = (0)$. Dann würde man $\mathfrak{X}\mathfrak{Q} = (0)$, $\mathfrak{X}^2 = (0)$, entnehmen, gegen die Hypothese $\mathfrak{X}$ nichtassoziativ zu

sein. Somit, indem das zweitige Ideal $a\mathfrak{Q} \neq (0)$ ist kann man nur $a\mathfrak{Q} = \mathfrak{X} = a\mathfrak{W}$ haben. Sowohl $\mathfrak{W}$ als $\mathfrak{Q}$ sind irreduzible Ringe von Endomorphismen von $\mathfrak{X}$. Aber der oben gennante Satz von Chevalley-Jacobson behauptet das Folgende: indem man $\mathfrak{X}$ als Raum über den Divisionsring $\overline{\mathfrak{W}}$ betrachtet, ist $\mathfrak{W}$ ein *dichter* Ring von $\overline{\mathfrak{W}}$-Endomorphismen von $\mathfrak{X}$. Danach, ist $\mathfrak{Q}$ ein nicht Null zweiseitiger Ideal von $\mathfrak{W}$, da man

$$\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q}, \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}\Omega_r = \Omega_r\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q},$$

so wie

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{X}_r \subseteq \mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{X}_l \subseteq \mathfrak{Q}$$

hat. Dann ist $\mathfrak{Q}$ gleichfalls dichter Ring aus $\overline{\mathfrak{W}}$-Endomorphismen von $\mathfrak{X}$, (Verg. [7], § 10; oder [6], § 3). Der Satz von Chevalley-Jacobson behauptet noch, dass $\overline{\mathfrak{W}}$ der Kommutator von $\mathfrak{Q}$ ist, wodurch, wie erwünscht, $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{W}}$ ist. Der Divisionsring $\overline{\mathfrak{Q}}$ ist ein Körper, wie man vom Satze 14 ersieht.

10) **Ruckkehr zum Fall der Halbeinfachheit von $\mathfrak{W}$** — Die Überlegungen, die wir eben beendeten, haben diese Folge:

Satz 16: *Bei angenommenem Ring $\mathfrak{X}$, wie im Satze 13 (entweder assoziativ oder nicht, nie aber Nullring), aus der Annahme Ω_r und $\mathfrak{W}$ sind einfach entnimmt man, dass $\mathfrak{X}$ einfache Algebra über Ω_r ist.*

Wir wissen, in der Tat, dass $\overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{Q}} \supseteq \Omega_r$ Körper ist. Dann ist Ω_r, wie kommutativer einfacher Ring, ohne Nullteiler, ein Unterkörper von $\overline{\mathfrak{W}}$. Ausserdem ist $1 \in \overline{\mathfrak{Q}}$ unitärer Operator von $\mathfrak{X}$.

Es ist klar, dass $\mathfrak{X}$ auch Algebra über $\overline{\mathfrak{Q}}$ ist. Sogar in bezug auf $\overline{\mathfrak{Q}}$ ist jedoch, im allgemeinen, eine unendliche Algebra. Wenn es aber $0 \neq V \in \mathfrak{W}$ existiert, dessen in $\mathfrak{X}$

induzierter linearer Transformation endlich über $\overline{\mathfrak{Q}}$ ist, wie die Menge der VV ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{W}$ einfach ist, folgt dann, dass alle Elemente von $\mathfrak{X}$ auch endliche lineare Transformationen induzieren in denselben Bedingungen. Dies geschieht falls $\mathfrak{X}$ eine endliche Algebra über ein Körper $\mathfrak{K}$ ist.

Nun beweisen wir den

Satz 17: *Wenn man $\mathfrak{X}$ nichtassoziativer Ring annimmt, der, als Ω_r-Modul betrachtet, von seinen einfachen Ω_r-Untermoduln, alle Ω_r-isomorphe, erzeugt wird, dann, die Annahme Ω_r und $\mathfrak{W}$ sind einfach, neben der Folgen Ω_r ist Körper und $\mathfrak{X}$ ist einfache Algebra (unendliche, im allgemeinen) über Ω_r, oder über $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{T}}$, zwingt noch $\mathfrak{T}$ genau sein Zentrum als Kommutator zu haben.*

Zunächst einmal, da $\mathfrak{X}$ kein assoziativer Ring ist, ist er auch keiner Nullring. Man kann $\mathfrak{W} = \Omega_r$ nicht haben, weil dies, nach Satz 12, zwingen würde $\mathfrak{X}$ Körper und folglich assoziativer Ring zu sein. So, nach Satz 13, $\mathfrak{X}$ ist einfacher Ring, und, nach Satz 15, Ω_r ist Unterkörper von $\overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{Q}}$. Es existiert andererseits in $\mathfrak{W}$ den Einsendomorphismus, und so hat man $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}$; hieraus des Ausdrucks $\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{S}(\Omega_r, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{X}_l)$ und der Tatsache, dass Ω_r mit $\mathfrak{X}_r$ und $\mathfrak{X}_l$ vertauschbar ist, entnimmt man, dass Ω_r im zentrum $\mathfrak{C}$, von $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}$, enthalten ist. Man hat $\mathfrak{C} \neq (0)$. Der Körper $\mathfrak{C}$ erfüllt die Bedingungen $\Omega_r \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \overline{\mathfrak{Q}}$. Der Kommutator $\overline{\mathfrak{C}}$ ist ein irreduzibler Ring aus Endomorphismen von $\mathfrak{X}$, über $\mathfrak{C}$. Dann sind $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ reziproke Kommutatoren. Bei n gegebenen beliebiegen Elementen (n auch beliebig) von $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{Q}}$-unabhängig, da solche Elemente auch $\mathfrak{C}$-unabhängig sind, es existiert ein Element $A \in \overline{\mathfrak{C}}$, das jene n Elemente auf anderen n beliebigen Elementen von $\mathfrak{X}$

abbildet. Deswegen, $\overline{\mathfrak{C}}$ ist dicht in $\mathfrak{X}$, über $\overline{\mathfrak{Q}}$, wodurch, nach dem Satz von Chevalley-Jacobson, $\overline{\mathfrak{Q}}$ Kommutator von $\overline{\mathfrak{C}}$ ist. Somit, hat man $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{C}$, wie im Satz behauptet wird.

11) **Über die Umkehrung vom Satz 13** — Nach dem wir den Fall der Einfachheit von $\mathfrak{X}$, unter den Bedingungen der Annahmen für $\mathfrak{X}$ und Ω_r des Beginns des Satzes 13, betrachtet haben, wollen wir jetzt, umgekehrt, durch dieselbe Annahmen für $\mathfrak{X}$ und Ω_r, den Fall untersuchen wann $\mathfrak{X}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt: 1) $\mathfrak{X}$ ist Nullring; 2) $\mathfrak{X}$ ist einfacher Ring.

Falls $\mathfrak{X}$ Nullring ist, und, deswegen, $\mathfrak{W} = \Omega_r$ ist, da Ω_r einfach angenommen wird, $\mathfrak{W}$ ist einfach. Wenn aber $\mathfrak{X}$ einfach ist, mit $\mathfrak{X}^2 \neq (0)$, $\mathfrak{W}$ ist dicht in $\mathfrak{X}$ über $\overline{\mathfrak{W}} = \overline{\mathfrak{Q}}$. Ω_r ist ein Körper. Und so geht man aus einer entweder endlichen oder unendlichen einfachen Algebra über Ω_r aus. In genauer Weise kann man beide folgende Sätze schliessen, deren Inhalt sich in ([3], S. 692 und 693) befindet, obwohl die entsprechenden Beweise ganz anders sind als die, die man hier angibt.

Satz 18: *Wenn man eine Algebra des Ranges $n>1$ über $\mathfrak{K}$ hat, dann ist es notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{H}$ einfach ist, dass die entsprechende Transformationenalgebra $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H}_r, \mathfrak{H}_l) = \mathfrak{W}$ auch einfach ist.* Tatsächlich, falls $n>1$, ist $\mathfrak{H}$, als einfache Algebra angenommen, keine Nullalgebra. Man hat aber $\overline{\mathfrak{W}} \supseteq \mathfrak{K}$, und so setzt sich $\mathfrak{W}$ aus den endlichen linearen Transformationen von $\mathfrak{H}$, über $\overline{\mathfrak{W}}$, zusammen; die Dichtheit von $\mathfrak{W}$ zeigt, dass $\mathfrak{W}$ die Gesamtheit der $\overline{\mathfrak{W}}$-Endomorphismen von $\mathfrak{H}$ darstellt, wodurch $\mathfrak{W}$ ein voller Matrizenring in bezug auf $\overline{\mathfrak{W}}$ und, deswegen, ein einfacher Ring ist. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{W}$ einfach ist, der Satz 16 behauptet, dass $\mathfrak{H}$ einfache Algebra über $\mathfrak{K}$ wird.

Satz 19: *Es sei $\mathfrak{H}$ eine Algebra über $\mathfrak{K}$ des Ranges $n>1$. Dann ist es notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathfrak{H}$ einfach ist, dass das Zentrum von $\mathfrak{T}$ ein Körper $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{C}$ reciproke Kommutatoren in $\bar{\mathfrak{H}}$ sind.* Falls $\mathfrak{H}$ einfach ist, dann ist $\mathfrak{W}$ einfach. Der Satz 17 äussert, dass der Kommutator von $\mathfrak{T}$ sein Zentrum $\mathfrak{C}$ ist. Jedoch haben wir $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{K}$, und deshalb ist $\mathfrak{W}$ dichter Ring aus $\mathfrak{C}$-Endomorphismen von $\mathfrak{H}$, und diese ist endlich über $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{W}=\mathfrak{T}$ ist die Gesamtheit solcher Endomorphismen, wodurch, neben $\bar{\mathfrak{T}}=\mathfrak{C}$, auch $\mathfrak{T}=\bar{\mathfrak{C}}$ gilt. Umgekehrt, falls $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{K}$ Körper ist, Zentrum von $\mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{H}$ endliche Algebra über $\mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{C}$ reziproke Kommutatoren sind, dann ist $\mathfrak{T}=\bar{\mathfrak{C}}=\mathfrak{W}$ ein einfacher Ring, wodurch $\mathfrak{H}$, nach dem vorigen Satz, einfache Algebra ist. Der Satz wird hiermit bewiesen.

12) **Über den Begriff einer zentralen Algebra** — Bei gegebenem nicht assoziativem Ringe, die Elemente $s\in\mathfrak{X}$, die Operatoren sind, werden durch die Eigenschaft $E_s^{(r)}\in\bar{\mathfrak{Q}}$ charakterisiert. Sie bilden einen Unterring $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{X}$. $\mathfrak{O}$ ist assoziativ und sein Bild $\mathfrak{O}_r\subseteq\bar{\mathfrak{Q}}$ ist ein assoziativer kommutativer Ring.

Die Menge $\mathfrak{Z}$ der Elemente aus $\mathfrak{O}$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{X}$ vertauschbar sind, nennt man *Zentrum* von $\mathfrak{X}$. $\mathfrak{Z}$ ist ein assoziativer kommutativer Unterring von $\mathfrak{O}$, und es gilt $\mathfrak{Z}_r\subseteq\mathfrak{O}_r\subseteq\bar{\mathfrak{Q}}$. Man kann bemerken, dass sowohl $\mathfrak{Z}_r$ wie auch $\mathfrak{O}_r$ Rechtsideal von $\bar{\mathfrak{Q}}$ sind. Wenn $\mathfrak{X}$ Einselement hat, kann man genauer behaupten, dass $\mathfrak{Z}_r=\bar{\mathfrak{Q}}$ ist, (Verg. [1], § 7). Wie es, in solchem Fall, $\mathfrak{Z}\cong\mathfrak{Z}_r$ gilt, kann man auch sagen, dass das Maximaloperatorbereich das Zentrum von $\mathfrak{X}$ ist.

Nun betrachten wir $\mathfrak{X}$ und sein Operatorbereich Ω_r. Wir wollen Ω_r als kommutativ annehmen. Es verwirklicht sich die Bedingung $\Omega_r\subseteq\bar{\mathfrak{T}}$, die die Vertauschbarkeit von Ω_r charakterisiert. Der Ring $\mathfrak{X}$ nennt man *zentral* über Ω_r, falls Ω_r kommutativ und $\Omega_r=\bar{\mathfrak{Q}}$ ist. Somit:

Satz 20: *Ist $\mathfrak{X}$ zentral über Ω_r, dann sind die Beziehungen $\Omega_r=\bar{\mathfrak{T}}$, $\bar{\mathfrak{T}}=\bar{\mathfrak{Q}}$ erfüllt. Falls $\mathfrak{X}$ Einselement hat, dann und nur dann ist $\mathfrak{X}$ zentral über Ω_r, venn $\mathfrak{Z}=\Omega_r$ ist.*

Nehmen wir $\Omega_r\subseteq\Omega'\subseteq\bar{\Omega}_r$ an. $\mathfrak{X}$ ist im allgemeinen keiner Ring in bezug auf Ω', nur aber in bezuf auf $\Omega'\cap\mathfrak{Q}$. Die Hypothese $\Omega'=\Omega'\cap\bar{\mathfrak{Q}}$ ist mit $\Omega'\subseteq\bar{\mathfrak{Q}}$ oder noch, wenn die Gleichheit $\bar{\mathfrak{T}}=\bar{\Omega}_r\cap\bar{\mathfrak{Q}}$ bemerkt wird, mit $\Omega'\subseteq\bar{\mathfrak{T}}$ gleichgültig. Damit ist bewiesen:

Satz 21: *Wenn man $\Omega_r\subseteq\Omega'\subseteq\bar{\Omega}_r$ hat, dann ist es notwendig und hinreichend dafür, dass Ω' Operatorbereich von $\mathfrak{X}$ ist, dass man $\Omega'\subseteq\bar{\mathfrak{T}}$ hat.*

Kehren wir zu der einfachen Algebra des Satzes 19 zurück. Wegen der Annahme $n>1$, ist $\mathfrak{H}$ keine Nullalgebra. Die Beziehung $\mathfrak{H}^2=\mathfrak{H}$ hat die Vertauschbarkeit von $\bar{\mathfrak{Q}}$ zu Folge; und somit $\bar{\mathfrak{Q}}=\bar{\mathfrak{T}}=\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{K}$. Es gelten folgende Gleichheiten:

$$n=(\mathfrak{H}/\mathfrak{K})=(\mathfrak{H}/\mathfrak{C})(\mathfrak{C}/\mathfrak{K})=st,$$

$$(\mathfrak{H}/\mathfrak{C})=s, \qquad (\mathfrak{T}/\mathfrak{C})=(\bar{\mathfrak{C}}/\mathfrak{C})=s^2.$$

Als Algebra des Ranges s über $\mathfrak{C}$, ist $\mathfrak{H}$ einfach und zentral, wie man aus der Definition von zentraler Algebra ersieht. Es gilt folgender

Satz 22: *Die einfache Algebra $\mathfrak{H}$, des Ranges $n > 1$ über $\mathfrak{K}$, ist einfach und zentral über ihr Maximaloperatorbereich, das reziproker Kommutator ihre Transformationen-algebra ist. Wenn man $\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{T} = \overline{\overline{\mathfrak{C}}} \simeq \mathfrak{C}_s$* (1) *setzt, dann ist es $n = st$, mit $t = (\mathfrak{C}/\mathfrak{K})$.*

Instituto de Alta Cultura, Centro de Matemáticas Aplicadas ao Estudo de Energia Nuclear e Seminário de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa.

---

(1) $\mathfrak{C}_s$ bedeutet den vollen Matrizenring, aus Matrizen des Grades s, in bezug auf den Körper $\mathfrak{C}$.