MATRIZES CONSTANTES E PERIÓDICAS

POR

A. ALMEIDA COSTA, (LISBOA)

1) **Introdução.** Os raciocínios que vão ser feitos representam *ùnicamente* algumas observações ao Capítulo I da dissertação do Dr. Veiga de Oliveira sobre «Expoentes característicos — Aplicação à estabilidade», publicada nesta *Revista,* no vol. II, págs. 201 a 288, e no vol. III, págs. 5 a 60, do ano de 1952. Vamos manter-nos, por consequência, dentro dos moldes simples usados naquela dissertação. As citações do trabalho do Dr. Veiga de Oliveira serão feitas utilizando, por exemplo, a abreviatura [1, I, 3], (na qual o primeiro algarismo se refere pròpriamente ao trabalho), com o significado de [Cfr. 1, Cap. I, § 3].

No final, daremos outras indicações bibliográficas, relativas aos números entre parêntesis recto citados no texto.

A terminologia e as notações serão, regra geral, as mesmas que as de [1]. Todavia, para representar vectores, preferimos usar letras góticas e escrever $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \cdots$, em vez de $\bar{x}, \bar{y}, \cdots$.

2) **A equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$.** Dada a equação

$$\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}, \qquad A = (a_{ik}), \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n), \qquad (1)$$

supor-se-á $A = A(t)$ uma matriz quadrada de ordem n, com elementos complexos, funções da variável real t. A um vector inicial $\mathfrak{x}_0$, tomado para $t=0$, a equação faz corresponder um vector $\mathfrak{x}(t)$, função de t. A correspondência $\mathfrak{x}_0 \to \mathfrak{x}$ é um *automorfismo* do espaço vectorial a n dimensões, pelo facto de serem as mesmas, em cada instante t, as relações de dependência linear entre os vectores $\mathfrak{x}_0$ e os vectores $\mathfrak{x}(t)$. Se pusermos, por consequência,

$$\mathfrak{x}(t) = R(t)\,\mathfrak{x}_0, \tag{2}$$

a matriz quadrada $R(t)$, que define aquele automorfismo, tem um determinante $|R(t)| \neq 0$, [1, I, 1]. Por derivação de (2), tendo em conta que $\mathfrak{x}_0$ é arbitrário, conclui-se

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{R}\,\mathfrak{x}_0 = A\,\mathfrak{x} = AR\,\mathfrak{x}_0, \qquad \dot{R} = AR. \tag{3}$$

Vê-se que as colunas da matriz R representam soluções de (1). Trata-se de soluções linearmente independentes, que correspondem aos vectores iniciais $\mathfrak{u}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, \mathfrak{u}_n = (0, \cdots, 0, 1)$, como se reconhece tendo em conta o facto de ser $R(0) = E =$ matriz unidade. A matriz R chama-se, por isso, *matriz fundamental unitária* de (1).

Se $X(t)$ é outra matriz satisfazendo à última relação (3), a igualdade (2) mostra que se tem $X(t) = R(t) X_0$, com $X_0 = X(0)$. $X(t)$ diz-se *matriz fundamental* de (1), se $|X_0| \neq 0$, [1, I, 3].

Definidas as matrizes fundamentais, vê-se que, sendo X e X_1 duas tais matrizes é $XX_0^{-1} = X_1 X_1^{-1}(0) = R(t)$, de sorte que $X_1 = XC$, onde C é uma matriz constante. Inversamente, supondo $X_1 = XC$, com X matriz fundamental, tem-se $X_1 = R(t) X_0 C = R(t) X_1(0)$, o que mostra ser X_1 uma matriz fundamental, sob a hipótese $|X_1(0)| \neq 0$ ou $|C| \neq 0$, [1, I, 3].

3) **A equação adjunta de** (1). Da igualdade $\mathfrak{x} = R(t)\,\mathfrak{x}_0$ deduz-se $R^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$. Deste modo, tem-se $\dot{R}^{-1}\mathfrak{x} + R^{-1}\dot{\mathfrak{x}} = \dot{R}^{-1}\mathfrak{x} + R^{-1}A\,\mathfrak{x} = 0$. Daqui se conclui $\dot{R}^{-1} = -R^{-1}A$. Representando por M^* a matriz conjugada da transposta duma matriz M, a relação anterior dá

$$\frac{d(R^{-1})^*}{dt} = -A^*(R^{-1})^*. \tag{4}$$

A equação

$$\dot{\mathfrak{y}} = -A^*\mathfrak{y} \tag{5}$$

diz-se *adjunta* de (1). Inversamente, (1) é adjunta de (5). O resultado (4) prova que $(R^{-1})^*$ é a matriz fundamental unitária de (5), visto ser $(R^{-1}(0))^* = E$, [1, I, 3]. Uma matriz fundamental Y^*, de (5), tem a forma $Y^* = (R^{-1})^* C^*$, onde C^* é matriz constante. Então é

$$Y(t)\,\mathfrak{x} = CR^{-1}(t)\,\mathfrak{x} = C\,\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_{00} = \text{vector constante}.$$

Consequentemente, dada uma matriz fundamental Y^*, de (5), o integral geral de (1) pode tomar o aspecto $Y\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{00}$.

Designemos por $x_1, \cdots, x_n$ as componentes dum vector $\mathfrak{x}$ na base $\mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_n$. Representando por $\bar{x}_i$ o complexo conjugado de x_i, admitamos que o espaço vectorial dos vectores $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \cdots$ é um *espaço unitário* de métrica hermiteana canónica, [2, Cap. X], $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i$. Então, o produto escalar de dois vectores $\mathfrak{y}$ e $\mathfrak{x}$ tem a forma $\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$. Poremos, para o representar, $\mathfrak{y}^* \cdot \mathfrak{x} = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$.

Vê-se que, para toda a solução $\mathfrak{y}(t)$, de (5), é constante o produto escalar $\mathfrak{y}^* \cdot \mathfrak{x}$, onde $\mathfrak{x}$ é uma solução qualquer de (1). É válida também a afirmação inversa, visto que, sendo $\mathfrak{y}^* \cdot \mathfrak{x} =$ constante escalar $= a$, podemos escrever, utilizando uma matriz fundamental X, de (1), e designando por $y_1, \cdots, y_n$ as componentes de $\mathfrak{y}(t)$,

$$(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n) \cdot X = \mathfrak{y}^*(t) \cdot X = (\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n), \tag{6}$$

onde $(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ e $(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n)$ são matrizes com uma linha, a última das quais com elementos que são os complexos conjugados das componentes dum vector constante $\mathfrak{a}$. De (6) tira-se

$$\mathfrak{y}^*(t) \cdot RX_0 = (\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n), \qquad \mathfrak{y}^*(t) R = (\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n) \cdot X_0^{-1},$$

e, portanto,

$$R^* \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = (X_0^{-1})^* \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathfrak{A} = \text{vector constante},$$

ou seja ainda

$$\mathfrak{y}(t) = (R^*)^{-1} \mathfrak{A} = (R^{-1})^* \mathfrak{A},$$

o que mostra ser $\mathfrak{y}(t)$ solução de (5), com o valor inicial $\mathfrak{A}$. O facto de $\mathfrak{A}$ ser independente da solução fundamental X prova que deve ter-se $(X_0^{-1})^* \mathfrak{a} = (X_0^{-1})^* X^* \mathfrak{y} = (X_1^{-1}(0))^* X_1^* \mathfrak{y}$, onde X_1 é outra matriz fundamental. Reconhece-se, como no § anterior, a relação $X_1 = XC$, onde C é uma matriz constante.

4) **Mudança de variável.** A igualdade (2) mostra que, pondo em (1) $\mathfrak{y} = R^{-1}(t)\mathfrak{x}$, a equação transformada é $\dot{\mathfrak{y}} = 0$. O mesmo resultado se obtém, pondo $\mathfrak{y} = X^{-1}(t)\mathfrak{x}$, se X for outra matriz fundamental de (1). Duma maneira geral, porém, a transformação $\mathfrak{y} = T(t)\mathfrak{x}$, suposta T invertível, leva a $\dot{\mathfrak{y}} = \dot{T}\mathfrak{x} + TA\mathfrak{x} = (\dot{T} + TA)\mathfrak{x} = (\dot{T} + TA)T^{-1}\mathfrak{y}$, de

sorte que a equação transformada de (1), a saber

$$\dot{\mathfrak{y}} = (\dot{T}T^{-1} + TAT^{-1})\mathfrak{y}, \tag{7}$$

entra no tipo $\dot{\mathfrak{y}} = B(t)\mathfrak{y}$, com $B \neq 0$.

No caso particular de $T = C$ ser constante, obtém-se simplesmente

$$\dot{\mathfrak{y}} = CAC^{-1}\mathfrak{y}. \tag{8}$$

À matriz fundamental unitária $R(t)$ corresponde aqui a matriz fundamental $Y(t) = CR(t)$, de (8). A matriz fundamental unitária de (8) é, assim, $R_1(t) = CR(t)C^{-1}$.

Imaginemos duas transformações lineares sucessivas $\mathfrak{y} = T(t)\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z} = V(t)\mathfrak{y}$. A equação em $\mathfrak{z}$ pode obter-se de (1) pondo $\mathfrak{z} = VT\mathfrak{x}$, pelo que será $\dot{\mathfrak{z}} = [(\dot{V}T + V\dot{T})T^{-1}V^{-1} + VTAT^{-1}V^{-1}]\mathfrak{z}$.

5) **Caso de A constante.** Se A, na equação (1), é uma matriz constante, ela define um *endomorfismo* fixo do espaço vectorial. O endomorfismo será um automorfismo, se $|A| \neq 0$. Supondo $|A| = 0$, há vectores $\mathfrak{x}_0 \neq 0$ tais que $A\mathfrak{x}_0 = 0$, os quais constituem um subespaço a k dimensões, chamado *núcleo* do endomorfismo. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 =$ const. é, então, uma *solução de equilíbrio* de (1). Podemos fixar o seguinte, [1, I, 7]:

Teorema 1. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, onde A se supõe uma matriz constante com um número característico nulo, há k soluções de equilíbrio linearmente independentes da referida equação, se o núcleo do endomorfismo definido por A tiver k dimensões.*

Corolário 1. *Se for $|A| \neq 0$, a solução nula é a única solução de equilíbrio.*

Suponhamos, em seguida, que A tem um número característico $\lambda \neq 0$. Será, por hipótese, para um certo vector fixo $\mathfrak{x}_0$, $(A-\lambda)\mathfrak{x}_0=0$. A mudança de variável $\mathfrak{y}=e^{-\lambda t}\mathfrak{x}=e^{-\lambda t}E\mathfrak{x}$ dá à transformada (7) o aspecto

$$\dot{\mathfrak{y}}=(-\lambda e^{-\lambda t}e^{\lambda t}E+e^{-\lambda t}Ae^{\lambda t}E)\mathfrak{y}=(A-\lambda E)\mathfrak{y}.$$

Então $\mathfrak{y}=\mathfrak{x}_0$ é uma solução de equilíbrio desta equação, enquanto que $\mathfrak{x}=e^{\lambda t}\mathfrak{x}_0$ é solução de (1). Assim:

Teorema 2. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}}=A\mathfrak{x}$, onde A se supõe uma matriz constante com um número característico $\lambda\neq 0$, há k soluções linearmente independentes da referida equação que têm a forma $e^{\lambda t}\mathfrak{x}_0$, se o núcleo do endomorfismo definido por $A-\lambda E$ tiver k dimensões.* Se não excluirmos neste enunciado o caso $\lambda=0$, o teorema 1 entra nesta proposição.

A solução $\mathfrak{x}=e^{\lambda t}\mathfrak{x}_0$ reduz-se inicialmente a $\mathfrak{x}_0$. Será, por isso, $\mathfrak{x}=R(t)\mathfrak{x}_0=e^{\lambda t}\mathfrak{x}_0$, facto que estabelece este

Teorema 3. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}}=A\mathfrak{x}$, onde A se supõe uma matriz constante, se $\mathfrak{x}=R\mathfrak{x}_0$ for a sua solução expressa no valor inicial $\mathfrak{x}_0$, ao número característico λ, de A, cujo vector próprio é $\mathfrak{x}_0$, correspondem, para $R(t)$, o número característico $e^{\lambda t}$ e o mesmo vector próprio,* [1, I, 7].

Corolário 2. *A equação $\dot{\mathfrak{x}}=A\mathfrak{x}$, com A constante, tem uma solução periódica, de período $\frac{2\pi}{\alpha}$, se A tiver o número característico $\lambda=i\alpha$,* [1, I, 7].

O teorema 3 pode precisar-se sob esta forma:

Teorema 4. *Nas condições do teorema 3, quanto a A e a R, se os números característicos de A são $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, os números característicos de R são $e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$, com os mesmos graus de multiplicidade daqueles e com os mesmos vectores próprios,* [1, I, 7]. Designemos por J_A a *reduzida de* Jordan

da matriz A, [3, pág. 126]. Para evitarmos complicações de cálculo e até de expressão, vamos admitir que J_A tem o aspecto a seguir, no qual figuram apenas dois blocos diagonais, observando, porém, desde já, que, em raciocínios futuros, ao falarmos de reduzida de Jordan, esta se suporá composta dum número qualquer de blocos:

$$J_A=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix} & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}\lambda_2 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Se D for uma matriz regular tal que $D^{-1}AD=J_A$, façamos na equação (1) a mudança de variável $\mathfrak{x}=D\mathfrak{y}$. A equação transformada será

$$\dot{\mathfrak{y}}=D^{-1}AD\mathfrak{y}=J_A\mathfrak{y}. \tag{10}$$

Sob forma desenvolvida, estamos em presença do seguinte sistema diferencial linear e homogéneo:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\lambda_1 y_1+y_2, & \frac{dy_5}{dt}&=\lambda_2 y_5+y_6,\\ \frac{dy_2}{dt}&=\lambda_1 y_2+y_3, & \frac{dy_6}{dt}&=\lambda_2 y_6+y_7,\\ \frac{dy_3}{dt}&=\lambda_1 y_3+y_4, & \frac{dy_7}{dt}&=\lambda_2 y_7.\\ \frac{dy_4}{dt}&=\lambda_1 y_4, & & \end{aligned}$$

Trata-se dum sistema de integração imediata, cujo integral geral, expresso nos valores iniciais y_i^0, dos y_i, toma o aspecto

$$y_1=\left(y_4^0\frac{t^3}{3\,!}+y_3^0\frac{t^2}{2\,!}+y_2^0\frac{t}{1}+y_1^0\right)e^{\lambda_1 t},$$

$$y_2=\left(y_4^0\frac{t^2}{2\,!}+y_3^0\frac{t}{1}+y_2^0\right)e^{\lambda_1 t},\quad y_5=\left(y_7^0\frac{t^2}{2\,!}+y_6^0\frac{t}{1}+y_5^0\right)e^{\lambda_2 t}$$

$$y_3=\left(y_4^0\frac{t}{1}+y_3^0\right)e^{\lambda_1 t},\qquad y_6=\left(y_7^0\frac{t}{1}+y_6^0\right)e^{\lambda_2 t},$$

$$y_4=y_4^0 e^{\lambda_1 t},\qquad y_7=y_7^0 e^{\lambda_2 t}.$$

Pelo facto de se ter

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=R_1(t)\begin{bmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix},$$

com

$$R_1(t)=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t}\frac{t}{1} & e^{\lambda_1 t}\frac{t^2}{2\,!} & e^{\lambda_1 t}\frac{t^3}{3\,!} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t}t & e^{\lambda_1 t}\frac{t^2}{2\,!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t}t & e^{\lambda_2 t}\frac{t^2}{2\,!} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t}t \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{11}$$

e de esta matriz $R_1(t)$ ser equivalente, qualquer que seja t, à matriz, [1, Apêndice, 8],

$$M_{R_1(t)}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{\lambda_2 t} & 1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 1 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

vê-se claramente que se tem $J_{R_1(t)}=M_{R_1(t)}$ e que os números característicos de $R_1(t)$ são $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$, etc., respectivamente com os graus de multiplicidade de λ_1, λ_2, etc., relativamente a A. O resultado não depende do caso particular em causa, pelo que o teorema ficará demonstrado, se se verificar agora que os números característicos de $R_1(t)$, que é a matriz fundamental unitária de (10), são os mesmos que os de $R(t)$. Isso resulta imediatamente do raciocínio que se seguiu à equação (8), segundo o qual se tem $R_1(t)=D^{-1}R(t)D$.

6) **Aplicações.** As matrizes fundamentais $X(t)$ das equações do tipo (1), supondo A constante, podem caracterizar-se, de entre as matrizes regulares, funções de t, como aquelas para as quais $\dot{X}X^{-1}=C=$ matriz constante. Ora, qualquer que seja a matriz da forma (11), designada por $S(t)$ em [1, I, 6], ela é sempre matriz fundamental unitária dum sistema (10), que entra no tipo (1). Assim, tem lugar este

Teorema 5. *Se S for uma matriz do tipo* (11), *o produto $\dot{S}S^{-1}$ é uma matriz constante, que tem a forma normal de* Jordan. *Inversamente, se $\dot{X}X^{-1}=C=const.$, existe uma matriz invertível constante H tal que $H^{-1}X(t)H=S(t)$ tem o tipo* (11). Quanto à afirmação inversa, escrevamos $\dot{\mathfrak{x}}=C\mathfrak{x}$ e efectuemos a transformação $\mathfrak{x}=H\mathfrak{y}$, com a hipótese $H^{-1}CH=J_C$. Então, se $Y(t)$ for uma matriz fundamental da equação em $\mathfrak{y}$ tal que $Y(0)=H^{-1}$, vê-se que $X(t)=HY(t)=HR_1(t)H^{-1}=HS(t)H^{-1}$.

As matrizes S gozam de outra propriedade que convém salientar. Para isso façamos uma observação geral.

Dada a equação (1), com A constante, se $X(t)$ for uma matriz fundamental, $X(t+h)$ é também uma matriz fundamental. Nesse caso, partindo de $S(t)$, considerada como matriz fundamental unitária [claramente, dum sistema (10)], ter-se-á $S(t+h)=R_1(t+h)=R_1(t)R_1(h)=S(t)S(h)$. Assim:

Teorema 6. *Uma matriz S, do tipo* (11), *satisfaz à igualdade $S(t+h)=S(t)\cdot S(h)$, qualquer que seja h.*

Uma matriz fundamental $X(t)$, de (1), com A constante, diz-se *principal*, se, para todo o valor de h, for $X(t+h)=X(t)R_1(h)$, onde $R_1(h)$ se deduz da matriz bem determinada (11). Por exemplo, a matriz $R_1(t)$ é principal para o sistema (10). Quanto ao sistema (1), se $X(t)$ for principal, será $X(t+h)=R(t+h)X_0=R(t)R(h)X_0=$ $=X(t)R_1(h)=R(t)X_0R_1(h)$, o que acarreta $R(h)X_0=$ $=X_0R_1(h)$, e, portanto, $X_0^{-1}R(t)X_0=R_1(t)$. Inversamente, dada uma matriz fundamental $X(t)$ tal que $X_0^{-1}R(t)X_0=$ $=R_1(t)$, vê-se que $X(t+h)=X(t)R_1(h)$. Assim:

Teorema 7. *É condição necessária e suficiente, para que $X(t)$ seja matriz fundamental principal do sistema* (1), *com A constante, que o valor inicial X_0, de $X(t)$, reduza $R(t)$ à forma* (11), *por meio da operação $X_0^{-1}R(t)X_0$.*

Pelo que vimos no final do § anterior, podemos afirmar que é matriz fundamental principal toda a matriz fundamental cujo valor inicial X_0 verifica a relação $X_0^{-1}AX_0=J_A$, precisamente porque é, então, $X_0^{-1}R(t)X_0=$ $=R_1(t)$. Vamos provar que aquela relação é característica, o que apenas exige se prove ter ela lugar sempre que $X(t)$ é principal. Ora efectuemos, em $\dot{\mathfrak{x}}=A\mathfrak{x}$, a transformação $\mathfrak{x}=X_0\mathfrak{y}$. Vem $\dot{\mathfrak{y}}=X_0^{-1}AX_0\mathfrak{y}$. Por outro lado, porém, sendo $X_0^{-1}R(t)X_0=R_1(t)$ a matriz fundamental unitária da equação em $\mathfrak{y}$, encontramos $\mathfrak{y}=R_1(t)\mathfrak{y}_0$, $\dot{\mathfrak{y}}=\dot{R}_1(t)\mathfrak{y}_0=\dot{R}_1(t)R_1^{-1}(t)\mathfrak{y}=F\mathfrak{y}$, em que F é constante. Como $F=\dot{R}_1(0)R_1^{-1}(0)=\dot{R}_1(0)$, vê-se que F tem a forma normal de Jordan de A, pois $X_0^{-1}AX_0=\dot{R}_1(0)$. Podemos fixar o

Teorema 8. *É condição necessária e suficiente, para que $X(t)$ seja matriz fundamental principal do sistema* (1), *com A constante, que o valor inicial X_0, de $X(t)$, reduza A à forma normal de* Jordan, [1, I, 7].

Corolário 3. *Nas condições do teorema anterior, toda a matriz fundamental principal $X(t)$ é da forma $X(t)=$ $=X_0R_1(t)$. A expressão geral das matrizes fundamentais principais $X_1(t)$ obtém-se de uma delas, $X(t)$, escrevendo $X_1(t)=CX(t)$, onde a matriz constante C comuta com $R(h)$.*

De facto, sendo $X=RX_0$ e $X_0^{-1}RX_0=R_1$, vem imediatamente $X=X_0R_1$. Para outra matriz fundamental principal $X_1=X_1(0)R_1=X_1(0)X_0^{-1}X(t)=CX(t)$, vê-se que, sendo $C=X_1(0)X_0^{-1}$, é também

$$CR(h)=X_1(0)R_1(h)X_0^{-1}=X_1(h)X_0^{-1}=$$
$$=R(h)X_1(0)X_0^{-1}=R(h)C.$$

Ultimaremos este § com uma propriedade interessante das matrizes fundamentais unitárias, a qual resultará das duas proposições que vão seguir-se.

Teorema 9. *Dada a equação* (1), *com A constante, se $X(t)$ é uma matriz fundamental, tem-se $Z=X^{-1}AX=$ $=$ const.*, [1, I, 7]. Na verdade é $\dot{Z}=\dot{X}^{-1}AX+X^{-1}A\dot{X}=$ $=-X^{-1}\dot{X}X^{-1}AX+X^{-1}A^2X=-X^{-1}AXX^{-1}AX+$ $+X^{-1}A^2X=0$.

Corolário 4. *Dada uma matriz $R_1(t)$, do tipo* (11), *são comutáveis as duas matrizes $R_1^{-1}(t)$ e $\dot{R}_1(t)$.* Já sabemos que $\dot{R}_1(t)R_1^{-1}(t)=J_A$. O teorema anterior, aplicado a uma matriz fundamental principal $X_0R_1(t)$, dá

$$R_1^{-1}(t)X_0^{-1}AX_0R_1(t)=R_1^{-1}(t)J_AR_1(t)=R_1^{-1}(t)\dot{R}_1(t)=\text{const.}$$

O valor desta última matriz constante é também $J_A=$

$= \dot{R}_1(0)$, de sorte que, como se afirmou, $\dot{R}_1(t) R_1^{-1}(t) = R_1^{-1}(t) \dot{R}_1(t) = J_A$.

Eis agora a propriedade a que nos referimos:

Teorema 10. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, com A constante, se ela é resolvida pondo $\mathfrak{x} = R\mathfrak{x}_0$, onde $\mathfrak{x}_0$ é o valor inicial de $\mathfrak{x}$, a matriz quadrada R satisfaz à relação $R^{-1}(t)\dot{R}(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) = A$.* Para o verificar, façamos, na equação dada, a transformação $\mathfrak{x} = X_0\mathfrak{y}$, que reduz a transformada à forma $\dot{\mathfrak{y}} = J_A\mathfrak{y}$. Então tem-se, sucessivamente: $R^{-1}\dot{R} = X_0 R_1^{-1} X_0^{-1} \cdot X_0 \dot{R}_1 X_0^{-1} = X_0 \dot{R}_1 R_1^{-1} X_1^{-1} = X_0 \dot{R}_1 X_1^{-1} \cdot X_0 R_1^{-1} X_0^{-1} = \dot{R}R^{-1}$.

7) **Caso de A periódica.** Se A, na equação (1), é uma matriz periódica, de período τ, tem-se $A(t+\tau) = A(t)$. Supondo $X(t)$ uma matriz fundamental, será igualmente $X(t+\tau)$ uma matriz fundamental. Escrevendo $X(t+\tau) = X(t)M_X$, a matriz constante M_X diz-se matriz *monodrómica* relativa a X, [1, I, 4]. Observando que se tem $X(\tau) = X_0 M_X = R(\tau)X_0$, é imediata a igualdade

$$M_X = X_0^{-1} R(\tau) X_0,$$

que contém $R(\tau)$ como caso particular.

É clara a seguinte proposição:

Teorema 11. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, onde A se supõe uma matriz periódica, a mudança de variável $\mathfrak{y} = B\mathfrak{x}$, com B constante, faz passar da matriz fundamental $X(t)$ à matriz fundamental $Y(t) = BX(t)$ e da matriz monodrómica M_X à matriz monodrómica $M_Y = M_X$.*

Em virtude de (12), porém, M_X varia com X. Se X_1 for outra matriz fundamental, será também $X_1(0) M_{X_1} X_1^{-1}(0) = X_0 M_X X_0^{-1} = R(\tau)$, donde se tira $M_{X_1} = C M_X C^{-1}$, com C constante. Escolhamos $X(t)$ por forma que M_X tome o aspecto $R_1(\tau)$, indicado em (11), § 5, e deduzido a partir de $R(\tau)$. Vê-se que é, então, $X(t+\tau) = X(t)R_1(\tau)$, o que, à semelhança do que aconteceu no § 6, leva a designar $X(t)$ por matriz fundamental *principal*. Claramente que, se designarmos por $m_1, \cdots, m_n$ os números característicos de qualquer matriz monodrómica, podemos escrever sempre $m_i = e^{\lambda_i \tau}$, pondo $\lambda_i = \frac{1}{\tau}\log m_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$. Os números λ_i chamam-se *expoentes característicos* das referidas matrizes.

Da definição dada de matriz principal, tendo em conta (12), conclui-se:

Teorema 12. *É condição necessária e suficiente, para que $X(t)$ seja matriz fundamental principal do sistema (1), com A periódica, que o valor inicial X_0, de $X(t)$, reduza $R(\tau)$ à forma (11), por meio da operação $X_0^{-1} R(\tau) X_0$.*

O teorema anterior fica em correspondência com o teorema 7 do § anterior. O corolário 3 sugere este outro enunciado:

Teorema 13. *Dada a equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, em que A é uma matriz periódica, de período τ, uma matriz fundamental principal toma o aspecto $X(t) = T(t)S(t)$, onde $T(t)$ é uma matriz invertível periódica, de período τ, tal que $T(0) = X_0$ e $S(t) = R_1(t)$ tem o tipo* (11). De facto, escrevendo $X(t) = X(t)S^{-1}(t) \cdot S(t)$ e pondo $T(t) = X(t)S^{-1}(t)$, vê-se que $T(0) = X_0$. Apenas resta ver que $T(t)$ é uma matriz periódica, de período τ. O resultado estabelecido no teorema 6 permite escrever $T(t+\tau) = X(t+\tau)S^{-1}(t+\tau) = X(t) \cdot R_1(\tau) R_1^{-1}(\tau) R_1^{-1}(t) = X(t) S^{-1}(t) = T(t)$ e a demonstração fica feita, [1, I, 6].

A expressão geral das matrizes fundamentais principais $X_1(t)$ obtém-se de uma delas, $X(t)$, escrevendo

$X_1(t) = \Theta(t) X(t)$, onde $\Theta(t)$ é uma matriz periódica de período τ. Basta ter em conta as relações $X_1 = T_1 S$, $X = TS$, para se deduzir $X_1 = T_1 T^{-1} X = \Theta X$.

Fazendo agora em $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$ a transformação $\mathfrak{x} = X(t)\mathfrak{z}$, em que $X(t)$ é principal, obtém-se $\dot{\mathfrak{z}} = 0$. Em seguida, pondo $\mathfrak{y} = S(t)\mathfrak{z}$, vem $\dot{\mathfrak{y}} = \dot{S}(t)\mathfrak{z} = \dot{S}(t) S^{-1}\mathfrak{y} = B\mathfrak{y}$, onde B é constante. O conjunto das duas transformações equivale à transformação $\mathfrak{x} = X(t) S^{-1}\mathfrak{y} = T(t)\mathfrak{y}$.

Quando for possível transformar a equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, em que $A \neq 0$ é periódica, por uma relação $\mathfrak{x} = V(t)\mathfrak{y}$, por forma que a equação transformada seja $\dot{\mathfrak{y}} = C\mathfrak{y}$, em que $C \neq 0$ é constante, diz-se que (1) é uma *equação redutível*, [*Liapounoff*]. Tem lugar, assim, o seguinte

TEOREMA 14. *A equação $\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x}$, dos teoremas deste §, é uma equação redutível, por via de uma transformação $\mathfrak{x} = T(t)\mathfrak{y}$ com coeficientes periódicos,* [4, pág. 515].

BIBLIOGRAFIA

[1] F. VEIGA DE OLIVEIRA, *Expoentes característicos — Aplicação à estabilidade*, conforme a citação do § 1;

[2] A. ALMEIDA COSTA, *Sistemas hipercomplexos e representações*, Porto, 1948;

[3] O. SCHREIER e E. SPERNER, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II Band, Leipzig, 1935;

[4] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tome II, Paris, 1925.

NOTA: — A esta bibliografia deve juntar-se a que é indicada em [1, pág. 142].

SEMINÁRIO DE MATEMÁTICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA, NOVEMBRO DE 1953.